Cvičení 1

Příklad 1. Mějme následující formule.

(a) $(A \leftrightarrow B) \to (\neg A \wedge C)$

(b) $(A \to B) \to C$

(c) $A \leftrightarrow B$

(d) $(A \to B) \leftrightarrow (A \to C)$

(e) $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(f) $[A \to (B \vee \neg A)] \to (B \to A)$

(g) $[(A \vee B) \to (C \to A)] \leftrightarrow (A \vee B \vee C)$

Pro každou z nich

- vytvořte pravdivostní tabulku a rozhodněte, zda je formule pravdivá a/nebo splnitelná
- převeďte formuli do CNF pomocí pravdivostní tabulky
- převeďte formuli do CNF pomocí ekvivalentních úprav
- zapište formuli jako množinu klauzulí

(a)

A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$\neg A \wedge C$	$(A \leftrightarrow B) \to (\neg A \wedge C)$
1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

Pro převod do CNF pomocí tabulky se díváme na řádky s nulou. Výrokové proměnné případně znegujeme, abychom dostali nepravdivou disjunkci proměnných.

CNF z tabulky:

$$(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee B \vee C)$$

CNF z ekvivalentních úprav:

$$(A \leftrightarrow B) \to (\neg A \wedge C) \approx \neg[(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)] \vee (\neg A \wedge C) \approx (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge C) \approx$$
$$[(A \vee B) \wedge \cancel{(A \vee \neg A)} \wedge \cancel{(\neg B \vee B)} \wedge (\neg B \vee \neg A)] \vee (\neg A \wedge C) \approx [(A \vee B) \vee (\neg A \wedge C)] \wedge [(\neg B \vee \neg A) \vee$$
$$\vee (\neg A \wedge C)] \approx (A \vee B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg A) \wedge \neg A \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee C)$$

CNF podle WolframAlpha:

$$(\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B \vee C)$$

(b)

A	B	C	$A \to B$	$(A \to B) \to C$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	0

(c)

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

(d)

A	B	C	$A \to B$	$A \to C$	$(A \to B) \leftrightarrow (A \to C)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

(e)

A	B	C	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0

(f)

A	B	C	$[(A \vee B) \to (C \to A)]$	$A \vee B \vee C$	$[(A \vee B) \to (C \to A)] \leftrightarrow (A \vee B \vee C)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

Příklad 2. Které formule implikují následující formule?

(a) $A \wedge B$

(b) $A \vee B$

(c) $A \to B$

(d) $A \leftrightarrow B$

(e) $\neg A \wedge \neg B$

(f) $\neg A$

(g) $\neg(A \to B)$

(a) c,b,d

(b) $\emptyset$

(c) $\emptyset$

(d) c

(e) c,d,f

(f) c

(g) b

Příklad 3. Můžeme zakódovat n-bitová čísla n-ticí výrokových proměnných $A_{n-1}, \dots, A_0$.

(a) Zapište formuli $\varphi(A_1, A_0, B_1, B_0, C_2, C_1, C_0)$ pro sčítání 2bitových čísel $\bar{A} + \bar{B} = \bar{C}$.

(b) Zapište formuli $\varphi(A_{n-1}, \dots, A_0, B_{n-1}, \dots, B_0, C_n, \dots, C_0)$ pro sčítání n-bitových čísel.

Příklad 4. Pomocí algoritmu DPLL rozhodněte, které z následujících formulí jsou splnitelné.

(a) $\neg\,[(A \to B) \leftrightarrow (A \to C)]$

(b) $(A \vee B \vee C) \wedge (B \vee D) \wedge (A \to D) \wedge (B \to A)$

(c) $(A \leftrightarrow B) \to (\neg A \wedge C)$

(d) $[A \to (B \vee \neg A)] \to (B \to A)$

(e) $[(A \vee B) \to (C \to A)] \leftrightarrow (A \vee B \vee C)$

Příklad 5. Rezoluční metodou rozhodněte, které z následujících formulí jsou pravdivé (tautologie).

(a) $(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (B \vee C) \vee (A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$

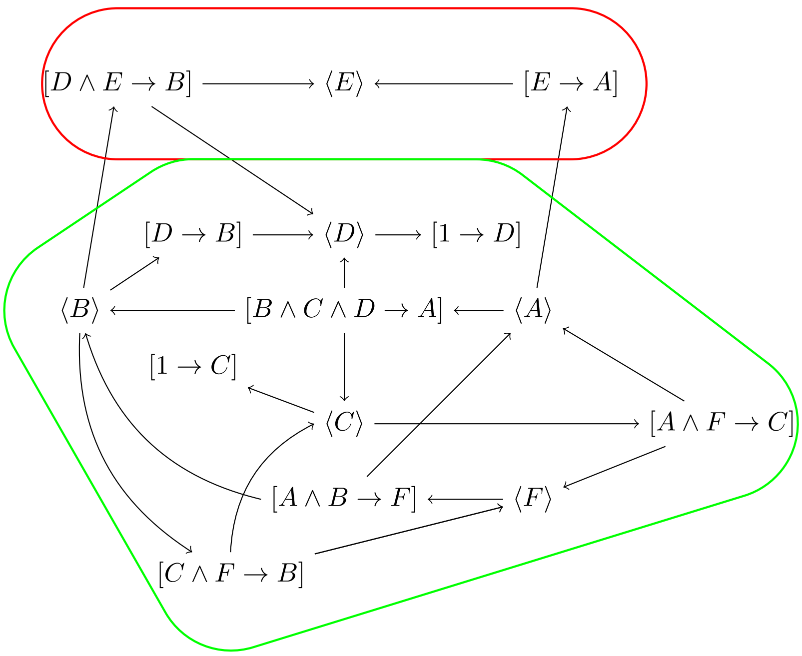
(b) $(A \wedge B) \vee (B \wedge C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg C \wedge \neg D)$

(c) $(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg C \wedge \neg D) \vee (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee$
$\vee (A \wedge \neg B \wedge D)$

Příklad 6. Mějme konečný automat $\mathcal{A}$ a vstupní slovo w. Zapište formuli $\varphi_{\mathcal{A},W}$ splnitelnou právě tehdy, když automat $\mathcal{A}$ akceptuje slovo w.

Příklad 7. Vytvořte hru pro následující množinu Hornových klauzulí a určete výherní oblasti.

$B \wedge C \wedge D \to A$	$C \wedge F \to B$	$A \wedge F \to C$	$D \to B$	$A \wedge B \to F$
$E \to A$	$D \wedge E \to B$	C	D	



Obrázek 1: Výherní oblasti k příkladu 7

Cvičení 2

Příklad 1. Nechť f je binární funkční symbol, g, h jsou unární funkční symboly a c je konstanta.

(a) Najděte nejobecnější unifikátor pro následující dvojice termů.

(i) $f(g(x), y)$ a $f(x, h(y))$

(ii) $f(h(x), y)$ a $f(x, h(y))$

(iii) $f(x, f(x, g(y)))$ a $f(y, f(h(c), x))$

(iv) $f(f(x, c), g(f(y, x))$ a $f(x, g(y))$

(b) Vyřešte následující množinu rovnic termů.

$$x = f(y, z), \quad y = g(u), \quad z = h(y), \quad u = f(v, w), \quad v = f(c, w)$$

Ověřit správnost 2. příkladu

(a) Najděte nejobecnější unifikátor pro následující dvojice termů.

(i) nelze unifikovat

(ii) nelze unifikovat

(iii) nelze unifikovat

(iv) nelze unifikovat

(b) $x = f(g(f(f(c, w), w)), h(g(f(f(c, w), w))))$

Příklad 2. Uvažte následující formule

(a) $\exists x \exists y \forall z [z = x \lor z = y]$

(b) $\forall x [\exists y R(x, y) \to \exists y R(y, x)]$

(c) $\forall x\, [\forall y \exists z [R(x, f(y, z))] \to \forall y \forall z [R(f(x, y), f(x, z)) \lor R(y, z)]$

(d) $\exists x \forall y R(x, y) \land \forall x \exists y R(x, y) \land \forall x \forall y\, [R(x, y) \to \exists z\, [R(x, z) \land R(z, x)]]$

Každou z nich

(a) převeďte do Skolemovy normální formy,

(b) převeďte do množiny klauzulí.

(a) SNF:
$\forall z\, [z = a \lor z = b]$
MK:
$\{z = a, z = b\}$

(b) $\forall x [\exists y R(x, y) \to \exists y R(y, x)] \approx \forall x [\exists y_1 R(x, y_1) \to \exists y_2 R(y_2, x)] \approx \forall x [\neg \exists y_1 R(x, y_1) \lor \exists y_2 R(y_2, x)] \approx \forall x [\forall y_1 \neg R(x, y_1) \lor \exists y_2 R(y_2, x)] \approx \forall x \forall y_1 \exists y_2 [\neg R(x, y_1) \lor R(y_2, x)] \approx \forall x \forall y_1 [\neg R(x, y_1) \lor R(f(x, y_1), x)]$

PNF:
$\forall x \forall y_1 \exists y_2 [\neg R(x, y_1) \lor R(y_2, x)]$
SNF:
$\forall x \forall y_1 [\neg R(x, y_1) \lor R(f(x, y_1), x)]$
MK:
$\{\neg R(x, y_1), R(f(x, y_1), x)\}$

(c) $\forall x[\forall y\exists z[R(x,f(y,z))] \rightarrow \forall y\forall z[R(f(x,y),f(x,z)) \vee R(y,z)] \approx$
$\forall x[\neg\forall y_1\exists z_1[R(x,f(y_1,z_1))] \vee \forall y_2\forall z_2[R(f(x,y_2),f(x,z_2)) \vee R(y_2,z_2)] \approx$
$\forall x\exists y_1\forall z_1\forall y_2\forall z_2[\neg R(x,f(y_1,z_1)) \vee R(f(x,y_2),f(x,z_2)) \vee R(y_2,z_2)] \approx$
$\forall x\forall z_1\forall y_2\forall z_2[\neg R(x,f(f(x),z_1)) \vee R(f(x,y_2),f(x,z_2)) \vee R(y_2,z_2)]$

PNF:
$\forall x\exists y_1\forall z_1\forall y_2\forall z_2[\neg R(x,f(y_1,z_1)) \vee [R(f(x,y_2),f(x,z_2)) \vee R(y_2,z_2)]$
SNF:
$\forall x\forall z_1\forall y_2\forall z_2[\neg R(x,f(f(x),z_1)) \vee [R(f(x,y_2),f(x,z_2)) \vee R(y_2,z_2)]$
MK:
$\{\neg R(x,f(f(x),z_1)), R(f(x,y_2),f(x,z_2)), R(y_2,z_2)\}$

(d) $\exists x\forall y R(x,y) \wedge \forall x\exists y R(x,y) \wedge \forall x\forall y\,[R(x,y) \rightarrow \exists z\,[R(x,z) \wedge R(z,x)]] \approx$
$\exists x_1\forall y_1 R(x_1,y_1) \wedge \forall x_2\exists y_2 R(x_2,y_2) \wedge \forall x_3\forall y_3\,[\neg R(x_3,y_3) \vee \exists z\,[R(x_3,z) \wedge R(z,x_3)]] \approx$
$\exists x_1\forall y_1\forall x_2\exists y_2\forall x_3\forall y_3\exists z[R(x_1,y_1) \wedge R(x_2,y_2) \wedge [\neg R(x_3,y_3) \vee R(x_3,z)] \wedge [\neg R(x_3,y_3) \vee R(z,x_3)]] \approx$
$\forall y_1\forall x_2\forall x_3\forall y_3[R(a,y_1) \wedge R(x_2,f(x_2)) \wedge [\neg R(x_3,y_3) \vee R(x_3,f(x_3,y_3))] \wedge$
$\wedge [\neg R(x_3,y_3) \vee R(f(x_3,y_3),x_3)]]$

PNF:
$\exists x_1\forall y_1\forall x_2\exists y_2\forall x_3\forall y_3\exists z\,[R(x_1,y_1) \wedge R(x_2,y_2) \wedge [\neg R(x_3,y_3) \vee R(x_3,z)] \wedge [\neg R(x_3,y_3) \vee R(z,x_3)]]$
SNF:
$\forall y_1\forall x_2\forall x_3\forall y_3[R(a,y_1) \wedge R(x_2,f(x_2)) \wedge [\neg R(x_3,y_3) \vee R(x_3,f(x_3,y_3))] \wedge$
$\wedge [\neg R(x_3,y_3) \vee R(f(x_3,y_3),x_3)]]$

MK:
$\{\{R(a,y_1)\}, \{R(x_2,f(x_2))\}, \{\neg R(x_3,y_3), R(x_3,f(x_3,y_3))\}, \{\neg R(x_3,y_3), R(f(x_3,y_3),x_3)\}\}$

Příklad 3. Pomocí rezoluční metody zjistěte, zda jsou následující formule sporné.

(a) $\forall x\forall y[x \leq y \rightarrow (P(x) \leftrightarrow P(y))] \wedge \forall x\forall y[x \leq y \vee y \leq x] \wedge \exists x P(x) \wedge \exists x\neg P(x)$

(b) $\forall x\exists y[y \leq x \wedge \neg E(x,y)] \wedge \forall x\forall y[x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow E(x,y)] \wedge \exists x\forall y[x \leq y]$

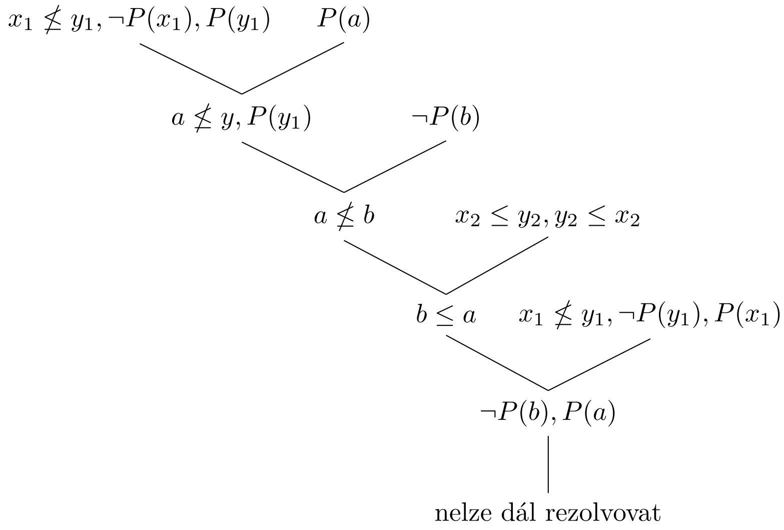
(c) $\forall x\forall y[R(x,y) \rightarrow (P(x) \leftrightarrow \neg P(y))] \wedge \forall x\forall y[R(x,y) \rightarrow \exists z[R(x,z) \wedge R(z,y)]] \wedge \exists x\exists y R(x,y)$

(d) $\forall x R(x,f(x)) \wedge \forall x\forall y\forall z[R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)] \wedge \forall x\forall y[E(x,y) \rightarrow \neg R(x,y)] \wedge \exists x E(x,f(f(x)))$

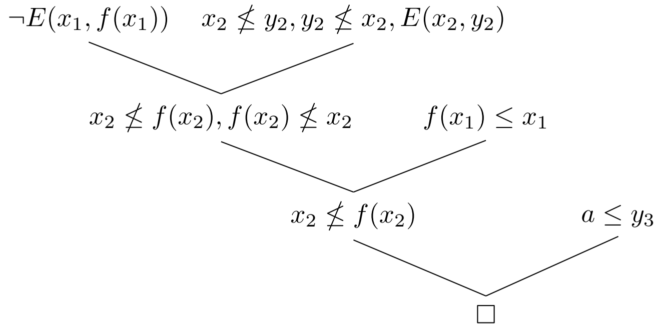
(a) SNF:
$\forall x_1\forall y_1\forall x_2\forall y_2[(x_1 \not\leq y_1 \vee \neg P(x_1) \vee P(y_1)) \wedge (x_1 \not\leq y_1 \vee \neg P(y_1) \vee P(x_1)) \wedge (x_2 \leq y_2 \vee y_2 \leq x_2) \wedge$
$\wedge P(a) \wedge \neg P(b)]$

MK:
$\{\{x_1 \not\leq y_1, \neg P(x_1), P(y_1)\}, \{x_1 \not\leq y_1, \neg P(y_1), P(x_1)\}, \{x_2 \leq y_2, y_2 \leq x_2\}, \{P(a)\}, \{\neg P(b)\}\}$
Závěr: Formule je bezesporná (konzistentní).

(b) SNF:
$\forall x_1\forall x_2\forall y_2\forall y_3[f(x_1) \leq x_1 \wedge \neg E(x_1,f(x_1)) \wedge [x_2 \not\leq y_2 \vee y_2 \not\leq x_2 \vee E(x_2,y_2)] \wedge [a \leq y_3]]$
MK:
$\{\{f(x_1) \leq x_1\}, \{\neg E(x_1,f(x_1))\}, \{x_2 \not\leq y_2, y_2 \not\leq x_2, E(x_2,y_2)\}, \{a \leq y_3\}\}$
Závěr: Formule je sporná (nekonzistentní).



Obrázek 2: Strom k příkladu 3 a)



Obrázek 3: Strom k příkladu 3 b)

(c) SNF:

$$\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 [[\neg R(x_1,y_1) \vee \overbrace{\neg P(x_1) \vee \neg P(y_1)}^{\text{můžeme unifikovat}}] \wedge [\neg R(x_1,y_1) \vee \overbrace{P(y_1) \vee P(x_1)}^{\text{můžeme unifikovat}}] \wedge [\neg R(x_2,y_2) \vee$$
$$\vee R(x_2, f(x_2,y_2))] \wedge [\neg R(x_2,y_2) \vee R(f(x_2,y_2),y_2)] \wedge R(a,b)] \approx$$
$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_2 [[\neg R(x_1,x_1) \vee \neg P(x_1)] \wedge [\neg R(x_1,x_1) \vee P(x_1)] \wedge [\neg R(x_2,y_2) \vee$$
$$\vee R(x_2, f(x_2,y_2))] \wedge [\neg R(x_2,y_2) \vee R(f(x_2,y_2),y_2)] \wedge R(a,b)]$$

MK:

$$\{\{\neg R(x_1,x_1), \neg P(x_1)\}, \{\neg R(x_1,x_1), P(x_1)\}, \{\neg R(x_2,y_2), R(x_2, f(x_2,y_2))\},$$
$$\{\neg R(x_2,y_2), R(f(x_2,y_2),y_2)\}, \{R(a,b)\}\}$$

$\neg R(x_1,x_1), \neg P(x_1)$ $\qquad$ $\neg R(x_1,x_1), P(x_1)$

$\neg R(x_1,x_1), \neg R(x_1,x_1) \equiv \neg R(x_1,x_1)$

nelze dál rezolvovat

Obrázek 4: Strom k příkladu 3 c)

Závěr: Formule je bezesporná (konzistentní).

(d) SNF:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_2 \forall z_2 \forall x_3 \forall y_3 [R(x_1, f(x_1)) \wedge [\neg R(x_2,y_2) \vee \neg R(y_2,z_2) \vee R(x_2,z_2)] \wedge$$
$$\wedge [\neg E(x_3,y_3) \vee \neg R(x_3,y_3)] \wedge E(a, f(f(a)))]$$

MK:

$$\{\{R(x_1, f(x_1))\}, \{\neg R(x_2,y_2), \neg R(y_2,z_2), R(x_2,z_2)\}, \{\neg E(x_3,y_3), \neg R(x_3,y_3)\}, \{E(a, f(f(a)))\}\}$$

$\neg R(x_2,y_2), \neg E(y_2,z_2), R(x_2,z_2)$ $\qquad$ $R(x_1, f(x_1))$

$\neg R(f(x_1),z_2), R(x_1,z_2)$ $\qquad$ $\neg E(x_3, y-3), \neg R(x_3,y_3)$

$\neg R(f(x_1),z_2), \neg E(x_1,z_2)$ $\qquad$ $R(x_1, f(x_1))$

$\neg E(x_1, f(f(x_1)))$ $\qquad$ $E(a, f(f(a)))$

$\square$

Obrázek 5: Strom k příkladu 3 d)

Závěr: Formule je sporná (nekonzistentní).

Příklad 4. Pomocí SLD rezoluce zjistěte, zda je následující množina Hornových klauzulí sporná.

(a) $\forall x T(x,x)$,
$\forall x \forall y \forall z \, [E(x,y) \wedge T(y,z) \rightarrow T(x,z)]$,
$E(a,b)$,

$E(b,c)$,
$E(c,d)$,
$\neg T(a,d)$.

(b) $\forall x T(x,x)$,
$\forall x \forall y \forall z\, [T(x,y) \wedge E(y,z) \to T(x,z)]$,
$E(a,b)$,
$E(b,c)$,
$E(c,d)$,
$\neg T(a,d)$.

(c) $R(c,c)$,
$\forall x \forall y \forall z\, [R(x, f(y,z)) \to R(f(y,x), z)]$,
$\neg \forall x \forall y\, [R(f(x, f(y,c))), f(y, f(x,c))]$.

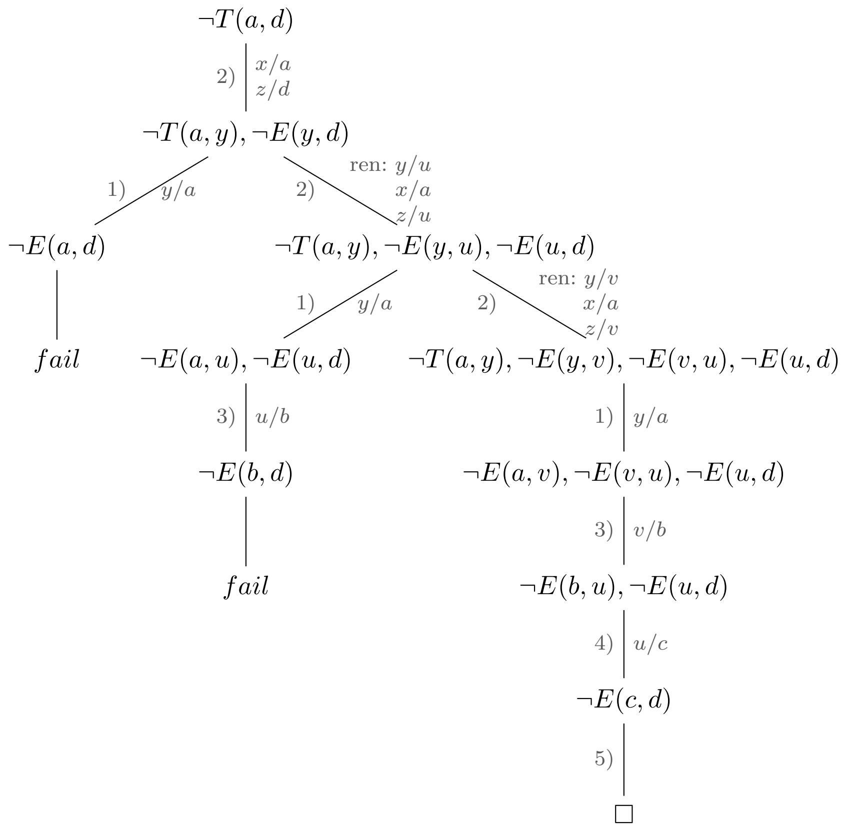
(a) 1. $\forall x T(x,x)$
2. $\forall x \forall y \forall z\, [\neg E(x,y) \vee \neg T(y,z) \vee T(x,z)]$
3. $E(a,b)$
4. $E(b,c)$
5. $E(c,d)$
$\neg T(a,d)$

$$\begin{array}{c}
\neg T(a,d) \\
2) \,\Big|\, x/a, z/d \\
\neg E(a,y), \neg T(y,d) \\
3) \,\Big|\, y/b \\
\neg T(c,d) \\
2) \,\Big|\, x/c, z/d \\
\neg E(c,y), \neg T(y,d) \\
5) \,\Big|\, y/d \\
\neg T(d,d) \\
1) \,\Big| \\
\square
\end{array}$$

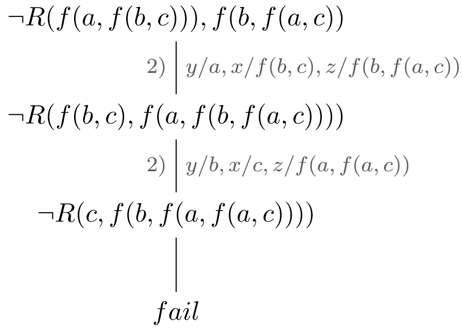
Obrázek 6: Strom k příkladu 4 a)

(b) 1. $\forall x T(x,x)$
2. $\forall x \forall y \forall z\, [\neg T(x,y) \vee \neg E(y,z) \vee T(x,z)]$
3. $E(a,b)$
4. $E(b,c)$
5. $E(c,d)$
$\neg T(a,d)$

(c) 1. $R(c,c)$
2. $\forall x \forall y \forall z\, [\neg R(x, f(y,z)) \vee R(f(y,x), z)]$
$\neg R(f(a, f(b,c))), f(b, f(a,c))$



Obrázek 7: Strom k příkladu 4 b)



Obrázek 8: Strom k příkladu 4 c)

Cvičení 3

Příklad 1. Předpokládejme, že mámem predikát flight(From, To, Time, Price) obsahující informaci o přímých letech včetně místa odletu, místa příletu, délky letu a ceny za letenku. Napište Program v Prologu, který počítá predikát travel(From, To, Stops, Time, Price) zahrnující všechny možnosti letu z jednoho města do jiného s možností přestupů.

Příklad 2. Napište v Prologu predikát fib(N, X), který počítá Fibonacciho posloupnost. Vyhodnoťte fib(3, X) a fib(N, 5).

Příklad 3. Napište v Prologu definice následujících predikátů.

length(List, N)	N je délka Listu
reverse(X, Y)	Y je převrácený seznam X
append(X, Y, Z)	Z je spojení seznamů X a Y
map(X, Y)	mapuje seznam $X = [X_1, \dots, X_n]$ na $Y = [f(X_1), \dots, f(X_n)]$
fold_left(X, Y, Z)	mapuje $Y = [Y_1, \dots, Y_n]$ na $Z = f(\dots f(f(X, Y_1), Y_2) \dots, Y_n)$
fold_right(X, Y, Z)	mapuje $Y = [Y_1, \dots, Y_n]$ na $Z = f(Y_1, f(Y_2, \dots, f(Y_n, X) \dots))$

Příklad 4. Napištenaivní řadící funkci

```
naive_sort(X, Y) :- permute(X, Y), sorted(Y).
```

implementovanou relacemi

sorted(X)	kontroluje, že je seznam X seřazen
insert(X, Y, Z)	seznam Z jsme získali přidáním X na libovolnou pozici do seznamu Y
permute(X, Y)	seznam Y je permutací seznamu X

Implementujte merge sort využitím relace

merge(X, Y, Z)	spojí dva seřazene seznamy X a Y do seznamu Z

Příklad 5. Uvažujme orientovaný graf $G = (V, E)$. Vyjádřete relace v relační algebře.

(a) x a y nejsou spojeny hranou

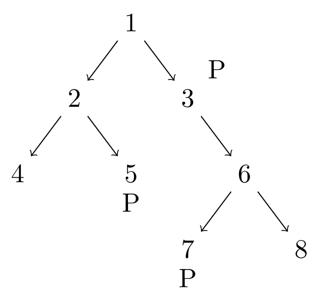
(b) hrana (x, y) je součástí trojúhelníka

(c) x má aspoň dva sousedy

(d) každý soused x je zároveň sousedem y

Příklad 6. Vyhodnoťte následující program v Datalogu na stromě (V, E, P) doprava.

$$
\begin{aligned}
U &\leftarrow S(x, y) \wedge W(x) \wedge W(y) \\
W(x) &\leftarrow P(x) \\
W(x) &\leftarrow E(x, y) \wedge W(y) \\
S(x, y) &\leftarrow E(z, x) \wedge E(z, y) \wedge x \neq y \\
R(x, y) &\leftarrow P(x) \wedge x = y \\
R(x, y) &\leftarrow E(x, z) \wedge R(z, y) \\
R(x, y) &\leftarrow R(x, z) \wedge E(z, y)
\end{aligned}
$$



Cvičení 4

Příklad 1. Použitím přirozené dedukce dokažte, že následující formule jsou pravdivé.

(a) $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \wedge \varphi$

(b) $\psi \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee \psi)$

(c) $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

(d) $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

(e) $((\varphi \wedge \psi) \vee \psi) \rightarrow \psi$

(f) $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

(g) $\varphi \vee \neg\varphi$

(h) $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ (Zákeřné)

(i) $\varphi \rightarrow \exists x\varphi$

(j) $\forall x\varphi \rightarrow \varphi$

(k) $\forall x R(x,x) \rightarrow \forall x \exists y R(f(x), y)$

(l) $\exists x(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$

(m) $(\exists x\varphi \vee \exists x\psi) \rightarrow \exists x(\varphi \vee \psi)$

(n) $\forall x\varphi \wedge \forall x\psi \rightarrow \forall x(\varphi \wedge \psi)$

(o) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$

(p) $\forall x \forall y[\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y)] \wedge \exists x\varphi(x) \rightarrow \forall x\varphi(x)$

Příklad 2. Použitím tableau důkazu ukažte, že formule z příkladu 1 jsou pravdivé.

Příklad 3. Najděte všechny konzistentní množiny pro následující množiny pravidel.

(a) $\dfrac{}{\alpha} \quad \dfrac{\alpha : \beta}{\delta} \quad \dfrac{\alpha : \gamma}{\delta}$

(b) $\dfrac{}{\alpha} \quad \dfrac{\alpha : \beta\gamma}{\beta}$

(c) $\dfrac{}{\alpha} \quad \dfrac{\alpha\beta}{\gamma} \quad \dfrac{\alpha : \gamma}{\beta}$

Příklad 4. Pro každou podmnožinu $\Phi \subseteq \mathcal{P}(\{\alpha, \beta\})$ se pokuste najít množinu pravidel R takovou, že Φ je množinou všech konzistentních množin pro R.

Příklad 5. Ze základních pravidel přirozené dedukce odvoďte následující pravidla.

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi} \qquad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi} \qquad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$$

Příklad 6. Najděte pravidlo pro důkazy indukcí.

$\dfrac{\ldots \quad \ldots}{\forall x\varphi(x)}$ kde $\varphi(x)$ je formule mluvící o přirozených číslech.

Cvičení 5

Příklad 1. Spusťte Find-S algoritmus na následujících vstupech.

(a)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$f(\bar{x})$
0	1	1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0	0	1

(b)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$f(\bar{x})$
0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1

Příklad 2. Spusťte Candidate-Elimination algoritmus na vstupech.

(a)

x_0	x_1	x_2	x_3	$f(\bar{x})$
0	1	1	0	1
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
1	1	0	1	0

(b)

x_0	x_1	x_2	x_3	$f(\bar{x})$
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
0	0	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
0	0	1	1	0

Cvičení 6

Příklad 1. Uvažujme slova nad abecedou $\{a, b\}$ jako přechodové systémy (S, E_s, E_r, P_a, P_b), kde stavy S jsou pozice, dva predikáty P_a a P_b označí každou pozici odpovídajících znakem a dvě hranové relace

$$E_s = \{(i, i+1) \mid i < n-1\}, \qquad E_r = \{(i, k) \mid i \leq k < n\},$$

kde $n = |S|$ je délka slova. Definujte následující jazyky v modální logice.

(a) všechna slova začínající na písmeno a

(b) všechna slova se skládají pouze z písmen a

(c) všechna slova končí na písmeno a

(d) a^*b^*

(e) všechna slova obsahují faktor bb

(f) všechna slova obsahují aspoň dvě písmena b

(g) všechna slova obsahují právě dvě písmena b

(h) $(ab)*$

Příklad 2. Přepište následující formule do predikátové logiky.

(a) $[a]P \to P$

(b) $P \to \langle a \rangle Q$

(c) $[a](P \wedge \langle b \rangle Q) \to (\langle a \rangle P \vee \langle b \rangle Q)$

Příklad 3. Dokažte následující modální formule pomocí tabel.

(a) $\Box(P \leftrightarrow (Q \wedge R)) \to (\Box P \leftrightarrow (\Box Q \wedge \Box R))$

(b) $\neg\Box\Box P \leftrightarrow \Diamond\Diamond\neg P$

(c) $\Box(P \wedge \neg P) \to \Box Q$

(d) $\neg\Diamond P \to \Box(P \to Q)$

Příklad 4. Najděte CTL* formule definující následující vlastnosti $\{a, b\}$-označených stromů.

(a) je aspoň jedno označení b

(b) každá cesta obsahuje nějaké b

(c) každá cesta obsahuje aspoň dvě b

(d) všechny cesty obsahují nekonečně mnoho b

(e) nějaká cesta obsahuje nekonečně mnoho b
