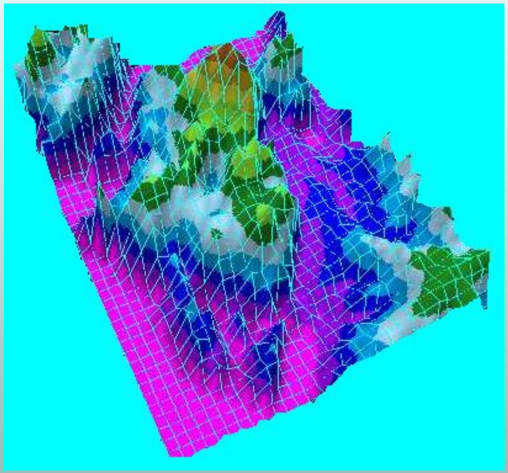
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

GEOESTADÍSTICA APLICADA



Tema: Funciones Aleatorias

Instructores:
Dr. Martín A. Díaz Viera (*mdiazv@imp.mx*)
Dr. Ricardo Casar González (*rcasar@imp.mx*)

2009

Contenido

- Función Aleatoria (FA)
- Variable regionalizada
- Función de distribución de una FA
- Momentos de una FA
- Estacionaridad de una FA
- Clasificación de las FA según su grado de estacionaridad
- FA estacionarias de segundo orden
- Funciones aleatorias intrínsecas
- Funciones aleatorias no estacionarias

Función Aleatoria

- Si a cada punto $\underline{x}$ que pertenece a un dominio Ω en el espacio le hacemos corresponder una variable aleatoria **Z**, entonces el conjunto de variables aleatorias espacialmente distribuidas será una ***función aleatoria*** **Z**($\underline{x}$).
- Ejemplo: La distribución espacial de las facies o la porosidad en un yacimiento.

Variable regionalizada

- Al tomar una muestra de una función aleatoria, a la que llamaremos realización, se obtendrá una función espacial discreta la cual constituye una variable regionalizada.
- Es decir una realización de una función aleatoria es una ***variable regionalizada*** .

Función de distribución de una FA

- Sea una función aleatoria $\mathbf{Z}(\underline{x})$ definida en una región Ω, entonces el vector aleatorio

$$\left\{Z\left(\underline{x}_1\right), Z\left(\underline{x}_2\right), \ldots, Z\left(\underline{x}_n\right)\right\}$$

- se caracteriza por su función de distribución de probabilidad n-variada:

$$F_{Z(\underline{x}_1),Z(\underline{x}_2),\ldots,Z(\underline{x}_n)}\left(z_1, z_2, \ldots, z_n\right) =$$

$$= \Pr\left[Z\left(\underline{x}_1\right) \leq z_1, Z\left(\underline{x}_2\right) \leq z_2, \ldots, Z\left(\underline{x}_n\right) \leq z_n\right]$$

Función de distribución de una FA

- El conjunto de todas las distribuciones para todo valor de n y para cualquier selección de puntos en Ω constituye la ***ley espacial de probabilidad*** de la función aleatoria.
- Esta función en la práctica es imposible de determinar y sólo se puede esperar inferir los primeros momentos de la distribución de la FA $\mathbf{Z}(\underline{x})$.

Momentos de una FA

- Momento de primer orden
- Conocido como ***valor medio*** o ***media*** de **Z**($\underline{x}$) está definido como:

$$m\left(\underline{x}\right) = E\left[Z\left(\underline{x}\right)\right]$$

Momentos de una FA

- **Momentos de segundo orden**
- La ***varianza*** de **Z**($\underline{x}$) está definida como:

$$\sigma^2\left(\underline{x}\right)=Var\left[Z\left(\underline{x}\right)\right]=E\left[\left\{Z\left(\underline{x}\right)-m\left(\underline{x}\right)\right\}^2\right]$$

- La ***covarianza*** de **Z**($\underline{x}$) está definida como:

$$C\left(\underline{x}_i,\underline{x}_j\right)=E\left[\left\{Z\left(\underline{x}_i\right)-m\left(\underline{x}_i\right)\right\}\left\{Z\left(\underline{x}_j\right)-m\left(\underline{x}_j\right)\right\}\right]$$

Momentos de una FA

- **Momentos de segundo orden**
- El ***semivariograma*** de **Z**($\underline{x}$) está definido como:

$$2\gamma\left(\underline{x}_i, \underline{x}_j\right) = Var\left[Z\left(\underline{x}_i\right) - Z\left(\underline{x}_j\right)\right]$$

$$\gamma\left(\underline{x}_i, \underline{x}_j\right) = \frac{1}{2} E\left[\left\{Z\left(\underline{x}_i\right) - Z\left(\underline{x}_j\right)\right\}^2\right]$$

- También conocido como función de semivarianzas o variograma

Estacionaridad de una FA

Se dice que una función aleatoria es ***estrictamente estacionaria*** si su función de distribución de probabilidad es invariante a cualquier traslación respecto a un vector $\underline{h}$.

Pero resulta práctico limitar la hipótesis de estacionaridad a los primeros momentos.

Clasificación de las FA según su grado de estacionaridad

- FA estacionarias de segundo orden
- FA aleatorias intrínsecas
- Funciones aleatorias no estacionarias

FA estacionarias de segundo orden

Se dice que una FA es ***estacionaria de segundo orden*** si sus momentos de primer y segundo orden no dependen de la posición, es decir

$$E\left[Z\left(\underline{x}\right)\right]=m \quad \text{y} \quad Var\left[Z\left(\underline{x}\right)\right]=\sigma^{2} \quad \forall \underline{x}$$

$$C\left(\underline{h}\right)\equiv C\left(\underline{x}+\underline{h},\underline{x}\right)=E\left[Z\left(\underline{x}+\underline{h}\right)Z\left(\underline{x}\right)\right]-m^{2}$$

$$\gamma\left(\underline{h}\right)\equiv \gamma\left(\underline{x}+\underline{h},\underline{x}\right)=\frac{1}{2}E\left[\left\{Z\left(\underline{x}+\underline{h}\right)-Z\left(\underline{x}\right)\right\}^{2}\right]$$

FA aleatorias intrínsecas

- Cuando la FA no es estacionaria pero las diferencias ***Z*(*x̲*+*h̲*)-*Z*(*x̲*)** son estacionarias de segundo orden (***Hipótesis Intrínseca***)
- El valor esperado de la diferencia es

$$E\left[Z\left(\underline{x}+\underline{h}\right)-Z\left(\underline{x}\right)\right]=m \qquad \forall \underline{x}$$

- La varianza de la diferencia es

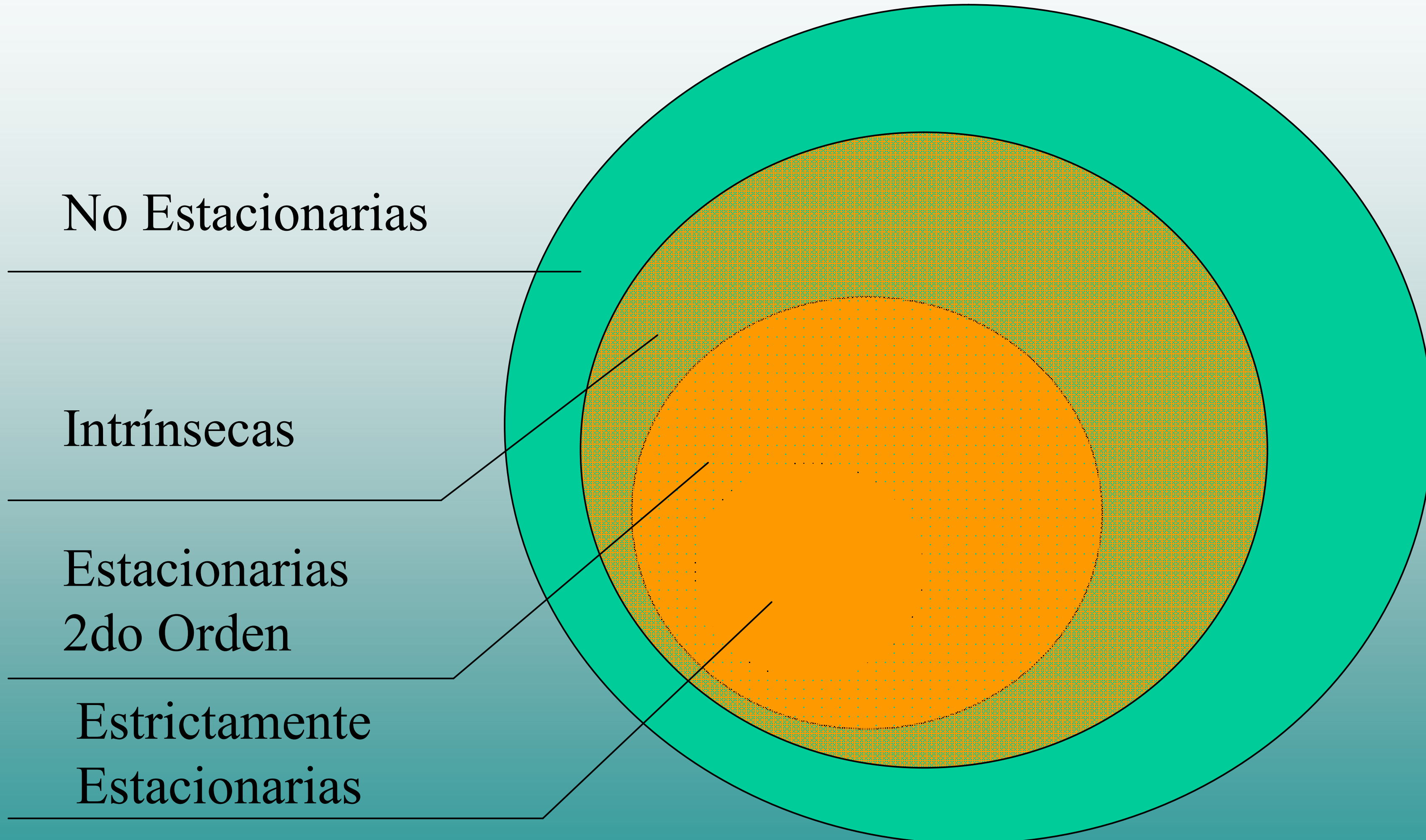
$$Var\left[Z\left(\underline{x}+\underline{h}\right)-Z\left(\underline{x}\right)\right]=2\gamma\left(\underline{h}\right) \qquad \forall \underline{x}$$

FA no estacionarias

- Cuando no cumplen la ***Hipótesis Intrínseca***.
- El valor esperado de la diferencia depende de la posición

- La varianza de la diferencia no es estacionaria

Diagrama de clasificación de las FAs por su grado de estacionaridad



FA no estacionarias

- Un indicador de no estacionaridad (tendencia) es cuando el variograma presenta un crecimiento similar o superior a $\underline{h}^2$

- Si consideramos a la FA como $Z(\underline{x}) = m(\underline{x}) + R(\underline{x})$
  Entonces vemos que el variograma depende de $\underline{x}$

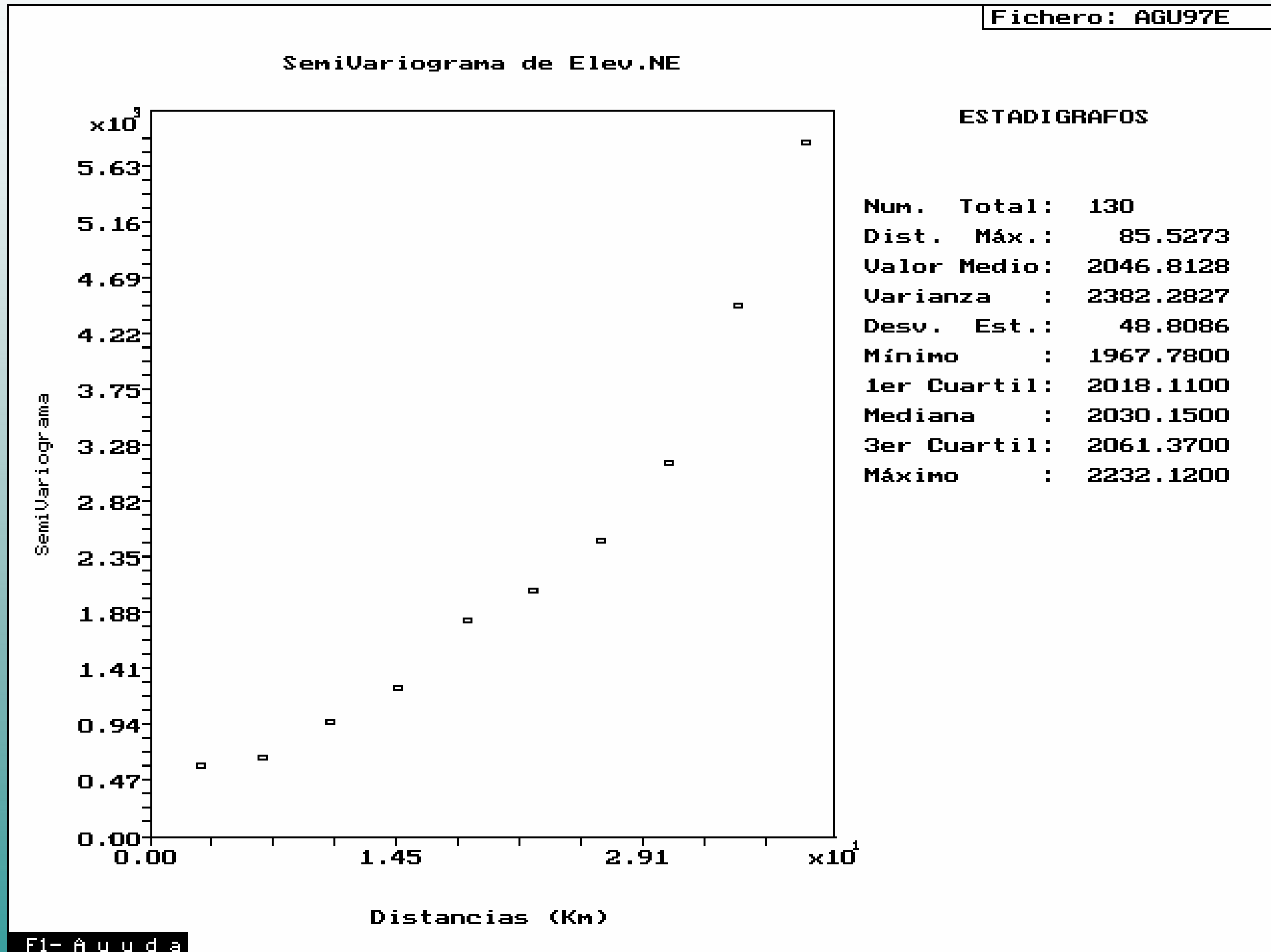
$$\gamma(\underline{x}+\underline{h},\underline{x}) = \gamma_R(\underline{h}) + 1/2\left\{m(\underline{x}+\underline{h}) - m(\underline{x})\right\}^2$$

- Si la deriva o tendencia es lineal $m(\underline{x}) = m_0 + \underline{m}_1 \cdot \underline{x}$

$$\gamma(\underline{h}) = \gamma_R(\underline{h}) + 1/2(\underline{m}_1 \cdot \underline{h})^2$$

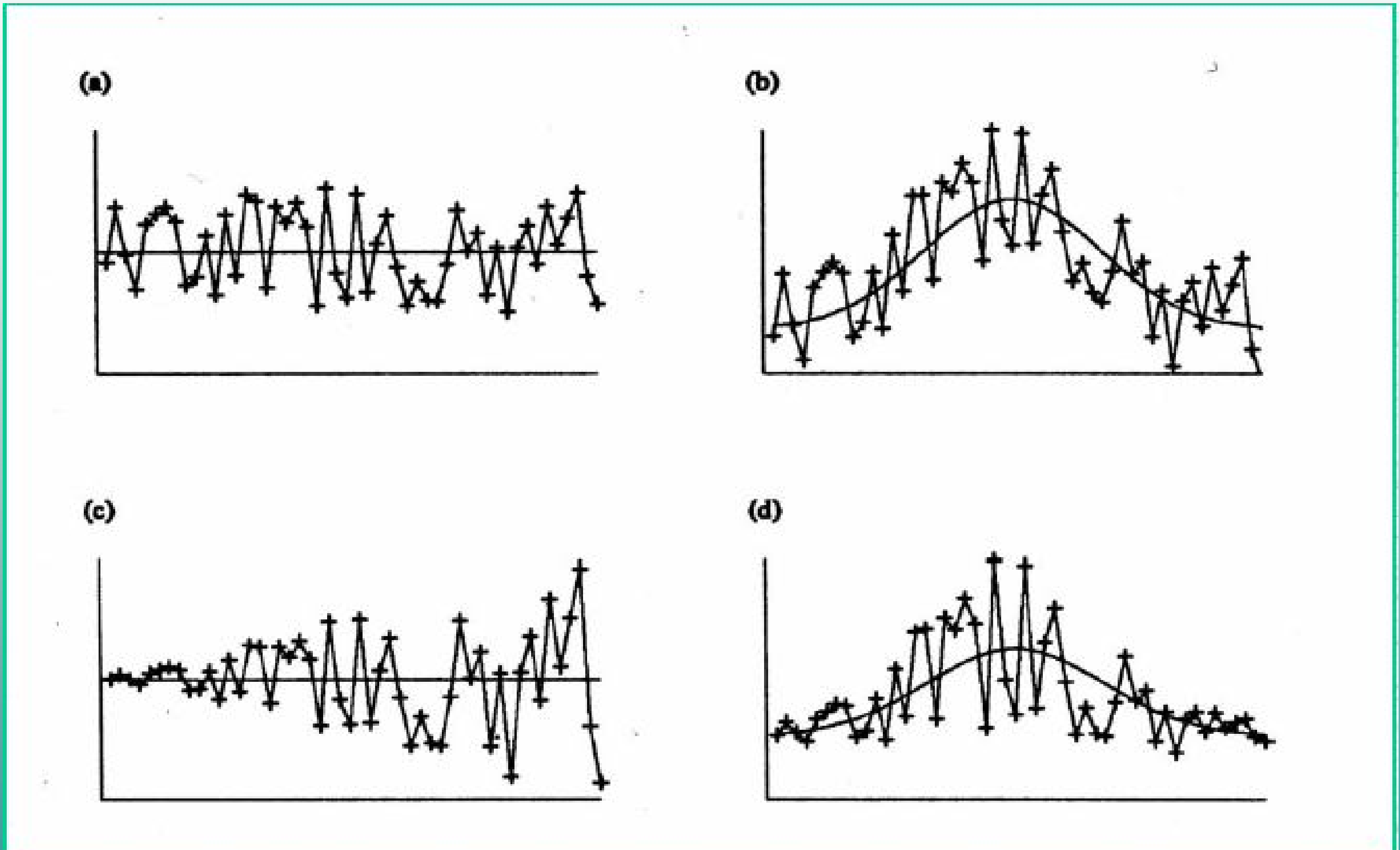
FA no estacionarias

Ejemplo de variograma en presencia de tendencia muestra un crecimiento $\underline{h^2}$



Ejemplos de Estacionaridad

(a) Media y varianza constantes; (b) media variable y varianza constante;
(c) Media constante y varianza no constante; (d) Media y varianza no constantes.



Ejemplos de Estacionaridad

(a) Media estacionaria; (b) Media no estacionaria