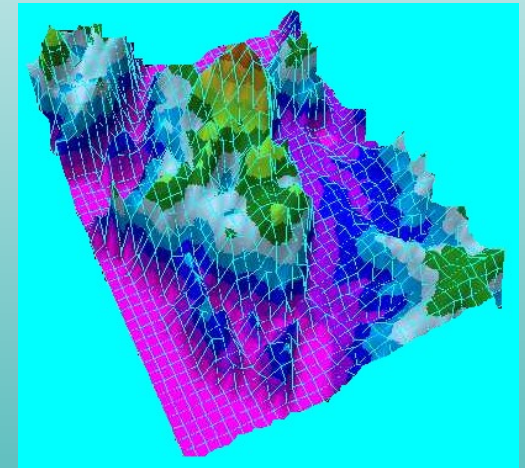




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

GEOESTADÍSTICA APLICADA



Tema: Funciones Aleatorias

Instructores:

Dr. Martín A. Díaz Viera (mdiazv@imp.mx)

Dr. Ricardo Casar González (rcasar@imp.mx)

2020

Contenido

- Función Aleatoria (FA)
- Variable regionalizada
- Función de distribución de una FA
- Momentos de una FA
- Estacionaridad de una FA
- Clasificación de las FA según su grado de estacionaridad
- FA estacionarias de segundo orden
- Funciones aleatorias intrínsecas
- Funciones aleatorias no estacionarias

Función Aleatoria

- Si a cada punto \underline{x} que pertenece a un dominio Ω en el espacio le hacemos corresponder una variable aleatoria Z , entonces el conjunto de variables aleatorias espacialmente distribuidas será una ***función aleatoria*** $Z(\underline{x})$.
- Ejemplo: La distribución espacial de las facies o la porosidad en un yacimiento.

Variable regionalizada

- Al tomar una muestra de una función aleatoria, a la que llamaremos realización, se obtendrá una función espacial discreta la cual constituye una variable regionalizada.
- Es decir una realización de una función aleatoria es una ***variable regionalizada*** .

Función de distribución de una FA

- Sea una función aleatoria $\mathbf{Z}(\underline{x})$ definida en una región Ω , entonces el vector aleatorio

$$\left\{ Z(\underline{x}_1), Z(\underline{x}_2), \dots, Z(\underline{x}_n) \right\}$$

- se caracteriza por su función de distribución de probabilidad n -variada:

$$\begin{aligned} F_{Z(\underline{x}_1), Z(\underline{x}_2), \dots, Z(\underline{x}_n)}(z_1, z_2, \dots, z_n) &= \\ &= \Pr \left[Z(\underline{x}_1) \leq z_1, Z(\underline{x}_2) \leq z_2, \dots, Z(\underline{x}_n) \leq z_n \right] \end{aligned}$$

Función de distribución de una FA

- El conjunto de todas las distribuciones para todo valor de n y para cualquier selección de puntos en Ω constituye la *ley espacial de probabilidad* de la función aleatoria.
- Esta función en la práctica es imposible de determinar y sólo se puede esperar inferir los primeros momentos de la distribución de la FA $Z(\underline{x})$.

Momentos de una FA

- Momento de primer orden
- Conocido como *valor medio* o *media* de $Z(\underline{x})$ está definido como:

$$m(\underline{x}) = E \left[Z(\underline{x}) \right]$$

Momentos de una FA

- **Momentos de segundo orden**
- La *varianza* de $Z(\underline{x})$ está definida como:

$$\sigma^2(\underline{x}) = \text{Var} [Z(\underline{x})] = E \left[\left\{ Z(\underline{x}) - m(\underline{x}) \right\}^2 \right]$$

- La *covarianza* de $Z(\underline{x})$ está definida como:

$$C(\underline{x}_i, \underline{x}_j) = E \left[\left\{ Z(\underline{x}_i) - m(\underline{x}_i) \right\} \left\{ Z(\underline{x}_j) - m(\underline{x}_j) \right\} \right]$$

Momentos de una FA

- **Momentos de segundo orden**
- El *semivariograma* de $Z(\underline{x})$ está definido como:

$$2\gamma(\underline{x}_i, \underline{x}_j) = \text{Var} \left[Z(\underline{x}_i) - Z(\underline{x}_j) \right]$$
$$\gamma(\underline{x}_i, \underline{x}_j) = \frac{1}{2} E \left[\left\{ Z(\underline{x}_i) - Z(\underline{x}_j) \right\}^2 \right]$$

- También conocido como función de semivarianzas o variograma

Estacionaridad de una FA

Se dice que una función aleatoria es *estrictamente estacionaria* si su función de distribución de probabilidad es invariante a cualquier traslación respecto a un vector \underline{h} .

Pero resulta práctico limitar la hipótesis de estacionaridad a los primeros momentos.

Clasificación de las FA según su grado de estacionaridad

- FA estacionarias de segundo orden
- FA aleatorias intrínsecas
- Funciones aleatorias no estacionarias

FA estacionarias de segundo orden

Se dice que una FA es *estacionaria de segundo orden* si sus momentos de primer y segundo orden no dependen de la posición, es decir

$$E[Z(\underline{x})] = m \quad \text{y} \quad \text{Var}[Z(\underline{x})] = \sigma^2 \quad \forall \underline{x}$$

$$C(\underline{h}) \equiv C(\underline{x} + \underline{h}, \underline{x}) = E[Z(\underline{x} + \underline{h}) Z(\underline{x})] - m^2$$

$$\gamma(\underline{h}) \equiv \gamma(\underline{x} + \underline{h}, \underline{x}) = \frac{1}{2} E \left[\left\{ Z(\underline{x} + \underline{h}) - Z(\underline{x}) \right\}^2 \right]$$

FA aleatorias intrínsecas

- Cuando la FA no es estacionaria pero las diferencias $Z(\underline{x}+\underline{h})-Z(\underline{x})$ son estacionarias de segundo orden (*Hipótesis Intrínseca*)

- El valor esperado de la diferencia es

$$E \left[Z(\underline{x} + \underline{h}) - Z(\underline{x}) \right] = m \quad \forall \underline{x}$$

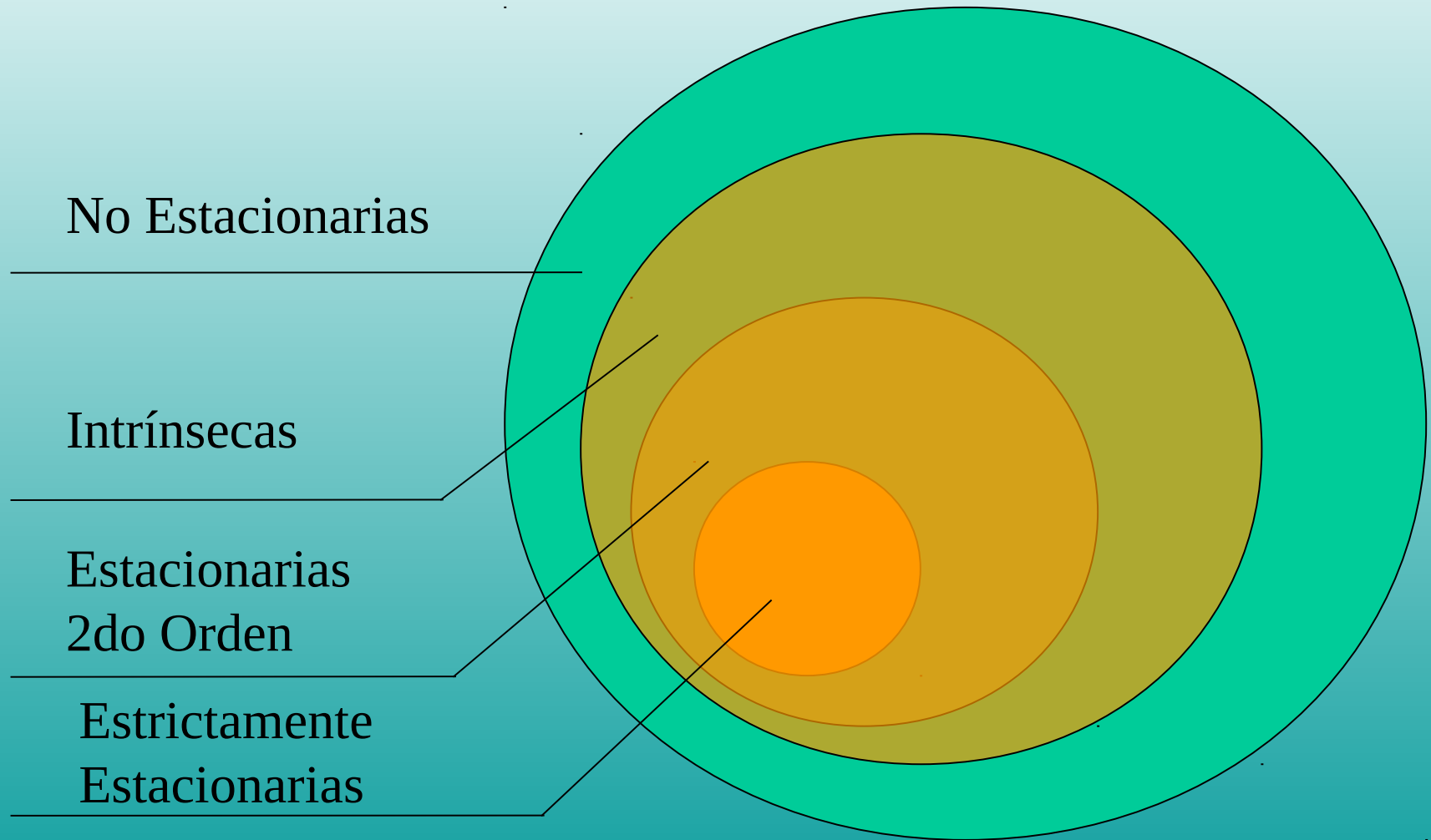
- La varianza de la diferencia es

$$Var \left[Z(\underline{x} + \underline{h}) - Z(\underline{x}) \right] = 2\gamma(\underline{h}) \quad \forall \underline{x}$$

FA no estacionarias

- Cuando no cumplen la *Hipótesis Intrínseca*.
- El valor esperado de la diferencia depende de la posición
- La varianza de la diferencia no es estacionaria

Diagrama de clasificación de las FAs por su grado de estacionaridad



FA no estacionarias

- Un indicador de no estacionaridad (tendencia) es cuando el variograma presenta un crecimiento similar o superior a \underline{h}^2

- Si consideramos a la FA como $Z(\underline{x}) = m(\underline{x}) + R(\underline{x})$
Entonces vemos que el variograma depende de \underline{x}

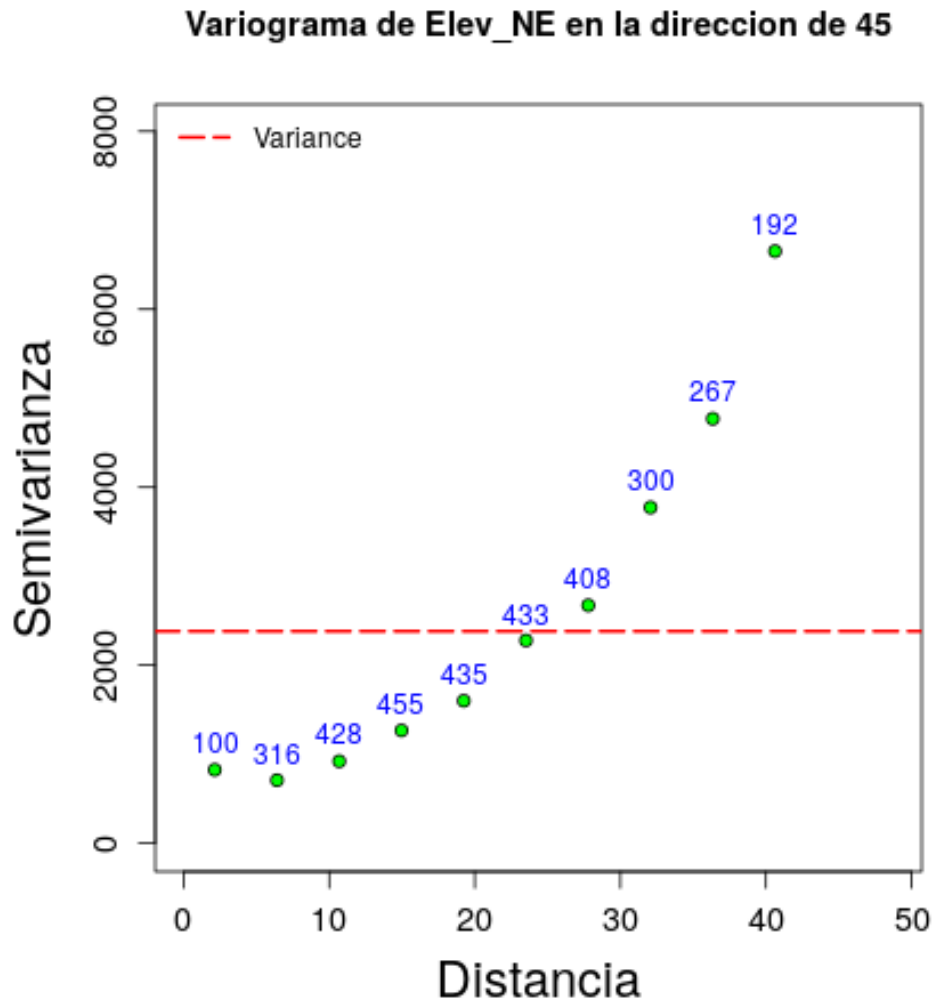
$$\gamma(\underline{x} + \underline{h}, \underline{x}) = \gamma_R(\underline{h}) + 1/2 \left\{ m(\underline{x} + \underline{h}) - m(\underline{x}) \right\}^2$$

- Si la deriva o tendencia es lineal $m(\underline{x}) = m_0 + \underline{m}_1 \cdot \underline{x}$

$$\gamma(\underline{h}) = \gamma_R(\underline{h}) + 1/2 (\underline{m}_1 \cdot \underline{h})^2$$

FA no estacionarias

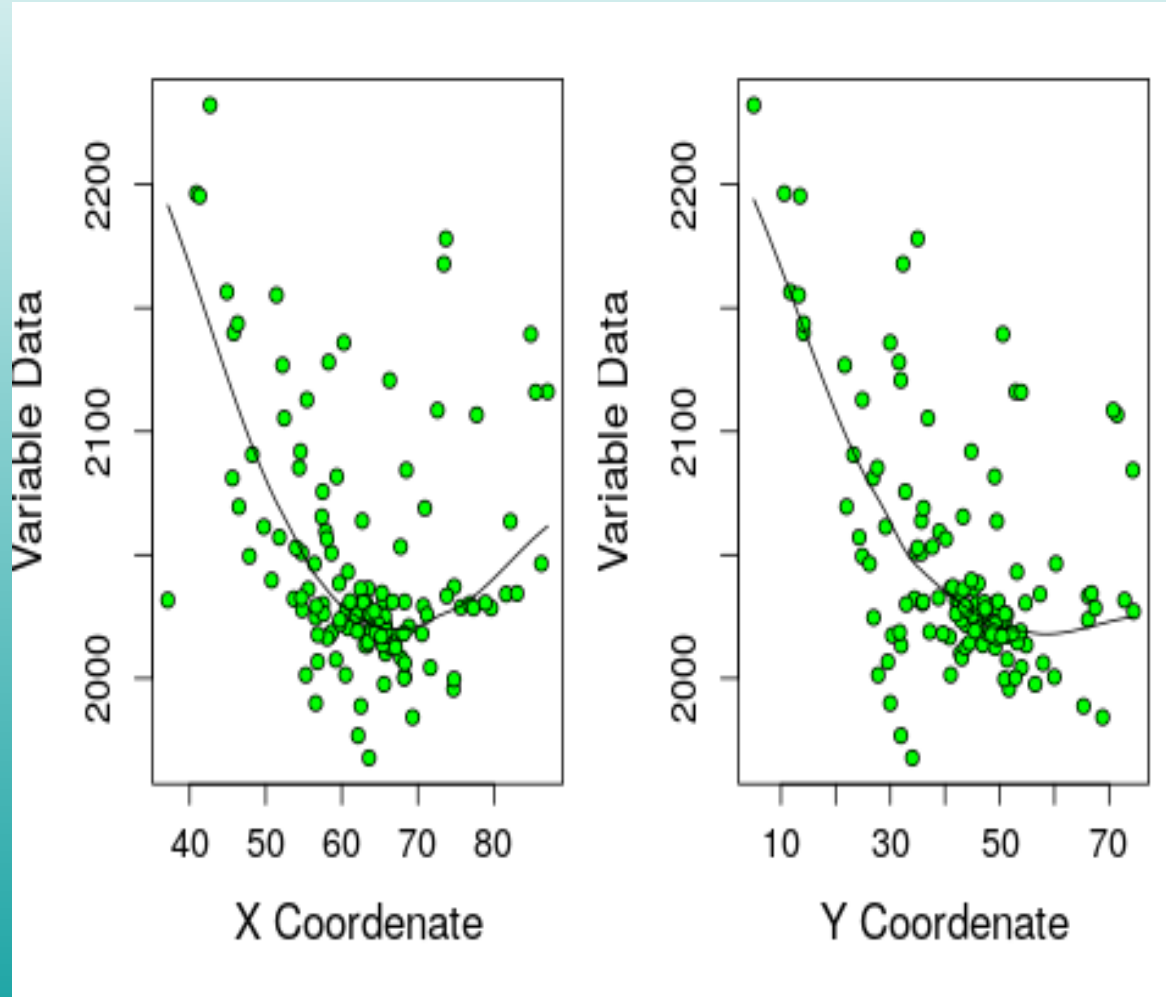
Ejemplo de datos en presencia de tendencia con un variograma que crece h^2



No_muestras	130
Minimo	1967.78
Cuartil_1er	2018.14
Mediana	2030.15
Media	2046.81
Cuartil_3er	2060.89
Maximo	2232.12
Rango	264.34
Rango_Intercuartil	42.75
Varianza	2382.28
Desv_Estandar	48.81
Simetria	1.53
Curtosis	5.05

FA no estacionarias

Ejemplo de datos en presencia de tendencia con un variograma que crece h^2

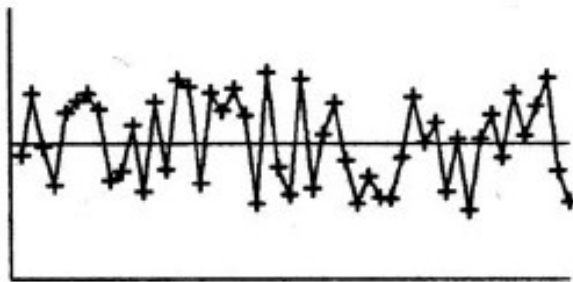


No_muestras	130
Minimo	1967.78
Cuartil_1er	2018.14
Mediana	2030.15
Media	2046.81
Cuartil_3er	2060.89
Maximo	2232.12
Rango	264.34
Rango_Intercuartil	42.75
Varianza	2382.28
Desv_Estandar	48.81
Simetria	1.53
Curtosis	5.05

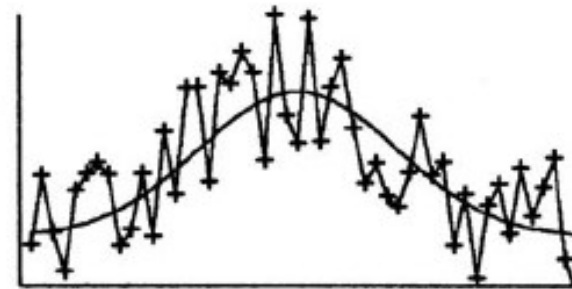
Ejemplos de Estacionaridad

- (a) Media y varianza constantes; (b) media variable y varianza constante;
(c) Media constante y varianza no constante; (d) Media y varianza no constantes.

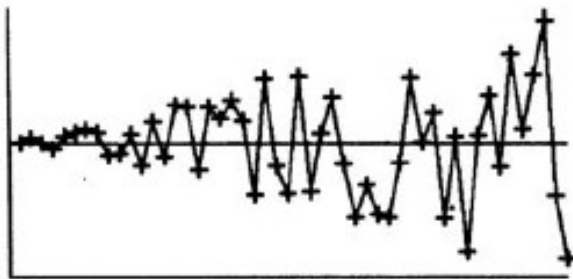
(a)



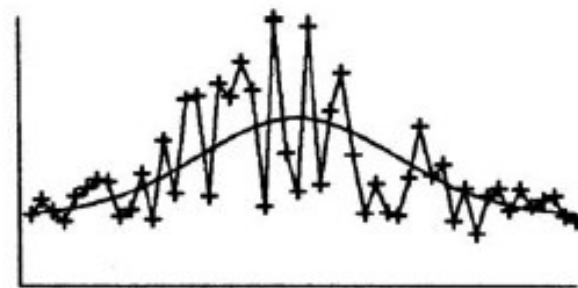
(b)



(c)



(d)



Ejemplos de Estacionaridad

(a) Media estacionaria; (b) Media no estacionaria

