Cvičení 1

Příklad 1. Mějme následující formule.

(a) $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\neg A \wedge C)$

(b) $(A \rightarrow B) \rightarrow C$

(c) $A \leftrightarrow B$

(d) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow C)$

(e) $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(f) $[A \rightarrow (B \vee \neg A)] \rightarrow (B \rightarrow A)$

(g) $[(A \vee B) \rightarrow (C \rightarrow A)] \leftrightarrow (A \vee B \vee C)$

Pro každou z nich

- vytvořte pravdivostní tabulku a rozhodněte, zda je formule pravdivá a/nebo splnitelná
- převeďte formuli do CNF pomocí pravdivostní tabulky
- převeďte formuli do CNF pomocí ekvivalentních úprav
- zapište formuli jako množinu klauzulí

(a)

A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$\neg A \wedge C$	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\neg A \wedge C)$
1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

Pro převod do CNF pomocí tabulky se díváme na řádky s nulou. Výrokové proměnné případně znegujeme, abychom dostali nepravdivou disjunkci proměnných.

CNF z tabulky:

$$(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee B \vee C)$$

CNF z ekvivalentních úprav:

$$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\neg A \wedge C) \approx \neg[(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)] \vee (\neg A \wedge C) \approx (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge C) \approx$$
$$[(A \vee B) \wedge \cancel{(A \vee \neg A)} \wedge \cancel{(\neg B \vee B)} \wedge (\neg B \vee \neg A)] \vee (\neg A \wedge C) \approx [(A \vee B) \vee (\neg A \wedge C)] \wedge [(\neg B \vee \neg A) \vee$$
$$\vee (\neg A \wedge C)] \approx (A \vee B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg A) \wedge \neg A \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee C)$$

CNF podle WolframAlpha:

$$(\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B \vee C)$$

(b)

A	B	C	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \rightarrow C$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	0

(c)

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

(d)

A	B	C	$A \to B$	$A \to C$	$(A \to B) \leftrightarrow (A \to C)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

(e)

A	B	C	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0

(f)

A	B	C	$[(A \vee B) \to (C \to A)]$	$A \vee B \vee C$	$[(A \vee B) \to (C \to A)] \leftrightarrow (A \vee B \vee C)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

Příklad 2. Které formule implikují následující formule?

(a) $A \wedge B$

(b) $A \vee B$

(c) $A \to B$

(d) $A \leftrightarrow B$

(e) $\neg A \wedge \neg B$

(f) $\neg A$

(g) $\neg(A \to B)$

(a) c,b,d

(b) $\emptyset$

(c) $\emptyset$

(d) c

(e) c,d,f

(f) c

(g) b

Příklad 3. Můžeme zakódovat n-bitová čísla n-ticí výrokových proměnných $A_{n-1}, \ldots, A_0$.

(a) Zapište formuli $\varphi(A_1, A_0, B_1, B_0, C_2, C_1, C_0)$ pro sčítání 2bitových čísel $\bar{A} + \bar{B} = \bar{C}$.

(b) Zapište formuli $\varphi(A_{n-1}, \ldots, A_0, B_{n-1}, \ldots, B_0, C_n, \ldots, C_0)$ pro sčítání n-bitových čísel.

Příklad 4. Pomocí algoritmu DPLL rozhodněte, které z následujících formulí jsou splnitelné.

(a) $\neg\,[(A \to B) \leftrightarrow (A \to C)]$

(b) $(A \vee B \vee C) \wedge (B \vee D) \wedge (A \to D) \wedge (B \to A)$

(c) $(A \leftrightarrow B) \to (\neg A \wedge C)$

(d) $[A \to (B \vee \neg A)] \to (B \to A)$

(e) $[(A \vee B) \to (C \to A)] \leftrightarrow (A \vee B \vee C)$

Příklad 5. Rezoluční metodou rozhodněte, které z následujících formulí jsou pravdivé (tautologie).

(a) $(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (B \vee C) \vee (A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$

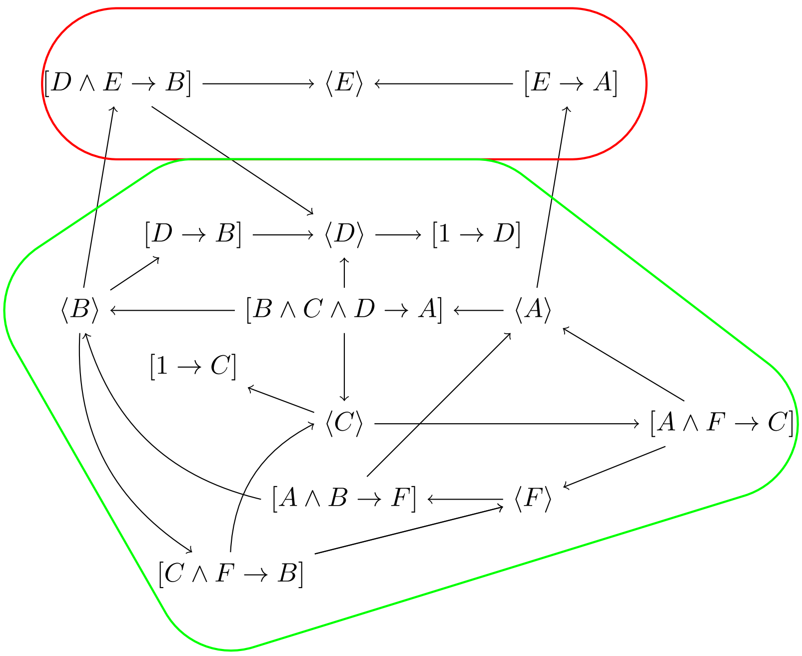
(b) $(A \wedge B) \vee (B \wedge C \wedge D) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg C \wedge \neg D)$

(c) $(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C \wedge D) \vee (\neg C \wedge \neg D) \vee (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee$
$\vee (A \wedge \neg B \wedge D)$

Příklad 6. Mějme konečný automat $\mathcal{A}$ a vstupní slovo w. Zapište formuli $\varphi_{\mathcal{A},W}$ splnitelnou právě tehdy, když automat $\mathcal{A}$ akceptuje slovo w.

Příklad 7. Vytvořte hru pro následující množinu Hornových klauzulí a určete výherní oblasti.

$$\begin{array}{rrccc} B \wedge C \wedge D \to A & C \wedge F \to B & A \wedge F \to C & D \to B & A \wedge B \to F \\ E \to A & D \wedge E \to B & C & D & \end{array}$$



Obrázek 1: Výherní oblasti k příkladu 7

Cvičení 2

Příklad 1. Nechť f je binární funkční symbol, g, h jsou unární funkční symboly a c je konstanta.

(a) Najděte nejobecnější unifikátor pro následující dvojice termů.

(i) $f(g(x), y)$ a $f(x, h(y))$

(ii) $f(h(x), y)$ a $f(x, h(y))$

(iii) $f(x, f(x, g(y)))$ a $f(y, f(h(c), x))$

(iv) $f(f(x, c), g(f(y, x))$ a $f(x, g(y))$

(b) Vyřešte následující množinu rovnic termů.

$$x = f(y, z), \quad y = g(u), \quad z = h(y), \quad u = f(v, w), \quad v = f(c, w)$$

Ověřit správnost 2. příkladu

(a) Najděte nejobecnější unifikátor pro následující dvojice termů.

(i) nelze unifikovat

(ii) nelze unifikovat

(iii) nelze unifikovat

(iv) nelze unifikovat

(b) $x = f(g(f(f(c, w), w)), h(g(f(f(c, w), w))))$

Příklad 2. Uvažte následující formule

(a) $\exists x \exists y \forall z [z = x \lor z = y]$

(b) $\forall x [\exists y R(x, y) \to \exists y R(y, x)]$

(c) $\forall x\, [\forall y \exists z [R(x, f(y, z))] \to \forall y \forall z [R(f(x, y), f(x, z)) \lor R(y, z)]$

(d) $\exists x \forall y R(x, y) \land \forall x \exists y R(x, y) \land \forall x \forall y\, [R(x, y) \to \exists z\, [R(x, z) \land R(z, x)]]$

Každou z nich

(a) převeďte do Skolemovy normální formy,

(b) převeďte do množiny klauzulí.

(a) SNF:

$\forall z\, [z = a \lor z = b]$

MK:

$\{z = a, z = b\}$

(b) $\forall x[\exists y R(x, y) \to \exists y R(y, x)] \approx \forall x[\exists y_1 R(x, y_1) \to \exists y_2 R(y_2, x)] \approx \forall x[\neg \exists y_1 R(x, y_1) \lor \exists y_2 R(y_2, x)] \approx$
$\forall x[\forall y_1 \neg R(x, y_1) \lor \exists y_2 R(y_2, x)] \approx \forall x \forall y_1 \exists y_2 [\neg R(x, y_1) \lor R(y_2, x)] \approx$
$\forall x \forall y_1 [\neg R(x, y_1) \lor R(f(x, y_1), x)]$

PNF:

$\forall x \forall y_1 \exists y_2 [\neg R(x, y_1) \lor R(y_2, x)]$

SNF:

$\forall x \forall y_1 [\neg R(x, y_1) \lor R(f(x, y_1), x)]$

MK:

$\{\neg R(x, y_1), R(f(x, y_1), x)\}$

(c) $\forall x[\forall y \exists z[R(x, f(y,z))] \rightarrow \forall y \forall z[R(f(x,y), f(x,z)) \vee R(y,z)] \approx$
$\forall x[\neg \forall y_1 \exists z_1[R(x, f(y_1, z_1))] \vee \forall y_2 \forall z_2[R(f(x,y_2), f(x,z_2)) \vee R(y_2,z_2)] \approx$
$\forall x \exists y_1 \forall z_1 \forall y_2 \forall z_2[\neg R(x, f(y_1,z_1)) \vee R(f(x,y_2), f(x,z_2)) \vee R(y_2,z_2)] \approx$
$\forall x \forall z_1 \forall y_2 \forall z_2[\neg R(x, f(f(x), z_1)) \vee R(f(x,y_2), f(x,z_2)) \vee R(y_2,z_2)]$

PNF:
$\forall x \exists y_1 \forall z_1 \forall y_2 \forall z_2[\neg R(x, f(y_1,z_1)) \vee [R(f(x,y_2), f(x,z_2)) \vee R(y_2,z_2)]$
SNF:
$\forall x \forall z_1 \forall y_2 \forall z_2[\neg R(x, f(f(x),z_1)) \vee [R(f(x,y_2), f(x,z_2)) \vee R(y_2,z_2)]$
MK:
$\{\neg R(x, f(f(x),z_1)), R(f(x,y_2), f(x,z_2)), R(y_2,z_2)\}$

(d) $\exists x \forall y R(x,y) \wedge \forall x \exists y R(x,y) \wedge \forall x \forall y\, [R(x,y) \rightarrow \exists z\, [R(x,z) \wedge R(z,x)]] \approx$
$\exists x_1 \forall y_1 R(x_1,y_1) \wedge \forall x_2 \exists y_2 R(x_2,y_2) \wedge \forall x_3 \forall y_3\, [\neg R(x_3,y_3) \vee \exists z\, [R(x_3,z) \wedge R(z,x_3)]] \approx$
$\exists x_1 \forall y_1 \forall x_2 \exists y_2 \forall x_3 \forall y_3 \exists z[R(x_1,y_1) \wedge R(x_2,y_2) \wedge [\neg R(x_3,y_3) \vee R(x_3,z)] \wedge [\neg R(x_3,y_3) \vee R(z,x_3)]] \approx$
$\forall y_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall y_3[R(a,y_1) \wedge R(x_2, f(x_2)) \wedge [\neg R(x_3,y_3) \vee R(x_3, f(x_3,y_3))] \wedge$
$\wedge [\neg R(x_3,y_3) \vee R(f(x_3,y_3),x_3)]]$

PNF:
$\exists x_1 \forall y_1 \forall x_2 \exists y_2 \forall x_3 \forall y_3 \exists z\, [R(x_1,y_1) \wedge R(x_2,y_2) \wedge [\neg R(x_3,y_3) \vee R(x_3,z)] \wedge [\neg R(x_3,y_3) \vee R(z,x_3)]]$
SNF:
$\forall y_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall y_3[R(a,y_1) \wedge R(x_2, f(x_2)) \wedge [\neg R(x_3,y_3) \vee R(x_3, f(x_3,y_3))] \wedge$
$\wedge [\neg R(x_3,y_3) \vee R(f(x_3,y_3),x_3)]]$

MK:
$\{\{R(a,y_1)\}, \{R(x_2, f(x_2))\}, \{\neg R(x_3,y_3), R(x_3, f(x_3,y_3))\}, \{\neg R(x_3,y_3), R(f(x_3,y_3),x_3)\}\}$

Příklad 3. Pomocí rezoluční metody zjistěte, zda jsou následující formule sporné.

(a) $\forall x \forall y[x \leq y \rightarrow (P(x) \leftrightarrow P(y))] \wedge \forall x \forall y[x \leq y \vee y \leq x] \wedge \exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$

(b) $\forall x \exists y[y \leq x \wedge \neg E(x,y)] \wedge \forall x \forall y[x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow E(x,y)] \wedge \exists x \forall y[x \leq y]$

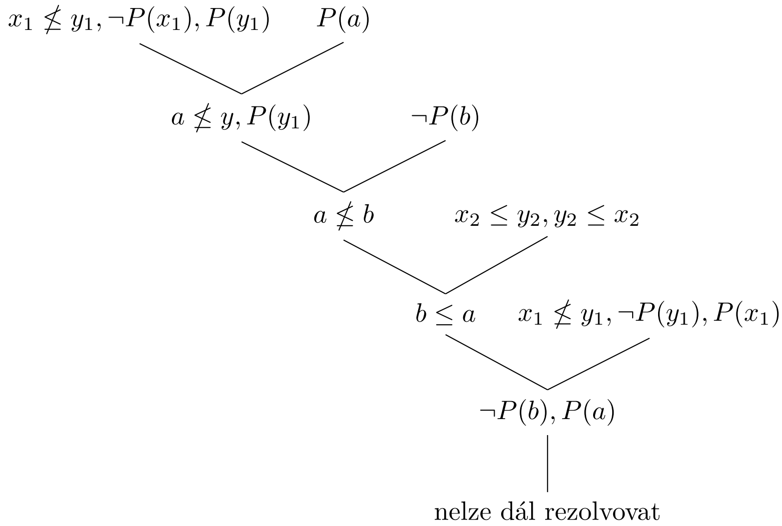
(c) $\forall x \forall y[R(x,y) \rightarrow (P(x) \leftrightarrow \neg P(y))] \wedge \forall x \forall y[R(x,y) \rightarrow \exists z[R(x,z) \wedge R(z,y)]] \wedge \exists x \exists y R(x,y)$

(d) $\forall x R(x, f(x)) \wedge \forall x \forall y \forall z[R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)] \wedge \forall x \forall y[E(x,y) \rightarrow \neg R(x,y)] \wedge \exists x E(x, f(f(x)))$

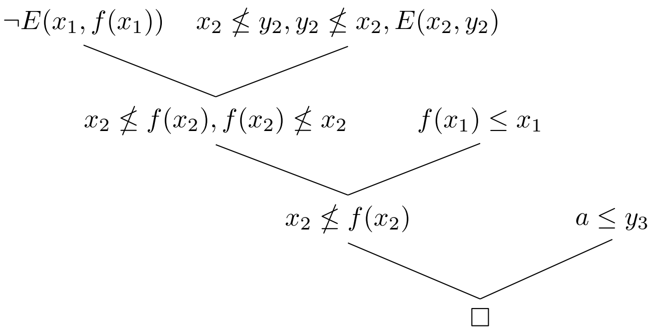
(a) SNF:
$\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2[(x_1 \not\leq y_1 \vee \neg P(x_1) \vee P(y_1)) \wedge (x_1 \not\leq y_1 \vee \neg P(y_1) \vee P(x_1)) \wedge (x_2 \leq y_2 \vee y_2 \leq x_2) \wedge$
$\wedge P(a) \wedge \neg P(b)]$

MK:
$\{\{x_1 \not\leq y_1, \neg P(x_1), P(y_1)\}, \{x_1 \not\leq y_1, \neg P(y_1), P(x_1)\}, \{x_2 \leq y_2, y_2 \leq x_2\}, \{P(a)\}, \{\neg P(b)\}\}$
Závěr: Formule je bezesporná (konzistentní).

(b) SNF:
$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_2 \forall y_3[f(x_1) \leq x_1 \wedge \neg E(x_1, f(x_1)) \wedge [x_2 \not\leq y_2 \vee y_2 \not\leq x_2 \vee E(x_2,y_2)] \wedge [a \leq y_3]]$
MK:
$\{\{f(x_1) \leq x_1\}, \{\neg E(x_1, f(x_1))\}, \{x_2 \not\leq y_2, y_2 \not\leq x_2, E(x_2,y_2)\}, \{a \leq y_3\}\}$
Závěr: Formule je sporná (nekonzistentní).



Obrázek 2: Strom k příkladu 3 a)



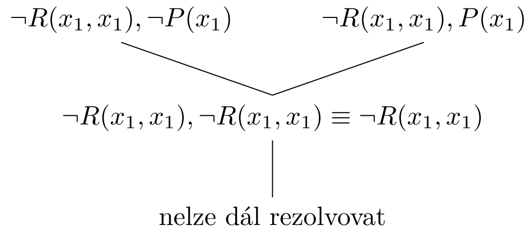
Obrázek 3: Strom k příkladu 3 b)

(c) SNF:

$$\forall x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 [[\neg R(x_1, y_1) \vee \overbrace{\neg P(x_1) \vee \neg P(y_1)}^{\text{můžeme unifikovat}}] \wedge [\neg R(x_1, y_1) \vee \overbrace{P(y_1) \vee P(x_1)}^{\text{můžeme unifikovat}}] \wedge [\neg R(x_2, y_2) \vee$$
$$\vee R(x_2, f(x_2, y_2))] \wedge [\neg R(x_2, y_2) \vee R(f(x_2, y_2), y_2)] \wedge R(a, b)] \approx$$
$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_2 [[\neg R(x_1, x_1) \vee \neg P(x_1)] \wedge [\neg R(x_1, x_1) \vee P(x_1)] \wedge [\neg R(x_2, y_2) \vee$$
$$\vee R(x_2, f(x_2, y_2))] \wedge [\neg R(x_2, y_2) \vee R(f(x_2, y_2), y_2)] \wedge R(a, b)]$$

MK:

$$\{\{\neg R(x_1, x_1), \neg P(x_1)\}, \{\neg R(x_1, x_1), P(x_1)\}, \{\neg R(x_2, y_2), R(x_2, f(x_2, y_2))\},$$
$$\{\neg R(x_2, y_2), R(f(x_2, y_2), y_2)\}, \{R(a, b)\}\}$$



Obrázek 4: Strom k příkladu 3 c)

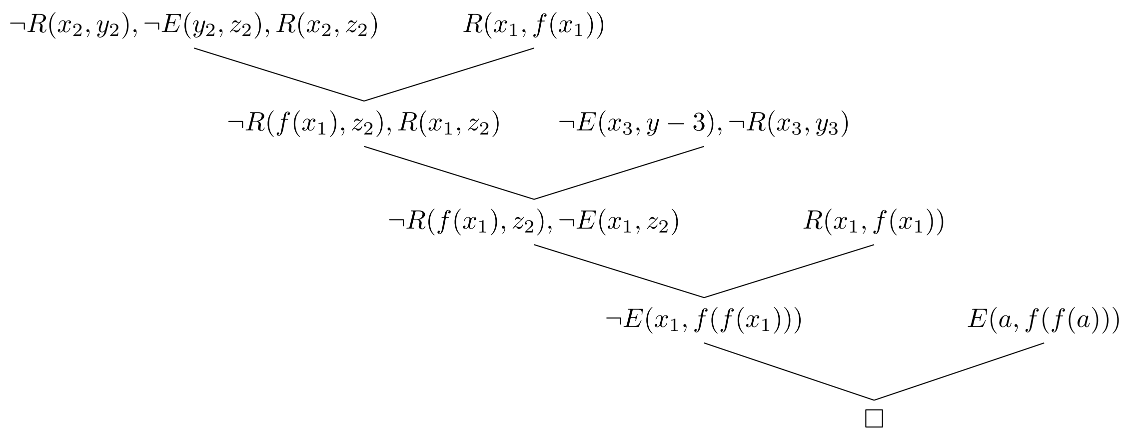
Závěr: Formule je bezesporná (konzistentní).

(d) SNF:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_2 \forall z_2 \forall x_3 \forall y_3 [R(x_1, f(x_1)) \wedge [\neg R(x_2, y_2) \vee \neg R(y_2, z_2) \vee R(x_2, z_2)] \wedge$$
$$\wedge [\neg E(x_3, y_3) \vee \neg R(x_3, y_3)] \wedge E(a, f(f(a)))]$$

MK:

$$\{\{R(x_1, f(x_1))\}, \{\neg R(x_2, y_2), \neg R(y_2, z_2), R(x_2, z_2)\}, \{\neg E(x_3, y_3), \neg R(x_3, y_3)\}, \{E(a, f(f(a)))\}\}$$



Obrázek 5: Strom k příkladu 3 d)

Závěr: Formule je sporná (nekonzistentní).

Příklad 4. Pomocí SLD rezoluce zjistěte, zda je následující množina Hornových klauzulí sporná.

(a) $\forall x T(x, x)$,
$\forall x \forall y \forall z \, [E(x, y) \wedge T(y, z) \to T(x, z)]$,
$E(a, b)$,

$E(b, c)$,
$E(c, d)$,
$\neg T(a, d)$.

(b) $\forall x T(x, x)$,
$\forall x \forall y \forall z \, [T(x, y) \wedge E(y, z) \rightarrow T(x, z)]$,
$E(a, b)$,
$E(b, c)$,
$E(c, d)$,
$\neg T(a, d)$.

(c) $R(c, c)$,
$\forall x \forall y \forall z \, [R(x, f(y, z)) \rightarrow R(f(y, x), z)]$,
$\neg \forall x \forall y \, [R(f(x, f(y, c))), f(y, f(x, c))]$.

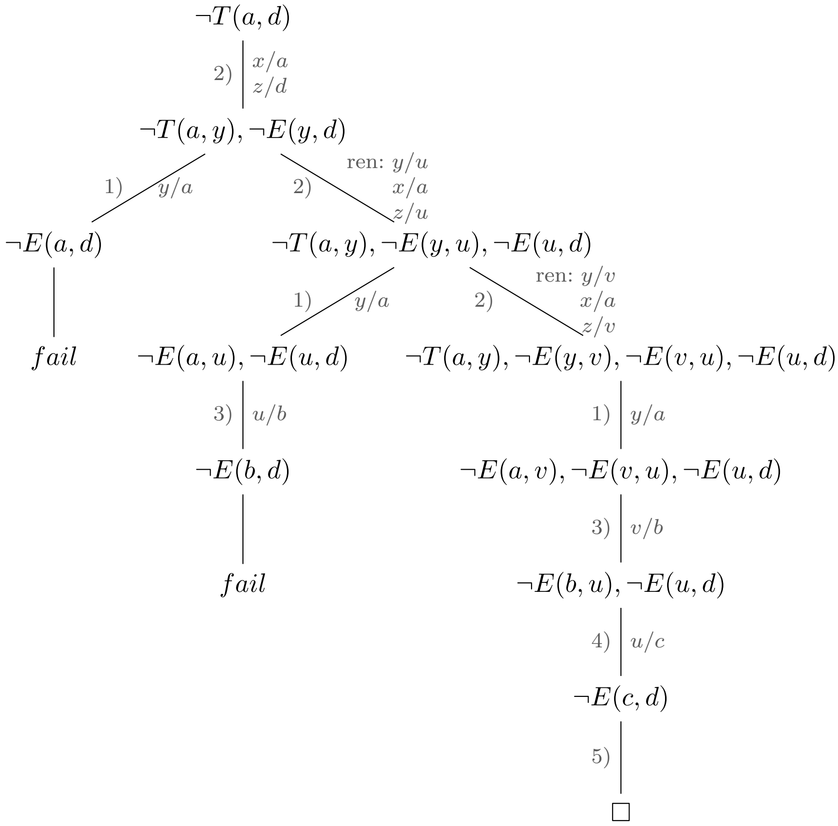
(a) 1. $\forall x T(x, x)$
2. $\forall x \forall y \forall z \, [\neg E(x, y) \vee \neg T(y, z) \vee T(x, z)]$
3. $E(a, b)$
4. $E(b, c)$
5. $E(c, d)$
$\neg T(a, d)$

$$\neg T(a, d)$$
$$2) \; \big| \; x/a, z/d$$
$$\neg E(a, y), \neg T(y, d)$$
$$3) \; \big| \; y/b$$
$$\neg T(c, d)$$
$$2) \; \big| \; x/c, z/d$$
$$\neg E(c, y), \neg T(y, d)$$
$$5) \; \big| \; y/d$$
$$\neg T(d, d)$$
$$1) \; \big|$$
$$\square$$

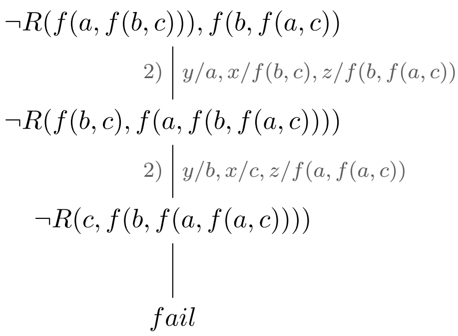
Obrázek 6: Strom k příkladu 4 a)

(b) 1. $\forall x T(x, x)$
2. $\forall x \forall y \forall z \, [\neg T(x, y) \vee \neg E(y, z) \vee T(x, z)]$
3. $E(a, b)$
4. $E(b, c)$
5. $E(c, d)$
$\neg T(a, d)$

(c) 1. $R(c, c)$
2. $\forall x \forall y \forall z \, [\neg R(x, f(y, z)) \vee R(f(y, x), z)]$
$\neg R(f(a, f(b, c))), f(b, f(a, c))$



Obrázek 7: Strom k příkladu 4 b)



Obrázek 8: Strom k příkladu 4 c)

Cvičení 3

Příklad 1. Předpokládejme, že mámem predikát flight(From, To, Time, Price) obsahující informaci o přímých letech včetně místa odletu, místa příletu, délky letu a ceny za letenku. Napište Program v Prologu, který počítá predikát travel(From, To, Stops, Time, Price) zahrnující všechny možnosti letu z jednoho města do jiného s možností přestupů.

Příklad 2. Napište v Prologu predikát fib(N, X), který počítá Fibonacciho posloupnost. Vyhodnoťte fib(3, X) a fib(N, 5).

Příklad 3. Napište v Prologu definice následujících predikátů.

length(List, N)	N je délka Listu
reverse(X, Y)	Y je převrácený seznam X
append(X, Y, Z)	Z je spojení seznamů X a Y
map(X, Y)	mapuje seznam $X = [X_1, \ldots, X_n]$ na $Y = [f(X_1), \ldots, f(X_n)]$
fold_left(X, Y, Z)	mapuje $Y = [Y_1, \ldots, Y_n]$ na $Z = f(\ldots f(f(X, Y_1), Y_2) \ldots, Y_n)$
fold_right(X, Y, Z)	mapuje $Y = [Y_1, \ldots, Y_n]$ na $Z = f(Y_1, f(Y_2, \ldots, f(Y_n, X) \ldots))$

Příklad 4. Napištenaivní řadící funkci

```
naive_sort(X, Y) :- permute(X, Y), sorted(Y).
```

implementovanou relacemi

sorted(X)	kontroluje, že je seznam X seřazen
insert(X, Y, Z)	seznam Z jsme získali přidáním X na libovolnou pozici do seznamu Y
permute(X, Y)	seznam Y je permutací seznamu X

Implementujte merge sort využitím relace

merge(X, Y, Z)	spojí dva seřazene seznamy X a Y do seznamu Z

Příklad 5. Uvažujme orientovaný graf $G = (V, E)$. Vyjádřete relace v relační algebře.

(a) x a y nejsou spojeny hranou

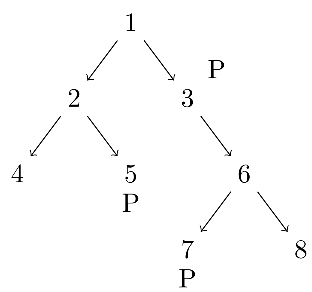
(b) hrana (x, y) je součástí trojúhelníka

(c) x má aspoň dva sousedy

(d) každý soused x je zároveň sousedem y

Příklad 6. Vyhodnoťte následující program v Datalogu na stromě (V, E, P) doprava.

$$
\begin{aligned}
U &\leftarrow S(x, y) \wedge W(x) \wedge W(y) \\
W(x) &\leftarrow P(x) \\
W(x) &\leftarrow E(x, y) \wedge W(y) \\
S(x, y) &\leftarrow E(z, x) \wedge E(z, y) \wedge x \neq y \\
R(x, y) &\leftarrow P(x) \wedge x = y \\
R(x, y) &\leftarrow E(x, z) \wedge R(z, y) \\
R(x, y) &\leftarrow R(x, z) \wedge E(z, y)
\end{aligned}
$$



Cvičení 4

Příklad 1. Použitím přirozené dedukce dokažte, že následující formule jsou pravdivé.

(a) $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$

(b) $\psi \to ((\varphi \wedge \psi) \vee \psi)$

(c) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

(d) $\varphi \to \neg\neg\varphi$

(e) $((\varphi \wedge \psi) \vee \psi) \to \psi$

(f) $\neg\neg\varphi \to \varphi$

(g) $\varphi \vee \neg\varphi$

(h) $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to (\varphi \vee \psi)$ (Zákeřné)

(i) $\varphi \to \exists x\varphi$

(j) $\forall x\varphi \to \varphi$

(k) $\forall x R(x,x) \to \forall x \exists y R(f(x), y)$

(l) $\exists x(\varphi \vee \psi) \to (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$

(m) $(\exists x\varphi \vee \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \vee \psi)$

(n) $\forall x\varphi \wedge \forall x\psi \to \forall x(\varphi \wedge \psi)$

(o) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \to \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$

(p) $\forall x \forall y[\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y)] \wedge \exists x\varphi(x) \to \forall x\varphi(x)$

(a)
$$\dfrac{\dfrac{\psi \vdash \psi \qquad \varphi \vdash \varphi}{\varphi, \psi \vdash \psi \wedge \varphi}\, I_\wedge}{\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi}\, I_\to$$

(b)
$$\dfrac{\dfrac{\psi \vdash \psi}{\psi \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee \psi}\, I_\vee}{\vdash \psi \to ((\varphi \wedge \psi) \vee \psi)}\, I_\to$$

(c)

(d)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi \qquad \varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi}{\varphi, \neg\varphi \vdash \bot}\, I_\bot}{\varphi \vdash \neg\neg\varphi}\, I_\neg}{\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi}\, I_\to$$

(e)
$$\dfrac{\dfrac{(\varphi \wedge \psi) \vee \psi \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee \psi \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi}{\varphi \wedge \psi \vdash \psi} \qquad \psi \vdash \psi}{(\varphi \wedge \psi) \vee \psi \vdash \psi}\, E_\vee}{\vdash ((\varphi \wedge \psi) \vee \psi) \to \psi}\, I_\to$$

(f)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \qquad \neg\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi}{\neg\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \bot}\, I_\bot}{\neg\neg\varphi \vdash \varphi}\, E_\neg}{\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi}\, I_\to$$

(g)
$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\varphi\vdash\varphi}{\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\varphi\vdash\varphi\lor\neg\varphi}\,I_{\lor}
\quad
\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\varphi\vdash\neg(\varphi\lor\neg\varphi)
}{\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\varphi\vdash\bot}\,I_{\bot}
}{\neg(\varphi\lor\neg\varphi)\vdash\neg\varphi}\,I_{\neg}
\quad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\neg\varphi\vdash\neg\varphi}{\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\neg\varphi\vdash\varphi\lor\neg\varphi}\,I_{\lor}
\quad
\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\neg\varphi\vdash\neg(\varphi\lor\neg\varphi)
}{\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\neg\varphi\vdash\bot}\,I_{\bot}
}{\neg(\varphi\lor\neg\varphi)\vdash\neg\neg\varphi}\,I_{\neg}
}{\dfrac{\neg(\varphi\lor\neg\varphi)\vdash\bot}{\vdash\neg\neg(\varphi\lor\neg\varphi)}\,I_{\neg}}\,I_{\bot}
\quad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\neg\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\neg(\varphi\lor\neg\varphi)\vdash\neg(\varphi\lor\neg\varphi)
\quad
\neg\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\neg(\varphi\lor\neg\varphi)\vdash\neg\neg(\varphi\lor\neg\varphi)
}{\neg\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\neg(\varphi\lor\neg\varphi)\vdash\bot}\,I_{\bot}
}{\neg\neg(\varphi\lor\neg\varphi)\vdash\varphi\lor\neg\varphi}\,E_{\neg}
}{\vdash\neg\neg(\varphi\lor\neg\varphi)\to(\varphi\lor\neg\varphi)}\,I_{\to}
}{\vdash\varphi\lor\neg\varphi}\,E_{\to}
$$

(h)
$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\varphi\vdash\varphi}{\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\varphi\vdash\varphi\lor\neg\varphi}\,I_{\lor}
\quad
\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\varphi\vdash\neg(\varphi\lor\neg\varphi)
}{\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\varphi\vdash\bot}\,I_{\bot}
}{\neg(\varphi\lor\neg\varphi)\vdash\neg\varphi}\,I_{\neg}
\quad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\neg\varphi\vdash\neg\varphi}{\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\neg\varphi\vdash\varphi\lor\neg\varphi}\,I_{\lor}
\quad
\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\neg\varphi\vdash\neg(\varphi\lor\neg\varphi)
}{\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\neg\varphi\vdash\bot}\,I_{\bot}
}{\neg(\varphi\lor\neg\varphi)\vdash\neg\neg\varphi}\,I_{\neg}
}{\dfrac{\neg(\varphi\lor\neg\varphi)\vdash\bot}{\vdash\neg\neg(\varphi\lor\neg\varphi)}\,I_{\neg}}\,I_{\bot}
\quad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\neg\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\neg(\varphi\lor\neg\varphi)\vdash\neg(\varphi\lor\neg\varphi)
\quad
\neg\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\neg(\varphi\lor\neg\varphi)\vdash\neg\neg(\varphi\lor\neg\varphi)
}{\neg\neg(\varphi\lor\neg\varphi),\neg(\varphi\lor\neg\varphi)\vdash\bot}\,I_{\bot}
}{\neg\neg(\varphi\lor\neg\varphi)\vdash\varphi\lor\neg\varphi}\,E_{\neg}
}{\vdash\neg\neg(\varphi\lor\neg\varphi)\to(\varphi\lor\neg\varphi)}\,I_{\to}
}{\vdash\varphi\lor\neg\varphi}\,E_{\to}
\quad
\dfrac{\varphi\vdash\varphi}{\varphi\vdash\varphi\lor\psi}\,I_{\lor}
\quad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\neg(\neg\varphi\land\neg\psi),\neg\varphi,\neg\psi\vdash\neg(\neg\varphi\land\neg\psi)
\quad
\dfrac{\neg(\neg\varphi\land\neg\psi),\neg\varphi\vdash\neg\varphi\quad\neg\psi\vdash\neg\psi}{\neg(\neg\varphi\land\neg\psi),\neg\varphi,\neg\psi\vdash\neg\varphi\land\neg\psi}\,I_{\land}
}{\neg(\neg\varphi\land\neg\psi),\neg\varphi,\neg\psi\vdash\bot}\,I_{\bot}
}{\neg(\neg\varphi\land\neg\psi),\neg\varphi\vdash\neg\neg\psi}\,I_{\neg}
\quad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\neg\neg\psi,\neg\psi\vdash\neg\psi\quad\neg\neg\psi,\neg\psi\vdash\neg\neg\psi}{\neg\neg\psi,\neg\psi\vdash\bot}\,I_{\bot}
}{\neg\neg\psi\vdash\psi}\,E_{\neg}
}{\vdash\neg\neg\psi\to\psi}\,I_{\to}
}{\neg(\neg\varphi\land\neg\psi),\neg\varphi\vdash\psi}\,E_{\to}
}{\neg(\neg\varphi\land\neg\psi),\neg\varphi\vdash\varphi\lor\psi}\,I_{\lor}
}{\dfrac{\neg(\neg\varphi\land\neg\psi)\vdash(\varphi\lor\psi)}{\vdash\neg(\neg\varphi\land\neg\psi)\to(\varphi\lor\psi)}\,I_{\to}}\,E_{\lor}
$$

(i)

(j)

(k)
$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\forall xR(x,x)\vdash\forall xR(x,x)}{\forall xR(x,x)\vdash R(f(c),f(c))}\,E_{\forall}
}{\forall xR(x,x)\vdash\exists yR(f(c),y)}\,I_{\exists}
}{\forall xR(x,x)\vdash\forall x\exists yR(f(x),y)}\,I_{\forall}
}{\vdash\forall xR(x,x)\to\forall x\exists yR(f(x),y)}\,I_{\to}
$$

(l)

(m)

(n)

(o)

(p)

Příklad 2. Použitím tableau důkazu ukažte, že formule z příkladu 1 jsou pravdivé.

(a)

$\vdash \varphi\land\psi\to\psi\land\varphi$

1.	$F:\varphi\land\psi\to\psi\land\varphi$		Negace závěru
2.	$T:\varphi\land\psi$		$1 \to$ E
3.	$F:\psi\land\varphi$		$1 \to$ E
4.	$T:\varphi$		2 $\land$E
5.	$T:\psi$		2 $\land$E
6.	$F:\psi$	$F:\varphi$	3 $\land$E
	$\otimes$ $5,6$	$\otimes$ $4,6$	

(b)

(c)

$\vdash(\neg\psi\to\neg\varphi)\to(\varphi\to\psi)$

1.	$F:(\neg\psi\to\neg\varphi)\to(\varphi\to\psi)$		Negace závěru
2.	$T:\neg\psi\to\neg\varphi$		$1 \to$ E
3.	$F:\varphi\to\psi$		$1 \to$ E
4.	$T:\varphi$		$3 \to$ E
5.	$F:\psi$		$3 \to$ E
6.	$F:\neg\psi$	$T:\neg\varphi$	$2 \to$ E
7.	$T:\psi$	$F:\varphi$	6 $\neg$E
	$\otimes$ $5,7$	$\otimes$ $4,7$	

(d)

$\vdash ((\varphi \wedge \psi) \vee \psi) \to \psi)$

1.	$F : ((\varphi \wedge \psi) \vee \psi) \to \psi$		Negace závěru
2.	$T : (\varphi \wedge \psi) \vee \psi$		$1 \to$ E
3.	$F : \psi$		$1 \to$ E
4.	$T : \varphi \wedge \psi$	$T : \psi$	2 $\vee$E
5.	$T : \varphi$	$\otimes$ $_{3,4}$	4 $\wedge$E
6.	$T : \psi$		4 $\wedge$E
	$\otimes$ $_{3,6}$		

(e)

(f)

(g)

(h)

(i)

(j)

(k)

(l)

(m)

(n)

(o)

(p)

Příklad 3. Najděte všechny konzistentní množiny pro následující množiny pravidel.

(a) $\dfrac{}{\alpha} \quad \dfrac{\alpha : \beta}{\delta} \quad \dfrac{\alpha : \gamma}{\delta}$

(b) $\dfrac{}{\alpha} \quad \dfrac{\alpha : \beta\gamma}{\beta}$

(c) $\dfrac{}{\alpha} \quad \dfrac{\alpha\beta}{\gamma} \quad \dfrac{\alpha : \gamma}{\beta}$

Příklad 4. Pro každou podmnožinu $\Phi \subseteq \mathcal{P}(\{\alpha, \beta\})$ se pokuste najít množinu pravidel R takovou, že Φ je množinou všech konzistentních množin pro R.

Příklad 5. Ze základních pravidel přirozené dedukce odvoďte následující pravidla.

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi} \qquad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \psi \to \varphi} \qquad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}$$

Příklad 6. Najděte pravidlo pro důkazy indukcí.

$\dfrac{\dots \quad \dots}{\forall x \varphi(x)}$ kde $\varphi(x)$ je formule mluvící o přirozených číslech.

Cvičení 5

Příklad 1. Spusťte Find-S algoritmus na následujících vstupech.

(a)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$f(\bar{x})$
0	1	1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0	0	1

(b)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$f(\bar{x})$
0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1

(a)

$$\begin{aligned}
h_0 &= \bot \\
h_1 &= \neg x_0 \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 \wedge \neg x_7 \\
h_2 &= x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_4 \wedge x_5 \wedge \neg x_7 \\
h_3 &= x_1 \wedge \neg x_4 \wedge x_5 \wedge \neg x_7 \\
h_4 &= x_1 \wedge \neg x_4 \wedge x_5 \wedge \neg x_7 \\
h_5 &= x_1 \wedge \neg x_4 \wedge x_5 \wedge \neg x_7
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
h_0 &= \bot \\
h_1 &= \neg x_0 \wedge x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge \neg x_5 \wedge \neg x_6 \wedge x_7 \\
h_2 &= \neg x_0 \wedge x_1 \wedge x_4 \wedge \neg x_5 \wedge \neg x_6 \wedge x_7 \\
h_3 &= \neg x_0 \wedge \neg x_5 \wedge \neg x_6 \\
h_4 &= \neg x_0 \wedge \neg x_5 \wedge \neg x_6 \\
h_5 &= \neg x_0 \wedge \neg x_5 \wedge \neg x_6
\end{aligned}$$

Příklad 2. Spusťte Candidate-Elimination algoritmus na vstupech.

(a)

x_0	x_1	x_2	x_3	$f(\bar{x})$
0	1	1	0	1
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
1	1	0	1	0

(b)

x_0	x_1	x_2	x_3	$f(\bar{x})$
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
0	0	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
0	0	1	1	0

(a)

$0{:}\mathrm{H}^- = \{\bot\}$	$\mathrm{H}^+ = \{\top\}$
$1{:}\mathrm{H}^- = \{\neg x_0 \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3\}$	$\mathrm{H}^+ = \{\top\}$
$2{:}\mathrm{H}^- = \{x_1 \wedge \neg x_3\}$	$\mathrm{H}^+ = \{\top\}$
$3{:}\mathrm{H}^- = \{x_1 \wedge \neg x_3\}$	$\mathrm{H}^+ = \{x_1, \neg x_3\}$
$4{:}\mathrm{H}^- = \{\neg x_3\}$	$\mathrm{H}^+ = \{\neg x_3\}$
$5{:}\mathrm{H}^- = \{\neg x_3\}$	$\mathrm{H}^+ = \{\neg x_3\}$

Cvičení 6

Příklad 1. Uvažujme slova nad abecedou $\{a, b\}$ jako přechodové systémy (S, E_s, E_r, P_a, P_b), kde stavy S jsou pozice, dva predikáty P_a a P_b označí každou pozici odpovídajících znakem a dvě hranové relace

$$E_s = \{(i, i+1) \mid i < n-1\}, \qquad E_r = \{(i, k) \mid i \leq k < n\},$$

kde $n = |S|$ je délka slova. Definujte následující jazyky v modální logice.

(a) všechna slova začínající na písmeno a

(b) všechna slova se skládají pouze z písmen a

(c) všechna slova končí na písmeno a

(d) a^*b^*

(e) všechna slova obsahují faktor bb

(f) všechna slova obsahují aspoň dvě písmena b

(g) všechna slova obsahují právě dvě písmena b

(h) $(ab)*$

Příklad 2. Přepište následující formule do predikátové logiky.

(a) $[a]P \to P$

(b) $P \to \langle a \rangle Q$

(c) $[a](P \wedge \langle b \rangle Q) \to (\langle a \rangle P \vee \langle b \rangle Q)$

Příklad 3. Dokažte následující modální formule pomocí tabel.

(a) $\Box(P \leftrightarrow (Q \wedge R)) \to (\Box P \leftrightarrow (\Box Q \wedge \Box R))$

(b) $\neg\Box\Box P \leftrightarrow \Diamond\Diamond\neg P$

(c) $\Box(P \wedge \neg P) \to \Box Q$

(d) $\neg\Diamond P \to \Box(P \to Q)$

Příklad 4. Najděte CTL* formule definující následující vlastnosti $\{a, b\}$-označených stromů.

(a) je aspoň jedno označení b

(b) každá cesta obsahuje nějaké b

(c) každá cesta obsahuje aspoň dvě b

(d) všechny cesty obsahují nekonečně mnoho b

(e) nějaká cesta obsahuje nekonečně mnoho b
