Ciencia de Datos Aplicada a Ciencias de la Tierra

Tema: Modelos de dependencia basados en cópulas

Martín A. Díaz-Viera[1]

[1] *mdiazv@imp.mx*

29 de enero de 2024

Contenido

1. Introducción
   - Problema
   - Antecedentes
   - Un enfoque alternativo basado en Cópulas
   - Objetivos
2. Metodología
   - Modelación Geológico-Petrofísica de Yacimientos
   - Modelo de dependencia basado en cópulas
   - Flujo de trabajo
3. Casos de estudio
   - Caso de estudio
   - Enfoque de estimación
   - Enfoque de simulación
   - Simulaciones vs. Estimaciones
4. Conclusiones
   - Conclusiones

Problema

Datos: Registros de Pozo

- Propiedades petrofísicas (Phi, KTimur, Sw, Vcl)
- Atributos Elásticos (Ip, Is, Poisson, etc)

$$+$$

Datos: Escala Sísmica

- Atributos Elásticos (Ip, Is, Poisson, etc)

$$\Downarrow$$

Predicción: Escala Sísmica

- Propiedades petrofísicas (Phi, KTimur, Sw, Vcl)

Antecedentes

Existen dos enfoques:

- Estimación (Métodos de Regresión)
  1. Relaciones empíricas
  2. Cokriging/Regresión
  3. Redes Neuronales
- Simulación (Métodos de Simulación Geoestadísticos)
  1. Simulación Secuencial Gaussiana
  2. Simulación de Mezcla Gaussiana
  3. Simulación Secuencial Directa

Deficiencias

Deficiencias de los métodos existentes:

- Limitados a dependencias lineales o funcionales
- Restringidos a distribuciones Gaussianas
- Requieren transformaciones de las variables

Un enfoque alternativo basado en Cópulas

- Las cópulas son una forma moderna de modelar la estructura de dependencia entre variables.
- Pero sólo recientemente las cópulas se han vuelto populares en los modelos de simulación.
- Las cópulas son funciones que proporcionan una manera de crear distribuciones para modelar datos multivariados correlacionados.
- Usando una cópula, un analista de datos puede construir una distribución multivariada especificando distribuciones marginales univariadas y eligiendo una cópula particular para proporcionar una estructura de correlación entre variables.

Motivación

Al aplicar técnicas geoestadísticas como la simulación estocástica conjunta basada en cópulas es posible modelar dependencias generales no lineales, para una mejor predicción de propiedades petrofísicas relacionadas con los atributos sísmicos.

Objetivos

Objetivo General:

Predicción de la distribución espacial de propiedades petrofísicas mediante un modelo de dependencia basado en cópulas utilizando atributos sísmicos como variables secundarias.

Objetivos Particulares:

- Metodología/Flujo de Trabajo
- Software Libre (Open Source)
- Cuantificación de la Incertidumbre

Modelación Geológico-Petrofísica de Yacimientos

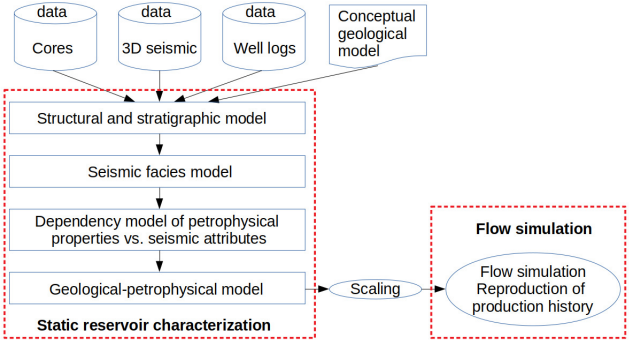


Figura 1: Flujo de trabajo para la modelación gelógico-petrofísica de yacimiento (MGPY) (modificado de Díaz-Viera et al. (2013)).

Cópula bivariada

Sklar (1959) demostró que existe una función $C\colon [0,1]^2 \longmapsto [0,1]$ tal que

$$H_{XY}(x,y) = C_{XY}(F_X(x), G_Y(y)) \tag{1}$$

donde C_{XY} es la función *cópula* asociada al vector aleatorio bivariado (X, Y) y describe su relación de dependencia, H es la función de distribución de probabilidad bivariada, F y G son las distribuciones de probabilidad univariadas (marginales).

Propiedades

Deje $F(x) = u, G(y) = v$. De acuerdo a Nelsen (2006) y Joe (2014), las propiedades de la cópula son:

1. $u = C(u, 1)$; $v = C(1, v)$; $C(0, v) = C(v, 0) = 0$.
2. Para cada u_1, u_2, v_1, v_2 en $\mathbb{I} = [0, 1]$ tal que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$ entonces: $C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0$.
3. Las variables aleatorias u y v son independiente si y sólo si: $C(u, v) = \Pi(u, v) = uv$.
4. $W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$ donde $W(u, v) = max(u + v - 1, 0)$ y $M(u, v) = min(u, v)$ son cópulas también.
5. $0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \leq 1$ y $0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \leq 1$.
6. $u \longmapsto \frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ y $v \longmapsto \frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ son no decrecientes.
7. La función de densidad de cópula: $c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$ existe cuando C es absolutamente continuo.

Representación gráfica

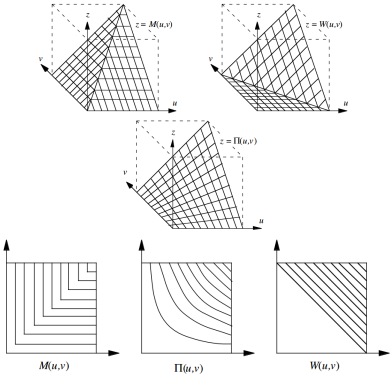


Figura 2: Gráficas de las cópulas M, Π y W (tomado de Nelsen (2006)).

Función de distribución de probabilidad conjunta

$$(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathbb{P}_{XY})$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \mathrm{F}_{XY}(x, y) &:= \mathbb{P}_{XY}\left( ]-\infty, x] \times]-\infty, y] \right) \\ &\equiv \mathbb{P}\left(X \leq x\,, Y \leq y\right) \end{aligned}$$

$$\mathrm{F}_{XY} \quad \rightsquigarrow \quad F_X\,, F_Y\,, F_{Y\,|\,X}\,, F_{X\,|\,Y}$$

Función de distribución de probabilidad conjunta

$$(X, Y) \; : \; (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathbb{P}_{XY})$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \; \mathrm{F}_{XY}(x, y) \; &:= \; \mathbb{P}_{XY}\left(\,]-\infty, x] \times]-\infty, y] \, \right) \\ &\equiv \; \mathbb{P}\left(X \leq x \, , Y \leq y\right) \end{aligned}$$

$$\mathrm{F}_{XY} \quad \rightsquigarrow \quad F_X \, , \, F_Y \, , \, F_{Y \,|\, X} \, , \, F_{X \,|\, Y}$$

Función de distribución de probabilidad conjunta

$$(X, Y) \; : \; (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathbb{P}_{XY})$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \; \mathsf{F}_{XY}(x, y) \; &:= \; \mathbb{P}_{XY}\left(\,]-\infty, x] \times]-\infty, y] \, \right) \\ &\equiv \; \mathbb{P}\left(X \leq x \, , Y \leq y\right) \end{aligned}$$

$$\mathsf{F}_{XY} \quad \rightsquigarrow \quad F_X \, , \, F_Y \, , \, F_{Y \mid X} \, , \, F_{X \mid Y}$$

Función de distribución de probabilidad conjunta

$$(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathbb{P}_{XY})$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \ \mathsf{F}_{XY}(x, y) &:= \mathbb{P}_{XY}\left( ]-\infty, x] \times]-\infty, y] \right) \\ &\equiv \mathbb{P}\left(X \leq x \,, Y \leq y\right) \end{aligned}$$

$$\mathsf{F}_{XY} \quad \rightsquigarrow \quad F_X \,, F_Y \,, F_{Y\,|\,X} \,, F_{X\,|\,Y}$$

Función de distribución de probabilidad conjunta

$$(X, Y) \; : \; (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathbb{P}_{XY})$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \; \mathrm{F}_{XY}(x, y) \; &:= \; \mathbb{P}_{XY}\left(\,]-\infty, x] \times]-\infty, y] \, \right) \\ &\equiv \; \mathbb{P}\left(X \leq x \, , Y \leq y\right) \end{aligned}$$

$$\mathrm{F}_{XY} \quad \rightsquigarrow \quad F_X \, , \, F_Y \, , \, F_{Y \,|\, X} \, , \, F_{X \,|\, Y}$$

Función de distribución de probabilidad conjunta

$$(X, Y) \; : \; (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathbb{P}_{XY})$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \; \mathrm{F}_{XY}(x, y) \; &:= \; \mathbb{P}_{XY}\left(\,]-\infty, x] \times]-\infty, y] \, \right) \\ &\equiv \; \mathbb{P}\left(X \leq x \, , Y \leq y\right) \end{aligned}$$

$$\mathrm{F}_{XY} \quad \rightsquigarrow \quad F_X \, , \, F_Y \, , \, F_{Y \,|\, X} \, , \, F_{X \,|\, Y}$$

Teorema de Sklar - Parte I

Existe una función cópula $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$ tal que

$$F_{XY}(x,y) = C_{XY}(F_X(x), F_Y(y)), \qquad x,y \in \overline{\mathbb{R}}^2$$

donde C_{XY} es única en $Ran\, F_X \times Ran\, F_Y$.

Corolario 1: Dos VAs continuas X, Y son independientes $\Leftrightarrow$ $C_{XY}(u,v) = uv$

Corolario 2: $C_{XY}(u,v) = F_{XY}\left(F_X^{(-1)}(u), F_Y^{(-1)}(v)\right), \quad u,v \in [0,1]$

Teorema de Sklar - Parte I

Existe una función cópula $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$ tal que

$$F_{XY}(x,y) = C_{XY}(F_X(x), F_Y(y)), \qquad x,y \in \overline{\mathbb{R}}^2$$

donde C_{XY} es única en $Ran\, F_X \times Ran\, F_Y$.

Corolario 1: Dos VAs continuas X, Y son independientes $\Leftrightarrow$ $C_{XY}(u,v) = uv$

Corolario 2: $C_{XY}(u,v) = F_{XY}(F_X^{(-1)}(u), F_Y^{(-1)}(v)), \quad u,v \in [0,1]$

Teorema de Sklar - Parte I

Existe una función cópula $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$ tal que

$$F_{XY}(x,y) = C_{XY}\big(F_X(x)\,,\, F_Y(y)\big)\,, \qquad x,y \in \overline{\mathbb{R}}^2$$

donde C_{XY} es única en $Ran\, F_X \times Ran\, F_Y$.

Corolario 1: Dos VAs continuas X, Y son independientes $\Leftrightarrow$ $C_{XY}(u,v) = uv$

Corolario 2: $C_{XY}(u,v) = F_{XY}\big(F_X^{(-1)}(u)\,,\, F_Y^{(-1)}(v)\big)\,, \quad u,v \in [0,1]$

Teorema de Sklar - Parte I

Existe una función cópula $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$ tal que

$$F_{XY}(x,y) = C_{XY}\big(F_X(x)\,,\, F_Y(y)\big)\,, \qquad x,y \in \overline{\mathbb{R}}^2$$

donde C_{XY} es única en $Ran\, F_X \times Ran\, F_Y$.

Corolario 1: Dos VAs continuas X, Y son independientes $\Leftrightarrow$ $C_{XY}(u,v) = uv$

Corolario 2: $C_{XY}(u,v) = F_{XY}\big(F_X^{(-1)}(u)\,,\, F_Y^{(-1)}(v)\big)\,, \quad u,v \in [0,1]$

Teorema de Sklar - Parte I

Existe una función cópula $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$ tal que

$$F_{XY}(x,y) = C_{XY}\big(F_X(x)\,,\, F_Y(y)\big)\,, \qquad x,y \in \overline{\mathbb{R}}^2$$

donde C_{XY} es única en $Ran\, F_X \times Ran\, F_Y$.

Corolario 1: Dos VAs continuas X, Y son <u>independientes</u> $\Leftrightarrow$ $C_{XY}(u,v) = uv$

Corolario 2: $C_{XY}(u,v) = F_{XY}\big(F_X^{(-1)}(u)\,,\, F_Y^{(-1)}(v)\big)\,, \quad u,v \in [0,1]$

Teorema de Sklar - Parte I

Existe una función cópula $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$ tal que

$$F_{XY}(x,y) = C_{XY}\big(F_X(x)\,,\, F_Y(y)\big)\,, \qquad x,y \in \overline{\mathbb{R}}^2$$

donde C_{XY} es única en $Ran\, F_X \times Ran\, F_Y$.

Corolario 1: Dos VAs continuas X, Y son <u>independientes</u> $\Leftrightarrow$ $C_{XY}(u,v) = uv$

Corolario 2: $C_{XY}(u,v) = F_{XY}\big(F_X^{(-1)}(u)\,,\, F_Y^{(-1)}(v)\big)\,, \quad u,v \in [0,1]$

Teorema de Sklar - Parte I

Propiedades de C_{XY} : $[0,1]^2 \to [0,1]$

$$0 = F_{XY}(x, -\infty) = C_{XY}(F_X(x), F_Y(-\infty)) = C_{XY}(F_X(x), 0)$$

$$u := F_X(x) \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = C_{XY}(u, 0)} \qquad (1)$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = C_{XY}(F_X(x), F_Y(+\infty)) = C_{XY}(F_X(x), 1))$$

$$\Rightarrow \text{para } u \in [0,1] : \quad \boxed{u = C_{XY}(u, 1)} \qquad (2)$$

Teorema de Sklar - Parte I

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$0 = F_{XY}(x, -\infty) = C_{XY}(F_X(x), F_Y(-\infty)) = C_{XY}(F_X(x), 0)$$

$$u := F_X(x) \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = C_{XY}(u, 0)} \qquad (1)$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = C_{XY}(F_X(x), F_Y(+\infty)) = C_{XY}(F_X(x), 1))$$

$$\Rightarrow \text{para } u \in [0,1] : \quad \boxed{u = C_{XY}(u, 1)} \qquad (2)$$

Teorema de Sklar - Parte I

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$0 = F_{XY}(x, -\infty) = C_{XY}(F_X(x), F_Y(-\infty)) = C_{XY}(F_X(x), 0)$$

$$u := F_X(x) \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = C_{XY}(u, 0)} \qquad (1)$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = C_{XY}(F_X(x), F_Y(+\infty)) = C_{XY}(F_X(x), 1))$$

$$\Rightarrow \text{para } u \in [0,1] : \quad \boxed{u = C_{XY}(u, 1)} \qquad (2)$$

Teorema de Sklar - Parte I

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$0 = F_{XY}(x, -\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(-\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 0\big)$$

$$u := F_X(x) \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = C_{XY}(u, 0)} \qquad (1)$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(+\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 1)\big)$$

$$\Rightarrow \text{para } u \in [0,1] : \quad \boxed{u = C_{XY}(u, 1)} \qquad (2)$$

Teorema de Sklar - Parte I

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$0 = F_{XY}(x, -\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(-\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 0\big)$$

$$u := F_X(x) \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = C_{XY}(u, 0)} \qquad (1)$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(+\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 1)\big)$$

$$\Rightarrow \text{para } u \in [0,1] : \quad \boxed{u = C_{XY}(u, 1)} \qquad (2)$$

Teorema de Sklar - Parte I

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$0 = F_{XY}(x, -\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(-\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 0\big)$$

$$u := F_X(x) \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = C_{XY}(u, 0)} \qquad (1)$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(+\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 1)\big)$$

$$\Rightarrow \text{para } u \in [0,1] : \quad \boxed{u = C_{XY}(u, 1)} \qquad (2)$$

Teorema de Sklar - Parte I

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$0 = F_{XY}(x, -\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(-\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 0\big)$$

$$u := F_X(x) \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = C_{XY}(u, 0)} \qquad (1)$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(+\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 1)\big)$$

$$\Rightarrow \text{para } u \in [0,1] : \quad \boxed{u = C_{XY}(u, 1)} \qquad (2)$$

Teorema de Sklar - Parte I

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$0 = F_{XY}(x, -\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(-\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 0\big)$$

$$u := F_X(x) \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = C_{XY}(u, 0)} \qquad (1)$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(+\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 1)\big)$$

$$\Rightarrow \text{para } u \in [0,1] : \quad \boxed{u = C_{XY}(u, 1)} \qquad (2)$$

Teorema de Sklar - Parte I

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$0 = F_{XY}(x, -\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(-\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 0\big)$$

$$u := F_X(x) \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = C_{XY}(u, 0)} \qquad (1)$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(+\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 1\big)$$

$$\Rightarrow \text{para } u \in [0,1] : \quad \boxed{u = C_{XY}(u, 1)} \qquad (2)$$

Teorema de Sklar - Parte I

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$0 = F_{XY}(x, -\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(-\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 0\big)$$

$$u := F_X(x) \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = C_{XY}(u, 0)} \qquad (1)$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(+\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 1)\big)$$

$$\Rightarrow \text{para } u \in [0,1] : \quad \boxed{u = C_{XY}(u, 1)} \qquad (2)$$

Teorema de Sklar - Parte I

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$0 = F_{XY}(x, -\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(-\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 0\big)$$

$$u := F_X(x) \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = C_{XY}(u, 0)} \qquad (1)$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(+\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 1)\big)$$

$$\Rightarrow \text{para } u \in [0,1] : \quad \boxed{u = C_{XY}(u, 1)} \qquad (2)$$

Teorema de Sklar - Parte I

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$0 = F_{XY}(x, -\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(-\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 0\big)$$

$$u := F_X(x) \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = C_{XY}(u, 0)} \qquad (1)$$

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = C_{XY}\big(F_X(x), F_Y(+\infty)\big) = C_{XY}\big(F_X(x), 1)\big)$$

$$\Rightarrow \text{para } u \in [0,1] : \quad \boxed{u = C_{XY}(u, 1)} \qquad (2)$$

Teorema de Sklar - Parte II

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$
\begin{aligned}
0 \leq \mathbb{P}\left((X,Y) \in]x_1, x_2] \times]y_1, y_2]\right) &= \ldots \\
&= F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) \\
&\quad - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1) \\
&= C_{XY}(F_X(x_2), F_Y(y_2)) - C_{XY}(F_X(x_1), F_Y(y_2)) \\
&\quad - C_{XY}(F_X(x_2), F_Y(y_1)) + C_{XY}(F_X(x_1), F_Y(y_1))
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{0 \leq C_{XY}(u_2, v_2) - C_{XY}(u_1, v_2) - C_{XY}(u_2, v_1) + C_{XY}(u_1, v_1) \quad (3)}
$$

Teorema de Sklar - Parte II

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$0 \leq \mathbb{P}\big((X,Y) \in]x_1, x_2] \times]y_1, y_2]\big) = \dots$$

$$= F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1)$$

$$= C_{XY}(F_X(x_2), F_Y(y_2)) - C_{XY}(F_X(x_1), F_Y(y_2)) - C_{XY}(F_X(x_2), F_Y(y_1)) + C_{XY}(F_X(x_1), F_Y(y_1))$$

$$\boxed{0 \leq C_{XY}(u_2, v_2) - C_{XY}(u_1, v_2) - C_{XY}(u_2, v_1) + C_{XY}(u_1, v_1) \quad (3)}$$

Teorema de Sklar - Parte II

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$
\begin{aligned}
0 \quad \leq \quad & \mathbb{P}\big((X,Y) \in \,]x_1, x_2] \times]y_1, y_2]\big) \quad = \quad \ldots \\
= \quad & F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) \\
& - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1) \\
= \quad & C_{XY}\big(F_X(x_2), F_Y(y_2)\big) - C_{XY}\big(F_X(x_1), F_Y(y_2)\big) \\
& - C_{XY}\big(F_X(x_2), F_Y(y_1)\big) + C_{XY}\big(F_X(x_1), F_Y(y_1)\big)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{0 \leq C_{XY}(u_2, v_2) - C_{XY}(u_1, v_2) - C_{XY}(u_2, v_1) + C_{XY}(u_1, v_1) \qquad (3)}
$$

Teorema de Sklar - Parte II

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$
\begin{aligned}
0 \quad \leq \quad & \mathbb{P}\big((X,Y) \in \,]x_1, x_2] \times]y_1, y_2]\big) \quad = \quad \ldots \\
= \quad & F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) \\
& - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1) \\
= \quad & C_{XY}\big(F_X(x_2), F_Y(y_2)\big) - C_{XY}\big(F_X(x_1), F_Y(y_2)\big) \\
& - C_{XY}\big(F_X(x_2), F_Y(y_1)\big) + C_{XY}\big(F_X(x_1), F_Y(y_1)\big)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{0 \leq C_{XY}(u_2, v_2) - C_{XY}(u_1, v_2) - C_{XY}(u_2, v_1) + C_{XY}(u_1, v_1) \qquad (3)}
$$

Teorema de Sklar - Parte II

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$
\begin{aligned}
0 \quad \leq \quad & \mathbb{P}\big((X,Y) \in \,]x_1, x_2] \times]y_1, y_2]\big) \quad = \quad \ldots \\
= \quad & F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) \\
& - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1) \\
= \quad & C_{XY}\big(F_X(x_2), F_Y(y_2)\big) - C_{XY}\big(F_X(x_1), F_Y(y_2)\big) \\
& - C_{XY}\big(F_X(x_2), F_Y(y_1)\big) + C_{XY}\big(F_X(x_1), F_Y(y_1)\big)
\end{aligned}
$$

$$0 \leq C_{XY}(u_2, v_2) - C_{XY}(u_1, v_2) - C_{XY}(u_2, v_1) + C_{XY}(u_1, v_1) \qquad (3)$$

Teorema de Sklar - Parte II

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$
\begin{aligned}
0 \quad \leq \quad & \mathbb{P}\big((X,Y) \in \,]x_1, x_2] \times]y_1, y_2]\big) \quad = \quad \ldots \\
= \quad & F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) \\
& - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1) \\
= \quad & C_{XY}\big(F_X(x_2), F_Y(y_2)\big) - C_{XY}\big(F_X(x_1), F_Y(y_2)\big) \\
& - C_{XY}\big(F_X(x_2), F_Y(y_1)\big) + C_{XY}\big(F_X(x_1), F_Y(y_1)\big)
\end{aligned}
$$

$$0 \leq C_{XY}(u_2, v_2) - C_{XY}(u_1, v_2) - C_{XY}(u_2, v_1) + C_{XY}(u_1, v_1) \quad (3)$$

Teorema de Sklar - Parte II

Propiedades de $C_{XY} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$
\begin{aligned}
0 \quad \leq \quad & \mathbb{P}\big((X,Y) \in \,]x_1, x_2] \times]y_1, y_2]\big) \quad = \quad \ldots \\
= \quad & F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) \\
& - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1) \\
= \quad & C_{XY}\big(F_X(x_2), F_Y(y_2)\big) - C_{XY}\big(F_X(x_1), F_Y(y_2)\big) \\
& - C_{XY}\big(F_X(x_2), F_Y(y_1)\big) + C_{XY}\big(F_X(x_1), F_Y(y_1)\big)
\end{aligned}
$$

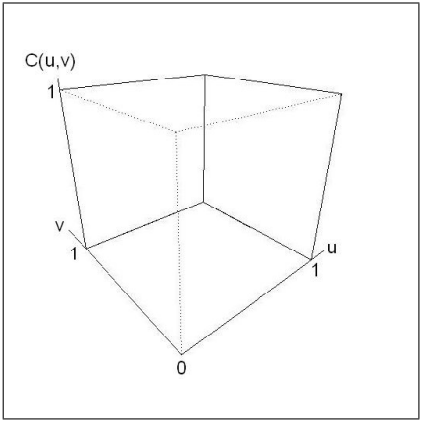
$$
\boxed{0 \leq C_{XY}(u_2, v_2) - C_{XY}(u_1, v_2) - C_{XY}(u_2, v_1) + C_{XY}(u_1, v_1) \quad (3)}
$$

Cópula bivariada

$C : [0,1]^2 \to [0,1]$

1. $C(u,0) = 0 = C(0,v)$
2. $C(u,1) = u \quad C(1,v) = v$
3. $u_1 \leq u_2 \, , \, v_1 \leq v_2$

$$C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2) - C(u_2,v_1) + C(u_1,v_1) \geq 0$$

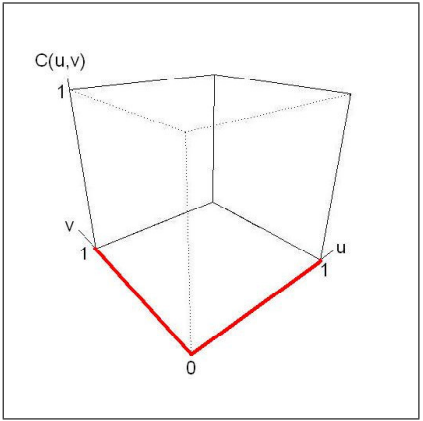


Cópula bivariada

$C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$

1. $C(u,0) = 0 = C(0,v)$
2. $C(u,1) = u \quad C(1,v) = v$
3. $u_1 \leq u_2 \, , \, v_1 \leq v_2$

$$C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2) - C(u_2,v_1) + C(u_1,v_1) \geq 0$$

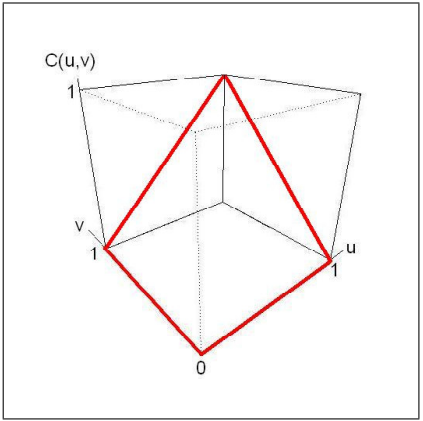


Cópula bivariada

$C : [0,1]^2 \to [0,1]$

1. $C(u,0) = 0 = C(0,v)$
2. $C(u,1) = u \quad C(1,v) = v$
3. $u_1 \leq u_2 \, , \, v_1 \leq v_2$

$$C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2) - C(u_2,v_1) + C(u_1,v_1) \geq 0$$

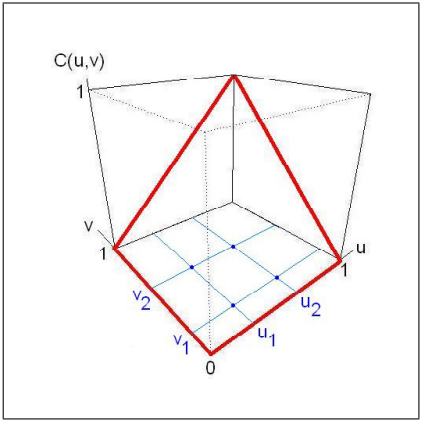


Cópula bivariada

$C : [0,1]^2 \to [0,1]$

1. $C(u,0) = 0 = C(0,v)$
2. $C(u,1) = u \quad C(1,v) = v$
3. $u_1 \leq u_2 \,,\; v_1 \leq v_2$

$$C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2) - C(u_2,v_1) + C(u_1,v_1) \geq 0$$

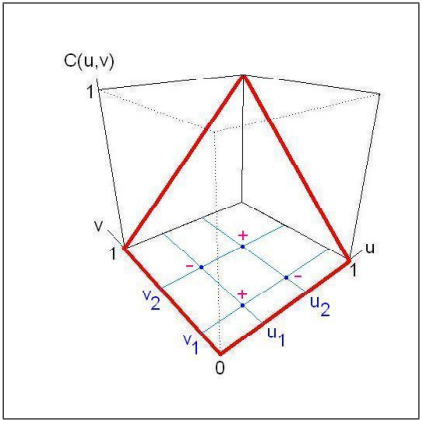


Cópula bivariada

$C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$

1. $C(u,0) = 0 = C(0,v)$
2. $C(u,1) = u \quad C(1,v) = v$
3. $u_1 \leq u_2 \, , \, v_1 \leq v_2$

$$C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2) - C(u_2,v_1) + C(u_1,v_1) \geq 0$$



Teorema de Sklar - Parte II

Si C es una cópula bivariada, y F, G son funciones de distribución de probalilidad marginales $\Rightarrow$ la función $\mathrm{H} : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathrm{H}(x, y) := \mathrm{C}\big(\, F(x)\,,\, G(y)\,\big)$$

es una función de distribución de probabilidad conjunta, con marginales F and G.

$$\boxed{(X, Y) \sim \mathrm{F}_{XY} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{C}_{XY}\,,\, F_X\,,\, F_Y} \qquad \text{(Parte I)}$$

$$\boxed{\mathrm{C}\,,\, F\,,\, G \quad \longrightarrow \quad \mathrm{H} \rightsquigarrow (S, T)} \qquad \text{(Parte II)}$$

Teorema de Sklar - Parte II

Si C es una cópula bivariada, y F, G son funciones de distribución de probalilidad marginales $\Rightarrow$ la función $\mathrm{H} : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathrm{H}(x, y) := \mathrm{C}\big(F(x), G(y)\big)$$

es una función de distribución de probabilidad conjunta, con marginales F and G.

$$\boxed{(X, Y) \sim \mathrm{F}_{XY} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{C}_{XY}, F_X, F_Y} \qquad \text{(Parte I)}$$

$$\boxed{\mathrm{C}, F, G \quad \longrightarrow \quad \mathrm{H} \rightsquigarrow (S, T)} \qquad \text{(Parte II)}$$

Teorema de Sklar - Parte II

Si C es una cópula bivariada, y F, G son funciones de distribución de probalilidad marginales $\Rightarrow$ la función $\mathrm{H} : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathrm{H}(x, y) := \mathrm{C}\big(F(x), G(y)\big)$$

es una función de distribución de probabilidad conjunta, con marginales F and G.

$$(X, Y) \sim \mathrm{F}_{XY} \longrightarrow \mathrm{C}_{XY}, F_X, F_Y$$ (Parte I)

$$\mathrm{C}, F, G \longrightarrow \mathrm{H} \rightsquigarrow (S, T)$$ (Parte II)

Teorema de Sklar - Parte II

Si C es una cópula bivariada, y F, G son funciones de distribución de probalilidad marginales $\Rightarrow$ la función $\mathrm{H} : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathrm{H}(x, y) := \mathrm{C}\big(F(x), G(y)\big)$$

es una función de distribución de probabilidad conjunta, con marginales F and G.

$(X, Y) \sim \mathrm{F}_{XY} \longrightarrow \mathrm{C}_{XY}, F_X, F_Y$ (Parte I)

$\mathrm{C}, F, G \longrightarrow \mathrm{H} \rightsquigarrow (S, T)$ (Parte II)

Teorema de Sklar - Parte II

Si C es una cópula bivariada, y F, G son funciones de distribución de probalilidad marginales $\Rightarrow$ la función $\mathrm{H} : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathrm{H}(x, y) := \mathrm{C}\big(F(x), G(y)\big)$$

es una función de distribución de probabilidad conjunta, con marginales F and G.

$(X, Y) \sim \mathrm{F}_{XY} \longrightarrow \mathrm{C}_{XY}, F_X, F_Y$ (Parte I)

$\mathrm{C}, F, G \longrightarrow \mathrm{H} \rightsquigarrow (S, T)$ (Parte II)

Teorema de Sklar - Parte II

Si C es una cópula bivariada, y F, G son funciones de distribución de probalilidad marginales $\Rightarrow$ la función $\mathrm{H} : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathrm{H}(x, y) := \mathrm{C}\big(F(x), G(y)\big)$$

es una función de distribución de probabilidad conjunta, con marginales F and G.

$$\boxed{(X, Y) \sim \mathrm{F}_{XY} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{C}_{XY}, F_X, F_Y} \qquad \text{(Parte I)}$$

$$\mathrm{C}, F, G \quad \longrightarrow \quad \mathrm{H} \rightsquigarrow (S, T) \qquad \text{(Parte II)}$$

Teorema de Sklar - Parte II

Si C es una cópula bivariada, y F, G son funciones de distribución de probalilidad marginales $\Rightarrow$ la función $\mathrm{H} : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathrm{H}(x, y) := \mathrm{C}\big(F(x), G(y)\big)$$

es una función de distribución de probabilidad conjunta, con marginales F and G.

$$\boxed{(X, Y) \sim \mathrm{F}_{XY} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{C}_{XY}, F_X, F_Y} \qquad \text{(Parte I)}$$

$$\mathrm{C}, F, G \quad \longrightarrow \quad \mathrm{H} \rightsquigarrow (S, T) \qquad \text{(Parte II)}$$

Teorema de Sklar - Parte II

Si C es una cópula bivariada, y F, G son funciones de distribución de probalilidad marginales $\Rightarrow$ la función $\mathrm{H} : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathrm{H}(x, y) := \mathrm{C}\big(F(x), G(y)\big)$$

es una función de distribución de probabilidad conjunta, con marginales F and G.

$$\boxed{(X, Y) \sim \mathrm{F}_{XY} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{C}_{XY}, F_X, F_Y} \qquad \text{(Parte I)}$$

$$\boxed{\mathrm{C}, F, G \quad \longrightarrow \quad \mathrm{H} \rightsquigarrow (S, T)} \qquad \text{(Parte II)}$$

Más propiedades de las cópulas

- Uniformemente continua
- Secciones horizontales, verticales y diagonales no decrecientes.
- Una combinación lineal convexa de cópulas es una cópula
- $$\text{máx}(u+v-1,0) \leq C(u,v) \leq \text{mín}(u,v), \quad u,v \in [0,1]$$

Cotas inferior y superior de Fréchet-Hoeffding:

$$W(u,v) := \text{máx}(u+v-1,0), \quad M(u,v) := \text{mín}(u,v)$$

Más propiedades de las cópulas

- Uniformemente continua
- Secciones horizontales, verticales y diagonales no decrecientes.
- Una combinación lineal convexa de cópulas es una cópula
- $$\text{máx}(u+v-1,0) \leq C(u,v) \leq \text{mín}(u,v), \quad u,v \in [0,1]$$

Cotas inferior y superior de Fréchet-Hoeffding:

$$W(u,v) := \text{máx}(u+v-1,0), \quad M(u,v) := \text{mín}(u,v)$$

Más propiedades de las cópulas

- Uniformemente continua
- Secciones horizontales, verticales y diagonales no decrecientes.
- Una combinación lineal convexa de cópulas es una cópula
- $$\text{máx}(u+v-1,0) \leq C(u,v) \leq \text{mín}(u,v), \quad u,v \in [0,1]$$

Cotas inferior y superior de Fréchet-Hoeffding:

$$W(u,v) := \text{máx}(u+v-1,0), \quad M(u,v) := \text{mín}(u,v)$$

Más propiedades de las cópulas

- Uniformemente continua
- Secciones horizontales, verticales y diagonales no decrecientes.
- Una combinación lineal convexa de cópulas es una cópula
- $$\text{máx}(u+v-1,0) \leq C(u,v) \leq \text{mín}(u,v), \quad u,v \in [0,1]$$

Cotas inferior y superior de Fréchet-Hoeffding:

$$W(u,v) := \text{máx}(u+v-1,0), \quad M(u,v) := \text{mín}(u,v)$$

Más propiedades de las cópulas

- Uniformemente continua
- Secciones horizontales, verticales y diagonales no decrecientes.
- Una combinación lineal convexa de cópulas es una cópula
- $$\text{máx}(u+v-1,0) \leq C(u,v) \leq \text{mín}(u,v), \quad u,v \in [0,1]$$

Cotas inferior y superior de Fréchet-Hoeffding:

$$W(u,v) := \text{máx}(u+v-1,0), \quad M(u,v) := \text{mín}(u,v)$$

Más propiedades de las cópulas

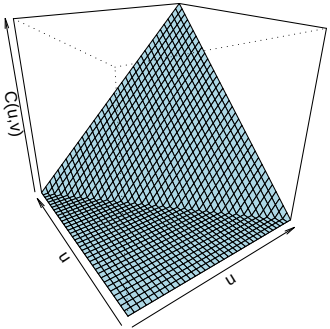
- Uniformemente continua
- Secciones horizontales, verticales y diagonales no decrecientes.
- Una combinación lineal convexa de cópulas es una cópula
- $$\text{máx}(u+v-1,0) \leq C(u,v) \leq \text{mín}(u,v), \quad u,v \in [0,1]$$

Cotas inferior y superior de Fréchet-Hoeffding:

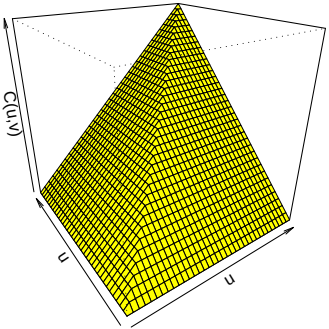
$$W(u,v) := \text{máx}(u+v-1,0), \quad M(u,v) := \text{mín}(u,v)$$

Cotas de Fréchet-Hoeffding

$$W(u, v) := \max(u + v - 1, 0)$$



$$M(u, v) := \min(u, v)$$



Modelos de dependencia basados en cópulas

1. El enfoque paramétrico
   - Estimador de máxima pseudo-verosimilitud
   - Inversión del estimador tau de Kendall
   - Inversión del estimador rho de Spearman
2. El enfoque no paramétrico
   - Estimador por la cópula de Bernstein (Erdely and Díaz-Viera, 2010), (Hernández-Maldonado et al., 2012), (Díaz-Viera et al., 2017), (Le et al., 2020).
   - **Estimador por Kernel smoothing**

Métodos de predicción basados en cópulas

Dos métodos desarrollados:

Regresión cuantil:

- Modelo de dependencia basado en cópula
- Estimación condicional cuantil (mediana)

Simulación condicional:

- Modelo de dependencia basado en cópula
- Modelo de dependencia espacial (variograma)
- Método de optimización global (Recocido Simulado)

Algoritmo de regresión cuantil condicional basado en cópula bivariada

Para un valor dado x en el rango de X y $0 < \alpha < 1$ sea $y = \varphi_\alpha(x)$ la solución de la ecuación $P(Y \leq y | X = x) = \alpha$. Entonces la gráfica de $y = \varphi_\alpha(x)$ es la *curva de regresión de cuantil* α de Y condicional en que $X = x$. Retomando (2), está demostrado en Nelsen (2006) que $P(Y \leq y | X = x) = c_u(v)|_{u=F(x), v=G(y)}$ y este resultado conduce al siguiente algoritmo para obtener la curva de regresión de cuantil α de Y condicional en que $X = x$:

1. Sea $c_u(v) = \alpha$.
2. Resolver para v, digamos $v = g_\alpha(u)$.
3. Reemplazar u por $\tilde{Q}_n^{-1}(x)$ y v por $\tilde{R}_n^{-1}(y)$ en la ecuación anterior.
4. Resolver para la curva de regresión: $y = \varphi_\alpha(x)$.

Simulación condicional

1. Genere una observación t distribuida como una distribución Uniforme [0,1].
2. Calcule $u = \tilde{F}(x)$, donde $\tilde{F}$ es la función de distribución acumulativa univariada estimada de X.
3. Defínase $v = c_u^{-1}(t)$ donde

$$c_u(v) = F_{V|U}(v|u) = P[V \leq v \mid U = u] = \frac{\partial \tilde{C}(u,v)}{\partial u} \tag{2}$$

   y $\tilde{C}$ es la función cópula estimada por el vector aleatorio (X,Y) disponible.
4. El valor simulado condicional es $y = \tilde{R}_n(v)$, donde $\tilde{R}_n$ es la función cuantil univariada estimada de Y.

Flujo de trabajo

1. **Modelación** de la dependencia conjunta basada en cópulas entre las variables primarias (propiedades petrofísicas) y las variables secundarias (los atributos sísmicos).
2. **Validación** se simulan de manera conjunta las variables primarias (propiedades petrofísicas) y las variables secundarias (los atributos sísmicos a escala de pozo) y luego se comparan las simulaciones con los datos originales.
3. **Aplicación** se simulan (y/o se estiman) las variables primarias (propiedades petrofísicas) condicionadas con las variables secundarias (los atributos sísmicos a escala sísmica).

Datos del caso de estudio

- Los datos son de un yacimiento de aguas profundas en el Golfo de México.
- El yacimiento es siliciclástico y está formado principalmente por secuencias alternadas de arenas y arcillas.
- Propiedades petrofísicas (Phit, logKtimur, Phie, Sw, Vcl) y atributos sísmicos (Vp, Vs, Rhob, Ip, Is, Poisson, K, G, Lambda) a escala de registro de pozo con un intervalo de muestreo de 0.1 m.
- Una sección vertical (inline) con los mismos atributos sísmicos.
- La malla sísmica es de 33 intervalos de 12.5 m en X y 60 intervalos de 5.5 m aproximadamente en profundidad.

Datos de registros de pozo

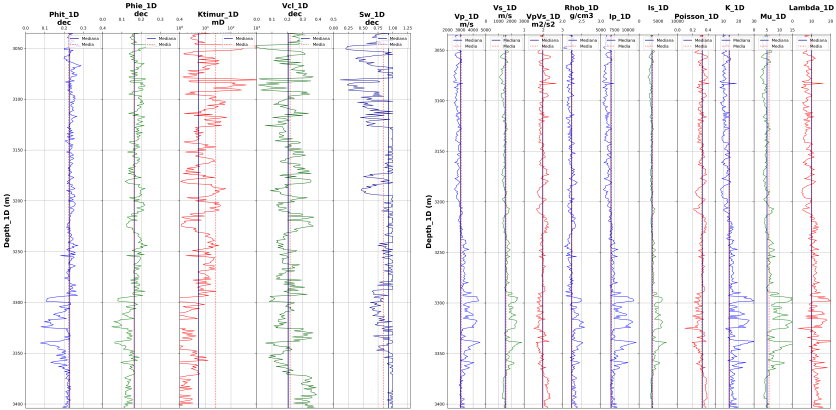


Figura 3: Petrofísica y atributos elásticos.

Sección sísmica vertical (inline) con atributos sísmicos

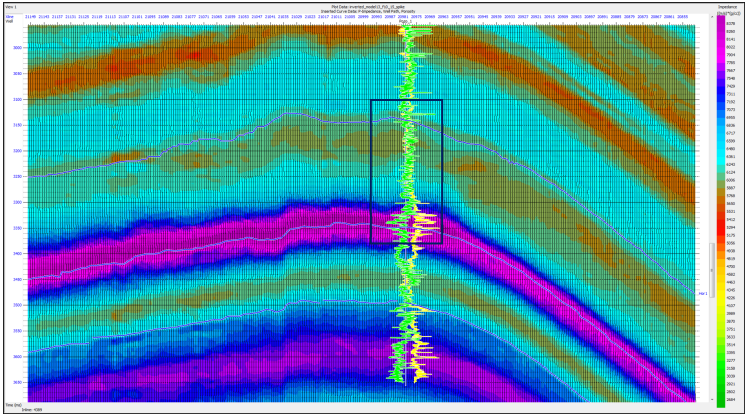


Figura 4: Sección sísmica vertical (inline) con Ip.

Enfoque de estimación

Enfoque de estimación:

Método Regresión Cuantil Condicional basado en Cópulas

Análisis de dependencia: Coeficiente de correlación de Spearman

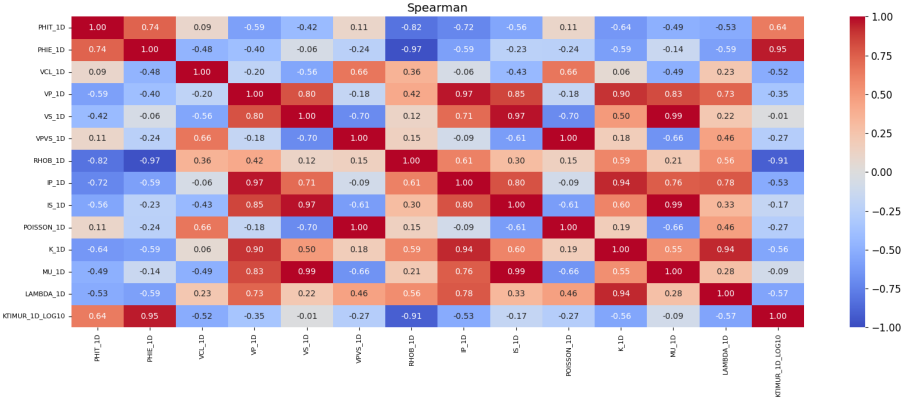


Figura 5: Mapa de calor del coeficiente de correlación de Spearman.

Análisis de dependencia

Mayores dependencias entre propiedades petrofísicas (variable primaria) y atributos elásticos (variable secundaria)

Primary variable	Secondary variable	Pearson	Kendall	Spearman
Phit	Ip	-0.8669	-0.5474	-0.7244
Phie	Rhob	-0.9742	-0.8712	-0.9747
logKtimur	Rhob	-0.8767	-0.7481	-0.9078
Vcl	Poisson	0.5986	0.4748	0.6640

Tabla 1: Coeficientes de correlación.

Scatterplot de Phit vs Ip

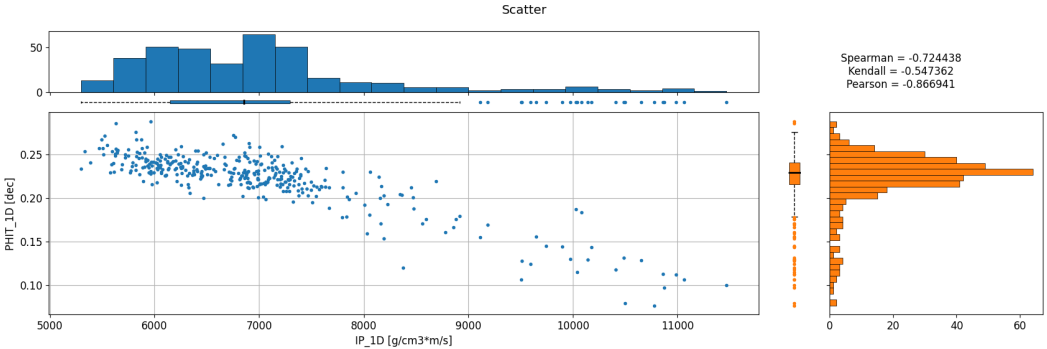


Figura 6: Scatterplot de Phit vs Ip.

Distribución de la marginal Ip

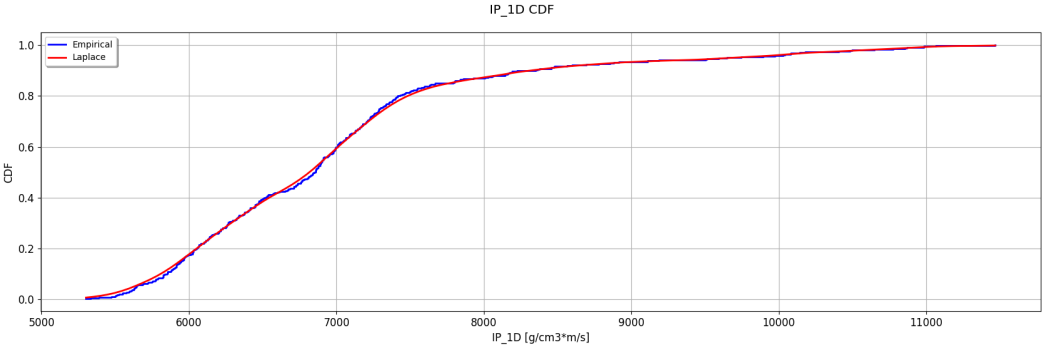


Figura 7: Función de distribución acumulada de Ip: en azul la empírica, en rojo la ajustada con Kernel Smoothing.

Distribución de la marginal Phit

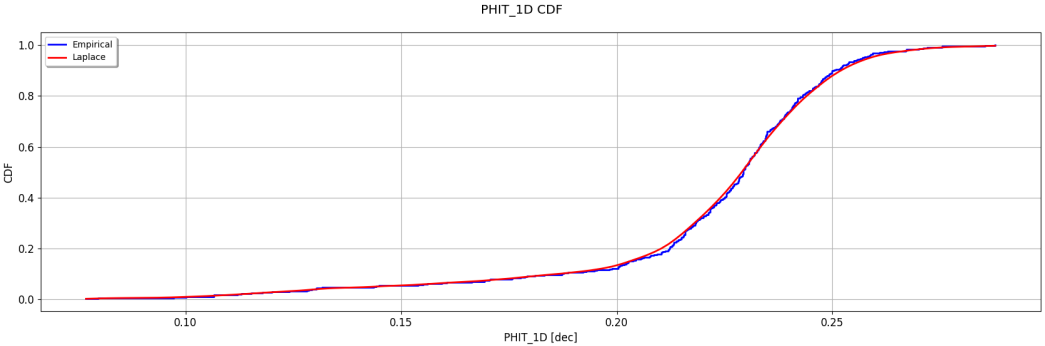


Figura 8: Función de distribución acumulada de Phit: azul-empírica, rojo-ajustada con Kernel Smoothing.

Modelos de dependencia de Phit vs Ip

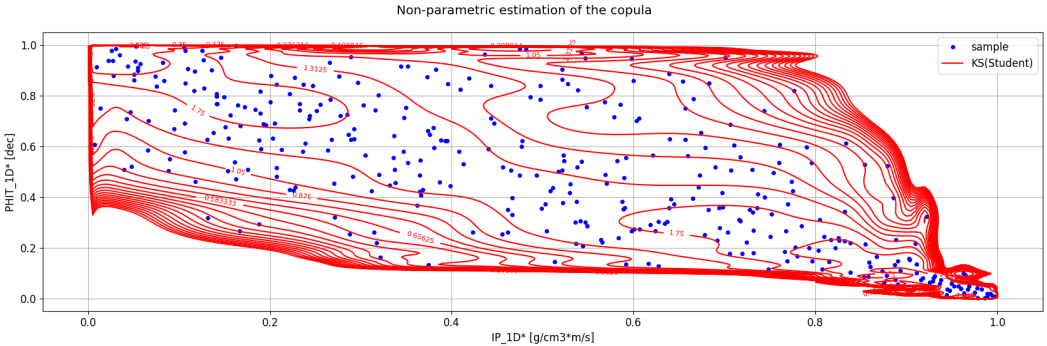


Figura 9: Mapa de contorno de la cópula bivariada Ip-Phit aproximada con Kernel Smoothing.

Validación de la dependencia de Phit vs. Ip

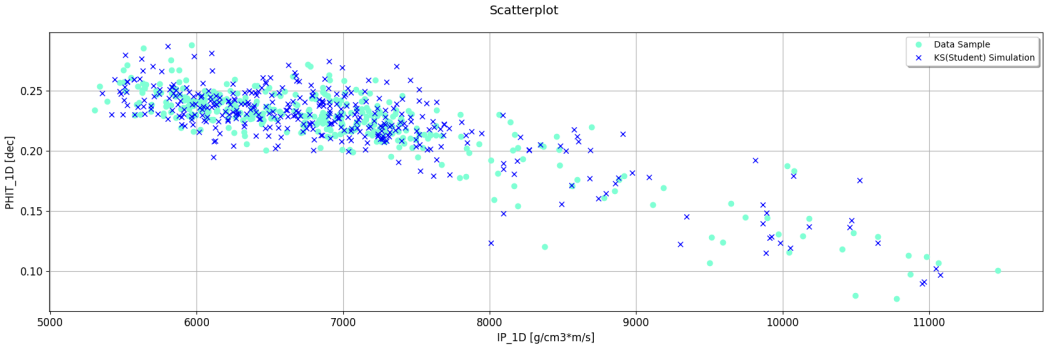


Figura 10: Scatterplot Phit vs Ip: círculos-datos, cruces-simulados.

Regresión cuantil a escala de registro

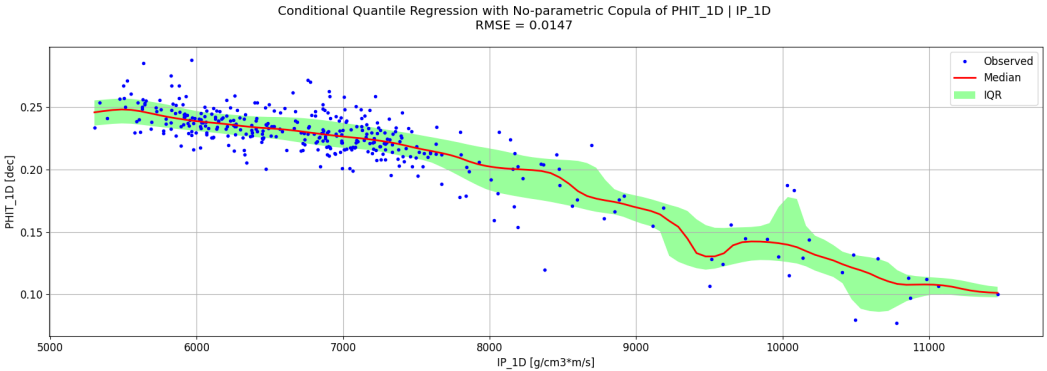


Figura 11: Regresión cuantil: rojo-mediana, verde-rango intercuartil.

Regresión cuantil a escala de registro

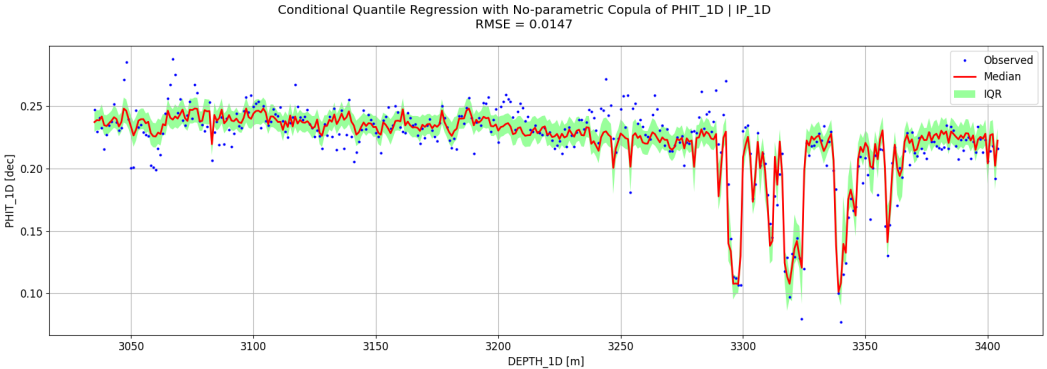


Figura 12: Regresión cuantil: rojo-mediana, verde-rango intercuartil.

Regresión cuantil a escala de registro

Métricas de desempeño de la regresión cuantil con Kernel Smoothing a escala de registro por propiedades petrofísicas

Property	R^2	MaxRE	MAE	MSE	MDAE	MAPE
Phit_QR	0.7959	0.0784	0.0107	0.0002	0.0076	0.0516
Phie_QR	0.9428	0.0457	0.0060	6.7165e-05	0.0046	0.0369
logKtimur_QR	0.7755	1.7996	0.1926	0.0943	0.1302	0.9972
Vcl_QR	0.4633	0.3023	0.0448	0.0035	0.0371	3.6792

Tabla 2: Métricas de desempeño de la regresión cuantil por propiedades petrofísicas.

- R^2 - Coeficiente de determinación
- MaxRE - Error residual máximo
- MAE - Error absoluto medio
- MSE - Error cuadrático medio
- MDAE - Error absoluto mediano
- MAPE - Porcentaje del error absoluto medio

Estimación de propiedades petrofísicas a escala sísmica

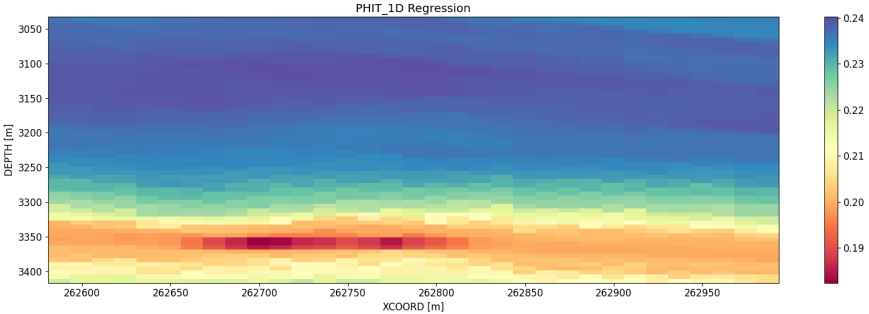


Figura 13: Mediana de Phie estimada por regresión cuantil a escala sísmica.

Estimación de propiedades petrofísicas a escala sísmica

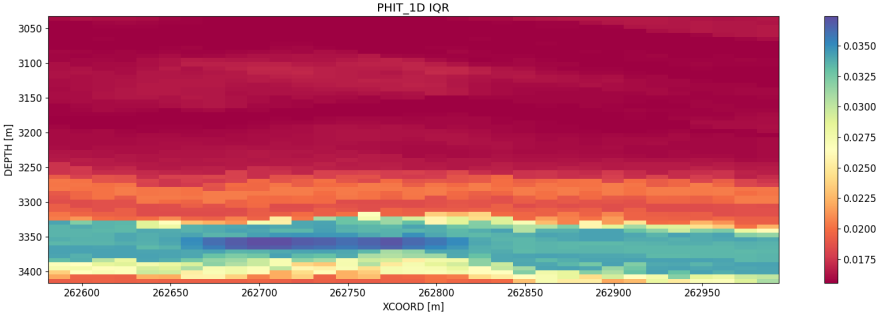


Figura 14: Rango intercuartil de Phie estimada a escala sísmica.

Enfoque de simulación

Enfoque de simulación:

Método Simulación Condicional basado en Cópulas

Análisis de dependencia

Coeficiente de correlación de Spearman

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1.00	0.71	0.78	0.05	-0.20	-0.62	-0.41	-0.81	-0.72	-0.51	0.07	-0.71	-0.46	-0.66
2	-	1.00	0.95	-0.47	-0.35	-0.37	-0.02	-0.92	-0.51	-0.15	-0.27	-0.58	-0.09	-0.65
3	-	-	1.00	-0.44	-0.26	-0.42	-0.05	-0.98	-0.57	-0.19	-0.27	-0.65	-0.12	-0.70
4	-	-	-	1.00	0.30	-0.26	-0.64	0.36	-0.14	-0.53	0.78	-0.01	-0.58	0.20
5	-	-	-	-	1.00	0.24	-0.01	0.23	0.27	0.09	0.36	0.30	0.05	0.38
6	-	-	-	-	-	1.00	0.82	0.43	0.97	0.88	-0.27	0.92	0.86	0.77
7	-	-	-	-	-	-	1.00	0.10	0.75	0.98	-0.72	0.59	0.99	0.33
8	-	-	-	-	-	-	-	1.00	0.58	0.24	0.19	0.64	0.17	0.66
9	-	-	-	-	-	-	-	-	1.00	0.83	-0.18	0.96	0.79	0.83
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.00	-0.62	0.68	0.99	0.45
11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.00	0.01	-0.67	0.30
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.00	0.64	0.92
13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.00	0.39
14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.00

Tabla 3: Phit = 1, logKTimur = 2, Phie = 3, Sw = 4, Vcl = 5, Vp = 6, Vs = 7, Rhob = 8, Ip = 9, Is = 10, Poisson = 11, K = 12, G = 13, y Lambda = 14

Datos de los registros de pozo

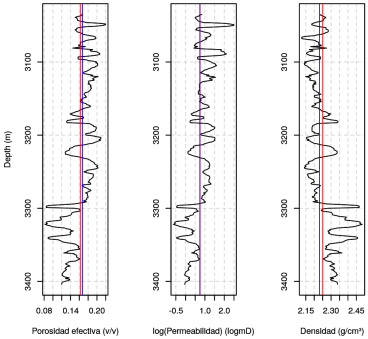
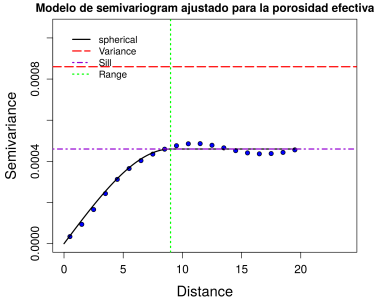
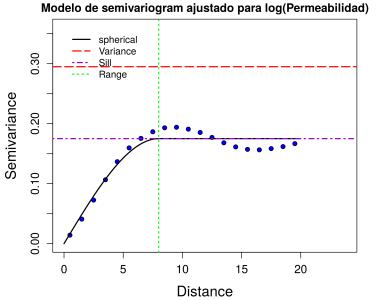


Figura 15: Registros de pozo de Phie, logKTimur y Rhob.

Variogramas de Phie y logKTimur



Model	Nugget	Sill	Range	RMSE
spherical	0	0.00046	9	0.000016



Model	Nugget	Sill	Range	RMSE
spherical	0	0.175	8	0.012041

Figura 16: Variogramas de Phie y logKTimur

Scatterplots de Phie y logKTimur

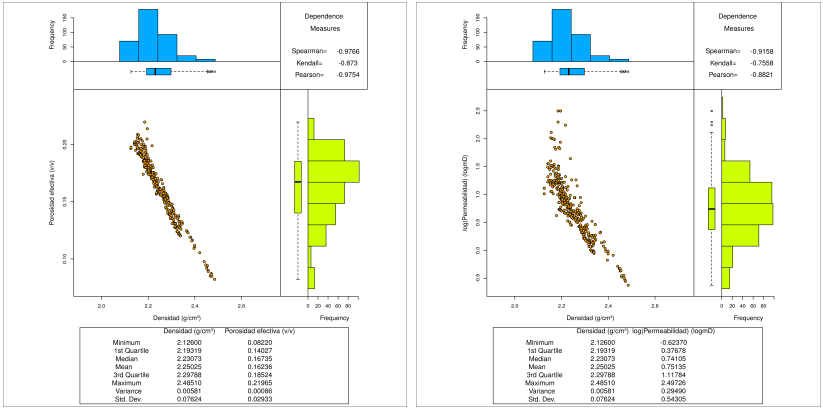


Figura 17: Scatterplots de Phie y logKTimur

Pseudo-observaciones de Phie y logKTimur

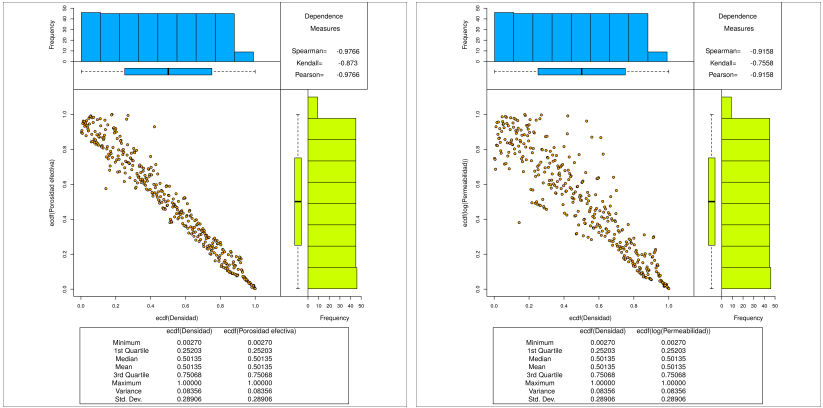
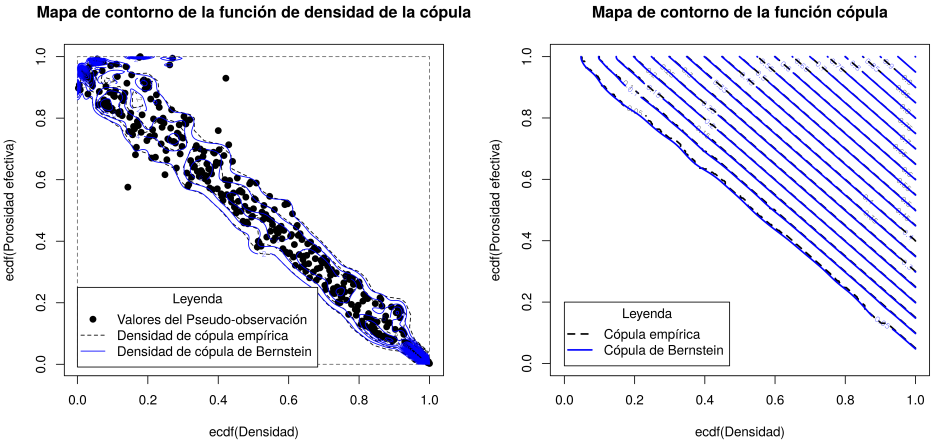
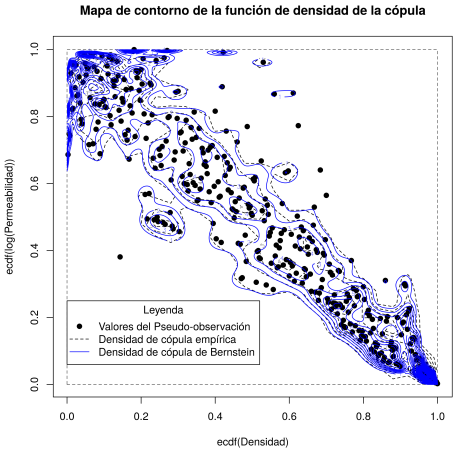


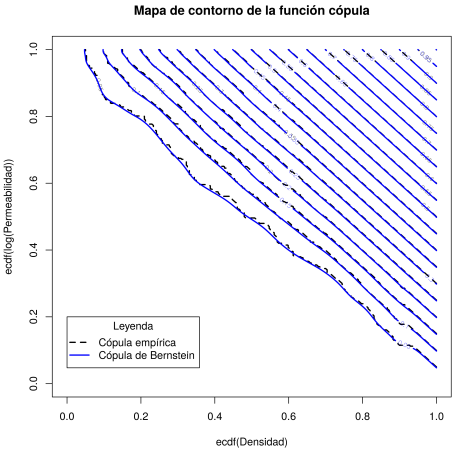
Figura 18: Pseudo-observaciones de Phie y logKTimur

Modelos de dependencia de Phie vs Rhob

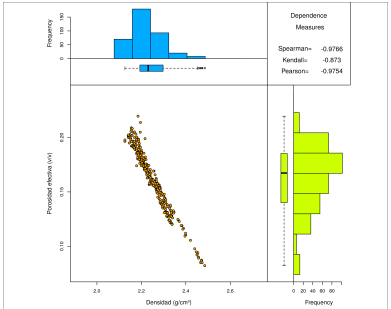


Modelos de dependencia de logKTimur vs. Rhob

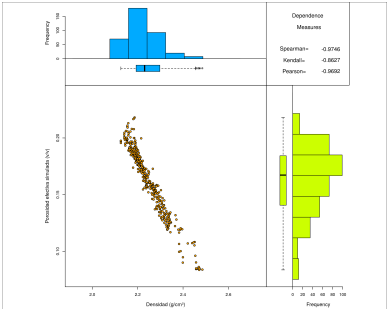




Validación de la dependencia de Phie vs. Rhob



	Densidad (g/cm³)	Porosidad efectiva (v/v)
Minimum	2.12600	0.08220
1st Quartile	2.19319	0.14027
Median	2.23073	0.16735
Mean	2.25025	0.16236
3rd Quartile	2.29788	0.18524
Maximum	2.48510	0.21965
Variance	0.00581	0.00036
Std. Dev.	0.07624	0.02933



	Densidad (g/cm³)	Porosidad efectiva simulada (v/v)
Minimum	2.12600	0.08359
1st Quartile	2.19319	0.14060
Median	2.23073	0.16723
Mean	2.25025	0.16205
3rd Quartile	2.29785	0.18429
Maximum	2.48510	0.21806
Variance	0.00581	0.00067
Std. Dev.	0.07624	0.02642

Figura 21: Scatterplots Phie vs Rhob. Izquierda: datos, Derecha: simulados

Validación de la dependencia de logKTimur vs. Rhob

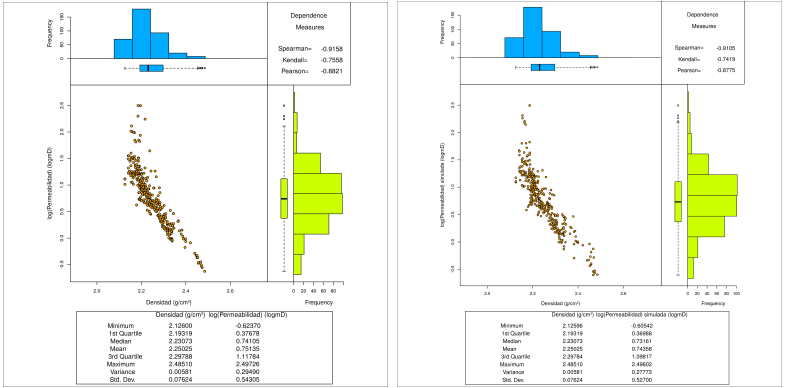
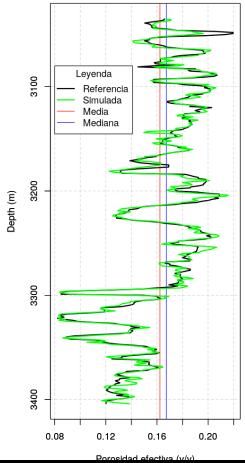
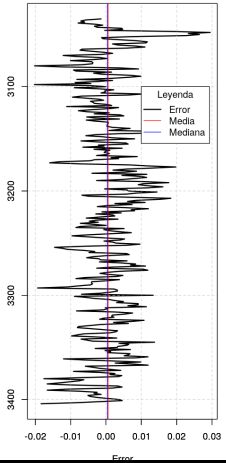
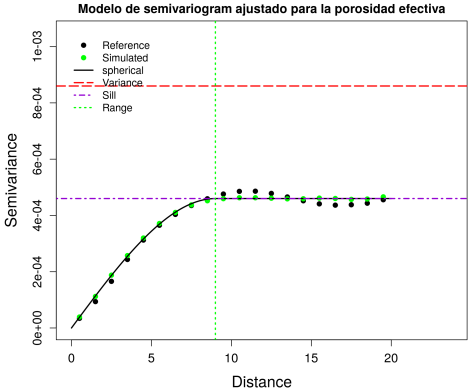


Figura 22: Scatterplots logKTimur vs Rhob. Izquierda: datos, Derecha: simulados

Validación del modelo de simulación de Phie

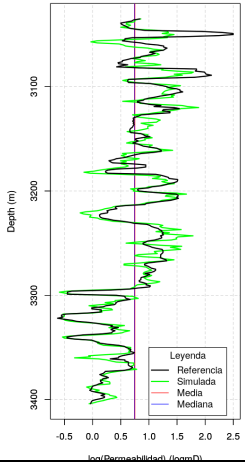


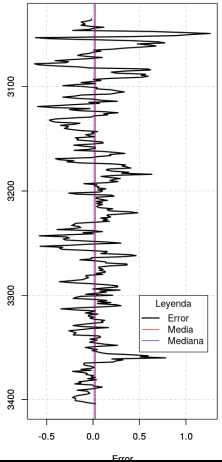


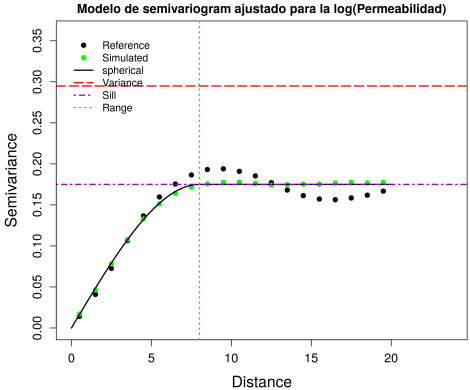


Model	Nugget	Sill	Range	RMSE
spherical	0	0.00046	9	0.000003

Validación del modelo de simulación de logKTimur







Model	Nugget	Sill	Range	RMSE
spherical	0	0.175	8	0.001693

Simulación a escala sísmica de Phie

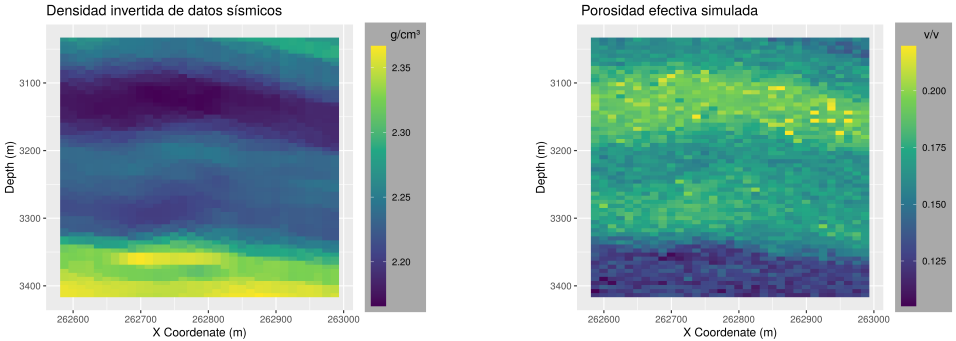


Figura 25: Sección sísmica. Izquierda: Rhob, Derecha: Phie simulada

Simulación a escala sísmica de logKTimur

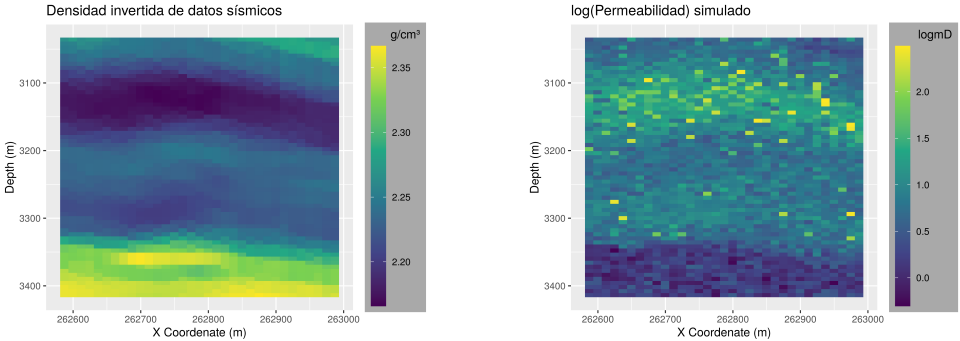


Figura 26: Sección sísmica. Izquierda: Rhob, Derecha: logKTimur simulada

Simulaciones vs. Estimaciones

Comparación:

Simulaciones vs. Estimaciones

Simulaciones vs. las Estimaciones de Phie

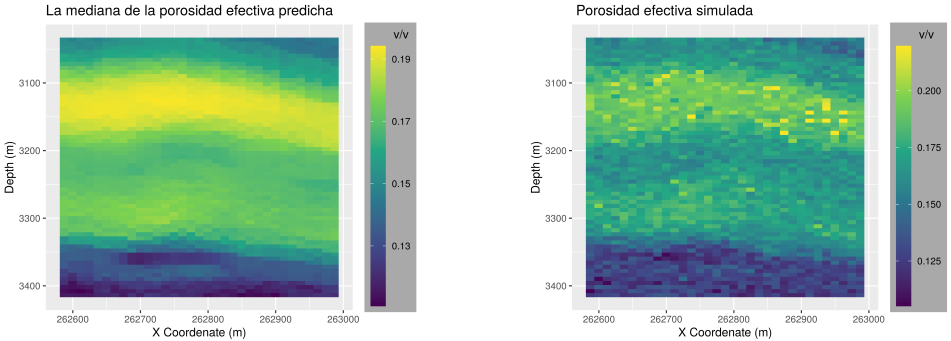


Figura 27: Izquierda: Phie - estimada, Derecha: Phie - simulada

Simulaciones vs. las Estimaciones de logKTimur

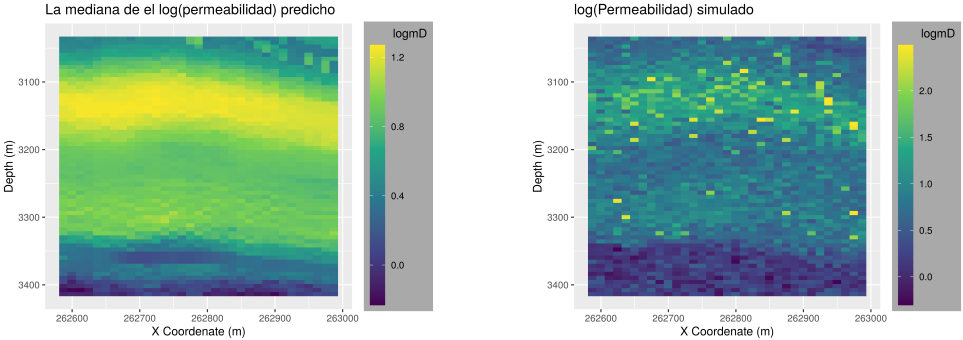


Figura 28: Izquierda: logKTimur - estimada, Derecha: logKTimur - simulada

Comparación de las Simulaciones vs. las Estimaciones

Tabla 4: RMSE de los errores.

	Porosidad total	log(Permeabilidad)	Porosidad efectiva	Volumen de arcilla	Saturación de agua
Simulación	0.0110	0.2619	0.0079	0.0459	0.1735
Regresión cuantil	0.0058	0.1547	0.0048	0.0202	0.1081

Tabla 5: Aspecto general.

	Simulación	Regresión cuantil
Costo computacional	alto	bajo
Reproducir las relaciones de dependencia	sí	no*
Reproducir la variabilidad espacial	sí	no*

Conclusiones

1. Modelos de dependencia basados en cópulas son superiores a los métodos tradicionales
2. No se requiere dependencias lineales ni distribuciones Gaussianas
3. Enfoque de estimación es de bajo costo computacional pero no reproduce la correlación espacial
4. Enfoque de simulación es de mayor costo computacional pero sí reproduce la correlación espacial
5. Implementación computacional usando software libre en R y Python

Trabajos relacionados

1. Extensión al caso multivariado (Tesis Doctoral Huong Le Van)
2. Modelos de dependencia por facies o clases petrofísicas (Tesis Maestría Martín Fernández Vergara).
3. Otros Métodos de Optimización Global (Tesis de Maestría Yarilis Gómez Martínez)
4. Enfoque de Inversión Bayesiana (Tesis Doctoral Daniel Vázquez Ramírez)

Referencias

Díaz-Viera, M., Casar-González, R., Hernández-Maldonado, V., Méndez-Venegas, J., Mendoza-Torres, F., and Checa-Rojas, P. (2013). Nuevas metodologías y herramientas de caracterización estática y dinámica considerando las propiedades fractales de los yacimientos petroleros. *Proyecto Fondos Sener-Conacyt No. 143935 (Y-00114)*.

Díaz-Viera, M. A., Erdely, A., Kerdan, T., del Valle-García, R., and Mendoza-Torres, F. (2017). *Bernstein Copula-Based Spatial Stochastic Simulation of Petrophysical Properties Using Seismic Attributes as Secondary Variable*, pages 487–504. Springer International Publishing, Cham.

Erdely, A. and Díaz-Viera, M. A. (2010). Nonparametric and semiparametric bivariate modeling of petrophysical porosity-permeability dependence from well log data. *In: Jaworski P., Durante F., Härdle W., Rychlik T. (eds) Copula Theory and Its Applications. Lecture Notes in Statistics. Springer, Berlin, Heidelberg*, 198:267–278.

Hernández-Maldonado, V., Díaz-Viera, M. A., and Erdely, A. (2012). A joint stochastic simulation method using the bernstein copula as a flexible tool for modeling nonlinear dependence structures between petrophysical properties. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 90-91:112–123.

Hernández-Maldonado, V., Díaz-Viera, M. A., and Erdely, A. (2014). A multivariate bernstein copula model for permeability stochastic simulation. *Geofisica Internacional*, 53:163–181.

Joe, H. (2014). *Dependence Modeling with Copulas*. Chapman and Hall/CRC.

Le, V. H., Díaz-Viera, M. A., Vázquez-Ramírez, D., [del Valle-García], R., Erdely, A., and Grana, D. (2020). Bernstein copula-based spatial cosimulation for petrophysical property prediction conditioned to elastic attributes. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 193:107382.

Mendoza-Torres, F., Díaz-Viera, M., and Erdely, A. (2017). Bernstein copula modeling for 2d discrete fracture network simulations. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 156:710 – 720.

Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer-Verlag New York.

Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition á n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statistique Univ. Paris*, 8:229–231.

Siguiente tema:

Métodos

de aprendizaje

no supervisado