JPEG y la compresi imnes mediante DCT Quantization

Martturla, Darneidermanis
Estudiantes Instituto Tecnolo de Buenos Aires (ITBA)

28 de Junio de 2012

(Paper No Publicado)

***Resumen*—El siguiente paper busca analizar la deformacidial de un cilindro cuando es expuesto a cambios de temperatura, utilizando ecuaciones en diferencias.**

***Palabras clave*—Deformacicuaciones en diferencias, derivadas parciales, temperatura.**

I. Introducci

El estudio de la deformacidial de un cilindro debido a cambios en su temperatura concierne a varias ramas de las ingenier industriales y meccas. En particular, se utiliza para encajar engranajes o discos en un eje, e incluso para el estudio de turbinas o calderas.

La ecuaciferencial en derivadas parciales que describe la distribuci temperatura en dichos cilindros no es lineal. Sin embargo, se pueden utilizar ecuaciones en diferencias para aproximar la solucíste paper busca hallar una ecuaci diferencias que lo haga y analizar su estabilidad.

II. Deducci la ecuaci diferencias

La temperatura $u(r,t)$ satisface la siguiente ecuaciferencial $(K = 0,1)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{4K}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

Dicha ecuaciferencial se puede llevar a una ecuaci diferencias utilizando las siguientes propiedades:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \tag{3}$$

Sean Δr y Δt los cambios en el radio y temperatura respectivamente, y $v(r,t)$ la aproximaci $u(r,t)$ utilizando ecuaciones en diferencias. La ecuaci diferencias estda por:

$$\frac{v(n+1,t) - 2v(n,t) + v(n-1,t)}{\Delta r^2} + \frac{v(n+1,t) - v(n,t)}{r\Delta r} = \frac{1}{4K}\frac{v(n,t+1) - v(n,t)}{\Delta t}$$

28 de Junio, 2012.

Sea $p = \frac{\Delta t 4K}{\Delta r^2}$ y $q = \frac{\Delta r}{r}$.

$$p\left(v(n+1,t) - 2v(n,t) + v(n-1,t) + q\left(v(n+1,t) - v(n,t)\right) + v(n,t\right.$$

Lo cual se reduce a:

$$p(1+q)v(n+1,t) + (1-p(2+q))v(n,t) + p(n-1,t) = v(n,t+1) \tag{4}$$

Las ecuaciones de contorno estadas por:

$$u(1,t) = 100 + 40t \tag{5}$$

$$u(\frac{1}{2},t) = t \tag{6}$$

Y la condiciicial es:

$$u(r,0) = 200(r - 0,5) \tag{7}$$

Donde el dominio de las funciones estdo por $\frac{1}{2} < r < 1$ y $0 \leq t \leq 10$. Adem la deformaci$delcilindroesproporcionalalatemperaturamediadelcilindro$ $10,7$, es decir:

$$d(t) = \alpha \int_{\frac{1}{2}}^{1} u(r,t) r dr \tag{8}$$

Ne que la ecuaci diferencias (**??**) da, utilizando las condiciones iniciales y de contorno, una regla para aproximar la temperatura en una grilla perteneciente al dominio. Utilizando la misma se puede aproximar la integral de la ecuaci utilizando la regla del trapecio.

III. Estabilidad

A. Matrices

De la ecuaci se desprende la siguiente propiedad:

$$\overline{v_{t+1}} = tridiag(p, 1-p(2+q), p(1+q))\overline{v_t} \tag{9}$$

Donde $\overline{v_k}$ es un vector columna con los valores aproximados por v en el momento $k\Delta t$ para cada valor de r en la grilla. Por otro lado, $tridiag(p, 1-p(2+q), p(1+q))$ es una matriz tridiagonal con $1-p(2+q)$ en la diagonal, p abajo de la diagonal y $p(1+q)$ arriba de la diagonal. Adem

$$(\textbf{??})\overline{v_k} = tridiag(p, 1-p(2+q), p(1+q))^k \overline{v_0} \tag{10}$$

De la ecuaci se puede apreciar que si los autovalores de la matriz diagonal son mayores en mo a 1, $\overline{v_k} diverge, dadoqueloserrorescometidosencadapasosepropagandemasiado.Losautovaloresdeunamatriztridiagonalconvalores$(a,b,c estados por:

$$\lambda_j = b + 2\sqrt{ac}cos(\frac{j\pi}{n+1} \tag{11}$$

Asumiendo el peor caso, cuando el coseno vale 1, y reemplazando por los valores de la ecuaci se deduce:

$$1 \geq 1 - 2p - pq + 2\sqrt{p^2(1+q)}$$

$$0 \geq -2p - pq + 2p\sqrt{1+q}$$

$$2 + q \geq 2\sqrt{1+q}$$

Como ambos lados son siempre positivos, es vdo elevarlos al cuadrado sin modificar el solo de la inecuaci 4 + 4q + q$^2 \geq 4 + 4q$

$$q^2 \geq 0 \tag{12}$$

Es claro ver que la inecuaci no ofrece ningn tipo de informacido que q es trivialmente un nmero real.

B. Von Neumann

A la ecuaci, se le aplica una transformada discreta de Fourier sobre la variable r a ambos lados:

$$\widehat{V_t+1} = p(1+q)e^{i\omega}\widehat{V}_t + (1-p(2+q))\widehat{V}_t + pe^{-i\omega}\widehat{V}_t$$

De lo cual se deduce:

$$\frac{\widehat{V_t+1}}{\widehat{V}_t} = p(1+q)e^{i\omega} + (1-p(2+q)) + pe^{-i\omega} \tag{13}$$

El criterio de Von Neumann pide que para $-\pi \leq \omega \leq \pi$ el mo al cuadrado de dicha raza menor a 1. Utilizando que $e^{i\omega} = cos(\omega) + isen(\omega)$:

$$1 \geq cos(\omega)(2p+pq) + ipqsen(\omega) + 1 - p(2+q) \tag{14}$$

El mo de un complejo equivale a su parte real al cuadrado mu parte imaginaria al cuadrado, por lo que se deduce:

$$vn1 \geq (cos(\omega)(2p+pq)+1-p(2+q))^2 + (pqsen(\omega))^2 \tag{15}$$

Si se deriva la parte derecha de la inecuacie iguala a cero para hallar su mmo se deduce:

$$2(4p^2+4p^2q+p^2q^2)cos(\omega)sen(\omega) - 2sen(\omega)(2p+pq)(1-p(2+q)) + 2p^2q^2cos(\omega)sen(\omega) = 0 \tag{16}$$

Es fl ver que si $\omega = 0$ la derivada es igual a cero. Sustituyendo $\omega por 0 en (\textbf{??}), sellegaa: 1 \geq (2p+pq)+1-p(2+q) = 1$Lo cual es trivialmente vdo. Pero todave deben evaluar los ltes del dominio, es decir los casos en los que $\omega vale$-π y π. Es fl ver de (**??**) que si ω vale π la inecuaci mestrictiva dado que el seno vale 1 y el valor que lo multiplica, p^2q^2, es positivo, por lo que se considerarlo dicho caso.

$$(1-p(2+q))^2 + p^2q^2 \leq 1$$

$$-2p(2+q) + p^2(4+4q+q^2) + p^2q^2 \leq 0$$

$$4p^2 + 4qp^2 + 2q^2p^2 \leq 2pq + 4p$$

Como p es positivo:

$$4p + 4qp + 2q^2p \leq 2q + 4 \tag{17}$$

Esto da una condici estabilidad que se debe cumplir. Sin embargo, si se desea una relacis clara entre Δt y Δr, se puede asumir que como q es $\frac{\Delta r}{r}, considerandoun \Delta r$ pequel primer tino del lado izquierdo ser mayor. Por otro lado, como q es positivo, en particular debe ser menor a 4. Por lo que:

$$p \leq 1 \tag{18}$$

$$\frac{4K\Delta t}{\Delta r^2} \leq 1$$

$$\Delta t \leq 2,5\Delta r^2 \tag{19}$$

La inecuaci, debido a las asunciones hechas, es teamente una condicicesaria pero no suficiente; no es equivalente a (**??**). Sin embargo, en la prica dio buenos resultados. Adem demuestra que el paso usado para el tiempo debe ser sustancialmente menor al paso del radio (asumiendo que los valores peque.

IV. Error en el culo de la integral

El error en una integral aproximada por el mdo del trapecio estdo por:

$$e_{trap} = -\frac{(b-a)^3\frac{\delta^2 f(\xi)}{\delta x^2}}{12N^2} \tag{20}$$

Donde N es la cantidad de pasos usados, y b y a los intervalos de la integral. Sustituyendo por los valores utilizados:

$$e_{trap} = -\frac{(\frac{1}{2})^3\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\delta r^2}}{12(\frac{1}{2\Delta r})^2}$$

$$e_{trap} = -\frac{\Delta r^2}{24}\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial r^2}$$

Se analizaso de $t = 10$. El siguiente grco muestra una aproximaci la derivada segunda de u respecto al radio:

Figura 1: Derivada segunda de u respecto a r para $t = 10$.

Del grco se puede apreciar que la derivada segunda es negativa, por lo que el error es positivo. Es decir, se subestima el valor de la deformacior otro lado, es evidente que 2 es una cota apropiada para el mo de dicha derivada. Por lo que:

$$e_{trap} = \frac{\Delta r^2}{12}$$

En otras palabras, el error de aproximar la integral por el mdo del trapecio es equivalente a un doceavo del paso en el radio usado, para $t = 10$. Ne que este error contempla nicamente el error por utilizar dicho mdo y no el error por aproximar $u(r,t)$ utilizando $v(r,t)$.

V. Resultados

A. Temperaturas para distintos radios

El siguiente grco muestra temperaturas para distintos radios en funcil tiempo. Se utiliz $= 0.025 y \Delta t = 0{,}0005$. Se puede apreciar que la temperatura incrementa en el tiempo, y adems menor para menores valores del radio.

Figura 2: Temperatura en funcil tiempo para distintos radios.

En el siguiente grco se demuestra la temperatura en funcil radio y el tiempo, utilizando $\Delta r = 0{,}1$ y $\Delta t = 0{,}001$. Las conclusiones extras del mismo son equivalentes a las del grco anterior.

Figura 3: Temperatura en funcil tiempo y el radio.

B. Deformaci

La figura 4 demuestra la deformaci funcil tiempo. Se utilizvamente $\Delta r = 0{,}025$ y $\Delta t = 0{,}0005$. Ne que la deformacicrementa con el tiempo, lo cual es esperable debido a que la temperatura tambio hace. Por otro lado, se puede apreciar que el incremento es lineal.

Figura 4: Deformaci funcil tiempo.

C. Isotermas

En la figura dos se pueden apreciar las isotermas de la solucistas ser las curvas resultantes de la intersecci los planos para distintas temperaturas con la solucil siguiente grco (figura 5) muestra las curvas para distintas temperaturas, llevadas todas a un mismo plano para poder representarlas en dos dimensiones.

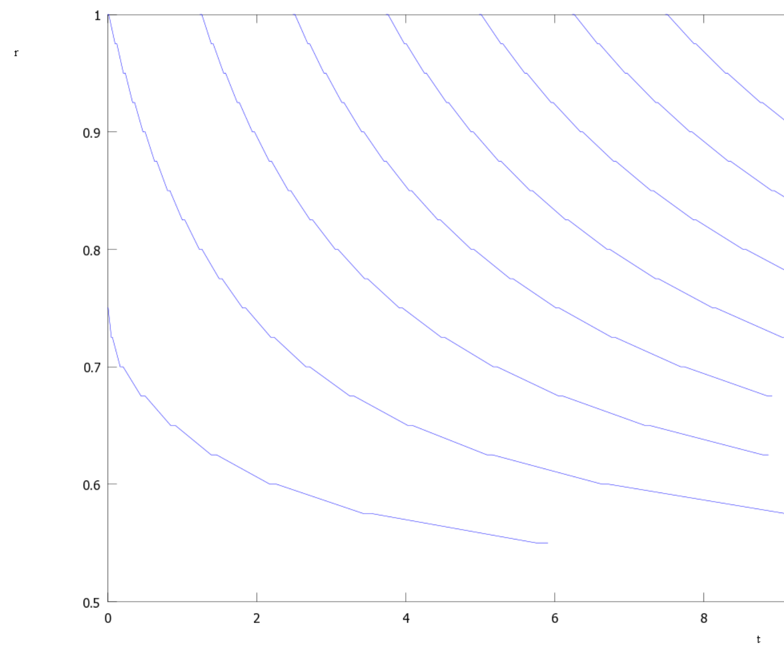

Figura 5: Isotermas para u = 50,100,150,200,250,300,350,400, de izquierda a derecha.

D. Utilizaci pasos no estables

Los siguientes grcos muestran la temperatura en funcil radio para tiempos sucesivos. Se utilizaso de $\Delta r = 0{,}1$ y $\Delta t = 0{,}1$. Ne que para estos valores $p = 4$, lo cual es inestable segn (**??**).

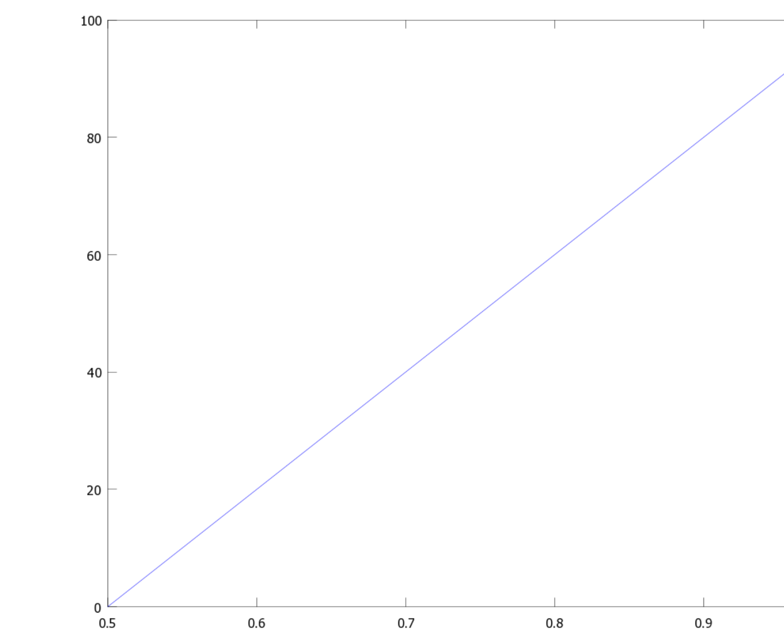

Figura 6: Temperatura en funcil radio, para $t = 0{,}0$.

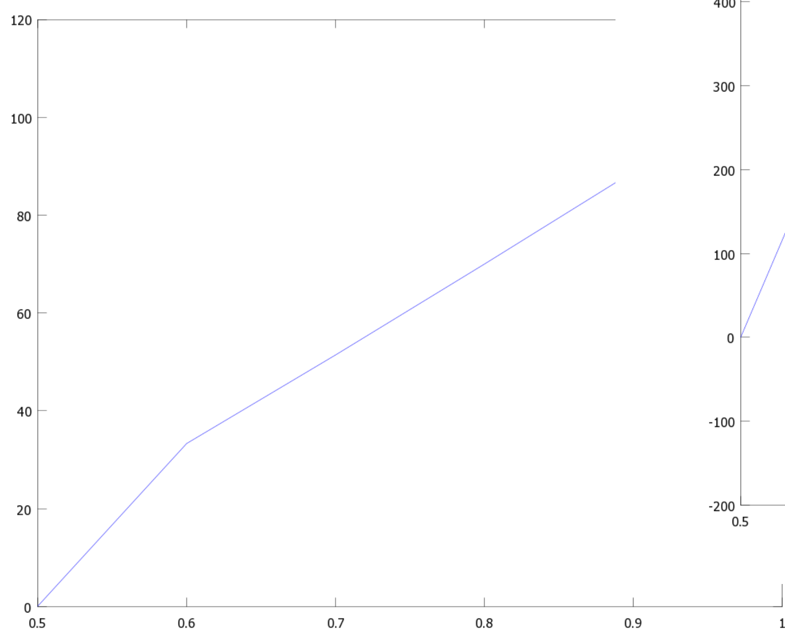

Figura 7: Temperatura en funcil radio, para $t = 0{,}1$.

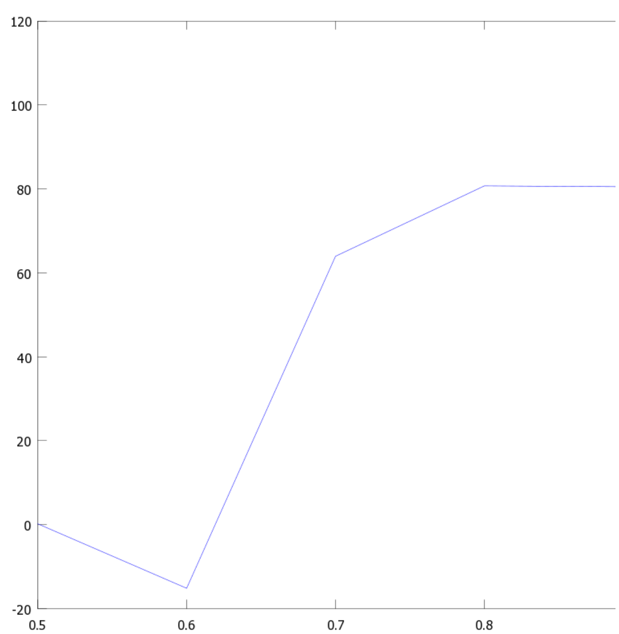

Figura 8: Temperatura en funcil radio, para $t = 0{,}2$.

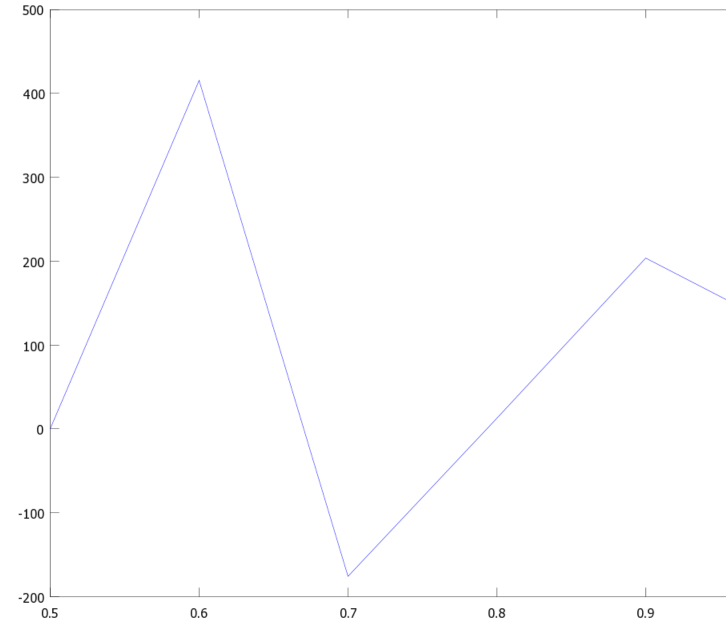

Figura 9: Temperatura en funcil radio, para $t = 0{,}3$.

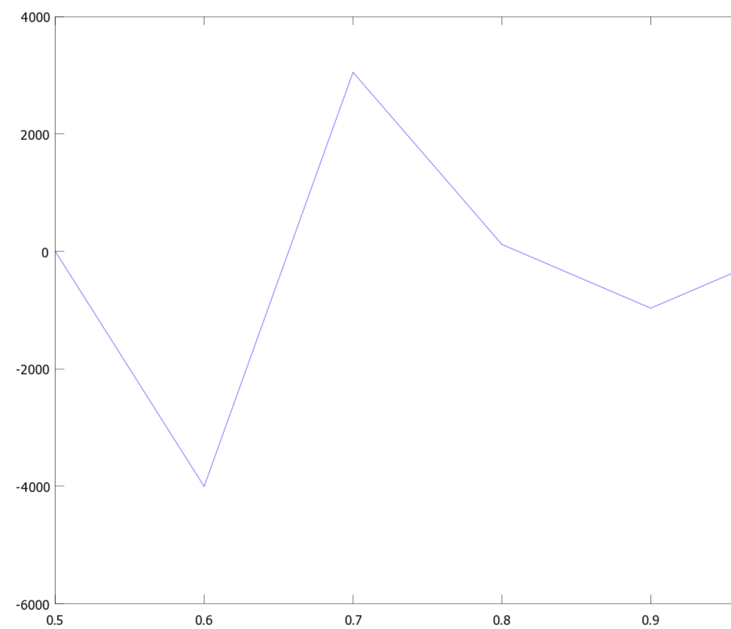

Figura 10: Temperatura en funcil radio, para $t = 0{,}4$.

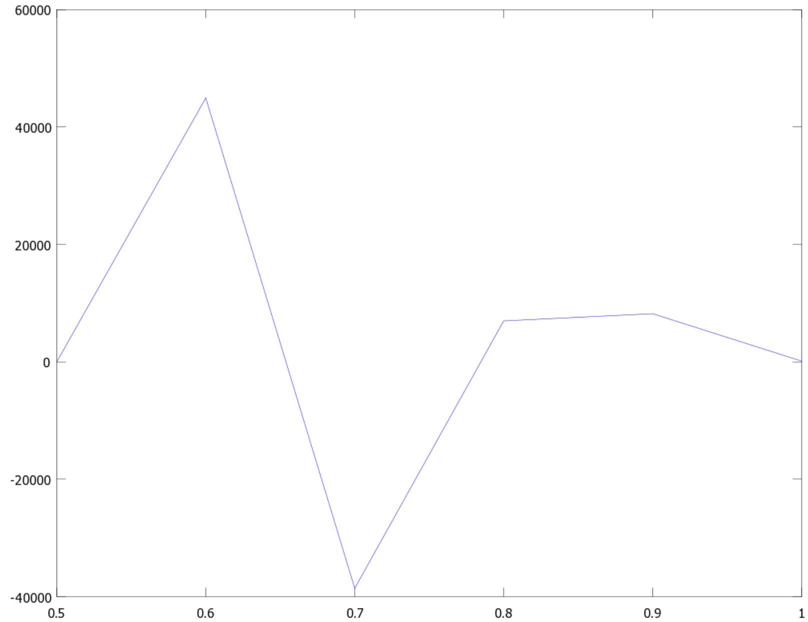

Figura 11: Temperatura en funcil radio, para $t = 0{,}5$.

De los grcos se puede apreciar cdamente la temperatura comienza a diverger. Esto se debe al uso de pasos inestables, lo cual demuestra la importancia de garantizar la estabilidad de la aproximaciones utilizando ecuaciones en diferencias.

Referencias

[1] *Regla del trapecio - http://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_rule*
[2] *Ecuaciones en diferencias - http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference*

Anexo A: Co Octave

```
function main( dr, dt, max_time)
        %Inicializo la matriz de temperaturas y vector de deformaciones
        T = ceil(max_time/dt) ;
        R = ceil(0.5/dr) + 1;
        U = zeros(R,T);

        %Se llenan las condiciones de contorno
        for t = 1:T
                if( (t-1) * dt <= 10)
                        U(1, t) = (t-1) * dt;
                        U(R, t) = 100 + 40*dt*(t-1);
                else
                        U(1, t) = 10;
                        U(R, t) = 500;
                endif
        end

        %Condiciones iniciales
        for r = 1:R
                U(r, 1) = 200* ((r-1)*dr);
        end

        %Variables datos
        K = 0.1;
        a = 10.7;

        %Variables de la ecaucion en diferencias
        p = dt * 4 * K / (dr*dr);

        %Se llena la matriz con el resto de los valores utilizando al regla en diferencias
        for t = 1:T-1
                for r = 2: R-1
                        q = dr/((r-1)*dr + 0.5);
                        U(r,t+1) = p*(1+q)*U(r+1,t) + (1-p*(2+q))*U(r,t) + p*U(r-1,t);
                end
        end

        %Se calculan las deformaciones con la regla del trapecio
        for t = 1:T
                D(t) = 0;
                for r = 1:R-1
                        D(t) += a * (U(r,t)*((r-1)*dr + 0.5) + U(r+1,t)*(r*dr + 0.5) )/2 * dr;
                end
        end

        %plot de la deformacion
        plot((0:T-1) * dt, D);

        clearplot;
        hold on;

        %plot de las isotermas
        for temp = 1:8
                k = 1;
                clear ts;
                clear rs;
                for t = 1:T
```