



# Deformación de un cilindro

Martín Sturla, Darío Sneidermanis

*Estudiantes Instituto Tecnológico de Buenos Aires (ITBA)*

28 de Junio de 2012

*(Paper No Publicado)*

**Resumen**—El siguiente paper busca analizar la deformación radial de un cilindro cuando es expuesto a cambios de temperatura, utilizando ecuaciones en diferencias.

**Palabras clave**—Deformación. ecuaciones en diferencias, derivadas parciales, temperatura.

Con  $p = \frac{\Delta t 4K}{\Delta r^2}$  y  $q = \frac{\Delta r}{r}$ .

Las ecuaciones de contorno están dadas por:

$$u(1, t) = 100 + 40t \quad (5)$$

$$u\left(\frac{1}{2}, t\right) = t \quad (6)$$

Y la condición inicial es:

$$u(r, 0) = 200(r - 0, 5) \quad (7)$$

Donde el dominio de las funciones está dado por  $\frac{1}{2} < r < 1$  y  $0 \leq t \leq 10$ . Además, la deformación  $d$  del cilindro es proporcional a la temperatura media del cilindro ( $\alpha = 10, 7$ ), es decir:

$$d(t) = \alpha \int_{\frac{1}{2}}^1 u(r, t) r dr \quad (8)$$

## I. INTRODUCCIÓN

El estudio de la deformación radial de un cilindro debido a cambios en su temperatura concierne a varias ramas de las ingenierías industriales y mecánicas. En particular, se utiliza para encajar engranajes o discos en un eje, e incluso para el estudio de turbinas o calderas.

La ecuación diferencial en derivadas parciales que describe la distribución de temperatura en dichos cilindros no es lineal. Sin embargo, se pueden utilizar ecuaciones en diferencias para aproximar la solución. Este paper busca hallar una ecuación en diferencias que lo haga y analizar su estabilidad.

## II. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN EN DIFERENCIAS

La temperatura  $u(r, t)$  satisface la siguiente ecuación diferencial ( $K = 0, 1$ ):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{4K} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

Dicha ecuación diferencial se puede llevar a una ecuación en diferencias utilizando las siguientes propiedades:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2)$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (3)$$

Sean  $\Delta r$  y  $\Delta t$  los cambios en el radio y temperatura respectivamente, y  $v(r, t)$  la aproximación de  $u(r, t)$  utilizando ecuaciones en diferencias. La ecuación en diferencias está dada por:

$$p(1+q)v(n+1, t) + (1-p(2+q))v(n, t) + pv(n-1, t) = v(n, t+1) \quad (4)$$

Nótese que la ecuación en diferencias (4) da, utilizando las condiciones iniciales y de contorno, una regla para aproximar la temperatura en una grilla perteneciente al dominio. Utilizando la misma se puede aproximar la integral de la ecuación (8) utilizando la regla del trapecio.

## III. ESTABILIDAD

### A. Matrices

De la ecuación (4) se desprende la siguiente propiedad:

$$\overline{v_{t+1}} = \text{tridiag}(p, 1 - p(2 + q), p(1 + q)) \overline{v_t} \quad (9)$$

Donde  $\overline{v_k}$  es un vector columna con los valores aproximados por  $v$  en el momento  $k\Delta t$  para cada valor de  $r$  en la grilla. Por otro lado,  $\text{tridiag}(p, 1 - p(2 + q), p(1 + q))$  es una matriz tridiagonal con  $1 - p(2 + q)$  en la diagonal,  $p$  abajo de la diagonal y  $p(1 + q)$  arriba de la diagonal. Además:

$$\overline{v_k} = \text{tridiag}(p, 1 - p(2 + q), p(1 + q))^k \overline{v_0} \quad (10)$$

De la ecuación (10) se puede apreciar que si los autovalores de la matriz diagonal son mayores en módulo a 1,  $\overline{v_k}$  diverge, dado que los errores cometidos en cada paso se propagan demasiado. Los autvalores de una matriz tridiagonal con valores  $(a, b, c)$  de dimensión  $n$  están dados por:

$$\lambda_j = b + 2\sqrt{accos}\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \quad (11)$$

Assumiendo el peor caso, cuando el coseno vale 1, y reemplazando por los valores de la ecuación (10) se deduce:

$$\begin{aligned} 1 &\geq 1 - 2p - pq + 2\sqrt{p^2(1+q)} \\ 0 &\geq -2p - pq + 2p\sqrt{1+q} \\ 2 + q &\geq 2\sqrt{1+q} \end{aligned}$$

Como ambos lados son siempre positivos, es válido elevarlos al cuadrado sin modificar el símbolo de la inecuación.

$$\begin{aligned} 4 + 4q + q^2 &\geq 4 + 4q \\ q^2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Es claro ver que la inecuación (12) no ofrece ningún tipo de información dado que  $q$  es trivialmente un número real.

#### B. Von Neumann

A la ecuación (4), se le aplica una transformada discreta de Fourier sobre la variable  $r$  a ambos lados:

$$\widehat{V}_{t+1} = p(1+q)e^{i\omega}\widehat{V}_t + (1-p(2+q))\widehat{V}_t + pe^{-i\omega}\widehat{V}_t$$

De lo cual se deduce:

$$\frac{\widehat{V}_{t+1}}{\widehat{V}_t} = p(1+q)e^{i\omega} + (1-p(2+q)) + pe^{-i\omega} \quad (13)$$

El criterio de Von Neumann pide que para  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  el módulo al cuadrado de dicha razón sea menor a 1. Utilizando que  $e^{i\omega} = \cos(\omega) + i\sin(\omega)$ :

$$1 \geq \cos(\omega)(2p + pq) + ipq\sin(\omega) + 1 - p(2+q) \quad (14)$$

El módulo de un complejo equivale a su parte real al cuadrado más su parte imaginaria al cuadrado, por lo que se deduce:

$$1 \geq (\cos(\omega)(2p + pq) + 1 - p(2+q))^2 + (pq\sin(\omega))^2 \quad (15)$$

Se derivó la parte derecha de la inecuación y se igualó a cero para hallar su máximo. La expresión puede ser hallada en el Anexo B. Se anula dicha expresión en  $\omega = 0$ .

Es fácil ver que si  $\omega = 0$  la derivada es igual a cero. Sustituyendo  $\omega$  por 0 en (15), se llega a:

$$1 \geq (2p + pq) + 1 - p(2+q) = 1$$

Lo cual es trivialmente válido. Pero todavía se deben evaluar los límites del dominio, es decir los casos en los que  $\omega$  vale  $-\pi$  y  $\pi$ . Es fácil ver de (15) que si  $\omega$  vale  $\pi$  la inecuación es más restrictiva dado que el seno vale 1 y el valor que lo multiplica,  $p^2q^2$ , es positivo, por lo que se consideró solo dicho caso.

$$\begin{aligned} (1 - p(2+q))^2 + p^2q^2 &\leq 1 \\ -2p(2+q) + p^2(4 + 4q + q^2) + p^2q^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$4p^2 + 4qp^2 + 2q^2p^2 \leq 2pq + 4p$$

Como  $p$  es positivo:

$$4p + 4qp + 2q^2p \leq 2q + 4 \quad (16)$$

Esto da una condición de estabilidad que se debe cumplir. Sin embargo, si se desea una relación más clara entre  $\Delta t$  y  $\Delta r$ , se puede asumir que como  $q$  es  $\frac{\Delta r}{r}$ , considerando un  $\Delta r$  pequeño, el primer término del lado izquierdo será el mayor. Por otro lado, como  $q$  es positivo, en particular debe ser menor a 4. Por lo que:

$$p \leq 1 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{4K\Delta t}{\Delta r^2} &\leq 1 \\ \Delta t &\leq 2,5\Delta r^2 \end{aligned} \quad (18)$$

La inecuación (18), debido a las asunciones hechas, es teóricamente una condición necesaria pero no suficiente; no es equivalente a (16). Sin embargo, en la práctica dio buenos resultados. Además, demuestra que el paso usado para el tiempo debe ser sustancialmente menor al paso del radio (asumiendo que los valores pequeños).

#### IV. ERROR EN EL CÁLCULO DE LA INTEGRAL

El error en una integral aproximada por el método del trapecio está dado por:

$$e_{trap} = -\frac{(b-a)^3 \frac{\delta^2 f(\xi)}{\delta x^2}}{12N^2} \quad (19)$$

Donde  $N$  es la cantidad de pasos usados, y  $b$  y  $a$  los intervalos de la integral. Sustituyendo por los valores utilizados:

$$e_{trap} = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial r^2}}{12\left(\frac{1}{2\Delta r}\right)^2}$$

$$e_{trap} = -\frac{\Delta r^2}{24} \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial r^2}$$

Se analizó el caso de  $t = 10$ . El siguiente gráfico muestra una aproximación de la derivada segunda de  $u$  respecto al radio:

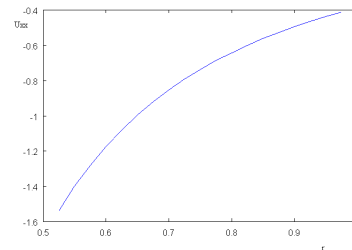


Figura 1: Derivada segunda de  $u$  respecto a  $r$  para  $t = 10$ .

Del gráfico se puede apreciar que la derivada segunda es negativa, por lo que el error es positivo. Es decir, se subestima el valor de la deformación. Por otro lado, es

evidente que 2 es una cota apropiada para el módulo de dicha derivada. Por lo que:

$$e_{trap} = \frac{\Delta r^2}{12}$$

En otras palabras, el error de aproximar la integral por el método del trapecio es equivalente a un doceavo del paso en el radio usado, para  $t = 10$ . Nótese que este error contempla únicamente el error por utilizar dicho método y no el error por aproximar  $u(r, t)$  utilizando  $v(r, t)$ .

## V. RESULTADOS

### A. Temperaturas para distintos radios

El siguiente gráfico muestra temperaturas para distintos radios en función del tiempo. Se utilizó  $\Delta r = 0,025$  y  $\Delta t = 0,0005$ . Se puede apreciar que la temperatura incrementa en el tiempo, y además es menor para menores valores del radio.

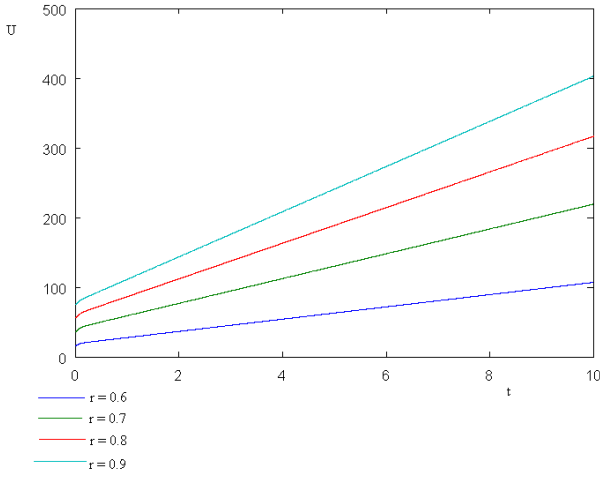


Figura 2: Temperatura en función del tiempo para distintos radios.

En el siguiente gráfico se demuestra la temperatura en función del radio y el tiempo, utilizando  $\Delta r = 0,1$  y  $\Delta t = 0,001$ . Las conclusiones extraídas del mismo son equivalentes a las del gráfico anterior.

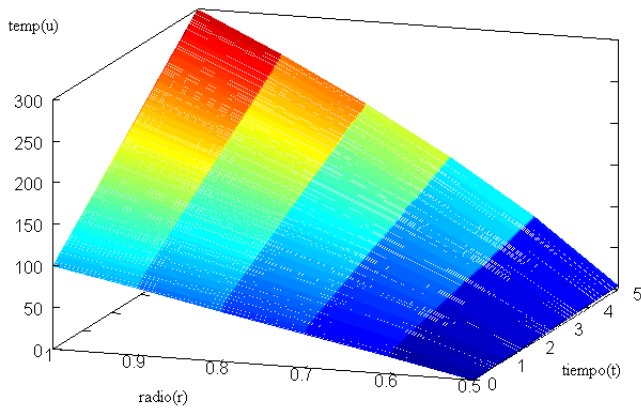


Figura 3: Temperatura en función del tiempo y el radio.

### B. Deformación

La figura 4 demuestra la deformación en función del tiempo. Se utilizó nuevamente  $\Delta r = 0,025$  y  $\Delta t = 0,0005$ . Nótese que la deformación incrementa con el tiempo, lo cual es esperable debido a que la temperatura también lo hace. Por otro lado, se puede apreciar que el incremento es lineal.

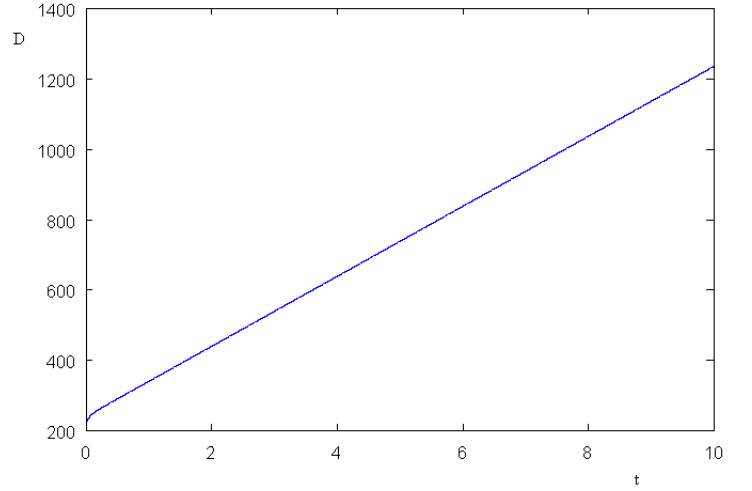


Figura 4: Deformación en función del tiempo.

### C. Isotermas

En la figura dos se pueden apreciar las isotermas de la solución. Estas serían las curvas resultantes de la intersección de los planos para distintas temperaturas con la solución. El siguiente gráfico (figura 5) muestra las curvas para distintas temperaturas, llevadas todas a un mismo plano para poder representarlas en dos dimensiones.

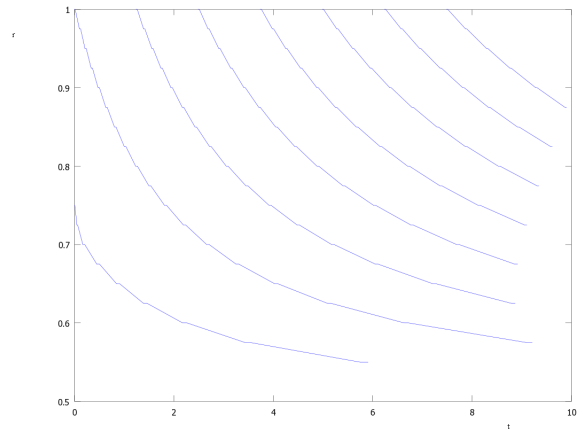


Figura 5: Isotermas para  $u = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400$ , de izquierda a derecha.

#### D. Utilización de pasos no estables

Los siguientes gráficos muestran la temperatura en función del radio para tiempos sucesivos. Se utilizó un paso de  $\Delta r = 0,1$  y  $\Delta t = 0,1$ . Nótese que para estos valores  $p = 4$ , lo cual es inestable según (17).

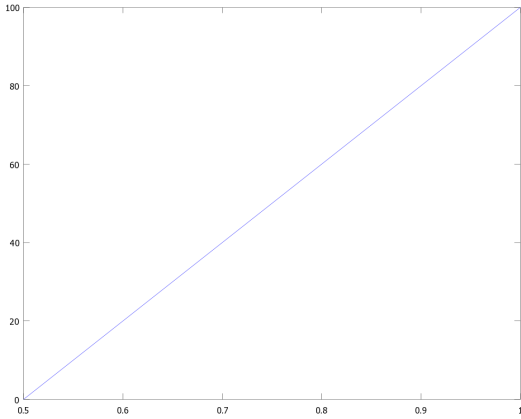


Figura 6: Temperatura en función del radio, para  $t = 0,0$ .

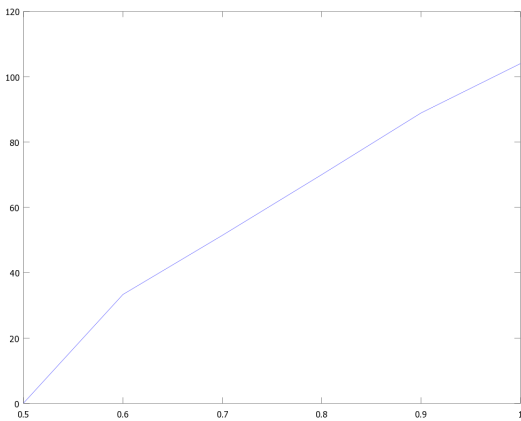


Figura 7: Temperatura en función del radio, para  $t = 0,1$ .

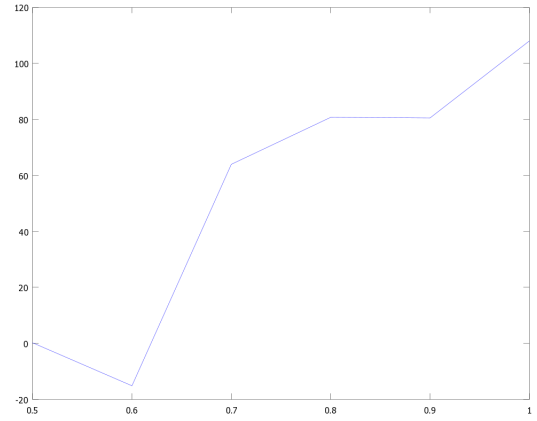


Figura 8: Temperatura en función del radio, para  $t = 0,2$ .

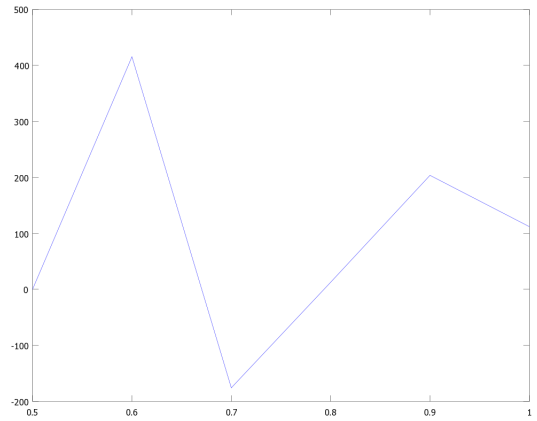


Figura 9: Temperatura en función del radio, para  $t = 0,3$ .

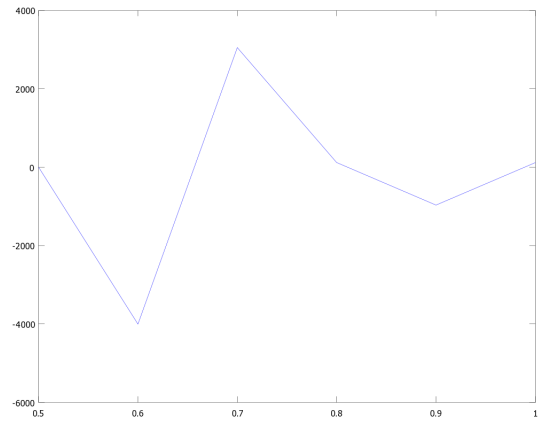


Figura 10: Temperatura en función del radio, para  $t = 0,4$ .

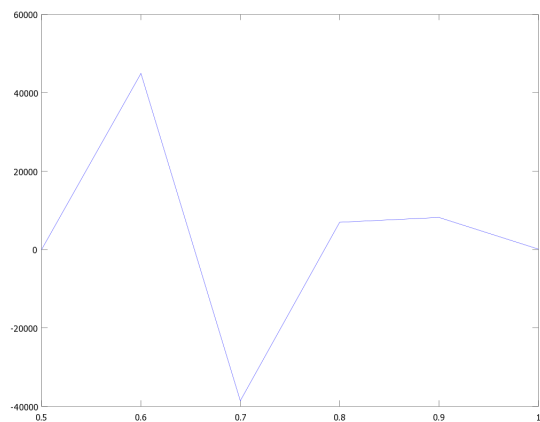


Figura 11: Temperatura en función del radio, para  $t = 0,5$ .

De los gráficos se puede apreciar cómo rápidamente la temperatura comienza a diverger. Esto se debe al uso de pasos inestables, lo cual demuestra la importancia de garantizar la estabilidad de la aproximaciones utilizando ecuaciones en diferencias.

#### REFERENCIAS

- [1] Regla del trapecio - [http://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal\\_rule](http://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_rule)
- [2] Ecuaciones en diferencias - [http://en.wikipedia.org/wiki/Finite\\_difference](http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference)

## ANEXO A: CÓDIGO OCTAVE

```

function main( dr, dt, max_time)
    %Inicializo la matriz de temperaturas y vector de deformaciones
    T = ceil(max_time/dt) ;
    R = ceil(0.5/dr) + 1;
    U = zeros(R,T);
    %Se llenan las condiciones de contorno
    for t = 1:T
        if( (t-1) * dt <= 10)
            U(1, t) = (t-1) * dt;
            U(R, t) = 100 + 40*dt*(t-1);
        else
            U(1, t) = 10;
            U(R, t) = 500;
        endif
    end
    %Condiciones iniciales
    for r = 1:R
        U(r, 1) = 200* ((r-1)*dr);
    end
    %Variables datos
    K = 0.1;
    a = 10.7;
    %Variables de la ecaucion en diferencias
    p = dt * 4 * K / (dr*dr);
    %Se llena la matriz con el resto de los valores utilizando al regla en diferencias
    for t = 1:T-1
        for r = 2: R-1
            q = dr/((r-1)*dr + 0.5);
            U(r,t+1) = p*(1+q)*U(r+1,t) + (1-p*(2+q))*U(r,t) + p*U(r-1,t);
        end
    end
    %Se calculan las deformaciones con la regla del trapecio
    for t = 1:T
        D(t) = 0;
        for r = 1:R-1
            D(t) += a * (U(r,t)*((r-1)*dr + 0.5) + U(r+1,t)*(r*dr + 0.5) )/2 * dr;
        end
    end
    %plot de la deformacion
    plot((0:T-1) * dt, D);
endfunction

```

## ANEXO B: DEDUCCIÓN ECUACIÓN EN DIFERENCIAS

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{4K} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (20)$$

$$\frac{v(n+1,t) - 2v(n,t) + v(n-1,t)}{\Delta r^2} + \frac{v(n+1,t) - v(n,t)}{r\Delta r} = \frac{1}{4K} \frac{v(n,t+1) - v(n,t)}{\Delta t}$$

Sea  $p = \frac{\Delta t 4K}{\Delta r^2}$  y  $q = \frac{\Delta r}{r}$ .

$$p(v(n+1,t) - 2v(n,t) + v(n-1,t) + q(v(n+1,t) - v(n,t))) + v(n,t) = v(n,t+1)$$

Lo cual se reduce a:

$$p(1+q)v(n+1,t) + (1-p(2+q))v(n,t) + pv(n-1,t) = v(n,t+1) \quad (21)$$