

Problemas

Andrés Esteban Leal Buitrago¹, Esteban Quintero Martínez¹, Andrés David
Rojas Lozano¹

¹ *Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia.*

9 de noviembre de 2021

1 Problema I

1. Valor medio del voltaje:

$$\mu = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} V_i = 7501,355 \quad (1.1)$$

2. Desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} (\mu - V_i)^2} = 26,74 \quad (1.2)$$

3. Gráficas con diferentes rangos en voltaje:

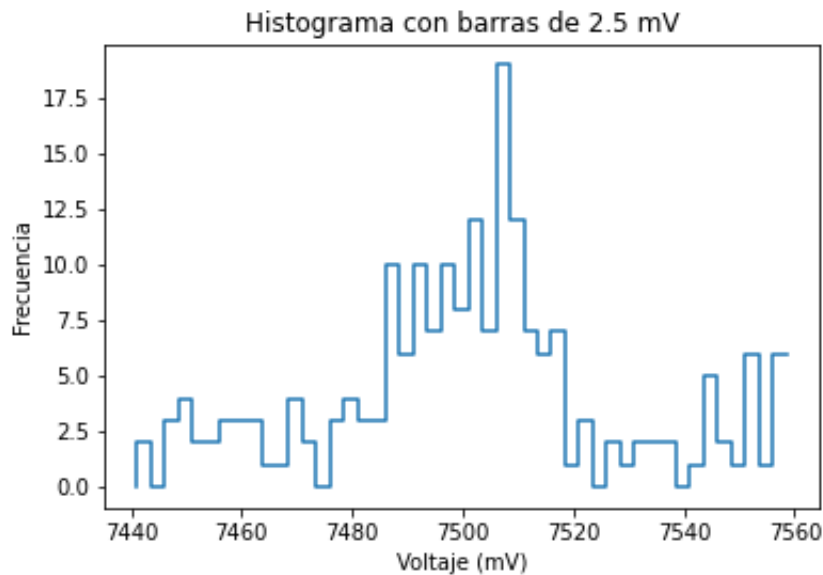


Figura 1: Gráfica de frecuencia vs voltaje con intervalos de 2.5mV

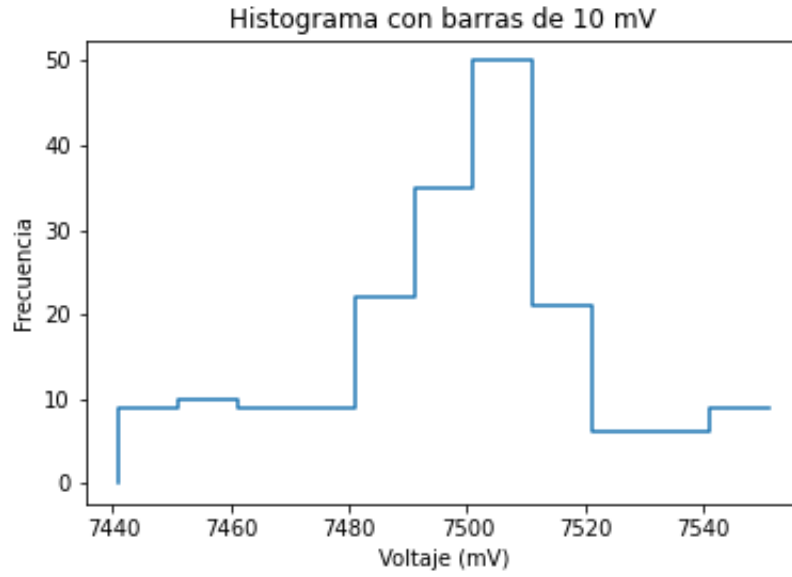


Figura 2: Gráfica de frecuencia vs voltaje con intervalos de 10mV

4. Determinando ahora el valor medio para cada uno de los histogramas y la desviación estándar usando :

$$\mu = \frac{1}{\sum f_j} \sum_{j=1}^N V_j f_j \quad (1.3)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sum f_j} \sum_{j=1}^N (V_j - \mu)^2 f_j \quad (1.4)$$

Obteniendo por resultados:

Ancho de histograma	$\mu(\text{mV})$	$\sigma(\text{mV})$
$\Delta V=2.5\text{mV}$	7499.9	33.56
$\Delta V=10\text{mV}$	7496.12	30.29

Tabla 1: Valor de μ y σ usando 1.4

5. Teniendo la tabla comparativa de valores:

Caso	$\mu(\text{mV})$	$\sigma(\text{mV})$
Valores originales	7501.36	26.74
$\Delta V=2.5\text{mV}$	7499.9	33.56
$\Delta V=10\text{mV}$	7496.12	30.29

Tabla 2: Valor de μ y σ usando 1.4

6. Código escrito en Python para desarrollar el ejercicio, los comentarios al código están en verde oliva:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 #Importar el archivo .dat
5 archivo="amplificador.dat"
6 x= np.genfromtxt(archivo,dtype=int, skip_header=1)
7
8 #Funcion para el valor medio
9 def valmedio(x):
10     mu=np.sum(x)/200
11     return mu
12
13 #Determinar la desviacion est ndar
14 def desv(x):
15     suma=0
16     for i in range(len(x)):
17         suma+=np.power(mu-x[i],2)
18     sigma=np.sqrt(suma/200.)
19     return sigma
20
21 #Ejecutamos las funciones y asignar valor mu y sigma
22 mu=valmedio(x)
23 sigma=desv(x)
24 print("Valor medio ", mu,"Desviacion es ", sigma)
25
26 #Funci n para agrupar datos en rangos para hacer el histograma
27 def contador(x,delta):
28
29     rango=np.arange(np.min(x),np.max(x),delta)
30     histograma=np.zeros(len(rango))
31     x=np.sort(x)
32
33     for j in range (len(histograma)):
34         sumar=0
35         for i in range(len(x)):
36
37             if x[i]>=rango[j-1] and x[i]<rango[j]:
38                 sumar+=1
39             histograma[j]=sumar
40     return rango, histograma
41
42 x1,y1=contador(x,2.5)
43 x2,y2=contador(x,10)
44
45 #Gr ficas correspondientes
46 plt.figure()
47 plt.plot(x1,y1,ds='steps')
48 plt.title("Histograma con barras de 2.5 mV")
49 plt.ylabel("Frecuencia")
50 plt.xlabel("Voltaje (mV)")
51 plt.savefig("hist25mv")
52
```

```

53 plt.figure()
54 plt.plot(x2,y2,ds='steps')
55 plt.title("Histograma con barras de 10 mV")
56 plt.ylabel("Frecuencia")
57 plt.xlabel("Voltaje (mV)")
58 plt.savefig("hist10mv")
59
60 # Definicion de funcion para valor medio de los histogramas
61 def valmedio2(x):
62     suma=0
63     for i in range(len(x)):
64         suma+=((x[i-1]+x[i])/2)*x[i]
65
66     mu=suma/np.sum(x)
67     return mu
68 mu2=valmedio2(x1)
69 mu3=valmedio2(x2)
70
71 #Funci n para hacer la varianza y as determinar la desviaci n de los
    histogramas
72 def desv2(x,mu):
73     suma=0
74     for i in range(len(x)):
75         suma+=np.power((((x[i-1]+x[i])/2)-mu),2)*x[i]
76
77     sigmaq=suma/np.sum(x)
78     sigmaq=np.sqrt(sigmaq)
79     return sigmaq
80 sigma2=desv2(x1,mu2)
81 sigma3=desv2(x2,mu3)
82
83
84 #Imprimir los valores para hacer las tablas del ejercicio
85 print("Valores medios",mu1,mu2,mu3,"/nDesviaciones", sigma1,sigma2,sigma3)

```

2 Problema II

1. La tabla que se contruye con los valores de incertidumbre de cada medida es :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d(cuentas)	147	152	153	171	146	168	145	133	168	171
σ (cuentas)	12.12	12.33	12.37	13.08	12.08	12.96	12.04	11.53	12.96	13.08

2. Gráfica de las mediciones y su incertidumbre:
3. Se determina el valor medio $\mu = 155,4$ con la expresión:

$$\mu = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 155,4 \quad (2.1)$$

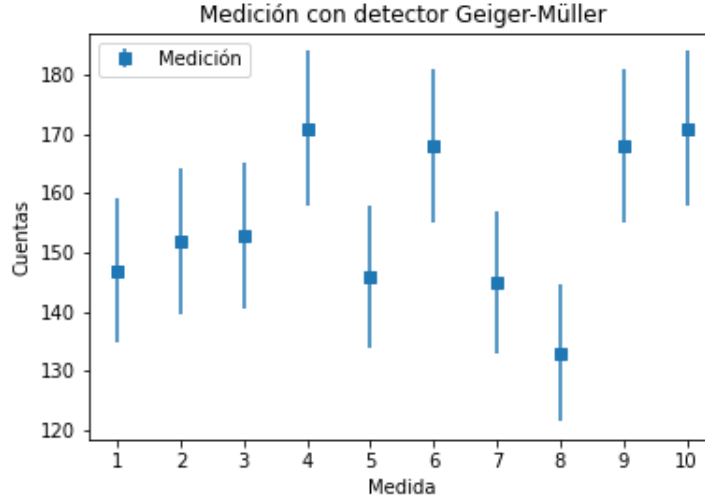


Figura 3: Medidas con detector Geiger-Müller

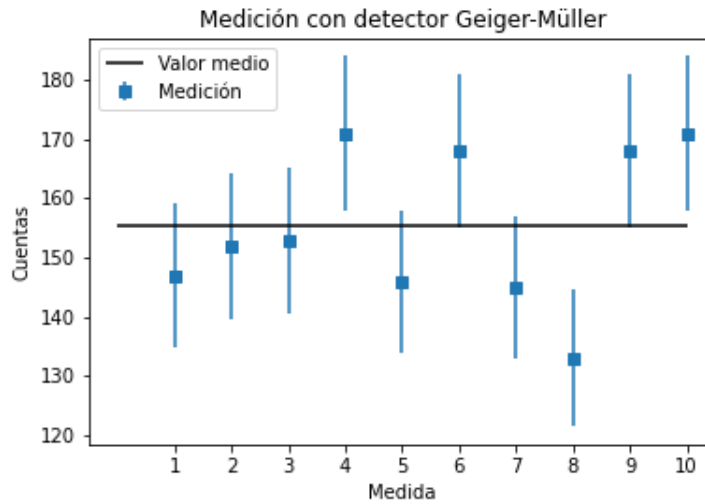


Figura 4: Medidas con detector Geiger-Müller y valor medio

4. Se determina ahora la incertidumbre haciendo uso del valor medio con la expresión:

$$\sigma = \sqrt{\mu} = 12,47 \quad (2.2)$$

5. Teniendo en cuenta la incertidumbre de cada punto, usando la propagación de incertidumbres para el valor medio, tenemos:

$$\sigma_{\mu} = \sqrt{\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \sigma_i^2} = 12,47 \quad (2.3)$$

Donde efectivamente comprobamos que el valor es el mismo obtenido en el inciso anterior.

6. Ahora añadiendo la incertidumbre del valor medio a la gráfica

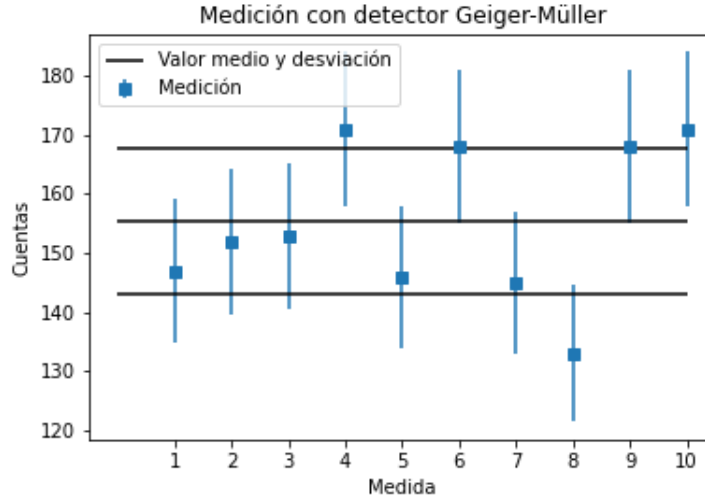


Figura 5: Medidas con detector Geiger-Müller

3 Problema III

1. Sean las siguientes probabilidades:

$S(t)$ = Probabilidad de NO decaer desde 0 a t

Γdt = Probabilidad de decaer en un instante de tiempo dt $1 - \Gamma dt$ = Probabilidad de NO decaer en dt

Entonces la probabilidad de que decaiga un núcleo decaiga durante el intervalo dt después de haber sobrevivido durante t es:

$$P(t) = S(t)\Gamma dt \quad (3.1)$$

Esto es, la probabilidad de no decaer en $t + dt$:

$$S(t + dt) = S(t)(1 - \Gamma dt) \quad (3.2)$$

Expandimos el lado izquierdo en series de Taylor en primer grado:

$$\begin{aligned} S(t) + \frac{dS}{dt}dt &= S(t) - S(t)\Gamma dt \\ \frac{dS}{dt} &= -\Gamma S(t) \\ \frac{1}{S}dS &= -\Gamma dt \end{aligned}$$

Integrando ambos lados:

$$\begin{aligned} \ln|S| &= -\Gamma t + C \\ S(t) &= Ce^{\Gamma t} \end{aligned}$$

Si no transcurre tiempo, el núcleo no decae i.e. $S(t=0) = 1$.

$$\rightarrow C = 1 \rightarrow \boxed{S(t) = e^{-\Gamma t}} \quad (3.3)$$

Entonces, la ecuación 3.1 se reescribe como:

$$\boxed{P(t) = \exp(-\Gamma t)\Gamma dt} \quad (3.4)$$

2. Para comprobar que la probabilidad de $P(t)$ está normalizada, integramos la ecuación 3.1 con respecto al tiempo, de 0 a ∞ :

$$\int_0^\infty P(t) = \int_0^\infty e^{-\Gamma t}\Gamma dt = \lim_{t \rightarrow \infty} [1 - e^{-\Gamma t}] = 1$$

3. El valor medio del tiempo de decaimiento es:

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty e^{-\Gamma t} t \Gamma dt$$

Haciendo I.P.P con $u = t \rightarrow du = dt$ y $dv = \Gamma e^{-\Gamma t} dt \rightarrow v = -e^{-\Gamma t}$. Entonces:

$$\int_0^\infty e^{-\Gamma t} t \Gamma dt = \lim_{t \rightarrow \infty} -te^{-\Gamma t} + \int_0^\infty e^{-\Gamma t} dt$$

El primer término se resuelve con la regla de L'Hopital:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{\Gamma t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma e^{\Gamma t}} = 0$$

Entonces el valor medio del tiempo:

$$\langle t \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} te^{-\Gamma t} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma} e^{-\Gamma t} = \frac{1}{\Gamma} = \tau$$

Dimensionalmente Γ^{-1} tiene unidades de tiempo del intervalo trabajado. El resultado del valor esperado del tiempo es τ , que se define como el tiempo promedio que tiene un núcleo de vida antes de desintegrarse.

4. La probabilidad de que un núcleo decaiga en cualquier momento entre dos tiempos t_1 y t_2 es la probabilidad acumulativa entre estos tiempos, i.e.

$$F(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \Gamma e^{-\Gamma t} dt = [-e^{-\Gamma t}]_{t_1}^{t_2} = e^{-\Gamma t_1} - e^{-\Gamma t_2} \quad (3.5)$$

5. Considerando las siguiente relaciones:

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} \rightarrow \tau = \frac{1}{\Gamma} \quad (3.6)$$

$$T_{1/2} = 0,7\tau \quad (3.7)$$

Utilizando la ecuación 3.5 y las relaciones anteriores:

$$F(0, T_{1/2}) = 1 - e^{-\Gamma T_{1/2}} = 1 - e^{-\Gamma 0,7\tau} = 1 - e^{-0,7} = 0,50 \quad (3.8)$$

$$F(T_{1/2}, \infty) = e^{-\Gamma T_{1/2}} = e^{-0,7} = 0,50 \quad (3.9)$$

$$F(0, \tau) = 1 - e^{-\Gamma \tau} = 1 - e^{-1} = 0,63 \quad (3.10)$$

$$F(\tau, \infty) = e^{-\Gamma \tau} = e^{-1} = 0,37 \quad (3.11)$$

6. En la tabla 3 se muestran los resultados obtenidos en el inciso anterior.

t_1	t_2	$F(t_1, t_2)$
0	∞	1
0	$T_{1/2}$	0,50
$T_{1/2}$	∞	0,50
0	τ	0,63
τ	∞	0,37

Tabla 3: Probabilidad acumulativa de decaimiento con diferentes intervalos de tiempo.

- 7.1 El resultado de la ecuación 3.5 evaluado entre 0 y 1 año, con $\Gamma = 0,13a^{-1}$:

$$F(0, 1) = 1 - e^{-\Gamma} = 1 - e^{-0,13} = 0,12a^{-1} \quad (3.12)$$

- 7.2 Tomando la unidad de tiempo como días:

$$T_{1/2} = 5,3a \times \frac{365d}{1a} = 1935,5d \text{ (sumando 1 día bisiesto)}$$

Calculando la constante de decaimiento exponencial:

$$\Gamma = \frac{\ln 2}{1935,5d} = 3,6 \times 10^{-4}d^{-1} \quad (3.13)$$

Aplicando la fórmula 3.5:

$$F(0, 1) = 1 - e^{-\Gamma} = 3,6 \times 10^{-4}d^{-1} \quad (3.14)$$

8. Para obtener una probabilidad normalizada i.e. entre 0 y 1:

$$\Gamma = \frac{\ln 2}{0,053 \text{siglo}} = 13 \text{siglo}^{-1}$$

$$F(0, 1) = 1 - e^{-\Gamma} = 0,99 \quad (3.15)$$

Esto se debe a que en la definición de Γ , $\Delta t \rightarrow 0$, condición que no se cumple cuando $\Delta t = 1 \text{siglo}$.

4 Problema IV

1. Para encontrar las líneas de las figuras A y B realizamos un ajuste lineal al arreglo de únicamente los dos puntos por donde pasa la recta y el Chí cuadrado lo calculamos con la función `computeCost`¹.

	a ₀	a ₁	χ^2
A	-9	2	11.11
B	-2.33	0.88	2.77

2. Para obtener nuestra propia gráfica de tipo C, se aplicó la técnica Gradient Descent

	a ₀	a ₁	χ^2
C	0.057	0.684	3.34

¹Código hecho en Matlab <https://github.com/esquintero/Instrumentacion-Nuclear.git>

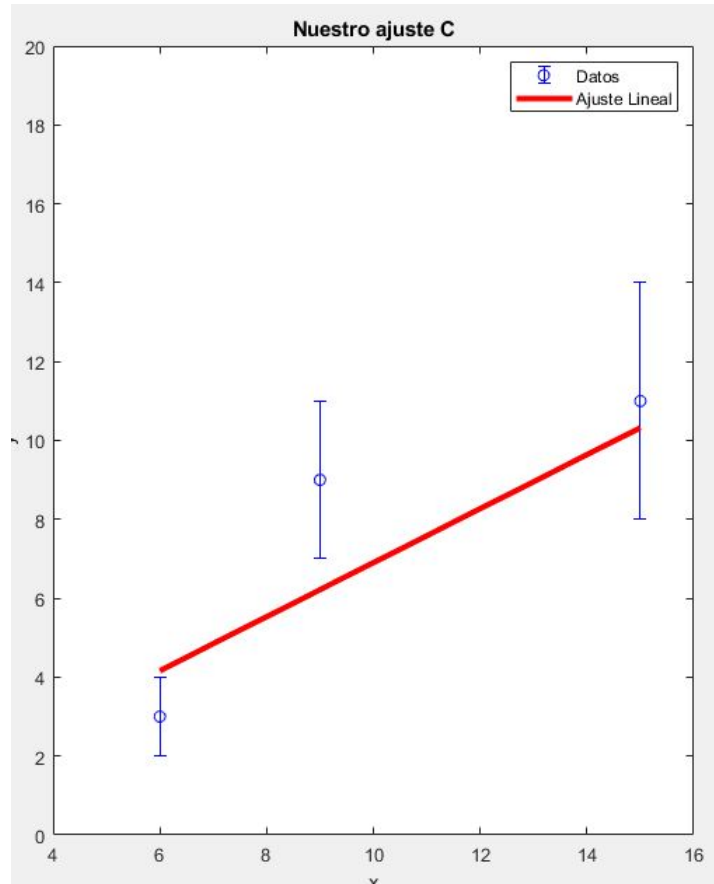


Figura 6: Gradient Descent

3. Cambiando el valor del segundo sigma la recta cambia pues la medición de χ^2 "penaliza" los valores dependiendo de su incertidumbre, es decir: prefiere acercarse más a un valor con incertidumbre menor.
- | | a_0 | a_1 | χ^2 |
|----------------|-------|-------|----------|
| C | 0.057 | 0.684 | 3.34 |
| C_{σ_2} | 0.076 | 0.791 | 3.34 |

La comparación de χ^2 sólo cambiando el valor de σ_2 muestra que si el segundo dato fuera un dato atípico, el ajuste lineal aproximaría mejor al conjunto de datos. Es de esperar porque realizando ajustes pasando por los puntos primero y segundo o tercero y segundo, por la distribución de los puntos, el valor de χ^2 nos indica que la gráfica no aproxima tan eficientemente el conjunto de datos como lo hace tomando los puntos exteriores, por eso era esperado que al aumentar el valor de la incertidumbre en el segundo dato, el χ^2 lo "penalizara más y aprovechara para mejorar el ajuste".

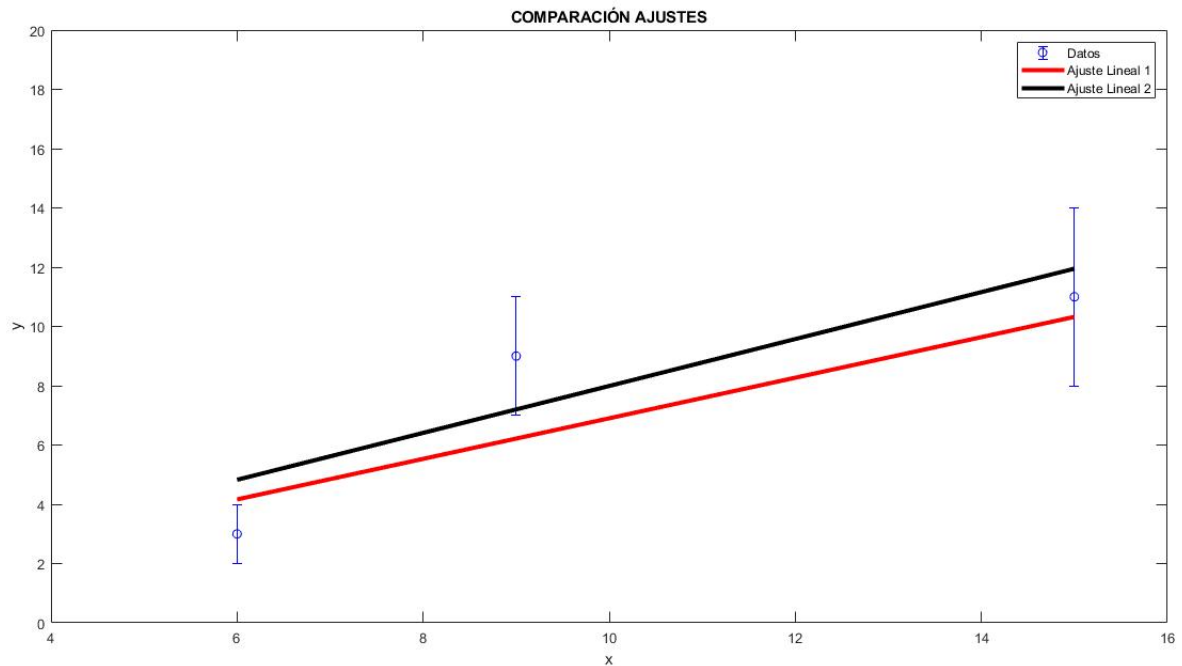
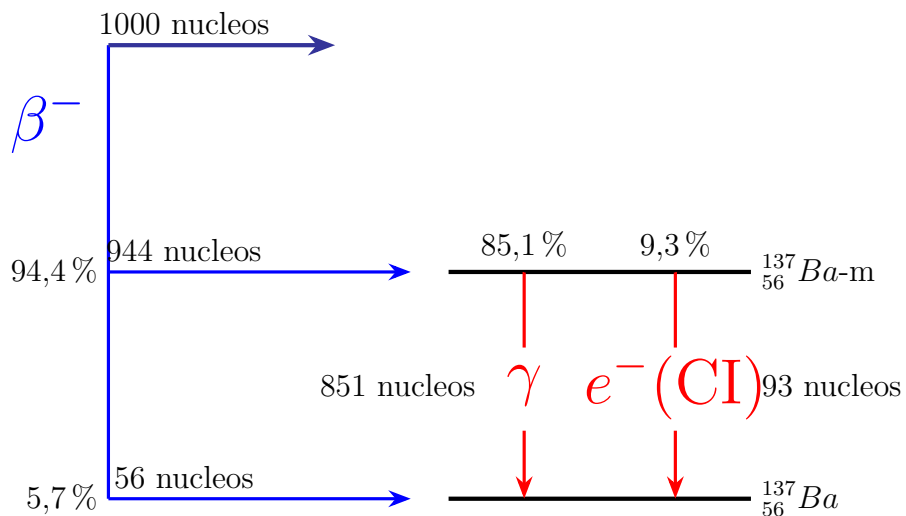


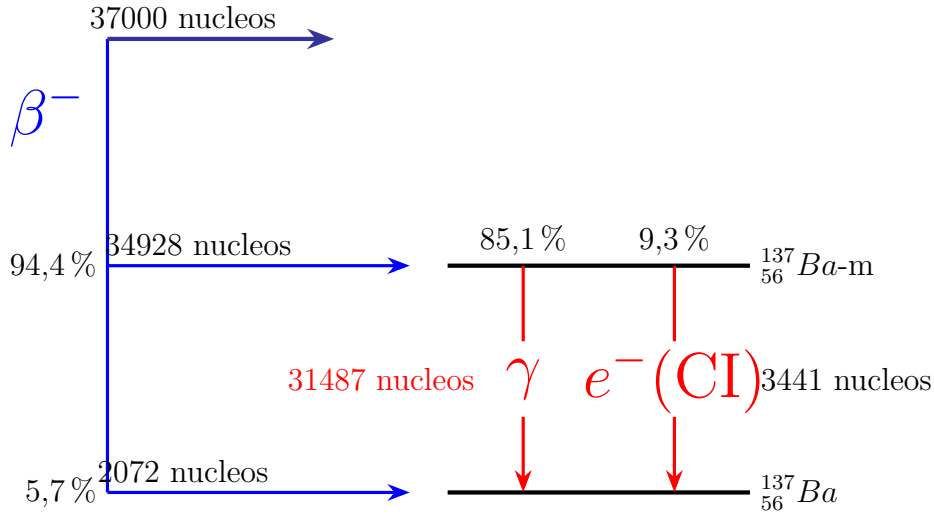
Figura 7: Gradient Descent en ambos sigmas

5 Problema V



1. A partir del pseudoesquema de decaimiento podemos notar que se emiten un total de 851 rayos gamma.
2. De igual forma, se evidencian 93 núcleos en conversión interna, por lo que son emitidos 93 electrones
3. Se asume el número es el mismo del inciso anterior, por lo que se emiten 93 rayos X.

4. Considere el siguiente pseudo-esquema de decaimiento para 37 mil núcleos de ^{137}Cs :



De donde se obtiene que la actividad gamma es de 31487 decaimientos por segundo. Haciendo la conversión:

$$31487 Bq = \frac{1 Ci}{3,7 \times 10^{10} Bq} = 8,51 \times 10^{-7} Ci \quad (5.1)$$

Entonces la actividad gamma es:

$$\text{Actividad } \gamma = 31487 Bq \quad (5.2)$$

$$= 8,51 \times 10^{-7} Ci \quad (5.3)$$

6 Problema VI

1. Para demostrar que el número de reacciones por unidad de tiempo no depende del área de incidencia del haz recordamos la definición de flujo (\mathbf{F})

$$\mathbf{F} = \frac{\text{número de partículas}}{\text{unidad de área} \cdot \text{unidad de tiempo}} \quad (6.1)$$

Juntando la anterior con la ecuación conocida de número de reacciones:

$$\frac{\text{número de reacciones}}{\Delta t} = \mathcal{A} \cdot n \cdot \sigma \cdot \delta x \cdot \frac{\text{número de partículas}}{\text{unidad de área} \cdot \text{unidad de tiempo}} \quad (6.2)$$

El área transversal del haz es la misma que incide en la placa

$$\frac{\text{número de reacciones}}{\Delta t} = n \cdot \sigma \cdot \delta x \cdot \frac{\text{número de partículas}}{\text{unidad de tiempo}} \quad (6.3)$$

$$\frac{\text{número de reacciones}}{\Delta t} = n \cdot \sigma \cdot \delta x \cdot I \quad (6.4)$$

2. Primero vamos a notar que la densidad volumétrica del estaño es $\rho = 7,3g/cm^3$, con la cual podemos encontrar el δx en unidades de longitud

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\sigma_{sup}}{\rho} \\ &= \frac{0,001g/cm^3}{7,3g/cm^3} \\ &= 1,36 \times 10^{-4}cm \end{aligned} \quad (6.5)$$

Además el número de centros dispersores se calcula con la masa relativa del ^{122}Sn correspondiente a $m_{mol} = 122g/mol$. Así el **n**:

$$\begin{aligned} n &= \frac{\rho \cdot N_A}{m_{mol}} \\ &= \frac{7,3g/cm^3 \cdot 6,022 \times 10^{23}}{122g/mol} \\ &= 3,6 \times 10^{22} \text{centros}/cm^3 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Entonces para producir 10^8 reacciones debemos hacer el experimento un tiempo de

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{10^8}{1,36 \times 10^{-4}cm \cdot 3,6 \times 10^{22} \text{centros}/cm^3 \cdot 10^{-26}cm^2 \cdot 10^{10}s^{-1}} \\ \Delta t &= 2 \times 10^5 s = 2,32 \text{ días} \end{aligned} \quad (6.7)$$

3. De manera similar calculamos el número total de reacciones luego de 15 días (1296000s):

$$\text{número de reacciones} = n \cdot \sigma \cdot \delta x \cdot I \cdot \Delta t \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \text{número de reacciones} &= 3,6 \times 10^{22} \text{centros}/cm^3 \cdot 10^{-26}cm^2 \cdot 10^{10}s^{-1} \cdot 1296000s \\ &= 6,4 \times 10^8 \end{aligned} \quad (6.9)$$

7 Problema VII

1. Se toma como material blanco el **Oro** ($^{197}_{79}\text{Au}$), y por partículas cargadas pesadas se optó por **Partículas Alfa** y **Protones**.

El código utilizado para determinar la función de pérdida de energía específica ($\frac{dE}{\rho dx}$) según la fórmula de Bethe fue:

```
1
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 e=np.power(1.602,-19)
5 auz=79.
6 alfaz=2.
7 proton=1.
8 omega=197.
9 I=0.000790
10 mec=0.511
11 mn=939.
12 malfa=4.*mn
13 mproton=1.*mn
14 ro=19.32
15 E=np.arange(1,1000000)
16 beta=np.sqrt(1-(1/np.power(1+(E/mn),2)))
17 gamma=1./np.sqrt(1-np.power(beta,2))
18
19 Wmax=2*mec*np.power(beta*gamma,2)
20
21
22 #E1 es para PARTICULAS ALFA
23 E1=0.15*(auz/omega)*np.power((alfaz/beta),2)*(np.log((2*mec*np.power(beta*
    gamma,2)*Wmax)/np.power(I,2))-2*np.power(beta,2))
24 Ealfa=(1./ro)*E1*10
25
26 #E2 para PROTONES
27
28 E2=0.15*(auz/omega)*np.power((proton/beta),2)*(np.log((2*mec*np.power(beta
    *gamma,2)*Wmax)/np.power(I,2))-2*np.power(beta,2))
29 Eproton=(1./ro)*E2*10
30 #Grafica comparativa de los datos
31 fig=plt.figure(figsize=(6.0,6.0))
32 plt.plot(E,Ealfa,label='Alfa')
33 plt.plot(E,Eproton,label='Proton')
34 plt.ylabel("dE/($ \rho dx$)(MeV/($g/cm^2$))")
35 plt.xlabel("E(MeV)")
36 plt.legend(loc=0)
37 plt.title("Comparación de pérdida específica de la energía")
38 plt.yscale('log')
39 plt.xscale('log')
40 plt.show()
41 fig.savefig("energias")
```

De donde se obtiene la siguiente gráfica:

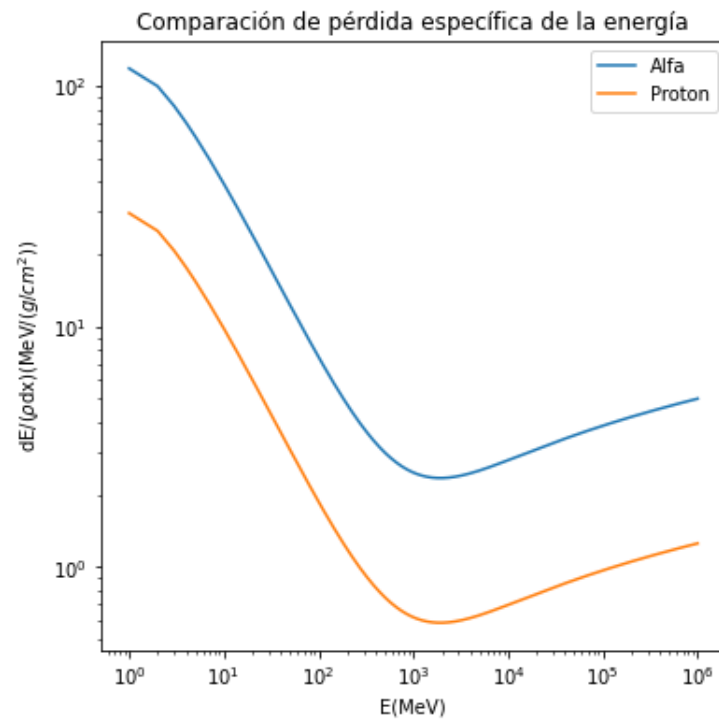


Figura 8: Gráfica según la fórmula de Bethe