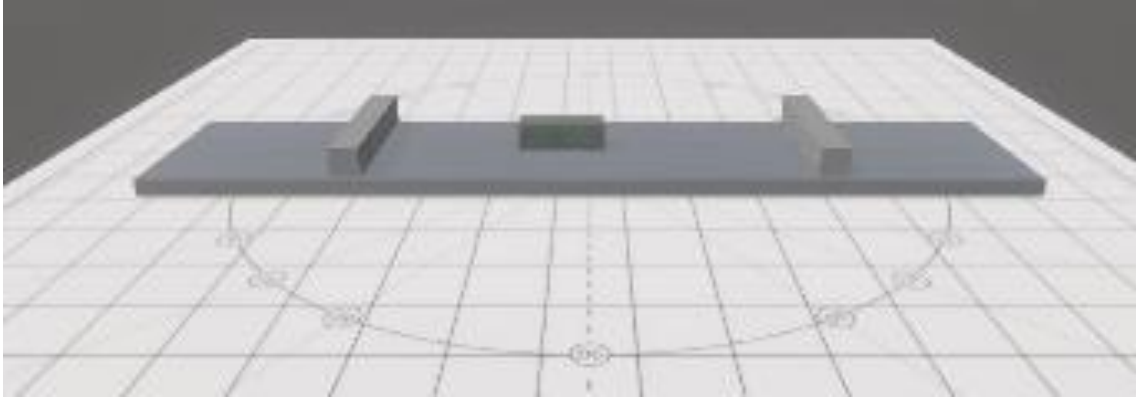


Semesterprojekt Teil 3



Physik Engines FS25
22.06.2025

Autoren
Anujan Chandrawathanan
Diego Esposito

Inhaltsverzeichnis

1. Zusammenfassung.....	3
2. Energieerhaltung.....	4
2.1 Allgemeine physikalische Formeln für Energieberechnungen	4
2.2 Elastischer Stoss ohne Reibung	5
2.2.1 Physikalische Beschreibung.....	5
2.2.2 Resultate und Interpretation	6
2.2.3 Beschreibung der Implementierung.....	6
2.3 Elastischer Stoss mit Reibung.....	7
2.3.1 Physikalische Beschreibung.....	7
2.3.2 Implementation	8
3. Zentraler inelastischer Stoss	9
3.1 Physikalische Beschreibung.....	9
3.2 Implementation	9
3.3 Resultate und Interpretation	10
4. Inelastischer Stoss mit Rotation	11
4.1 Physikalische Beschreibung.....	11
4.1.1 Drehimpuls.....	12
4.1.2 Energie- und Impulserhaltung	12
4.2 Implementation	13
4.3 Resultate und Interpretation	14
5. Rückblick und Lehren aus dem Versuch	15
6. Anhang.....	16

1. Zusammenfassung

In dieser Semesterarbeit wurden zwei inelastische Stossszenarien ohne Reibung untersucht. Der zentraler inelastischer Stoss sowie der inelastischer Stoss mit Rotation. Ziel war es, das Verhalten der Objekte hinsichtlich Impuls- und Energieerhaltung zu analysieren und in Unity realitätsnah zu simulieren.

Im zentralen Fall verbanden sich die kollidierenden Körper nach dem Aufprall und bewegten sich gemeinsam weiter, wobei der Gesamtimpuls erhalten blieb, ein Teil der kinetischen Energie jedoch in andere Energieformen überging.

Im rotierenden Szenario führten asymmetrische Kollisionen zu einer gemeinsamen Rotation der Körper.

2. Energieerhaltung

In diesem Kapitel analysieren wir die Energieerhaltung bei elastischen Stößen anhand unseres Semesterprojekts Teil II. Dabei vergleichen wir den elastischen Stoss ohne Reibung mit dem Fall, bei dem Reibung berücksichtigt wird. Ziel ist es, die kinetische Energie und die Federenergie der beteiligten Objekte zu berechnen, grafisch darzustellen und physikalisch zu interpretieren.

2.1 Allgemeine physikalische Formeln für Energieberechnungen

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

Potenzielle Energie der Feder:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}k(x - L_0)^2$$

Totale Energie im System:

$$E_{gesamt} = E_{kin,Wagen} + E_{kin,Bumper} + E_{feder}$$

Angaben zum Prellbock und Auto:

Masse des Autos = 0.4 kg

Masse des linken Prellbocks = 1 kg

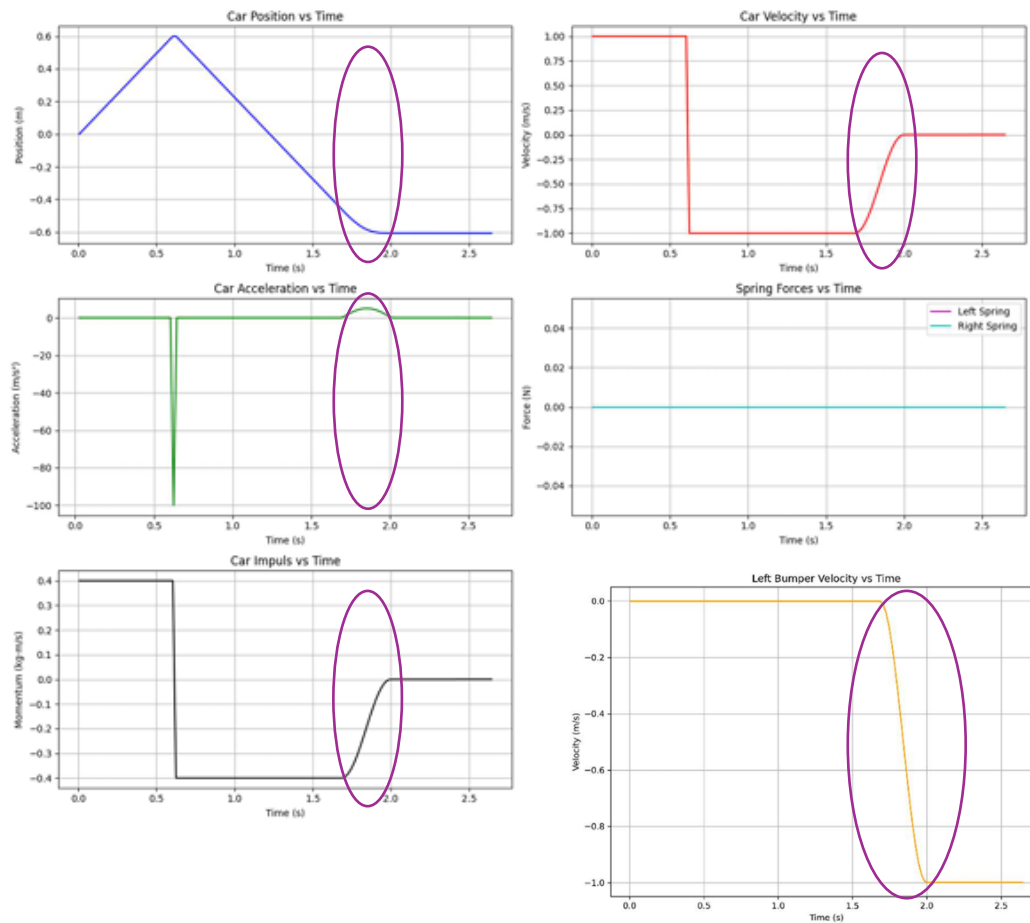
Reibung = 10

Federkonstante = $\frac{20N}{m}$

Federlänge = 0.15 m

2.2 Elastischer Stoss ohne Reibung

In diesen Abbildungen können wir das Verhalten des Autos und des Prellbocks aus der Aufgabe 3 der Semesterarbeit 2 beobachten.



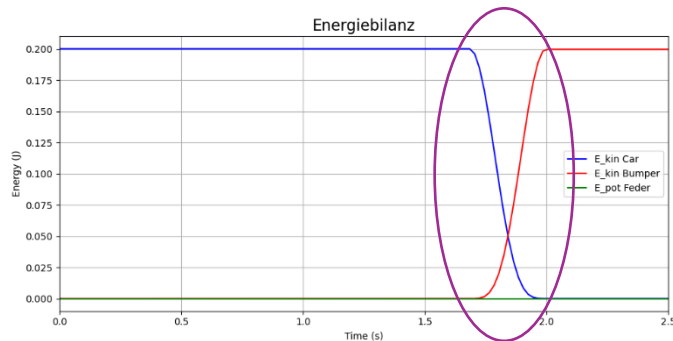
2.2.1 Physikalische Beschreibung

Bei einem vollkommen elastischen Stoss ohne Reibungsverluste bleibt die gesamte mechanische Energie erhalten. Das bedeutet:

- Die kinetische Energie des Wagens wird beim Zusammenstoss vollständig auf den beweglichen Prellbock übertragen.
- Der Wagen kommt nach dem Stoss zum Stillstand.
- Der Prellbock bewegt sich mit der ursprünglichen Geschwindigkeit des Wagens weiter.
- Die Energieverteilung lässt sich durch die folgenden Gleichungen beschreiben:
 - $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$
 - $E_{gesamt} = E_{kin,Wagen} + E_{kin,Bumper} + E_{feder}$

2.2.2 Resultate und Interpretation

- Die Plots aus Aufgabe 3 zeigen die Geschwindigkeiten und Energien der Objekte über die Zeit.
- Besonders bei der zweiten Kollision (violett markiert) ist zu sehen, dass die kinetische Energie vollständig vom Wagen auf den Prellbock übertragen wird.
- Die Gesamtenergie bleibt konstant, was die Energieerhaltung bestätigt.
- Die Grafiken zeigen typische schwingungsfreie Verläufe, ohne Dämpfung.



2.2.3 Beschreibung der Implementierung

- Im Unity-Projekt wurde der Parameter bumperMode zu Beginn auf "Case 1" gesetzt, wodurch sich der Prellbock auf der z-Achse frei bewegen kann.
- Die Methode FixedUpdate() wurde so angepasst, dass:
 - Bei Kollision mit dem rechten Prellbock ein elastischer Stoss ohne Energieverlust berechnet wird.
 - Beim linken Prellbock die Berechnung ebenfalls ohne Energieverlust erfolgt.
 - Dadurch modellieren wir den reibungsfreien Stoss.

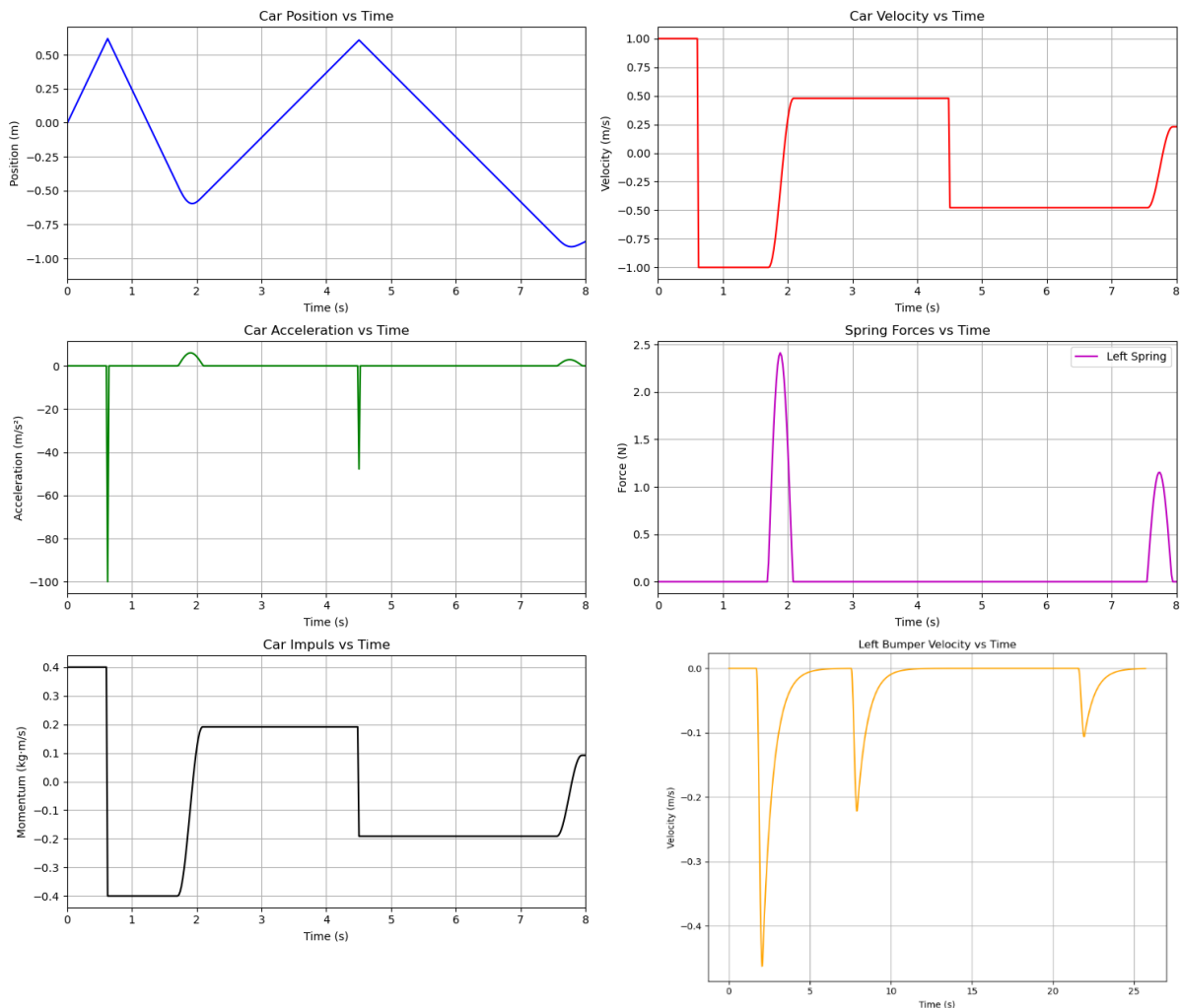
```
// == left collision
if (compressionLeft > 0) // Only apply force if spring is compressed
{
    forceLeft = springConstant * compressionLeft;
    rb.AddForce(Vector3.forward * forceLeft, ForceMode.Force);
    if (bumperMode == 1 || bumperMode == 2)
    {
        leftBumper.AddForce(Vector3.back * forceLeft, ForceMode.Force);
    }
}

// right collision
float compressionRight = 0f;
float forceRight = rb.LinearVelocity.z;

if (carRightEdge >= rightBumperLeftEdge && rb.LinearVelocity.z > 0f)
{
    rb.LinearVelocity = new Vector3(0, 0, -rb.LinearVelocity.z);
}
```

2.3 Elastischer Stoss mit Reibung

In diesen Abbildungen können wir das Verhalten des Autos und des Prellbocks aus der Aufgabe 4 der Semesterarbeit 2 beobachten.



2.3.1 Physikalische Beschreibung

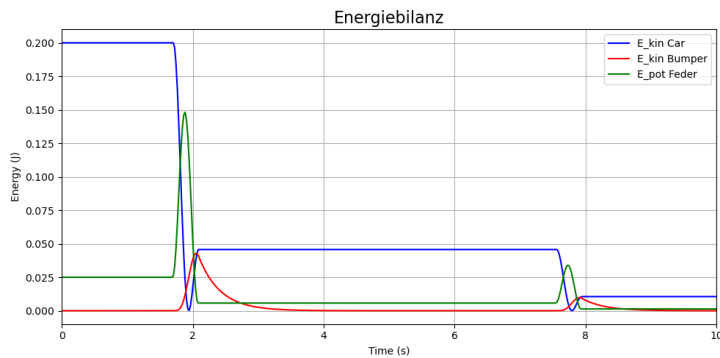
Bei einem elastischen Stoss mit Reibung geht ein Teil der mechanischen Energie durch Reibungsverluste verloren. Das bedeutet, dass die Gesamtenergie des mechanischen Systems abnimmt, da ein Teil der Energie in Wärme umgewandelt wird. Das bedeutet:

- Bei Reibung geht ein Teil der mechanischen Energie im Stossprozess in Wärmeenergie über.
- Die kinetische Energie des Prellbocks nimmt mit der Zeit ab, da die Reibung eine Dämpfungskraft darstellt.
- Der Wagen pendelt mit abnehmender Amplitude, bis das System schliesslich zur Ruhe kommt.
- Die Energiegleichung lautet hier:

$$\circ E_{\text{gesamt}} = E_{\text{kin,Wagen}} + E_{\text{kin,Bumper}} + E_{\text{feder}} - E_{\text{Reibung}}$$

Resultate und Interpretation

- Der Plot zeigen deutlich, dass die Gesamtenergie im System mit der Zeit abnimmt.
- Die kinetische Energie des Prellbocks und des Wagens nimmt kontinuierlich ab.
- Die Energie ist somit nicht mehr vollständig erhalten.
- Man kann die fehlende Energie berechnen als:
 - $E_{\text{fehlend}}(t) = E_{\text{gesamt, Anfang}} - E_{\text{gesamt}}(t)$



2.3.2 Implementation

- Die Implementierung entspricht grundsätzlich der von 2.1.2, mit folgender Erweiterung:
 - Im Modus bumperMode 2 wurde für den linken Prellbock eine Reibungskraft modelliert.
 - Die Reibungskraft wirkt gegen die Bewegungsrichtung des Prellbocks und wird folgendermassen berechnet:
 - $F_{\text{Reibung}}(t) = -\mu * \text{Richtung}$
 - Diese Kraft wird in der FixedUpdate()-Methode berücksichtigt, wodurch Energie allmählich aus dem mechanischen System entzogen wird.

```
// == left bumper
if (bumperMode == 2)
{
    float bumperVelocity = leftBumper.linearVelocity.z;
    float frictionForce = -bumperVelocity * frictionCoefficient;
    leftBumper.AddForce(Vector3.forward * frictionForce, ForceMode.Force);
}
```


3. Zentraler inelastischer Stoss

3.1 Physikalische Beschreibung

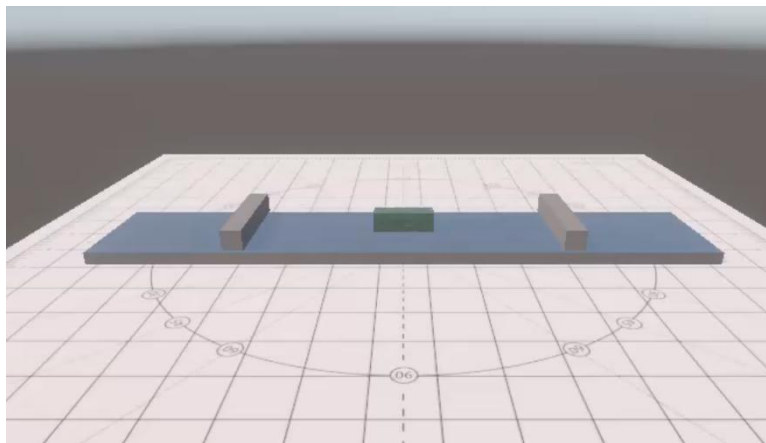
In unserem Szenario trifft das Auto auf den Prellbock und beide fahren dann zusammen weiter. Die Geschwindigkeit berechnet sich aus dem Gesamtimpuls dividiert durch die gesamte Masse beider Objekte. Da wir keine Reibung in unserem Szenario haben bleibt der Impuls erhalten.

$$v_{\text{gemeinsam}} = \frac{p_{\text{gesamt}}}{m_{\text{gesamt}}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Diese Formel berechnet die Endgeschwindigkeit der beiden Objekte nach dem inelastischen Stoss.

Wichtig zu bemerken ist das der Impuls erhalten bleibt, aber nicht die kinetische Energie. Ein Teil geht hierbei verloren weil es in Wärme umgewandelt oder zur Verformung der Objekte verwendet wird.

3.2 Implementation



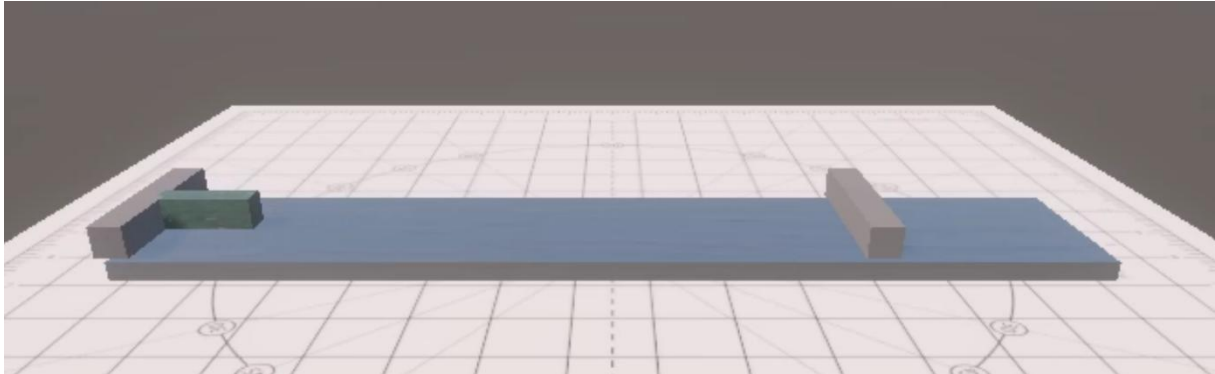
Zuerst wurde die Rollbahn und die Länge der Prellböcke nach dem Aufgabenbescrieb angepasst.

```
float distanceLeft = carLeftEdge - leftBumperRightEdge;
float impulseCar = rb.mass * rb.linearVelocity.z;
float impulseLeftBumper = leftBumper.mass * leftBumper.linearVelocity.z;

if (distanceLeft < 0) // inelastischer Stoss
{
    FixedJoint joint = rb.gameObject.AddComponent<FixedJoint>();
    joint.connectedBody = leftBumper;
}
```

Innerhalb der FixedUpdate() Methode wurde anschliessend der inelastische Stoss für den linken Prellbock eingeführt. Hierzu musst jediglich die Feder entfernt und beide Objekte beim zusammenstossen durch einen «FixedJoint» verbunden werden. Die restliche Berechnung erfolgte durch Unity.

3.3 Resultate und Interpretation



Das Auto und der Prellbock stoßen aufeinander und bewegen sich gemeinsam weiter. Während der Impuls erhalten bleibt geht ein Teil der Energie verloren da diese für Wärme oder Verformung genutzt wird.

Unity hat ebenfalls die gemeinsame Geschwindigkeit korrekt berechnet nachdem das Auto und der Prellbock durch den fixed Joint verbunden wurden.

4. Inelastischer Stoss mit Rotation

4.1 Physikalische Beschreibung

Massenmittelpunkt

$$\vec{r}_{\text{Bumper}} = \left(\frac{0.6}{2}, \frac{0.1}{2} \right) = (0.3, 0.05) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{car}} = \left(\frac{0.3}{2}, \frac{0.1}{2} \right) = (0.15, 0.05) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{\text{Gesamt}} = \frac{m_{\text{car}} \cdot \vec{r}_{\text{car}} + m_{\text{bumper}} \cdot \vec{r}_{\text{bumper}}}{m_{\text{car}} + m_{\text{bumper}}} = (0.2286, 0.0786) \text{ m}$$

Trägheitsmoment (Steinersche Satz)

$$J_{\text{neu}} = J_{\text{Schwerpunkt}} + \text{Masse} \cdot \text{Abstand}^2$$

Gesamtdrehimpuls

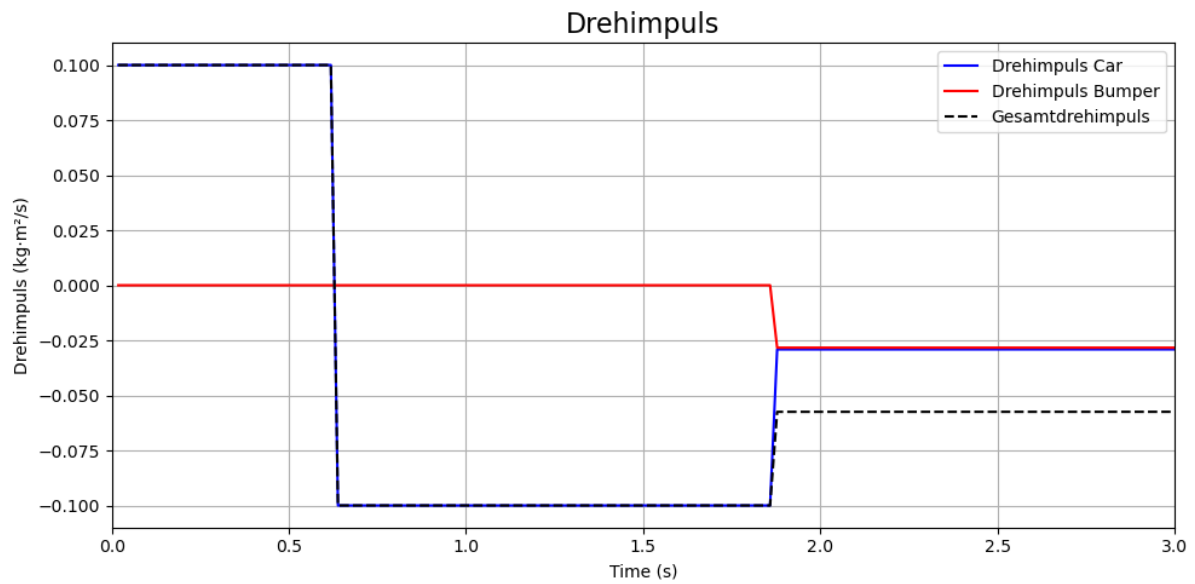
$$L = 0.4 \cdot 1.0 \cdot 0.25 = 0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

4.1.1 Winkelgeschwindigkeit



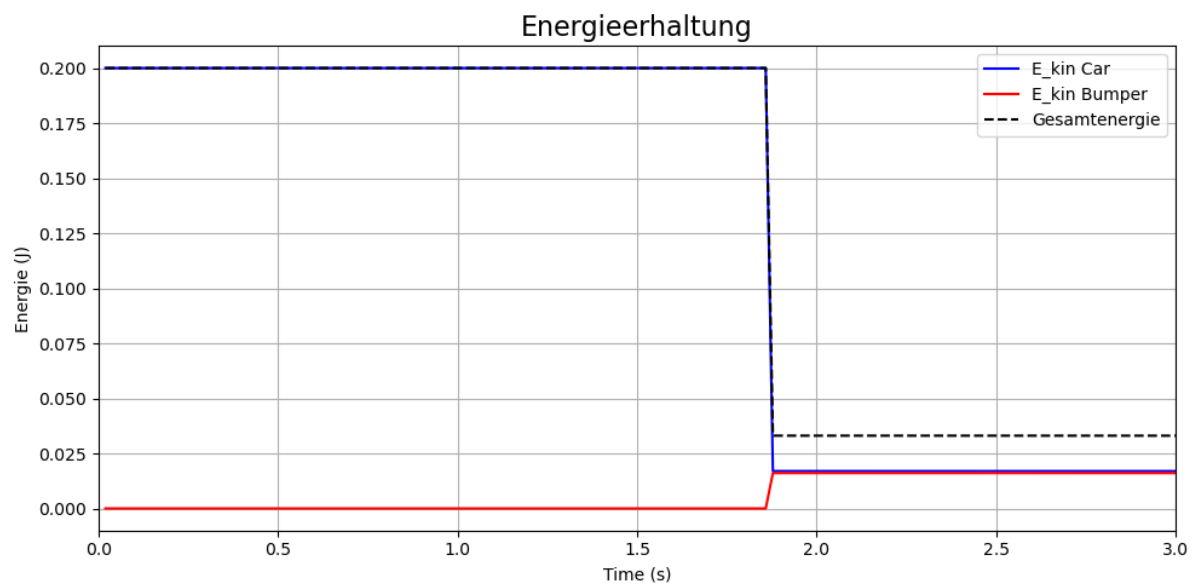
Die Winkelgeschwindigkeit hat sich bei und kurz angepasst, wobei wir jedoch nicht aussagen können woran das liegt bevor sie sich auf -2.0 radian/s gerichtet hat.

4.1.2 Drehimpuls

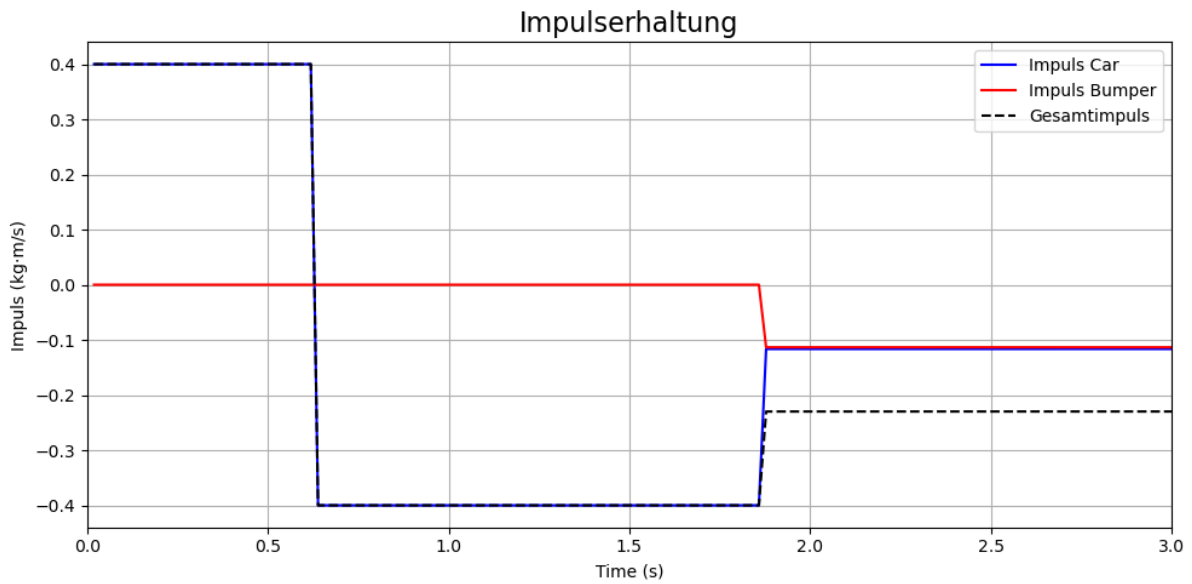


Der Drehimpuls des Autos und des Prellbocks treffen bei etwa 1.8s aufeinander und nehmen den selben Wert an. Daraus lässt sich schließen das sie sich ineinander verankert haben. Dieser Wert widerspiegelt dem Gesamtdrehimpuls.

4.1.3 Energie- und Impulserhaltung

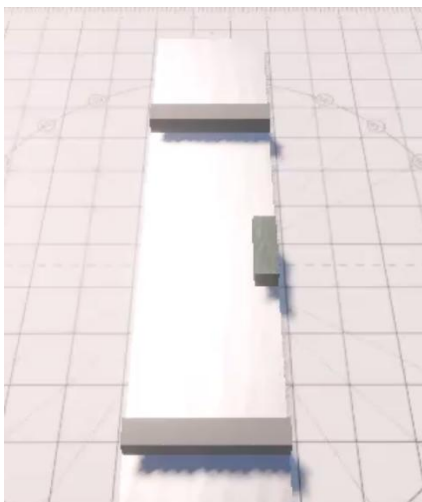


Wie bereits zuvor geht auch hier wieder ein teil der kinetischen Energie verloren oder bzw. Wird in Wärme oder zur Verformung der Objekte umgewandelt.



Der Gesamtimpuls bleibt erhalten und beim Plot ist ersichtlich das ein Teil des Impulses in den Prellbock übergeht.

4.2 Implementation



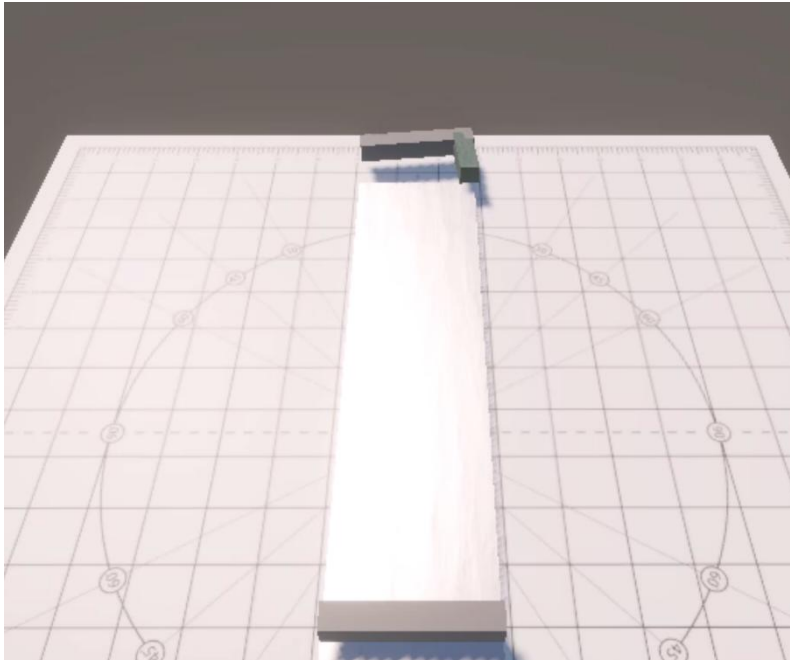
```
if (!isRotation) {
    rb.constraints = RigidbodyConstraints.FreezePositionX |
    RigidbodyConstraints.FreezePositionY |
    RigidbodyConstraints.FreezeRotationX |
    RigidbodyConstraints.FreezeRotationY |
    RigidbodyConstraints.FreezeRotationZ;
} else {
    rb.constraints = RigidbodyConstraints.FreezePositionY |
    RigidbodyConstraints.FreezeRotationX |
    RigidbodyConstraints.FreezeRotationZ;
}

// set motion of the bumpers
rightBumper.constraints = RigidbodyConstraints.FreezeAll;
leftBumper.constraints = RigidbodyConstraints.FreezePositionY;
leftBumper.isKinematic = false;
```

Das Szenario wurde nach den Anforderungen angepasst, damit das Auto nun ein «L» mit dem Prellbock formt.

Im Code wurden entsprechende Anpassung gemacht damit der Prellbock und das Auto nach dem Aufstoss rotieren können.

4.3 Resultate und Interpretation



Das Auto trifft den Prellbock und sie geraten langsam in eine Rotation. Hierbei wird der Gesamtimpuls beibehalten und beide haben einen gemeinsamen Drehimpuls. Wie bereits zuvor beim zentralen Inelastischem Stoss bleibt auch hier die gesamte kinetische Energie nicht behalten und ein Teil wird in Wärme oder durch die Verformung verloren gegangen.

5. Rückblick und Lehren aus dem Versuch

In dieser Arbeit wurde das Zusammenspiel von Impuls und Energie nochmals deutlich, insbesondere im Kontext des inelastischen Stosses und seiner speziellen Eigenschaften. Anfangs war unklar, wohin ein Grossteil der Energie im System „verschwindet“, was zu einigen Ungewissheiten führte.

Auch die technische Umsetzung, vor allem die Integration des Fixed Joint in Unity, stellte eine neue Herausforderung dar und kostete etwas Zeit für das Debugging, bis wir das erwünschte Verhalten erreichten.

Die Umsetzung verschiedener Stossszenarien in Unity, hat unser Verständnis für die physikalischen Zusammenhänge zwischen Impuls, Energieerhaltung und Reibungsverlusten vertieft. Besonders die Visualisierung der Energieverläufe machte theoretische Konzepte anschaulich und greifbar.

Der Übergang vom eindimensionalen zum zweidimensionalen Modell mit Rotation zeigte zudem, wie viel komplexer sich Kräfte und Bewegungen im Raum verhalten. Rotation als Mechanismus der Körper war vorallem mit den verschiedenen Werten stellte sich als grösste Herausforderung für uns.

6. Anhang

Die Videos zur Semesterarbeit Teil 2 und Teil 3 sowie der Code kann auf unserem Github Repository gefunden werden: https://github.com/esposdie/PE_Semesterarbeit_Teil3