Esmitt Ramírez J.
esmitt@opalo.ciens.ucv.ve

Volúmenes de delimitación (*Bounding volume*)

En Computación Gráfica y en Geometría Computacional, un volumen de limitación (*bounding volume*) es un volumen que cubre complemente a un conjunto de objetos y se caracteriza por su geometría simple (Por ejemplo: un cubo, una esfera, etc.).

Los *bounding volume* permiten mejorar la eficiencia en las operaciones geométricas aplicadas a los objetos dentro una escena, ya que utilizan volúmenes contenedores simples que contienen objetos más complejos. Normalmente, el costo computacional al evaluar estas operaciones sobre volúmenes simples es menor que sobre volúmenes más complejos ya que la geometría es más simple, como se observa en la Figura 1.

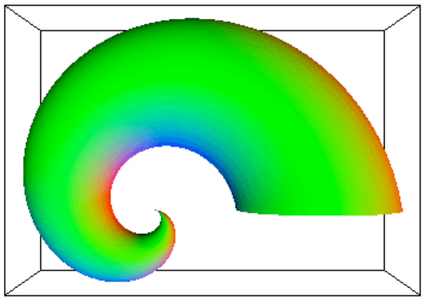


Figura 1 *Bounding volume* de un objeto

Aplicaciones

Los *bounding volume* son frecuentemente utilizados para acelerar ciertos tipos de comprobaciones, por ejemplo:

- En la detección de colisiones, cuando dos *bounding volume* no se intersecan, entonces los objetos que se encuentran contenidos no han colisionado.
- En la comprobación de la pirámide truncada (*viewing frustum*), donde se verifica si un objeto va a ser desplegado si se encuentra dentro de la pirámide, en caso contrario no es desplegado en la escena.

Tipos de *Bounding volume*

1. Esfera de limitación (*Bounding sphere*): Es una esfera que contiene al objeto

2. Cilindro de limitación (*Bounding cylinder*): Es un cilindro alineado al eje Y que contiene el objeto.

3. Caja de limitación (*Bounding box*): Es el cubo que contiene al objeto. Un *Bounding box* puede ser:

   a) Caja de limitación alineada a los ejes (*Axis Aligned Bounding Box* – AABB): Es también llamado *rectangular box*, la cual es un volumen de limitación el cual está formado por un paralelogramo donde los vectores normales de las caras coinciden con los ejes de coordenadas. En la Figura 2 se muestra el AABB de un objeto y a su vez en la Figura 3 se muestra el AABB del mismo objeto pero esta vez con el objeto rotado.

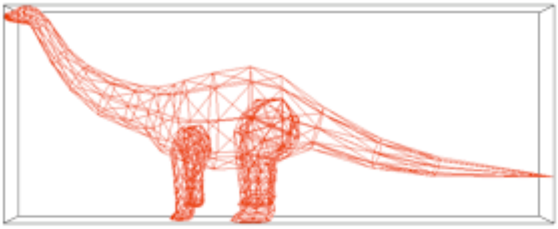


Figura 2 ***Axis Aligned Bounding Box*** **de un objeto**

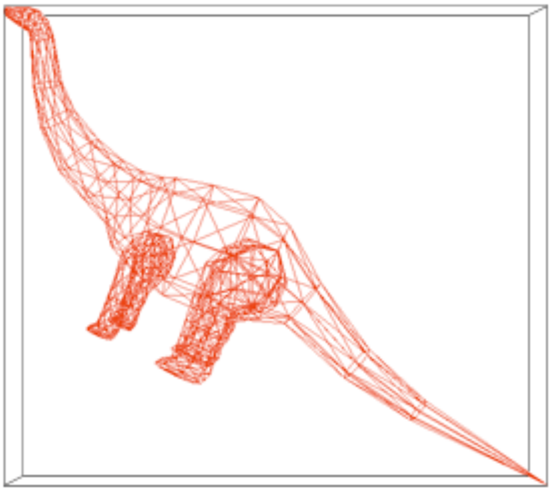


Figura 3 ***Axis Aligned Bounding Box*** **de un objeto rotado**

b) Caja de limitación orientada (*Oriented Bounding Box* – OBB): Es un volumen de limitación que está formado por un paralelogramo donde los vectores normales de las caras son ortogonales entre si, es decir, cada vector normal es ortogonal a cada uno de los otras normales de las caras del paralelogramo, siempre y cuando esta cara no sea la opuesta. Otra definición para un *Oriented Bounding Box*: es el paralelogramo mínimo que contiene toda la geometría de un objeto, como puede observarse en la Figura 4.

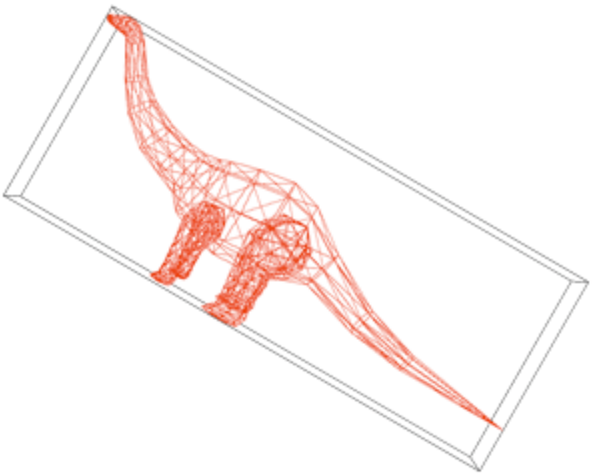


Figura 4 ***Oriented Bounding Box*** **de un objeto rotado**

c) **POLYTOPE** discreto orientado (*Discrete Oriented Polytope* - K-DOP): Un K-DOP es un volumen de limitación formado por un poliedro convexo que encierra la geometría de un objeto creando una aproximación del objeto. En la Figura 5 se puede observarse un ejemplo de un K-DOP bidimensional.

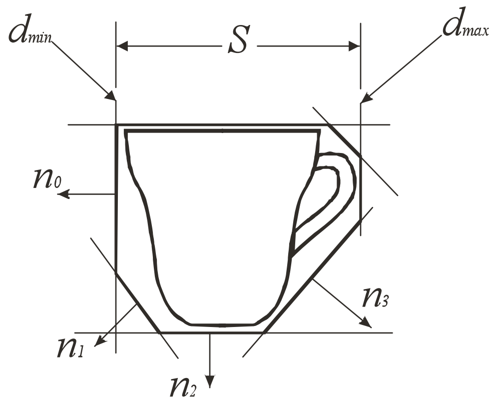


Figura 5 Ejemplo bidimensional de un 8-DOP de una taza de té

Construir un OBB

Para ajustar un volumen OBB a un modelo tridimensional (o a una parte del modelo) se debe:

1. Seleccionar una orientación para el OBB.
2. Escoger un punto central del volumen.
3. Buscar las distancias mínimas y máximas de los lados del volumen

Supongamos que se seleccionó una orientación para el OBB. Sean los vectores (v^1, v^2, v^3) alineados a las normales de las caras del OBB. Además, sea p^k el *k*-esimo vértice del modelo a ser ajustado con *1< k < n*.

Entonces se debe proyectar cada uno de los vértices p^k, del modelo en cada uno de los vectores v^i, con $i = 1,2,3$. Los valores máximos y mínimos a lo largo de cada eje vienen dados por:

$$t\min^i = MIN_k\left(v^i \cdot p^k\right)$$
$$t\max^i = MAX_k\left(v^i \cdot p^k\right)$$

donde $t\min^i$ y $t\max^i$ representan las distancias mínimas y máximas en cada eje-*i*.

El *i*-esimo eje del OBB se encuentra alineado con v^i, y el ancho del OBB de ese eje viene dado por $t\max^i - t\min^i$. El punto central del OBB viene dado por:

$$c = \frac{1}{2}\left[\left(t\min^1 + t\max^1\right)v^1 + \left(t\min^2 + t\max^2\right)v^2 + \left(tmi^3 + t\max^3\right)v^3\right]$$

Para obtener los 8 puntos en $\Re^3$ que conforman un *bounding volume*, se deben utilizar los valores $t\min^i$ y $t\max^i$ como parámetros de la ecuación paramétrica de la recta, de la siguiente forma:

$$p\min^i = c + t\min^i v^i$$

$$p\max^i = c + t\max^i v^i$$

De esta forma, se obtienen 6 puntos: 3 mínimos y 3 máximos que son los puntos en $\Re^3$ que conforman los puntos medios de cada una de las caras del OBB en los 3 ejes.

Entre los métodos existentes para el cálculo del volumen OBB se encuentran:

- Métodos Basados en la Matriz de Covarianza
- Método de Distribución de Vértices
- Método de Distribución de Vértices Extremos
- Método de Distribución de Triángulos
- Método de Distribución de la Cápsula Convexa

Estos métodos se basan en el muestreo estadístico de primitivas (vértices, segmentos, triángulos, polígonos) que conforman el modelo. En la geometría de los modelos tridimensionales es posible encontrar degeneraciones en la distribución de las primitivas que afecten el muestreo estadístico, y por consiguiente no se logre generar un volumen de limitación que se ajuste correctamente.

Construir un OBB utilizando Algoritmos Genéticos

Para construir un volumen OBB a un objeto 3D, se utilizan métodos los cuales dependen de las características de dicho objeto. Estos métodos no aseguran que los volúmenes generados se ajusten perfectamente al modelo. El principal problema de los métodos es establecer una orientación óptima del OBB, para que el volumen obtenido sea el mínimo y se ajuste al modelo.

Con un algoritmo genético se desea resolver el siguiente problema: Conseguir la orientación del volumen OBB que se ajuste mejor al modelo. La orientación está expresada en función a 3 vectores ortonormales[1] $\left(v^1, v^2, v^3\right)^{\perp}$ entre sí, que representan un eje de coordenadas.

A continuación se describe el algoritmo genético utilizado:

Codificación

Un individuo va a representar la orientación del OBB. Se codifica el cromosoma del individuo como un quaternion[2] de la forma (x, y, z, w) como se muestra en la Figura 6, donde (x, y, z) representa un vector y w un ángulo de rotación para ese vector. El

[1] Dos vectores son ortonormales si son ortogonales y unitarios.
[2] Un quaternion es una forma de representar una rotación a través de cualquier eje.

quaternion representa la rotación que debe ser aplicada a los 3 vectores ortonormales, logrando de está manera que siempre mantengan su condición de ortogonales.

X	Y	Z	W

Figura 6 Cromosoma de 4 variables

La codificación es binaria, por ende, los alelos son 0 y 1. Se asigna un número de bits para cada variable y todos tendrán la misma precisión dentro de su rango. Si se tiene una precisión de n bits dentro de un rango $[a,b]$, se tiene que:

		Para n = 4 y $[a,b]$=[-1,1]
Valores posibles	2^n	$2^4 = 16$ valores posibles
Incremento	$Inc = \frac{b-a}{n-1}$	$\frac{(-1)-1}{4-1} = \frac{-2}{3} = -0.667$
Obtener un valor	$a + Var * Inc$	$-1 + Var * -0.667$

- Inc es el intervalo entre cada valor de una variable. Por ejemplo, $Inc = 0.25$ y $a = 0$, entonces los valores posibles son 0.0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.0, 1.25, ….
- Var es el valor decimal de una variable codificada en binario en el cromosoma del individuo. Por ejemplo, el binario 1001101 representa el 77 en base 10.

Función de Adaptación

Primero se debe evaluar la función de evaluación de la aptitud de cada individuo de la población en el algoritmo genético, para ello se utilizará el valor del volumen del OBB, que para un paralelepípedo es:

$$\text{Función de Evaluación, } h(x) = \prod_{i=1}^{3} E_i$$

donde E_i es la distancia desde el punto mínimo al máximo de cada uno de los lados del volumen, es decir, la extensión en el eje (x,y,z).

Una vez obtenido el valor de la función de evaluación, la función de adaptación viene dada por:

$$\text{Función de Adaptación, } f(x) = \prod_{i=1}^{3} MAX(E_i) - h(x)$$

donde $MAX(E_i)$ es la mayor distancia entre los 3 ejes, es decir, $MAX(dx,dy,dz)$.

Selección

En este algoritmo genético la selección de los individuos que transmitirán su material genético a las siguientes generaciones se realiza basado en el método de la ruleta, el cual

Esmitt Ramírez J.
esmitt@opalo.ciens.ucv.ve

es un método aleatorio que permite la posibilidad de que puedan ser seleccionados aquellos individuos con menor nivel de aptitud, pero favoreciendo a los más aptos.

Cruce

El operador de cruce implementado fue: cruce de un punto, donde se selecciona de forma aleatoria un punto entre $[1, L]$, siendo L la longitud en bits del cromosoma de un individuo dentro de la población.

Mutación

La mutación se realiza de forma aleatoria para cada uno de los componentes del quaternion, es decir, a todos los genes del mismo.

Parámetros del Algoritmo Genético

Existen ciertas consideraciones en la implementación del algoritmo genético para calcular un OBB de un objeto tridimensional:

- La función *random* seleccionada fue extraída del Capítulo 7 del libro *Numerical Recipes in C, The Art of the Scientific Computing*.
- Todos los individuos que son generados de forma aleatoria son factibles, esto es por la forma de codificar los individuos. Siempre se van a encontrar dentro del rango seleccionado.
- El quaternion está formado por un vector y un ángulo de rotación. El rango de los valores del vector se encuentra entre $[-1,1]$, y el ángulo de rotación se encuentra entre $[-360,360]$ grados.
- En la ejecución del algoritmo, la nueva población sustituirá completamente a la anterior.
- La terminación del algoritmo viene dada por 2 condiciones de parada:

1. Se llego al número máximo de generaciones, siendo ésta una variable que se define antes de ejecutar el algoritmo.
2. El valor de la función de adaptación de un cierto porcentaje de la población (definido antes de ejecutar el algoritmo) se encuentra por encima del promedio de la función de adaptación de toda la población. Este porcentaje asegura la generación de una cantidad considerable de individuos óptimos para la solución del problema.

Resultados Obtenidos

En la Figura 7 se muestra el *Axis Aligned Bounding Box* (AABB) de un objeto, de color rojo, y en la Figura 8 se muestra el AABB y el *Oriented Bounding Box* (OBB), de color amarillo, al mismo tiempo.

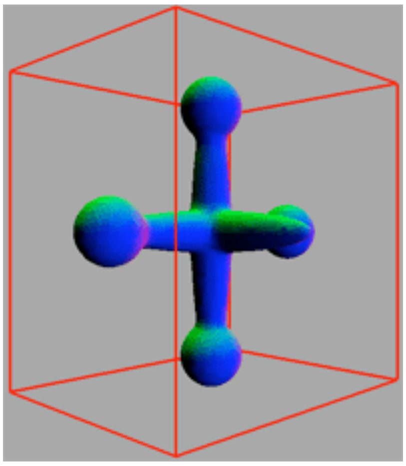


Figura 7 AABB

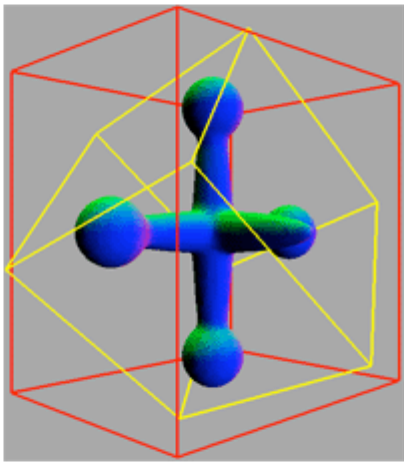
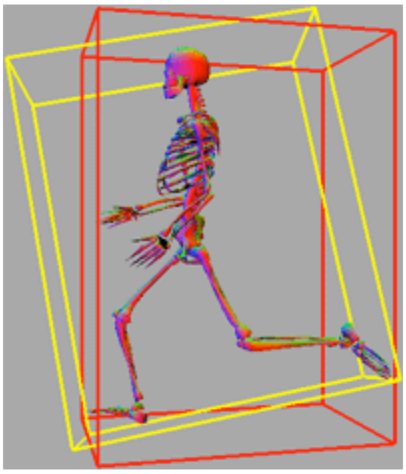


Figura 8 AABB + OBB

Algunos de los resultados de obtener el OBB con el algoritmo genético son:

Número de Vértices	3304
Volumen del AABB	329.99
Volumen del OBB	138.82
Población	50 individuos
Número de generaciones	21 generaciones, luego el 85% de la población es superior al valor promedio de la función de adaptación
Probabilidades	Mutación = 1% y Cruce = 70% de la población
Número de bits	4 bits de precisión

En otro experimento realizado, se obtuvieron los siguientes resultados:



Número de Vértices	2873
Volumen del AABB	0.28
Volumen del OBB	0.22
Población	75 individuos
Número de generaciones	32
Probabilidades	Mut.=1% y Cruce=60%
Número de bits	3 bits de precisión

En ese mismo experimento se obtuvo una gráfica, Figura 9, que representa la cantidad de la población que supera el promedio del valor de la función de adaptación de todos los individuos.

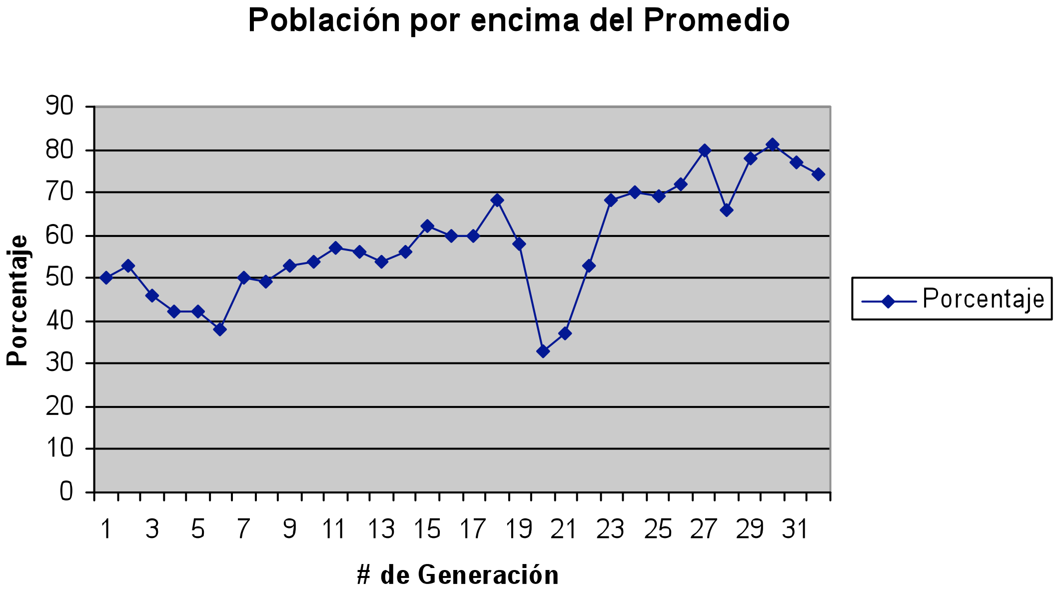


Figura 9 Porcentaje por encima del promedio de la función de adaptación

Se puede observar la presencia de altibajos en la creación de la población, indicando la presencia de diversidad entre generación y generación. Finalmente a medida que van evolucionando se van creando individuos más aptos y el porcentaje del número de individuos por encima del promedio va aumentando.

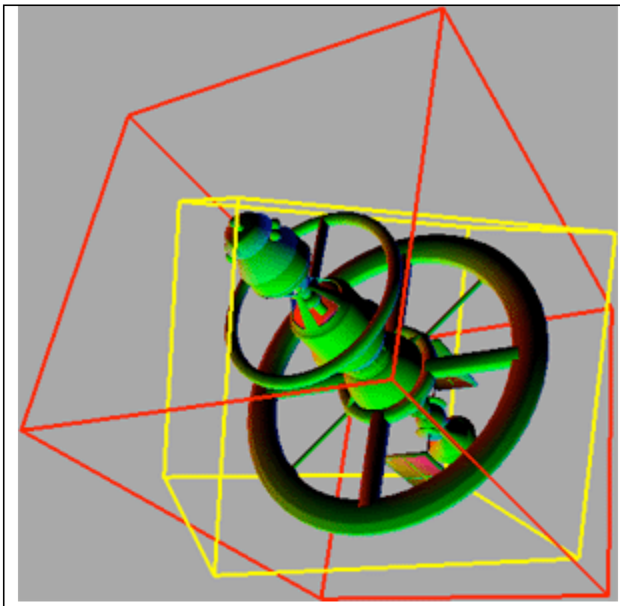


Figura 10 Reducción considerable del volumen

En la mayoría de los casos, el algoritmo genético consigue individuos óptimos como solución del problema en cuestión, como es el caso de la Figura 10, donde el AABB tiene un volumen de 4469.19 y el OBB obtenido tiene un volumen de 2634.11. La reducción es de un 41.06% del OBB sobre el AABB.

El tiempo de ejecución del algoritmo para el modelo tridimensional fue de aproximadamente 4 seg.