Örnek 1: $y = x^4 - 2x^2 + 2$ eğrisinin yatay teğeti var mıdır? Araştırınız.

Teorem: f ve g fonksiyonları x noktasında türevlenebilir ise $f.g$ çarpımları da x noktasında türevlenebilirdir ve

$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$ olur.

Örnek 2: $y = \left(2\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right)(3\sqrt{x} - \frac{2}{x})$ ise $\frac{dy}{dx} =?$

Örnek 3: $y = x^2(9 - \frac{1}{2}x^2)$ eğrisinin teğetlerinin yatay olduğu noktaları bulunuz.

Not: f_i $(1 \leq i \leq n)$ fonksiyonları x noktasında türevlenebilirse $(f_1.f_2 \dots f_n)$ fonksiyonu da x noktasında türevlenebilirdir ve

$(f_1.f_2 \dots f_n)' = f_1'.f_2.f_3 \dots f_n + f_1 f_2'.f_3 \dots f_n + \cdots + f_1.f_2 \dots f_n{}'$ olur.

Teorem: f fonksiyonu x noktasında türevlenebilir ve $f(x) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}$ de x noktasında türevlenebilirdir ve

$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$ dir.

Örnek 4: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a-) $y = \frac{1}{x^2+1}$ **b-)** $f(t) = \frac{1}{t+\frac{1}{t}}$

Örnek 5: $f(x) = \frac{1}{x^2-3}$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki türevini bulunuz.

Teorem: f ve g fonksiyonları, x noktasında diferansiyellenebilir ve $g(x) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da x noktasında diferansiyellenebilirdir ve $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$ olur.

Örnek 6: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a-) $y = x^2 \sin x$ **b-)** $y = \frac{\sqrt{t}}{3-5t}$ **c-)** $f(\theta) = \frac{a+b\theta}{m+n\theta}$ **d-)** $y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$

Örnek 7: $y = \frac{2x}{x+2}$ fonksiyonunun grafiğinin $x = 2$ noktasındaki teğetinin denklemini yazınız.

Teorem (Zincir Kuralı): $y = f(u)$ fonksiyonu $u = g(x)$ noktasında türevlenebilir ve $g(x)$ fonksiyonu da x noktasında türevlenebilir ise $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ bileşke fonksiyonu da x noktasında diferansiyellenebilirdir ve $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x)$ dir.

Leibniz Gösterimine göre; $u = g(x)$ de $\frac{dy}{du}$ hesaplanmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

$f(g(x))$ bileşke fonksiyonunda, f fonksiyonu dışarıdadır, g fonksiyonu da içeridedir. Zincir Kuralı şunu söyler; bileşke fonksiyonun türevi, dışarıdaki fonksiyonun f' türevinin içerideki $g(x)$ teki değeri ile içerideki fonksiyonun $g'(x)$ türevinin çarpılmasıdır.

$y = f(u), u = h(v), v = g(x)$ ve $y = f(h(g(x)))$ olmak üzere eğer $v = g(x)$ fonksiyonu x noktasında, $u = h(v)$ fonksiyonu v noktasında, $y = f(u)$ fonksiyonu u noktasında diferansiyellenebilirse $y = f(h(g(x)))$ de x noktasında diferansiyellenebilirdir ve

$$\frac{dy}{dx} = f'(u).h'(v).g'(x) = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx}$$

dir.

Örnek 8: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a-) $y = (3x + \frac{1}{(2x+1)^3})^{1/4}$ **b-)** $y = \sqrt{x^2 + 1}$ **c-)** $f(t) = |t^2 - 1|$

d-) $y = sin^2(3x^2 + x - 1)$

Örnek 9: $\frac{d}{dx}(x^2 - 3)^{10}\Big|_{x=2} =?$

Örnek 10: $f(t) = \frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+2}}$ ise $f'(t) =?$

Örnek 11: Eğer $g(x) = (x^2 + 3x + 4)^5.\sqrt{3 - 2x}$ ise $g'(-1) =?$

TERS FONKSİYONUN TÜREVİ

Teorem: $y = f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında tanımlı, sürekli ve monoton olsun. $x \in (a, b)$ noktasında sıfırdan farklı $f'(x)$ türevi varsa, buna karşılık olan y noktasında $x = f^{-1}(y)$ ters fonksiyonunun da türevi vardır ve $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ yani $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ olur. Eğer $f'(x) = 0$ olan $x \in (a, b)$ varsa $f(x) = y$ noktasında, ters fonksiyonun dikey teğeti vardır.

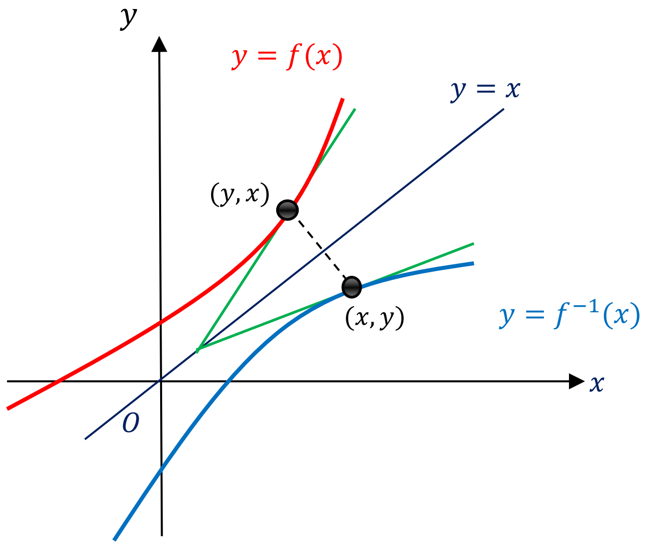
veya

f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir ve bu aralıkta birebir ise tersi vardır ve

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \Rightarrow \frac{d}{dx}f\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{d}{dx}x$$

$$\Rightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right).\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = 1$$

Eğer $f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0$ ise $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$ olur.



Leibniz Gösterimi ile $y = f^{-1}(x)$ ve $f'(y) \neq 0$ ise $\frac{dy}{dx}\Big|_x = \frac{1}{\frac{dx}{dy}\Big|_{y=f^{-1}(x)}}$ olur ve bu durumda (x, y) noktasında f^{-1} fonksiyonunun grafiğinin eğimi; (y, x) noktasındaki f fonksiyonunun grafiğinin eğiminin çarpma işlemine göre tersidir.

Uyarı: $a \in D_{f^{-1}}$ ve $f^{-1}(a) = b$ yani $f(b) = a$ için f^{-1} fonksiyonunun a noktasında türevinin olması için $f'(b) \neq 0$ olmalıdır.

Örnek 12: $f(x) = x^3 + x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde birebir fonksiyon ve $f(2) = 10$ olmak üzere $(f^{-1})'(10) =?$

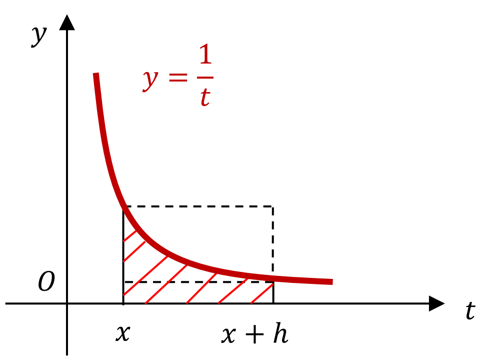
Örnek 13: $y = x^3$ fonksiyonunun tersinin türevini bulunuz.

Örnek 14: $f(x) = x^3 - 2$ olsun. f^{-1} fonksiyonu için bir formül bulmadan $\frac{df^{-1}}{dx}$ in $x = 6 = f(2)$ noktasındaki değerini bulunuz.

ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

Teorem: Eğer $x > 0$ ise $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ dir.

İspat: Eğer $h > 0$ ise $\ln(x+h) - \ln x$ aşağıdaki taralı bölgenin alanı olur.



$$h\frac{1}{x+h} < Taralı\ Bölgenin\ Alanı < h\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{x+h} < \ln(x+h) - \ln x < \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+h} < \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} < \frac{1}{x}$$

$\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{1}{x+h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ ve Sandviç Teoreminden $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}$ dir.

Benzer biçimde eğer $0 < x + h < x$ ise $\frac{1}{x} < \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} < \frac{1}{x+h}$ ve $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}$ dir. Böylece $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}$ yani $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ dir.

Örnek 15: $x \neq 0$ için $\frac{d}{dx} ln|x| = ?$

Örnek 16: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a-) $f(x) = ln(\sqrt[3]{\frac{3x^2-5}{x^2+5}})$ **b-)** $y = ln^2 x - ln(ln\, x)$ **c-)** $y = ln(x + \sqrt{x^2+1})$

Teorem: $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ dir.

İspat: $y = e^x \Rightarrow x = ln\, y$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{y} . \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow y = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$$

ve $x = ln\, y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \neq 0$ olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}$ için $y = e^x$ diferansiyellenebilirdir. Yani $\mathbb{R}$ kümesinde türevlenebilirdir.

Örnek 17: $\frac{d}{dx}(5e^x) = ?$

Örnek 18: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a-) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **b-)** $y = \sqrt{1 + e^{2x}}$

Örnek 19: $y = e^{sin(x^3)}$ olduğuna göre y' türevini bulunuz.

Teorem: $\frac{d}{dx} a^x = a^x . ln\, a$ dır $(a > 0)$.

İspat: $\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x.ln\, a} = e^{x.ln\, a} . (x. ln\, a)' = ln\, a . e^{x.ln\, a} = a^x . ln\, a$

Not: $x > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ için $\frac{d}{dx} x^a = \frac{d}{dx} e^{a.ln\, x} = e^{a.ln\, x} . a . \frac{1}{x} = \frac{x^a . a}{x} = a x^{a-1}$

Örnek 20: $f(x) = 2^{\sqrt[3]{x}}$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

Örnek 21: $y = 5^{\sqrt{3x^2-x+1}}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Not: $0 < a < 1$ ise $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\frac{d}{dx} a^x = a^x . ln\, a < 0$ ve

$a > 1$ ise $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\frac{d}{dx} a^x = a^x . ln\, a > 0$ dır.