

## Analyse Numérique

### Série d'exercices N°2 Interpolation et approximation polynomiale

Niveau : 3<sup>ème</sup> année

Année universitaire : 2021-2022

**Exercice 1** On considère les points  $(-2, 4)$  ;  $(0, 0)$  ;  $(1, 0)$  et  $(2, 4)$ . Parmi les polynômes suivants, lequel est le polynôme d'interpolation  $P$  aux quatre points donnés précédemment et justifier votre réponse.

(1)  $P_1(X) = X^4 + \frac{2}{3}X^3 + 3X^2 + \frac{8}{3}X$

(2)  $P_2(X) = \frac{4}{3}X^2 - \frac{4}{3}$

(3)  $P_3(X) = \frac{1}{3}X^3 + X^2 - \frac{4}{3}X$

(4)  $P_4(X) = \frac{1}{6}X^4 + X^3 + \frac{2}{3}X^2 + X$

**Exercice 2** (Examen Mai 2019)

#### Partie I : Interpolation polynomial

- (a) Justifier l'existence d'un unique polynôme  $P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$  interpolant les points  $(-2, 16)$ ,  $(0, -4)$  et  $(2, 8)$ .
- (b) Déterminer l'expression du polynôme  $P_2$  par une méthode (vue en cours) de votre choix

#### Partie II : Approximation au sens des moindres carrées

Dans l'objectif d'étudier le chemin de freinage d'un véhicule, correspondant à la distance parcourue en mètres (m) du début du freinage jusqu'à l'arrêt total du véhicule, en fonction de la vitesse en Kilomètres par heure (Km/h) de ce dernier, 12 expériences indépendantes ont été réalisées. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous. On note par  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq 12}$  et  $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq 12}$ , où  $x_i$ , et  $y_i$ , désignent, respectivement, la vitesse du véhicule et le chemin de freinage associés à l'expérience  $i$ .

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_i$	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
$y_i$	9	11	20	27	39	45	58	78	79	93	108	12

- (a) Déterminer les coefficients  $Z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  de la droite  $f(t, Z) = a + bt$ , qui ajuste au mieux les points  $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq 12}$  au sens des moindres carrées. On donne les valeurs des sommes

suivantes :

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 1140; \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 122600; \sum_{i=1}^{12} y_i = 691; \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 80840$$

- (b) Rouler à une vitesse de 105Km/h, le conducteur de ce véhicule pourrait-il éviter un obstacle survenant à une distance de 60m ? Justifier votre réponse.

### Exercice 3

- (1) Construire le polynôme  $P$  d'interpolation de Lagrange aux points  $(-1, e)$ ;  $(0, 1)$  et  $(1, e)$ .
- (2) Sans faire de calcul, donner l'expression du polynôme de Lagrange  $Q$  qui interpole les trois points  $(-1, -1)$ ;  $(0, 0)$  et  $(1, -1)$ .
- (3) Trouver le polynôme de l'espace vectoriel  $\text{Vect}(1, X, X^2)$  qui interpole les trois points  $(-1, -1)$ ;  $(0, 0)$  et  $(1, -1)$ .

### Exercice 4 :

Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right).$$

1. Déterminer l'expression du polynôme de Newton interpolant les points  $M_0(0, f(0))$ ,  $M_1(1, f(1))$  et  $M_2(2, f(2))$ .
2. Calculer la valeur approchée de  $f$  au point  $x = \frac{1}{2}$ , puis déterminer l'erreur d'interpolation en ce point.
3. Donner une majoration de l'erreur d'interpolation sur  $[0, 2]$ . Conclure.
4. En ajoutant un point supplémentaire  $M_3(3, f(3))$ , déduire l'expression du nouveau polynôme qui interpole les points  $M_0, M_1, M_2$  et  $M_3$ .