MÉTODOS DE SIMULACIÓN – FÍSICA Taller 2, Ejercicio 3

FUERZA DE ARRASTRE

La fuerza de contacto por unidad de longitud ejercida por un medio sobre un elemento de superficie $d\vec{A}$ en el punto P viene dado por

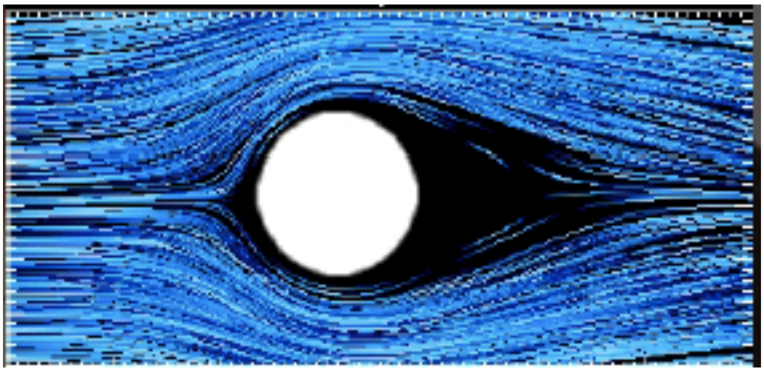
$$d\vec{F} = \sigma(P) \cdot d\vec{A} \quad ,$$

donde $\sigma(P)$ es el tensor de esfuerzos en el punto (P). Para el caso de un fluido newtoniano y aproximadamente incompresible, este tensor de esfuerzos tiene dos componentes: una parte hidrostática $\sigma_{\alpha\beta}^{(h)} = -p\delta_{\alpha\beta}$ y una parte viscosa $\sigma_{\alpha\beta}^{(v)} = \eta\left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha}\right)$, con p la presión, U_α la componente α-ésima de la velocidad y η la viscosidad. Resumiendo, en dos dimensiones,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = -p\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 2\dfrac{\partial U_x}{\partial x} & \dfrac{\partial U_x}{\partial y} + \dfrac{\partial U_y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U_x}{\partial y} + \dfrac{\partial U_y}{\partial x} & 2\dfrac{\partial U_y}{\partial y} \end{pmatrix} \; .$$

Por lo tanto, para calcular la fuerza ejercida sobre un objeto inmerso en el fluido se requiere calcular derivadas parciales espaciales de la velocidad. De acuerdo con [1], estas derivadas espaciales se pueden calcular a segundo orden como

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{3}{\Delta t}\sum_i w_i v_{i\beta}\, U_\alpha(\vec{x} + \vec{v_i}\Delta t) \quad . \qquad (1)$$



a) Usando el programa para un túnel de viento bidimensional desarrollado en clase y construya la simulación del campo de velocidades de un fluido alrededor de un cilindro. Utilice $Lx = 512$, $Ly = 64$, $ixc = 128$, $iyc = 32$, $R = 8$, $\tau = 1.5$, $V_{\text{ventilador}} = 0.1$ y $\rho_{\text{inicial}} = 1.0$.

b) Implemente funciones `sigmaxx`, `sigmayy` y `sigmaxy` en la clase LatticeBoltzmann que calculen las componentes del tensor de esfuerzos para cada celda (es decir, para el punto central de cada celda). Use $p = \rho/3$.

c) Construya en la clase LatticeBoltzmann una función tal que, dado un punto P en el dominio de simulación y un vector de área $d\vec{A}$ en ese punto, interpole las componentes del tensor de esfuerzos de las cuatro celdas aledañas al punto P de interés y calcule con los valores interpolados la fuerza por unidad de longitud $d\vec{F}$ ejercida sobre el elemento representado por el vector de área $d\vec{A}$. Para la interpolación use la expresión bilineal [2]

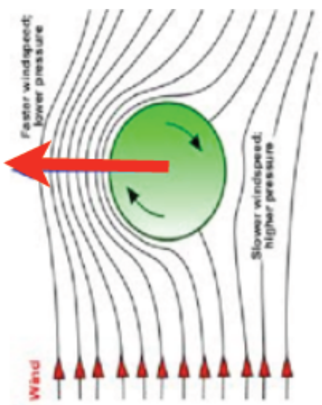
$$\phi(x,y) = \phi_{ix,iy}(1-u)(1-v) + \phi_{ix+1,iy}u(1-v) + \phi_{ix,iy+1}(1-u)v + \phi_{ix+1,iy+1}uv \quad ,$$

donde (x,y) son las coordenadas del punto P, $\phi_{a,b}$ es el valor del campo ϕ (que puede ser σ_{xx}, σ_{yy} ó σ_{xy}) en el centro de la celda de coordenadas (a,b), $u = (x - ix)/\Delta x$ y $v = (y - iy)/\Delta x$, y Δx es el tamaño de la celda.

d) Divida la circunferencia del cilindro en N=24 ó más elementos planos, y para cada uno de ellos calcule el vector de área $d\vec{A}$ que representa al elemento y su punto central. Utilizando la función del punto c) y sumando las fuerzas ejercidas sobre todos los elementos, construya una subrutina que calcule las componentes F_x, F_y de la fuerza total ejercida sobre el cilindro. Comprueba que $F_y \approx 0$ (algo que se puede deducir por simetría). Por su parte, $F_x = \frac{1}{2} C_A \rho A V_{\text{ventilador}}$ es la fuerza de arrastre, donde ρ es la densidad del fluid, $A = 2R$ es la sección transversal del cilindro y C_A se conoce como el coeficiente de arrastre. Con la expresión anterior, calcule el coeficiente de arrastre para diferentes números de Reynolds.

FUERZA DE MAGNUS

Cuando un cuerpo gira y se desplaza en medio de un fluido, la rotación del cuerpo arrastra consigo al fluido, ocasionando que la velocidad relativa del fluido respecto al cuerpo sea mayor a un lado que al otro. En consecuencia, y debido al principio de Bernoulli, la presión resulta ser más alta a un lado que al otro, lo que causa una fuerza lateral que desvía al objeto, y que se conoce como fuerza de Magnus.



e) Ponga a rotar el cilindro del caso punto anterior a una velocidad angular de $\omega = 2\pi/1000$ rad/click. Esto se logra simplemente modificando para imponer en cada celda del cilindro las velocidades $\text{Ux0} = -\omega(\text{iy} - \text{iyc})$ y $\text{Uy0} = \omega(\text{ix} - \text{ixc})$ correspondientes a esta velocidad de giro.

f) Utilice la rutina del punto d) para comprobar que a diferentes velocidades de giro se cumple que la fuerza de Magnus viene dada por

$$F_M = \frac{1}{2} C_M \rho A R \, \vec{\omega} \times \vec{V}_{\text{ventilador}}$$

donde el Coeficiente de Magnus $C_M \approx 1$.

Para la entrega

El envío (.pdf de la presentación y programas .cpp) debe contener:

a) El programa .cpp que implementa los puntos a)-d).
b) La gráfica del coeficiente de arrastre para diferentes números de Reynolds (punto d)).
c) El programa .cpp que implementa los puntos e)-f).
d) La gráfica del coeficiente de arrastre para diferentes números de Reynolds (punto f)).

Bibliografía

[1] Thampi, S. P., Ansumali, S., Adhikari, R., and Succi, S. “Isotropic discrete laplacian operators from lattice hydrodynamics”. *Journal of Computational Physics*, **234(1)**:1-7 (2013).

[2] https://es.wikipedia.org/wiki/Interpolaci%C3%B3n_bilineal .