

## Simulación 2

Andrés Esteban Leal Buitrago<sup>1</sup>, Esteban Quintero Martínez<sup>1</sup>, Andrés David Rojas Lozano<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia.*

16 de noviembre de 2021

---

# 1 Decaimiento radioactivo según distribuciones exponencial y binomial

## 1.1 Distribución exponencial

1. La función de densidad de probabilidad  $P(t)$  para que un núcleo sobreviva hasta el instante  $t$  y decaiga en el siguiente intervalo de tiempo  $dt$ :

$$P(t) = \exp(-\Gamma t) \Gamma dt \quad (1.1)$$

2. Se escogió el núcleo de Sodio-22 ( $\text{Na-22}$ ) que es un isótopo obtenido artificialmente con un periodo de semidesintegración  $T_{\frac{1}{2}}$  de 2.6 años y un tiempo de vida media  $\tau = 3,71$  años. Este decae por emisión de un positrón (decaimiento  $\beta^+$ ) hacia el Neón-22 estable, Un porcentaje bastante pequeño (0,06 %) de los decaimientos conduce directamente al estado fundamental del Neón. El resto pasa a un estado excitado del neón, una parte mediante captura electrónica (9,5 %) en las capas atómicas internas, y la otra gran parte a través de la emisión de positrones. [1]
3. La escala  $\Delta t$  escogida es de 0.2 años, es decir que la toma de datos se realiza cada 73 días.
4. El tiempo final se tomó pasadas 10 arbitrarias veces la vida media:

$$t_f = 10\tau = 37 \text{ años} \quad (1.2)$$

5. La función de distribución acumulativa  $F(t)$  tomando el intervalo de toma de datos  $\Delta t = 0.2$  años se muestra en la figura (1). Como se puede esperar,  $F(t)$  tiende a tomar el valor 1.
8. Realizando la simulación para diferente número de núcleos iniciales i.e.  $N(t=0)$ , se obtienen las gráficas de la figura 2. En la gráfica 2a la cantidad de núcleos de la simulación están por encima o por debajo de la predicción teórica. A medida que se aumenta el número inicial de núcleos, el comportamiento de la simulación tiende a ser el de la ley de decaimiento exponencial, como se observa en la gráfica 2d donde ambas curvas coinciden.

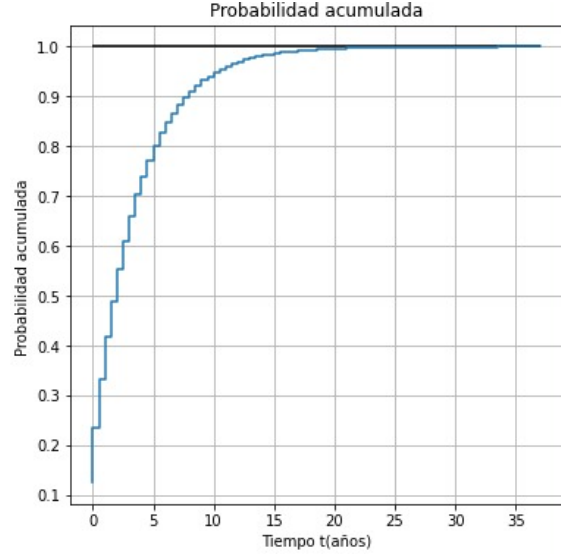


Figura 1: Función de distribución acumulada exponencial.

## 1.2 Distribución binomial

1. Considerando que en cada intervalo de tiempo  $\Delta t$  el decaimiento de un sólo núcleo es una variable aleatoria discreta con la densidad de probabilidad binomial:

$$P_B(x) = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x (1-p)^{N-x} \quad (2.1)$$

Los únicos valores para la variable aleatoria con  $N = 1$  son:

$$x = \{0, 1\} \quad (2.2)$$

Cuando  $x = 0$ , la densidad de probabilidad:

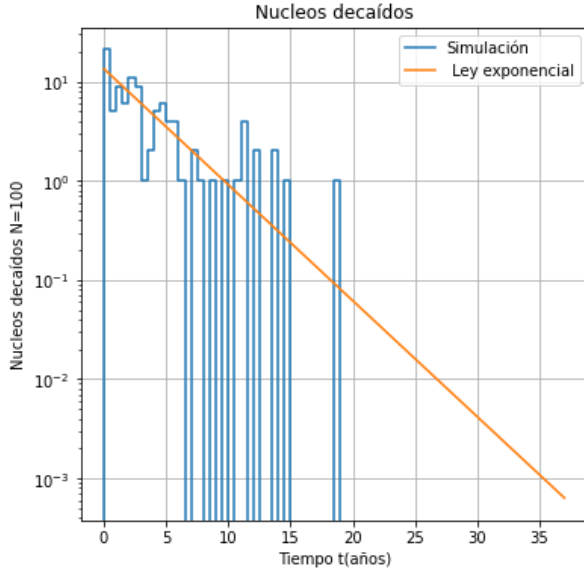
$$\begin{aligned} P_B(x=0) &= \frac{1!}{0!(1-0)!} p^0 (1-p)^{1-0} \\ &= 1-p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_B(x=1) &= \frac{1!}{1!(1-1)!} p^1 (1-p)^{1-1} \\ &= p \end{aligned}$$

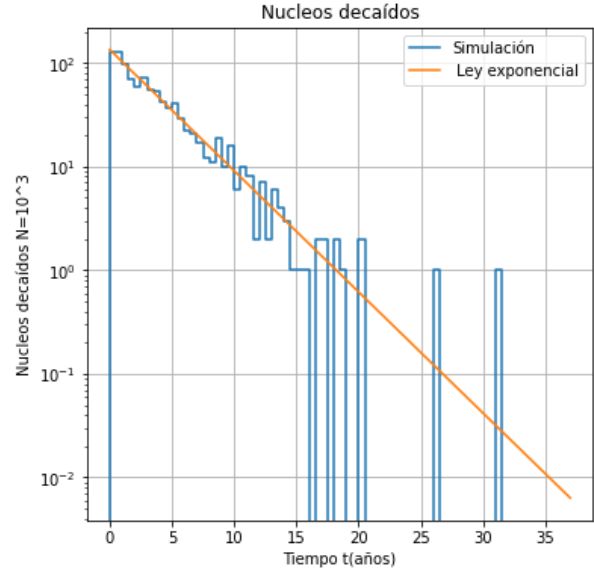
Entonces se ha verificado que:

$$P_B(x) = \begin{cases} 1-p & \text{si } x=0 \\ p & \text{si } x=1 \end{cases} \quad (2.3)$$

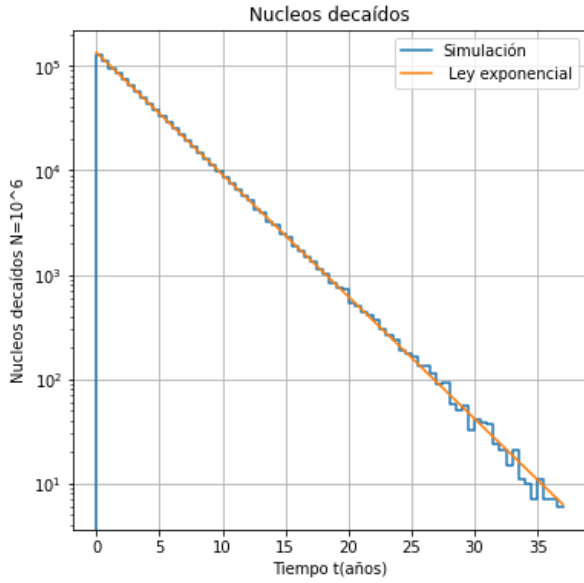
Note que la suma de la probabilidad es igual a 1.



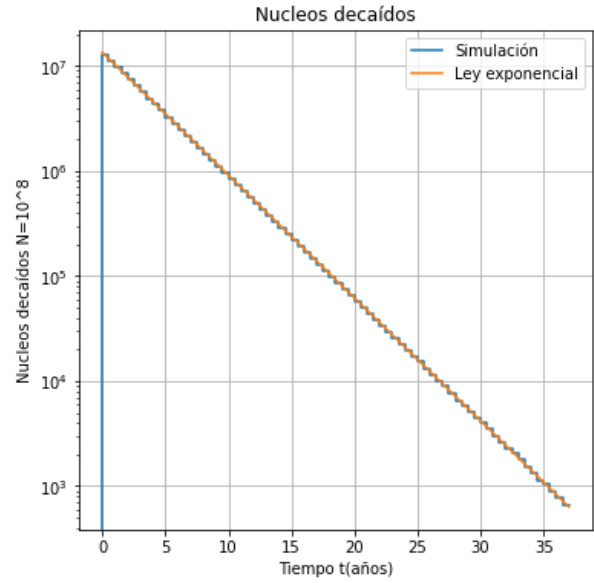
(a) Con  $N(t = 0) = 100$  núcleos.



(b) Con  $N(t = 0) = 1000$  núcleos.



(c) Con  $N(t = 0) = 10^6$  núcleos.



(d) Con  $N(t = 0) = 10^8$  núcleos.

Figura 2: Comparación del histograma de frecuencia de cantidad de núcleos luego de un tiempo  $t$ , con la ley de decaimiento exponencial.

2. La probabilidad de decaer para un núcleo de Na-22 en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  se calculó conociendo la probabilidad de que decaiga en un instante de tiempo  $dt$ :

$$\Gamma dt \quad (2.4)$$

Integrando sobre el intervalo  $[0, \Delta t)$  se obtiene la probabilidad  $p$ :

$$\begin{aligned} p &= \int_0^{\Delta t} \Gamma dt \\ &= \Gamma \Delta t \end{aligned}$$

Para el Na-22 la constante de decaimiento es  $\Gamma = 0,27\Delta t^{-1}$ , por lo que  $p$  es igual a:

$$p = 0,054 \quad (2.5)$$

3. En la figura 3 se muestra la función acumulativa resultante de un experimento en el que se decidió si un único núcleo decae ( $x = 1$ ) o no decae ( $x = 0$ ) en 50 intentos, dónde no decae un total de 17 veces y decae 33 veces.

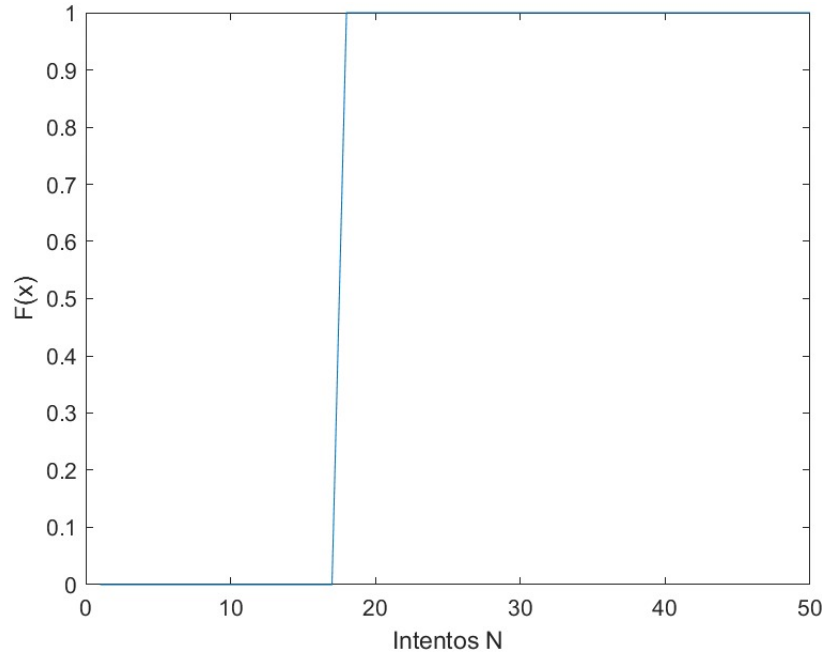


Figura 3: Función de distribución acumulada binomial, para un experimento de 50 intentos.

Por otra parte, si se considera la función de distribución en función de  $x$ , esta toma únicamente valores binarios como se muestra en la figura 4. Para el Na-22 la probabilidad de decaer es mucho más pequeña que la probabilidad de no decaer.

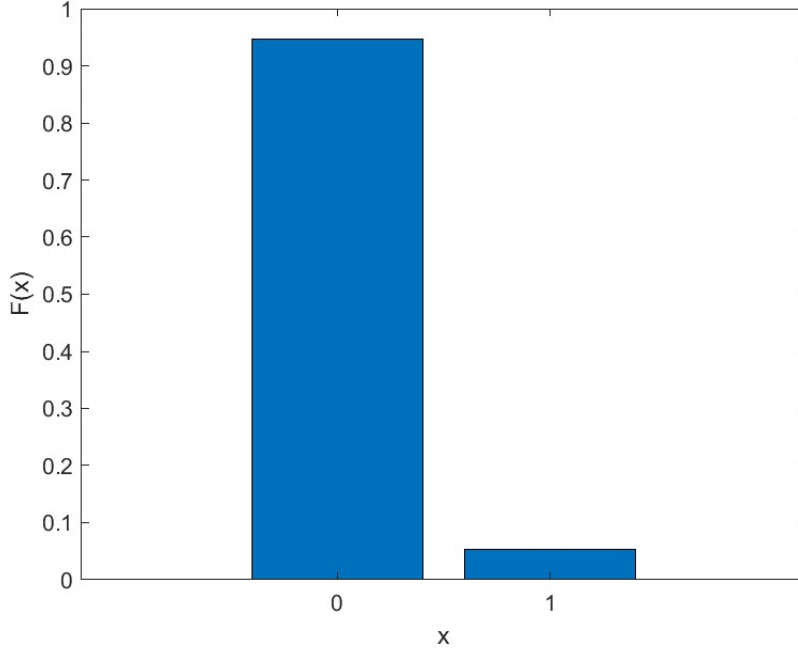


Figura 4: Función de distribución acumulada binomial en función de la variable aleatoria x.

7. Se decidió por Monte Carlo en cada instante de tiempo si cada núcleo decaía o no, los que no decaían se pasaban al siguiente intervalo de tiempo para ser determinados.

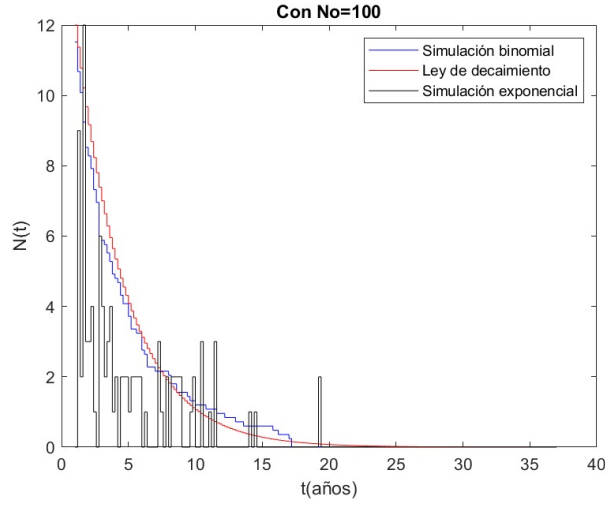
Las gráficas de la figura 5 muestran los resultados de la simulación para diferente cantidad de núcleos en el instante  $t=0$ . Se comparó el resultado de las simulaciones con el esperado por la ley de decaimiento exponencial. Para realizar la comparación, se utilizó un reescalamiento R:

$$R = \frac{M}{N_0} \quad (1)$$

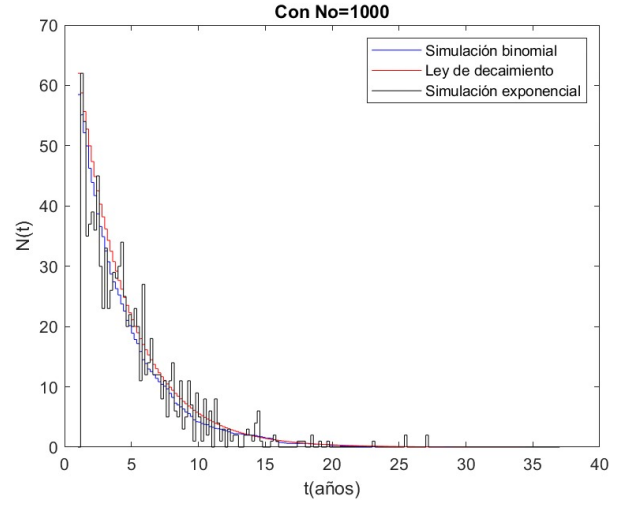
donde M es igual al valor máximo de núcleos que decaen en la simulación exponencial en cada caso. Desde la primera figura se ve que la relación de la simulación binomial con la ley de decaimiento es similar. Esto es porque el decaimiento radiactivo es un proceso en el que en cada instante de tiempo el núcleo decae o no decae (ensayo de Bernoulli). A un número muy grande de procesos de decaimiento, las dos simulaciones siguen el comportamiento de la ley de decaimiento (figura 5d).

## Referencias

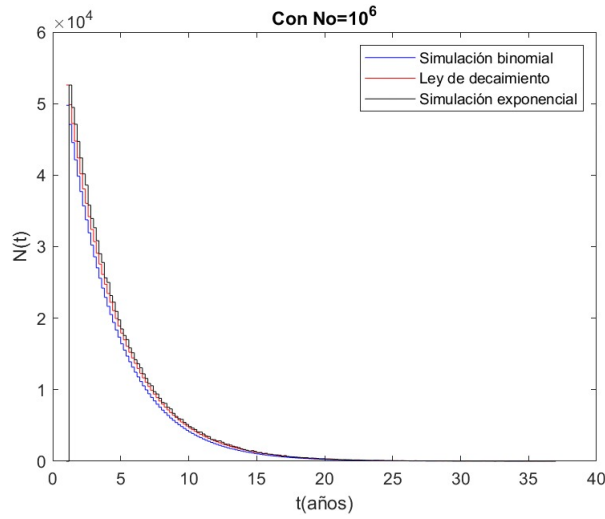
<sup>1</sup>N. data research, <https://www.ld-didactic.de>, (Febrero 1999)



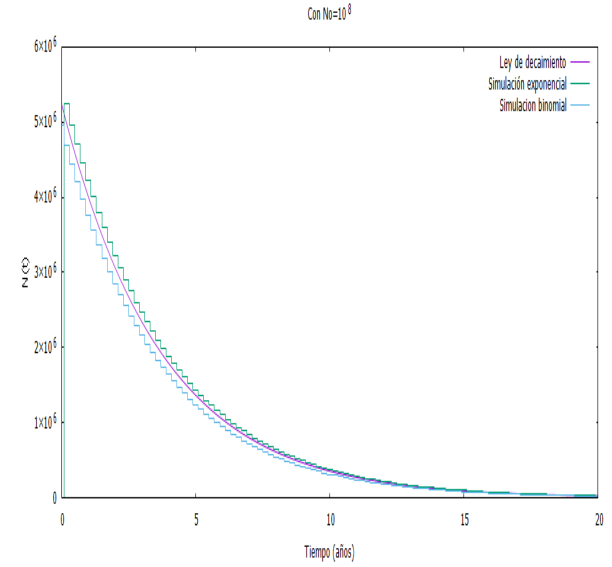
(a) Con  $N(t = 0) = 100$  núcleos.



(b) Con  $N(t = 0) = 1000$  núcleos.



(c) Con  $N(t = 0) = 10^6$  núcleos.



(d) Con  $N(t = 0) = 10^8$  núcleos.

Figura 5: Comparación del histograma de frecuencia de la simulación con distribución exponencial, del histograma de la simulación con distribución exponencial y de el resultado teórico de la ley de decaimiento exponencial.