Extracted Math Book

# Page 1

أ. رائدة عويس  
   
   
أ. أرواح كرم   
   
   
   
د. حممد صالح (منسقاً)  
أ. موسى حراحشة  
   
   
أ. عبد الكريم صالح   
أ. قيس شبانة  
أ. نرسين دويكات  
الرياضيـــات  
الفرع العلمي والصناعي  
فزيق التȌأليف:  
12

# Page 2

قررت وزارة التربية والتعليم في دولة فلسطين  
تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٨١٠٢ / ٩١٠٢ م  
الԽإشراف العام  
 جميع حقوق الطبع محفوظة  
د. صبري صيدم  
   
رئيس لجنة المناهج   
د. بصري صالح  
   
   
نائب رئيس لجنة المناهج  
�أ. ثروت زيد  
   
رئيس مركز المناهج   
الدائـــرة الفنية  
كمال فحماوي  
   
   
�إشراف فني وتصميم  
د. محمد نجيب  
   
   
تحكيم علمي   
�أ. عمر عبد الرحمن  
   
   
تحـرير لغوي   
د. محمد عواد  
   
   
   
   
قراءة  
د. سمية النخّالة  
   
   
متابعة المحافظات الجنوبية  
الطبعة الҙأولى  
٩١٠٢ م/ ٠٤٤١ هـ

# Page 3

تـقـديـم  
يتصف الҙإ صلاح التربوي ب�أنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند �إلى واقعية النش�أة، الҙأمر الذي انعكس   
على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على   
�إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل   
المواطن معها، ويعي تراكيبها و�أدواتها، ويسهم في صياغة برنامج �إصلاح يحقق الҙآمال، ويلامس الҙأماني، ويرنو لتحقيق الغايات   
والҙأهداف.   
ولما كانت المناهج �أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة   
عالجت �أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والҙإ عداد لجيل قادر على   
مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط ب�إشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الҙأصالة والانتماء، والانتقال �إلى المشاركة   
الفاعلة في عالم يكون العيش فيه �أكثر �إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.   
ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب �أن يكون من �إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي   
تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة ب�إطار قوامه   
الوصول �إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة   
واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الҙأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد ت�آلفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً   
عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.  
ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز �أخذ جزئية الكتب المقررّة من المنهاج دورها الم�أمول في الت�أسيس؛ لتوازن �إبداعي خلّاق   
بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الҙإ طار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد �إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال   
والقانون الҙأساسي الفلسطيني، بالҙإ ضافة �إلى وثيقة المنهاج الوطني الҙأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.  
ومع �إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو �إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق الت�أليف والمراجعة، والتدقيق، والҙإ شراف،   
والتصميم، وللجنة العليا �أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من   
العمل.   
وزارة التربية والتعليم   
مركز المناهج الفلسطينية  
�آب / ٨١٠٢ م

# Page 4

يرسنا أن نقدم لزمالئنا املعلمني واملعلامت، ولطلبتنا األعزاء كتاب الرياضيات للصف الثاين الثانوي العلمي والصناعي، وَفْق اخلطوط  
العريضة لوثيقة الرياضيات، والتي تم تطويرها بناءً عىل التغذية الراجعة والدراسات اهلادفة إىل تطوير املناهج الفلسطينية، ومواكبتها   
ملهارات القرن احلادي والعرشين، مستندين يف ذلك ملعايري وطنية ودولية.   
لقد اشتمل حمتوى الكتاب، عىل أنشطةٍ وتطبيقاتٍ وسياقاتٍ حياتيةٍ، من أجل إفساح املجال للطلبة للتفكري واإلبداع، وإلبراز أمهية   
الرياضيات يف احلياة، وقد تم مراعاة التسلسل املنطقي للمفاهيم والنظريات والتعميامت وتم برهنة بعض النظريات (للمعلم فقط).  
وقد اشتمل الفصل األول عىل ثالث وحدات، هي: حساب التفاضل، وتطبيقات التفاضل، واملصفوفات.  
يف الوحدة األوىل (حساب التفاضل) فقد تم تقديم متوسط التغري، قواعد االشتقاق، مشتقة االقرتانات املثلثية، قاعدة لوبيتال، مشتقة   
االقرتانات األسّ يّة واللوغريتمية، كام تم عرض بعض التطبيقات اهلندسية والفيزيائية عىل االشتقاق، باإلضافة إىل قاعدة السلسلة   
واالشتقاق الضمني.   
ويف الوحدة الثانية (تطبيقات التفاضل)، تم تقديم نظريتي القيمة املتوسطة ورول، فرتات التزايد والتناقص، القيم القصوى املحلية   
واملطلقة لالقرتان، نقط االنعطاف، جماالت التقعر لألعىل ولألسفل، ثم عرضت تطبيقات عملية عىل القيم القصوى.  
أما يف الوحدة الثالثة (املصفوفات) تم تقديم مفهوم املصفوفة ورتبتها، العمليات عليها، حمدد املصفوفة املربعة من الرتبة األوىل والثانية   
والثالثة، النظري الرضيب للمصفوفة املربعة من الرتبة الثانية وحل أنظمة املعادالت اخلطية بثالث طرق هي: طريقة النظري الرضيب، طريقة   
كريمر، طريقة جاوس.  
أما الفصل الثاين فقد اشتمل عىل ثالث وحدات، هي: التكامل غري املحدود وتطبيقاته، التكامل املحدود وتطبيقاته ، واألعداد املركبة.   
ففي الوحدة الرابعة (التكامل غري املحدود وتطبيقاته) تم تقديم مفهوم التكامل غري املحدود من خالل معكوس املشتقة، وتم التعرف   
عىل قواعد التكامل غري املحدود وتطبيقاته الفيزيائية واهلندسية، وأخرياً طرق التكامل الثالث (التكامل بالتعويض، والتكامل باألجزاء،   
والتكامل بالكسور اجلزئية).   
أما يف الوحدة اخلامسة (التكامل املحدود وتطبيقاته) فقد تم تقديم مفهوم التجزئة وجمموع ريامن ، ثم التكامل املحدود، وخصائصه،   
وتطبيقاته يف حساب املساحة واحلجوم الدورانية.  
ويف الوحدة السادسة (األعداد املركبة) تم عرض مفهوم العدد املركب، والعمليات عىل األعداد املركبة (املساواة ، واجلمع والطرح،   
والرضب) ثم عرضت عملية القسمة، ويف هناية الوحدة عرض حل املعادلة الرتبيعية يف (ك) واجياد اجلذور الرتبيعية للعدد املركب.   
وقد حرصنا أن تشمل كل وحدة عىل متارين عامة متنوعة بني املقالية واملوضوعية (االختيار من متعدد)، حلرصنا عىل تغطية كافة املفاهيم   
والتعميامت واملهارات الواردة يف الوحدة، لتكون عوناً للطلبة عىل التدرب والتمكن من املهارات.  
نتمنى أن نكون هبذا العمل قد حققنا مطالب عنارص العملية التعليمية كافة، بإخراج منهاجٍ فلسطينيٍ واقعيٍ ، يربط الطالب بظواهر   
رياضيةٍ حياتيةٍ، آملني من زمالئنا املعلمني واملعلامت واملديرين واملديرات يف مدارس الوطن، تقديم التغذية الراجعة ملركز املناهج قبل   
تطبيق الكتاب املقرر، وأثناء تطبيقه يف امليدان، وبعد التطبيق.  
واهلل ويل التوفيق  
املؤلفون  
مـقـدمـة

# Page 5

املحتـــويات  
١  
الوحدة  
٢  
الوحدة  
٣  
الوحدة  
٤  
الوحدة  
٥  
الوحدة  
٦  
الوحدة  
Differentiation حساب التفاضل  
2  
1 - ١  
)Rate of Change( متوسط التغري4  
 ٢- ١  
)Rules of Differentiation( قواعد االشتقاق  
٩  
 ٣- ١  
)The Derivative of Trigonometric Functions( مشتقات االقرتانات املثلثية١٩  
٤ - 1  
)L'Hôpital's Rule( قاعدة لوبيتال، ومشتقة االقرتان األسّ واللوغاريتمي  
٢٢  
 ٥- ١  
)Geometric and Physical Applications( تطبيقات هندسية وفيزيائية  
٠٣  
 ٦- ١  
)Chain Rule( قاعدة السلسلة  
٧٣  
 ٧- ١  
)Implicit Differentiation( االشتقاق الضمني٤٢  
Differentiation Applications تطبيقات التفاضل  
٢٥  
١ - ٢  
)Rolle's Theorem( نظريتا رول والقيمة املتوسطة  
٥٤  
 ٢- ٢  
)Increasing and Decreasing Functions( االقرتانات املتزايدة واملتناقصة  
٠٦  
 ٣- ٢  
)Extreme Values( القيم القصوى  
٥٦  
٤ - ٢  
)Concavity and Points of Inflection( التقعّر و نقط االنعطاف  
٥٧  
 ٥- 2  
)Applications of Extrema( تطبيقات عملية عىل القيم القصوى  
٣٨  
Matrices and Determinants املصفوفات واملحددات  
٢٩  
1 - ٣  
)Matrix( املصفوفة  
٩٤  
 2- ٣  
)Operations on Matrices( العمليات عىل املصفوفات  
٩٩  
 3- ٣  
)Determinants( املحدّدات١٨٠  
4 - ٣  
)Inverse of a Square Matrix( النظري الرضبي للمصفوفة املربعة١١٤  
 5- ٣  
)Solving Systems of Linear Equations( حل أنظمة املعادالت الخطية باستخدام املصفوفات١٠٢  
Indefinite Integral and its Applications التكامل غري املحدود، وتطبيقاته  
٠٣١  
1 - 4  
)Indefinite Integral( التكامل غري املحدود١٢٣  
 2- 4  
)Rules of Indefinite Integrals( قواعد التكامل غري املحدود١٧٣  
 3- 4  
)Applications of Indefinite Integrals( تطبيقات التكامل غري املحدود١٤١  
4 - 4  
)Methods of Integration( )طرق التكامل (التعويض، األجزاء، الكسور الجزئية١٤٦  
Definite Integration and its Applications التكامل املحدود وتطبيقاته  
٢٦١  
1 - 5  
)Partition and Riemann Sum( التجزئة ومجموع ريمان١٦٤  
 2- 5  
)The Definite Integral( التكامل املحدود١٧١  
 3- 5  
)Fundamental Theorem of Calculus( العالقة بني التفاضل والتكامل١٦٧  
4 - 5  
)Properties of Definite Integral( خصائص التكامل املحدود١٨١  
 ٥- ٥  
)Applications of Definite Integral( )تطبيقات التكامل املحدود (املساحة، الحجم١٩٨  
Complex Numbers األعداد املركبة  
٤٠٢  
1 - 6  
)Complex Numbers( األعداد املركبة  
٦٠٢  
 2- 6  
)Operations on Complex Numbers( العمليات عىل األعداد املركبة  
٢١٠  
 3- 6  
)Division of Complex Numbers( قسمة األعداد املركبة  
٢١٥  
إجابات تمارين الكتاب  
٣٢٢  
البنود التي باللون األمحر تستثنى من الفرع الصناعي

# Page 6

2  
حساب التفاضل  
١  
الوحدة  
تكثر يف ربوع فلسطني الشوارع والطرق امللتوية واخلطرة يف املناطق اجلبلية، هل تعتقد   
أن تصميم هذه الشوارع يف تلك املناطق مشابه لتصميمها يف املناطق املستوية األفقية؟  
Differentiation

# Page 7

3  
يتوقع من الطلبة بعد اإلنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين عىل توظيف   
حساب التفاضل يف احلياة العمليّة من خالل اآليت:  
 إجياد متوسط التغري، وتفسريه هندسياً وفيزيائياً.1  
.٢ حساب املشتقة األوىل عند نقطة باستخدام قواعد االشتقاق  
٣ التعرف إىل املشتقات العليا لالقرتان، وإجراء بعض التطبيقات عليها.  
٤ إجياد مشتقة االقرتانات املثلثية.  
٥ التعرف إىل مشتقة االقرتان األسّ الطبيعي، واالقرتان اللوغاريتمي الطبيعي.  
٦ إجياد بعض النهايات باستخدام قاعدة لوبيتال.  
٧ التعرف إىل قاعدة السلسلة، واستخدامها يف إجياد مشتقة تركيب اقرتانني.  
٨ حساب املشتقة األوىل لعالقة ضمنية.  
٩ التعرف إىل املعنى اهلنديس والفيزيائي للمشتقة، وحل مسائل عليهام.

# Page 8

٢.١- ∆س عندما تتغري س من1  
. إىل ٢١- 2 التغري يف ق(س) عندما تتغري س من  
 إىل

2.1- 3 متوسط التغري يف ق(س) عندما تتغري س من  
 = 3 1 س- ، س٢ = 2 ، فإن ∆س = س21- = ١ بام أن س1  
 : احلل  
٦- = ٧- ١ = )١-( ق- )) = ق(٢١ ق(س- )2 ∆ص = ق(س٢  
٢- = ٦-  
∆ص = ٣  
3 متوسط التغري = ∆س

# Page 9

5  
 :املعنى الهنديس ملتوسط التغري  
الشكل املجاور يمثل منحنى االقرتان ق(س)  
واملستقيم املار بالنقطتني أ ، ب والذي  
يسمى قاطعاً للمنحنى، ويكون   
)١ ق(س- )ق(س٢  
١ س- س٢  
∆ص =   
ميله = ∆س  
س  
ص  
١س  
ب  
ي  
أ  
ق(س)  
س٢  
∆س  
∆ص  
)١ق(س  
ق(س٢)  
:تعريف  
 إىل س2 يساوي ميل القاطع املار 1متوسط التغري لالقرتان ق(س) عندما تتغري س من س  
)) ، (س٢ ، ق(س٢)) ونسمي الزاوية (ي) التي يصنعها القاطع ١ ، ق(س١بالنقطتني، (س  
للمنحنى مع االجتاه املوجب ملحور السينات بزاوية ميل املستقيم، ويكون (ظاي = ميل القاطع).  
 جا٢س+ مثال ٢ : إذا قطع املستقيم ل منحنى االقرتان ق(س) = س  
))π  
 ، ق( ٢π  
يف النقطتني (0 ، ق(0)) ، ( ٢  
 احسب ميل املستقيم ل.1  
.٢ جد قياس زاوية ميل املستقيم ل  
]   
π  
 ميل املستقيم ل = متوسط تغري ق(س) يف الفرتة [ ٠ ، ٢1  
 : احلل  
1 =   
π  
٢  
π  
٢  
 =   
) جا٠+ (٠- ) π  
 جا(٢ × ٢+ π  
٢  
π  
٢  
 =   
) ق(٠- ) π  
ق( ٢  
 ٠- π  
٢  
 =   
 (ملاذا؟) π  
 ومنها قياس زاوية ميل املستقيم ل هو ٤1 = ٢ ميل املستقيم ل = ظا ي

# Page 10

6  
 نشاط 2: يمثل منحنى االقرتان ص = ق(س) يف الشكل املجاور  
مبيع رشكة سيارات حيث ص: املبيع باملاليني خالل  
س شهراً ، أراد عمر من الرسم إجياد متوسط التغري  
 إىل 3، فكتب1يف املبيع عندما تتغري س من  
س  
الزمن باألشهر (س)  
املبيع باملاليني (ص)  
ص  
 12  
3  
4  
5  
6  
7  
 5-  
 4-  
 ٣-  
 ٢-  
١ -  
٣  
 ٢ = ٢- ٥  
١ - = ٣)١( ق- )ق(٣  
١ - ٣  
∆ص =   
∆س  
واآلن أكمل: متوسط التغري يف ص عندما تتغري س من 3 إىل 7 يساوي .........   
 متوسط التغري يف ص عندما تتغري س من 3 إىل 6 يساوي........  
 ، وكان متوسط التغري لالقرتان ق(س) عندما تتغري ١ + ٢س = ) مثال 3 : إذا كان ص = ق(س  
. احسب قيمة ب حيث ب > 0 ١  
س من 0 إىل ب يساوي ٢  
١  
 = ٢١ - ١ + ٢ب  
 ٠- ب  
 = ) ق(٠- )ق(ب  
 ٠- ب  
 = )١ ق(س- )ق(س٢  
١ س- س٢  
∆ص =   
∆س  
 احلل :   
 ٢ = ب- ١ + أي أن ٢ ٢ب  
 ٢ + = ب١ + ٢ ٢ب  
وبالرتبيع، وحل املعادلة ينتج أن: ب = 0 أو ب = 4 (القيمة ب = 0 هتمل ، ملاذا؟)   
١ ≥ س٢ ، س  
1 < ، س١ - نشاط 3: ليكن ص = ق(س) = ٢س  
 هـ+1 إىل1 لبيان أن متوسط تغري االقرتان ق(س) عندما تتغري س من  
، فإننا نجد  
 هـ ، هـ > ٠+ ٢  
∆ص = ٢ ، هـ < ٠  
∆س  
هو   
)١( ق- ) هـ+ ١(ق  
هـ  
∆ص =   
 عندما هـ > 0 : متوسط التغري ∆س1  
 هـ+ = ٢  
)٢١( - هـ)٢+ ١(  
هـ  
 =

# Page 11

7  
............................ = ∆ص  
٢ أكمل: عندما هـ < 0 فإن ∆س  
٣ اعتمد عىل ما سبق يف إجياد متوسط التغري يف االقرتان ق(س) يف احلاالت اآلتية:  
 إىل 31 عندما تتغري س من   
2- إىل1 عندما تتغري س من   
:املعنى الفيزيائي ملتوسط التغري  
:تعريف  
إذا كانت ف = ق(ن) حيث ف املسافة التي يقطعها اجلسم، ن الزمن، فإن متوسط التغري يف   
)١ ق(ن- )ق(ن٢  
١ ن- ن٢  
 = ١ ف- ف٢  
١ ن- ∆ف = ن٢  
 إىل ن٢ هو ∆ن١املسافة عندما تتغري ن من ن  
 ، ن٢]. ١ويسمى الرسعة املتوسطة يف الفرتة [ن  
 مثال ٤ : يتحرك جسم عىل خط مستقيم، بحيث أن بعده ف باألمتار عن النقطة (و) بعد ن من الثواين   
 ٨ ن ، جد:+ يعطى بالقاعدة ف = ق(ن) = ن ٢  
 الرسعة املتوسطة يف الفرتة [ ٠ ، ٣ ].1  
. م/ث جد قيمة أ١ ، أ] تساوي ٣١[ ٢ إذا كانت الرسعة املتوسطة يف الفرتة  
 = 0 ، ن٢ = 3 ١ ن1  
 : احلل  
 م/ث ١١ = ٣٣  
 ٠ = ٣- ٨ × ٣+ ٣ ٢  
٣  
 = ) ق(٠- )ق(٣  
 ٠- ٣  
∆ف =   
 الرسعة املتوسطة = ∆ن  
١ ٩ = ٣- ٨ × أ+ أ ٢  
١ - أ  
 = )١( ق- )ق(أ  
١ - أ  
∆ف =   
٢ الرسعة املتوسطة = ∆ن  
 ٤ = ٠ ، وبحل املعادلة ينتج أن قيمة أ املطلوبة هي ٤+ ٥أ- بالتبسيط ينتج أن: أ ٢

# Page 12

8  
 1- تمارين ١  
 س٢ ، جد:+ ٣  
 إذا كان ق(س) = س١  
.أ التغري يف االقرتان ق(س) عندما تتغري س من 3 إىل 5  
.1 ب متوسط التغري يف االقرتان ق(س) عندما تتغري س من 4 إىل  
].π ، π  
 ٣ جاس جد متوسط التغري يف االقرتان ق(س) يف الفرتة [ ٢- ٢ إذا كان ق(س) = جتاس  
 ، س < ٢  
 س- ٦  
 أس ، س ≥ ٢+ ٣ إذا كان ق(س) = س٢  
 إىل أ ، أ > 2 يساوي 9، احسب قيمة أ.1 وكان متوسط التغري لالقرتان ق(س) عندما تتغري س من  
 ٣ق(س)، + ، ٣] ، يساوي 4، وكان ك(س) = س٢١[ ٤ إذا كان متوسط التغري لالقرتان ق(س) يف الفرتة  
جد متوسط التغري لالقرتان ك(س) يف نفس الفرتة.  
 °١ ، أ ) ، (3 ، ب) وصنع زاوية قياسها ٥٣١( ٥ إذا قطع املستقيم ل منحنى االقرتان ق(س) يف النقطتني  
 ١ - س٢+ )مع االجتاه املوجب ملحور السينات. احسب متوسط التغري يف االقرتان هـ(س) = ٣ق(س  
 ، ٣].١[ يف الفرتة  
٦ يتحرك جسم يف خط مستقيم بحيث أن بعده ف باألمتار عن نقطة االنطالق بعد ن من الثواين يعطى   
 ، ٣] تساوي 6 م/ث. فام ١[ ب ن وكانت الرسعة املتوسطة يف الفرتة+ بالعالقة ف = ق(ن) = ن٢  
قيمة الثابت ب؟  
 جـ. أثبت أن متوسط التغري لالقرتان ق(س) عندما تتغري س من + ب س+ ٧ إذا كان ق(س) = أ س٢  
 ب+ ) ٢+ 2 إىل ن يساوي أ(ن  
 ، (هـ العدد النيبريي)١+ هـ س+ أ إذا كان ق(س) = س  
٨   
1 جد متوسط التغري يف االقرتان ق(س) عندما تتغري س من 0 إىل  
 إىل هـ 1 لــو هـسن ، س > ٠ عندما تتغري س من+ ب إذا كان متوسط التغري لالقرتان ق(س) = س  
   
 هـ ، احسب قيمة ن.- ٣  
 هـ- ١ يساوي

# Page 13

9  
)Rules of Differentiation( ٢ قواعد االشتقاق- ١  
: أنشأ السيد مراد مصنعاً لأللبان يف إحدى املدن 1 نشاط  
الفلسطينية، ليزود السوق الفلسطيني بمنتجات   
األلبان، بعد النقص احلاصل من مقاطعة بضائع   
االحتالل، والذي يعترب شكالً من أشكال   
املقاومة السلمية، فإذا كان هبذا املصنع خطّان   
لإلنتاجٍ ، بحيث ينتج اخلطّ األول عبوات   
 ن.+ من األلبان وَفق االقرتان ق(ن) = ن2  
 . 2ن حيث ن الزمن بالساعات+ أما اخلطّ الثاين فينتج عبوات وَفقَ االقرتان هـ(ن) = ن2  
١ + يكون معدل التغري يف إنتاج اخلطّ األول من العبوات بعد ن ساعة يساوي قَ(ن) = ٢ن  
........................ أما معدل التغري يف إنتاج اخلطّ الثاين من العبوات فيساوي  
............................. كمية إنتاج اخلطّني من العبوات بداللة ن يساوي  
 معدل التغري يف إنتاج املصنع بداللة ن يساوي................... ماذا تستنتج؟  
 إىل١تعلمت يف الدرس السابق مفهوم متوسط التغري لالقرتان ص = ق(س) عندما تتغري س من س  
 ، ∆س ≠ ٠)١ ق(س- ) ∆س+ ١ق(س  
∆س  
∆ص =   
 ∆س وكان ∆س+ ١س  
∆ص وكانت هذه النهاية موجودة   
∆س  
∆ س ← ٠ وإذا أخذنا  
 أو املشتقة ١فإننا نسميها معدل التغري لالقرتان ق(س) عند س  
 ونقول إن ق(س) قابل ١األوىل لالقرتان ق(س) عند س = س  
 فإن متوسط تغري 1 (أي كلام اقرتبت س من س١لالشتقاق عند س  
االقرتان (ميل القاطع) يؤول إىل معدل تغري االقرتان ق(س) (ميل   
، انظر الشكل املجاور.1املامس) عند س = س  
س  
ص  
١س  
قاطع  
مماس  
ق(س)  
س

# Page 14

10  
:\*)١( تعريف  
 )١ ق(س- )هـ+١ق(س  
هـ  
   
هـ ← ٠ يف جماله، وكانت1إذا كانت ص = ق(س) اقرتاناً معرفاً عند س  
،1موجودة فإن قيمة هذه النهاية تسمى املشتقة األوىل لالقرتان ق(س) عند س  
1 س = س د ص  
 أو د س  
1 س = س َ) أو ص1ونرمز هلا بأحد الرموز اآلتية: قَ(س  
 )١ ق(س- )ق(س  
١ س- س  
   
١س ← س = )1ويمكن كتابتها عىل النحو قَ(س  
:)٢( تعريف  
 فإن: ١ليكن االقرتان ق(س) معرفاً عندما س = س  
)١ (مشتقة ق(س) من يمني العدد س)١ ق(س- ) هـ+ ١ق(س  
هـ  
 +هـ ← ٠ =   
+)1قَ(س  
)١ (مشتقة ق(س) من يسار العدد س)١ ق(س- ) هـ+ ١ق(س  
هـ  
 -هـ ← ٠ =   
-)1قَ(س  
) = ل 1 وتكون قَ(س١ = ل، فإن ق(س) قابل لالشتقاق عند س  
-)1 = قَ(س  
+)1وعندما قَ(س  
:)تعريف (٣  
 إذا كان االقرتان ق(س) معرفاً عىل [ أ ، ب] فإن ق(س) غري قابل لالشتقاق   
.] عند أطراف الفرتة [ أ ، ب  
 يكون ق(س) قابالً لالشتقاق عىل ] أ ، ب[ إذا كان قابالً لالشتقاق عند كل نقطة فيها.  
:فكّر وناقش  
جمال قَ(س) ⊆ جمال ق(س).  
:)1( قاعدة  
إذا كان ق(س) = جـ حيث جـ ∈ ح فإن قَ(س) = ٠ جلميع قيم س ∈ ح.  
\* ال يطلب من الطلبة إجياد املشتقة بالتعريف.

# Page 15

11  
π 2 ق(س) = جتا  
 ق(س) = ٥ 1  
 : : جد قَ(س) لكل مما يأيت١ مثال  
 قَ(س) = 0 1  
 : احلل  
٢ قَ(س) = ٠  
:)٢( قاعدة  
١ = )إذا كان ق(س) = س فإن قَ(س  
:)قاعدة (٣  
إذا كان ق(س) قابالً لالشتقاق وكان جـ ∈ ح فإن ك(س) = جـ ق(س) قابل لالشتقاق   
وتكون كَ(س) = جـ قَ(س) .  
 مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٥س ، جد قَ(س)  
 = ٥١ × احلل : قَ(س) = ٥  
:)قاعدة (٤  
 هـ(س) ± )إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقرتانني قابلني لالشتقاق، فإن ك(س) = ق(س  
 هـَ(س).± )قابل لالشتقاق، وتكون كَ(س) = قَ(س  
:مالحظة  
تبقى القاعدة (4) صحيحة ألكثر من اقرتانني.

# Page 16

12  
.)١(َ ٣ ك(س) ، جد ل- ) ق(س+ ٣ ، وكان ل(س) = ٢س- = )١(َ) = ٥ ، ك١(َ مثال ٣ : إذا كان ق  
 ٣ كَ(س)- ) قَ(س+ احلل : لَ(س) = ٢  
)١(َ ٣ ك- )١(َ ق+ ) = ٢١(َل  
١) = ٦١(َوبالتعويض ينتج أن: ل  
٢س ، س ≥ ٢ ، جد قَ(٢)   
 ٤ ، س < ٢  
 مثال ٤ : إذا كان ق(س) =   
 احلل : ق(س) متصل عىل جماله (حتقق من ذلك)، ومنها يكون  
٢ ، س > ٢  
٠ ، س < ٢  
قَ(س) =   
س  
٤  
٢  
ص  
 أما عند س = 2 فنبحث باملشتقة عن يمينها وعن يسارها  
 = ٠ ، ومنها قَ(٢) غري موجودة. (ملاذا؟)  
-) = 2 ، قَ(٢  
+)فتكون قَ(٢  
 مثال ٥ : إذا كان ق(س) = [س] ، س ∈ [٠ ، ٢] . جد قَ(س)  
 احلل : نعيد كتابة ق(س) دون رمز أكرب عدد صحيح.   
١ < ٠ ، ٠ ≤ س  
 ≤ س < ٢١ ، ١  
٢ ، س = ٢  
ق(س) =   
١ = الحظ أن ق(س) منفصالً عند س  
١ < ٠ ، ٠ < س  
 < س < ٢١ ، ٠  
قَ(س) =   
س  
ص  
١٢  
)قَ(٠) غري موجودة ، قَ(٢) غري موجودة ..... (ملاذا؟  
) غري موجودة ..... (ملاذا؟)١(َو ق

# Page 17

13  
:أتعلم  
عند إجياد املشتقة باستخدام قواعد االشتقاق، ال بد من بحث االتصال أوالً.  
:)قاعدة (٥  
إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقرتانني قابلني لالشتقاق فإن ك(س) = ق(س) × هـ(س)  
 هـ(س) × قَ(س)+ )قابل لالشتقاق وتكون كَ(س) = ق(س) × هـَ(س  
).١-(َ س) جد قَ(س)، ثم ق- )(٢١ - مثال 6 : إذا كان ق(س) = (٥س  
 س)- (٥) (٢+ )١-( × )١ - احلل : قَ(س) = (٥س  
١١ + س١٠- = ٥س- ١ ٠+ ١ + ٥س- = )ومنها قَ(س  
٢١ = ١١ + ١- × ١٠- = )١-(َوتكون ق  
٦ ، كَ(٢) = 4- = ) مثال ٧ : إذا كان ق(س) = س ك (س) جد قَ(٢) علامً بأن ق(٢  
 × ك(س)١ + ) احلل : قَ(س) = س × كَ(س  
 ك(٢)+ ك(٢) = 8+ )قَ(٢) = ٢كَ(٢  
3 - = )لكن ق(٢) = ٢ × ك(٢) ، ومنها ك(٢  
 3 = 5- قَ(٢) = 8  
:نظرية  
 + ، ن ∊ ص١ ≠ ، ن١-إذا كان ق(س) = سن ، فإن قَ(س) = ن س ن

# Page 18

14  
.)٢-(َ ٥، جد قَ(س)، ثم ق+ ٢س-   
 مثال ٨ : إذا كان ق(س) = س٣  
١ ٢ = ٠- ٢)٢-(٢) = ٣-(َ ٢ ومنها ق-   
 احلل : قَ(س) = ٣س٢  
:أتعلم  
إذا كان ق(س) كثري حدود، فإن ق(س) قابل لالشتقاق.  
:نظرية  
 ١يكون ق قابالً لالشتقاق عند س = س  
 -)١ = قَ(س+)١ و قَ(س١إذا وفقط إذا كان ق(س) متصالً عند س  
،١ ≥ ب ، س+ أ س٢  
١ < س ، س+ مثال ٩ : إذا كان ق(س) = س٣  
أوجد قيمة أ ، ب علامً بأن ق(س) قابل لالشتقاق عىل ح  
 ..... (ملاذا؟)1 = احلل : نعلم أن ق(س) متصل عند س  
 ب = ٢+ ) أي أن أ١( ق(س) = ق  
١ ← س ومنها  
،١ ≥ ٢أ س ، س  
١ < ، س١ + ٣س٢  
قَ(س) =   
 ومنها ٢أ = ٤ -)١(َ = ق+)١(َوكذلك ق  
أي أن أ = ٢ ، ب = ٠

# Page 19

٣.جد قيمة/ قيم س التي جتعل قَ(س) = ٤- ≠ ٢ ، س- س٢  
 س+ : إذا كان ق(س) = ٣١١ مثال  
 بالتبسيط واالختصار، ينتج أن: ١ × ) ٢- (س٢- س) × ٢س+ (٣  
 س)٢+ (٣  
 احلل : قَ(س) =   
٣-  
 ٢ ، لكن قَ(س) = ٤+ ٦س+ س٢  
 س)٢+ (٣  
قَ(س) =   
٣ -  
 ٢ = ٤+ ٦س+ س٢  
 س)٢+ (٣  
   
5 - = ، س1- = وبالرضب التباديل واالختصار، ينتج أن: س

# Page 20

16  
)Higher Derivatives( املشتقات العليا  
 ٢، جد قَ(س).- ٣س٢+ إذا كان ص = ق(س) = س٤  
هل يمكنك تكرار عملية االشتقاق بالنسبة لـِ س؟ وملاذا؟  
نسمي املشتقات التي تيل املشتقة األوىل باملشتقات العليا.  
د ص = قَ(س) متثل اقرتاناً   
وإذا كانت ص = ق(س) حيث ق قابل لالشتقاق، فإن املشتقة األوىل هي صَ = د س  
) تسمى املشتقة الثانية، ويرمز   
د ص  
د ( د س  
جديداً. وإذا كانت املشتقة األوىل قابلةً لالشتقاق، فإن مشتقتها د س  
د ٢ ص وتقرأ (دال اثنني ص دال س تربيع) وهكذا بالنسبة للمشتقات الثالثة   
هلا بالرمز صَ أو قَ(س) أو د س2  
والرابعة... ونعرب عن املشتقة من الرتبة ن بإحدى الصور اآلتية:  
 ، ن > ٢+(س)، حيث ن ∊ ص  
د ن ص أو ق(ن)  
د سن  
 أو   
ص(ن)  
:فكّر وناقش  
) ٢ ؟  
د ص  
د ٢ ص و ( د س  
هل يوجد اختالف بني كل من د س٢  
(٢).  
(س). ثم جد ق(٤)  
، جد ق(٥)١ - ٤س٣+ : إذا كان ق(س) = س٥١ مثال ٢  
 ٤٢س + س٢ ، قَ(س) = ٠٢س٣١ ٢+ احلل : قَ(س) = ٥س٤  
١(س) = ٠٢  
س ، ق(٥)١(س) = ٠٢  
 ٤٢ ، ق(٤)+ (س) = ٠٦س٢  
ق(٣)  
 × ٢ = ٠٤٢١(٢) = ٠٢  
ق(٤)  
) نجد:١(َ ٣س ، فإلجياد ق- قَ(س) = ٢س٣+ ) نشاط 4: إذا كان ق(س) كثري حدود، وكان ق(س  
أوالً قاعدة ق(س)، الحظ أن ق(س) اقرتان كثري حدود من الدرجة الثالثة ..... (ملاذا؟)   
 د واآلن أكمل:+ جـ س+ بس٢+ ومنه ق(س) = أ س٣  
قَ(س) = ..........  
 ٣س ومنها أ = .... ، ب = .... ، جـ = .... ، د = ....- قَ(س) = ...... = ٢س٣+ )ق(س  
) = ........١(َومنها ق(س) = ........ ، قَ(س) = ........ ، ومنها ق

# Page 21

17  
 س صَ = ص+ َ ، س ≠ ٠ ، أثبت أن: س٢ص١  
: إذا كان ص = س١ مثال ٣  
٢   
 ، صَ = س٣١-  
 ، صَ = س٢١  
 احلل : ص = س  
 ١-  
 س × س٢+ ٢  
 س صَ = س٢ × س٣+ َومنها س٢ص  
 = ص وهو املطلوب١  
 = س١  
 س- ٢  
 = س  
 ٢ - تمارين ١  
 جد قَ(س) يف كل مما يأيت عند قيم س إزاء كلّ منها:١  
١- = جـ ، حيث جـ ثابت ، عندما س+ س٢- أ ق(س) = س٥  
 س) ، عندما س = ٣+ ١)(٢١ - ب ق(س) = (س٣  
2- = ، عندما س  
س٢  
 س٢- جـ ق(س) = ٥  
٢ باالعتامد عىل املعطيات يف اجلدول املجاور، جد ما يأيت:   
)١( َ) هـ٢+ أ (ق  
)١( َ)  
٣  
هـ  
 - ب (س٢ ق  
)١(ق  
)١(َق  
)١(هـ  
)١(َهـ  
2  
31-3-  
   
 وكان الشكل املجاور يمثل  
س  
١ + ٣ إذا كان ق(س) = س٢  
)١( َ)ق  
منحنى االقرتان هـ(س)، فجد ( هـ  
س  
ص  
١  
° ٠٣  
١ -  
مماس  
هـ(س)

# Page 22

18  
 س صَ = ٠+ َ ، أثبت أن: ٢ص ص١- ≠ ، س  
س  
١ + أ إذا كانت ص = س  
٤   
   
٠٢ص  
٥ ، س ≠ ٠ ، أثبت أن: صَ = س٢  
 س٤+ ب إذا كانت ص = أ س٥  
).١(َ س٨)، جد ق+ ١( ) س٤+ ١( ) س٢+ ١() س+ ١() س- ١( = )٥ إذا كان ق(س  
٦ إذا كان ق(س) = س٢ ، هـ(س) = [٢س]   
ب هـَ(٠)  
أ قَ(٠)   
أوالً: جد:   
د (ق × هـ)َ (٠)  
جـ (ق × هـ)(س)   
   
ثانياً: هل هذا يتناقض مع قاعدة مشتقة حاصل رضب اقرتانيني؟ فسّ إجابتك.  
١ ٣ ، جد قيمة أ ، حيث ق(٣)(٢) = ٨- أ س٣+ ٧ إذا كان ق(س) = س٤  
٨ إذا كان ق(س) = سن ، ن ∊ ص ، وكان ق(٣)(س) = أ س ، جد قيمة أ

# Page 23

5.92  
 هل سبق أن سمعت بحاجة مريض لتخطيط1  
قلب؟ وهل شاهدت ختطيط قلب؟  
2 سبق ودرست االقرتانات املثلثية ، ما وجه   
الشبه بني ختطيط القلب ومنحنى بعض   
االقرتانات املثلثية؟   
 لقد تعرفت يف الدروس السابقة اشتقاق االقرتانات كثرية احلدود، واالقرتانات النسبية، وسنتعرف يف هذا  
الدرس عىل قواعد خاصة إلجياد مشتقة االقرتانات املثلثية.  
:)١( قاعدة  
إذا كان ق(س) = جاس، س بالتقدير الدائري فإن قَ(س) = جتاس   
)  
π  
 : إذا كان ق(س) = س جاس ، جد قَ (٢١ مثال  
 احلل : ق(س) = س جاس   
 س جتاس + قَ(س) = جاس  
١ = )  
π  
قَ (٢  
:)٢( قاعدة  
جاس - = )إذا كان ق(س) = جتاس ، س بالتقدير الدائري ، فإن قَ(س

# Page 24

02  
) ، جد قَ(س  
س٢  
 مثال ٢ : إذا كان ق(س) = جتاس  
جاس - × س٢- جتاس × ٢س  
جتا٢س  
 احلل : قَ(س) =   
 س٢جاس+ ٢س جتاس  
جتا٢س  
 =   
:)قاعدة (٣  
 إذا كان ق(س) = ظاس ، فإن قَ(س) = قا٢س.  
.قتا٢س- = ) إذا كان ق(س) = ظتاس ، فإن قَ(س  
. إذا كان ق(س) = قاس ، فإن قَ(س) = قاس ظاس  
.قتاس ظتاس- = ) إذا كان ق(س) = قتاس ، فإن قَ(س  
:فكّر وناقش  
حتقّق من صحة القواعد السابقة بالتعويض بداللة جاس، جتاس، ثم باستخدام قواعد االشتقاق.  
).  
π  
 ظاس ، جد قَ(س) ، قَ (٤+ مثال ٣ : إذا كان ق(س) = قاس  
 قاس)+ قا٢س = قاس(ظاس+ احلل : قَ(س) = قاس ظاس  
 (ملاذا؟) ٢ + ) = ٢  
π  
 قا ٤+ π  
 (ظا ٤π  
) = قا ٤  
π  
قَ (٤  
 ٢قتا٣س- د ص = قتاس  
 مثال ٤ : إذا كانت ص = قتاس ظتاس ، أثبت أن: د س  
 قتا٣س - قتاس ظتا٢س- = قتا٢س- × قتاس+ قتاس ظتاس ظتاس- = د ص  
د س  
 احلل :   
 قتا٣س - ) قتا٢س+ ١-( قتاس- =   
 ٢قتا٣س- قتا٣س = قتاس- قتا٣س- = قتاس

# Page 25

21  
 ٣- تمارين 1  
د ص لكلٍ مما يأيت:  
 جد د س١  
 قاس- ١  
 قاس+ ١ = ب ص  
 ٢ظاس - أ ص = ٢جتاس  
د ص = س٢قاس   
   
س  
 ظتاس+ جـ ص = قتاس  
 ص٢). + 1(د ٢ ص = ٢ص  
٢ إذا كانت ص = ظاس ، س زاوية حادة أثبت أن: د س٢  
 ص = ٠+ َ٢ ص  
 س+ َجاس ، س ≠ ٠ ، أثبت أن: ص  
٣ إذا كانت ص = س  
] ،π ، ٢π ٢-[ جتاس ، س- س٢١  
٤ إذا كان ق(س) = ٢  
جد جمموعة قيم س التي جتعل قَ(س) = ٠

# Page 26

22  
)L'Hôpital's Rule( ٤ قاعدة لوبيتال، ومشتقة االقرتان األسّ واللوغاريتمي- 1  
أوالً: قاعدة لوبيتال   
: قال أمحد ملعلم الرياضيات : اتفقت أنا وزمالئي ١ نشاط  
بأن نسمي النقطة (أ ، 0) بالنقطة الذهبية قال له   
املعلم: ملاذا يا أمحد، أجاب أمحد: ألنه إذا كان   
ق(س)، هـ(س) اقرتانني كثريي حدود يمران   
بالنقطة (أ ، 0) فإن:   
س  
هـ  
ق  
ص  
)(أ ، ٠  
 هـ(س)) = ٠± ) (ق(س  
س ← أ 1  
 (ق(س) × هـ(س)) = ٠  
س ← أ ٢  
٠  
 = ٠)ق(أ  
 بالتعويض املبارش هـ(أ))ق(س  
 هـ(س)  
س ← أ أما  
٠ ) والحظت أن   
تعلمت يف الصف احلادي عرش كيفية إجياد النهايات التي تكون عىل الصورة غري املعينة ( ٠  
كثرياً منها حيتاج إىل خطواتٍ عديدةٍ وأحياناً معقدةٍ، وهنا سوف نتعلم طريقة جديدة حلساب قيمة بعض   
هذه النهايات.   
:قاعدة لوبيتال  
 ح ، وكانت إذا كان ق(س)، هـ(س) قابلني لالشتقاق عند النقطة س = أ ، ل  
 = ل)ق(س  
 هـ(س)  
س ← أ = ل فإن)قَ(س  
 هـَ(س)  
س ← أ ، ٠  
 = ٠)ق(أ  
هـ(أ)  
الربهان: (للمعرفة فقط) بام أن ق(أ) = ٠ ، هـ(أ) = ٠  
) ق(أ- )ق(س  
 هـ(أ)- ) هـ(س  
س ← أ = )ق(س  
 هـ(س)  
س ← أ فإن  
) أ-(س  
 أ)- × (س) ق(أ- )ق(س  
 هـ(أ)- ) هـ(س  
س ← أ =

# Page 27

32  
) أ-(س  
 هـ(أ)- ) هـ(س  
س ← أ × ) ق(أ- )ق(س  
 أ)- (س  
   
س ← أ =   
) ..... (ملاذا؟)قَ(أ  
 = هـَ(أ)  
:مالحظة  
سوف ال نتعرض حلاالت لوبيتال األخرى.  
جاس باستخدام قاعدة لوبيتال.  
 س  
س ← ٠ : جد1 مثال  
٠ ، ومنها يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال  
جا٠ = ٠  
٠  
 احلل : من خالل التعويض املبارش تكون   
 ١ = جتاس = جتا ٠  
١  
   
س ← ٠ = جاس  
 س  
س ← ٠ فتكون  
 جتاس فكتبت:- ١  
س  
   
س ← ٠ نشاط 2: استخدمت سعاد املشتقة األوىل يف إجياد قيمة  
 جتا ٠- جتاس  
 ٠- س  
   
س ← ٠- = جتاس- جتا ٠  
 ٠- س  
   
س ← ٠ = جتاس- ١  
س  
   
س ← ٠  
 )قَ(٠) = جا ٠ = ٠ ..... (ملاذا؟- = )  
) ق(٠- )ق(س  
 ٠- س  
   
س ← ٠(- وهي عىل الصورة  
وعند استخدام قاعدة لوبيتال يف إجياد قيمة النهاية  
 = ....................  
..........   
س ← ٠ = جتاس- ١  
س  
   
س ← ٠ فإن  
 ٤ باستخدام قاعدة لوبيتال.- س٢  
 ٢- س  
س ← ٢ مثال ٢ : جد  
٠   
 ٤ = ٠- ٢ ٢  
 ٢- احلل : من خالل التعويض املبارش تكون ٢  
٢س = ٤  
١   
س ← ٢ = ٤- س٢  
 ٢- س  
س ← ٢ ومنها

# Page 28

24  
:مالحظة  
٠   
 = ٠)قَ(أ  
عند استخدام قاعدة لوبيتال، إذا كانت هـَ(أ)  
فإننا نستمر بتطبيق القاعدة حتى نحصل عىل عدد حقيقي.  
 جتاس باستخدام قاعدة لوبيتال.- ١  
س٢  
   
س ← ٠ مثال 3 : جد  
٠  
 جتا٠ = ٠- ١  
٠ ٢  
 احلل : من خالل التعويض املبارش تكون   
٠   
جا ٠ = ٠  
جاس لكن ٠  
 ٢س  
س ← ٠ = جتاس- ١  
س٢  
   
س ← ٠  
نطبق قاعدة لوبيتال مرةً أخرى  
١  
جتاس = ٢  
٢  
   
س ← ٠ = جاس  
 ٢س  
س ← ٠ فتكون  
مثال ٤ : إذا كان قَ(٢) = 5 جد:  
 ) ق(٢- ) ٥هـ- ق(٢  
هـ  
   
هـ ← ٠  
 و ، وعندما هـ ← ٠ فإن و ← ٢- ٢  
 ٥هـ = و ، ومنها هـ = ٥- احلل : نفرض ٢  
 ) ق(٢- ) ٥هـ- ق(٢  
هـ  
   
هـ ← ٠  
) ق(٢- )ق(و  
 و- ٢  
٥  
   
و ← ٠ =   
 ) ق(٢- )ق(و  
و  
   
و ← ٠ ٥- =   
٥٢- = ٥ × ٥- = )٥ × قَ(٢- =

# Page 29

52  
ثانياً: مشتقة االقرتان األسّ واللوغاريتمي  
 نشاط 3: تعترب البكترييا من الكائنات املجهرية الدقيقة   
بدائية النواة، وواسعة االنتشار، نتعامل معها   
يومياً دون أن نراها وتعترب من أوائل الكائنات   
احلية التي وجدت عىل األرض.   
 هناك بعض أنواع البكترييا تنشطر اخللية  
الواحدة فيها كل 02 دقيقة إىل خليتني.  
توصل العلامء إىل أن عدد البكترييا يف الساعة ن   
يساوي ٢ ٣ن .  
بعد كم دقيقة سيكون عدد خاليا البكترييا   
 خلية؟1473701428  
تعلمت سابقاً االقرتان األسّ الذي يكتب عىل الصورة   
 ، أ > ٠ واالقرتان اللوغاريتمي١ ≠ ، أ  
ق(س) = أ س  
 ، أ > ٠١ ≠ س ، س > ٠ ، أ  
عىل الصورة ل(س) = لــو أ  
وسوف نقترص دراستنا عىل االقرتان األسّ الطبيعي   
ق(س) = هـس ، واالقرتان اللوغاريتمي الطبيعي،  
س ، حيث هـ تسمى العدد النيبريي.   
ق(س) = لــو هـ  
س  
ص = س  
س  
لــوهـ  
هـس  
ص  
١  
١  
:تعريف  
٧٫٢ ١٨٢٨١العدد النيبريي هو العدد احلقيقي، غري النسبي، الذي قيمته التقريبية هـ ≌ ٨  
١ = ١ -   
هـس  
س  
   
س ← ٠ :وحيقق العالقة اآلتية

# Page 30

62  
ونورد بعض خصائص االقرتانني:   
 +االقرتان اللوغاريتمي الطبيعي / جماله ح  
ص  
 لــو هـ+ س  
س ص = لــو هـ  
 لــو هـ1  
ص  
 لــو هـ- س  
س = لــو هـ  
2 لــو هـ ص  
س ، س > ٠  
سن = ن لــو هـ  
3 لــو هـ  
 = س   
4 لــو هـهـس  
   
االقرتان األسّ الطبيعي / جماله ح  
ص + هـس × هـص = هـس1  
ص- = هـس  
هـس  
هـص  
2   
 = هـس ص   
3 (هـس)ص  
١ = 4 هـ٠  
 = س ، س > ٠  
5 هـ  
:)١( قاعدة  
ص = س ، ص > ٠  
إذا كان ص = هـس ، فإن لــو هـ  
:)٢( قاعدة  
إذا كان ق(س) = هـس فإن قَ(س) = هـس   
 هـس- و+هـس  
و  
   
و ← ٠ = ) ق(س- ) و+ ق(س  
و  
   
و ← ٠ = )الربهان (للمعرفة فقط): قَ(س  
)١ - هـس (هـو  
و  
   
و ← ٠ =   
 هـس- هـس × هـو  
و  
   
و ← ٠ =   
 = هـس١ × = هـس)١ - (هـو  
و  
   
و ← ٠ = هـس

# Page 31

72  
. ) قتاس ، فجد قَ(س+ مثال 4 : إذا كان ق(س) = س٣ هـس  
 قتاس ظتاس- ٣س٢ هـس+ احلل : قَ(س) = س٣ هـس  
:)قاعدة (٣  
 ١  
س ، س > ٠ ، فإن قَ(س) = س  
إذا كان ق(س) = لــو هـ  
د ص عندما س = ٥  
 ، فجد د س١س٠  
 مثال 5 : إذا كان ص = لــو هـ  
س  
لــو هـ١ = ٠١س٠  
 احلل : ص = لــو هـ  
 ١٠  
 = س١  
 × س١د ص = ٠  
ومنها يكون د س  
 = ٢١٠  
 = ٥  
 س=٥ د ص  
د س  
   
 مثال 6 : بيّ باستخدام قاعدة لوبيتال ما يأيت:  
 ١ = ١ - هـس  
س  
   
س ← ٠ 1  
1  
 = 2  
س  
لــو هـ  
1 - س2  
١ ← س ٢  
0 لذلك نستخدم قاعدة لوبيتال   
 = 0١ - هـ0  
0  
 بالتعويض املبارش 1  
 : احلل  
   
١ = = هـ٠  
هـس  
١   
س ← ٠ = ١ - هـس  
س  
   
س ← ٠ ومنها

# Page 32

82  
٠ لذلك نستخدم قاعدة لوبيتال  
 = ٠١ لــو هـ  
1 - 21 ٢ بالتعويض املبارش تكون  
1  
 = 2  
1س  
٢س  
   
١ ← س =   
س  
لــو هـ  
1 - س2  
١ ← س ومنها  
 مثال 7 : جد مشتقة كل من االقرتانات اآلتية:  
 ق(س) = س هـس 1  
س حيث س > ٠  
٢ ع(س) = هـس لــو هـ  
 هـس+ قَ(س) = س هـس١  
 : احلل  
س)  
 لــو هـ+ 1  
س = هـس (س  
 هـس لــو هـ+ 1  
٢ عَ(س) = هـس × س

# Page 33

92  
 ٤- تمارين ١  
 احسب النهايات اآلتية باستخدام قاعدة لوبيتال:١  
 جاس- س  
س٣  
   
س ← ٠ جـ  
٤س   
 ظاس  
س ← ٠ ب  
 س - ١-هـس  
 س  
لــو هـ  
   
١ ← س أ  
د ص يف كلّ مما يأيت:  
٢ جد د س  
 ، س > ٠ س  
 ب ص= لــو هـ  
   
أ ص = هـس جتاس  
 ٢)+ ٢) (هـس- د ص = (هـس  
 ، س > ٠ س٣  
س٨ جـ ص= لــو هـ  
٢ ، قَ(٣) = ٤ جد قيمة النهايات اآلتية: - = )٢ ، ق(٣- = )١(َ٣ إذا كان ق  
 ) ق(٣- ) ٥هـ+ ق(٣  
هـ١٠  
   
هـ ← ٠ أ  
١ - س٢  
 ق(س)- )1( ق  
١ ← س ب  
 ، فجد قيمة/ قيم س التي جتعل صَ = ص١ +   
 هـس+ ٤ إذا كانت ص = س٢  
 ، أ ≠ ٠  
م-ن (أ)ن  
 = م  
 أ ن-   
س ن  
 أ م-   
 س م  
س ← أ :٥ أثبت باستخدام قاعدة لوبيتال أن  
) = ٦١() = ٣ ، ق١(َ باستخدام قاعدة لوبيتال، علامً بأن ق) ق(س- )١(س ق  
١ - س  
   
١ ← س ٦ جد  
) قَ(٢- )قَ(٢س  
١ - س  
   
١ ← س ٧ إذا كان قَ(٢) = ٣ ، قَ (٢) = ٥ ، جد

# Page 34

03  
)Geometric and Physical Applications( ٥ تطبيقات هندسية وفيزيائية- ١  
أوالً: تطبيقات هندسية:   
: يمثل الشكل املجاور طريقني م ، ع أحدمها ١ نشاط  
مستقيم واآلخر منحني، يلتقيان عند املوقع ن،   
 ، 8) يف مستوى إحداثي 1( والذي متثله النقطة  
متعامد، فإذا كانت معادلة الطريق ع هي:   
 4س+ ص = 4س2  
 جد معادلة الطريق م علامً بأن الطريقني 1  
.متامسان عند النقطة ن  
الطريق ع  
الطريق م  
ل(٢ ، و)  
) ، ٨١(ن  
 ٢ إذا كانت النقطة ل (2 ، و) متثل موقع إشارة  
ضوئية يف مستوى الطريقني، فام قيمة (و)   
بحيث تقع اإلشارة الضوئية عىل الطريق م؟  
نالحظ يف الشكل املجاور أن معدل التغري   
 هو ١لالقرتان ق(س) (ميل املنحنى) عند س  
) ١ميل املامس املرسوم للمنحنى وتساوي قَ(س  
)) نقطة التامس.١ ، ق(س١ونسمي النقطة (س  
س  
ص  
١س  
مماس  
ق(س)  
:تعريف  
))، فإن ميل املنحنى عند ١ ، ق(س١إذا كان ق(س) اقرتاناً قابالً لالشتقاق عند النقطة أ (س  
) .١النقطة أ هو ميل املامس املرسوم ملنحنى ق(س)، ويساوي قَ(س  
ويعرف العمودي عىل منحنى االقرتان، بأنه العمودي عىل املامس للمنحنى عند نقطة التامس.

# Page 35

31  
 ، ثم جد معادلتي املامس والعمودي١ = ٥س عند س+ : جد ميل منحنى االقرتان ق(س) = س٣١ مثال  
عىل املامس عند تلك النقطة.  
)١(َ يساوي ق١ = احلل : ميل املنحنى عند س  
) = 8 = ميل املامس١(َ ٥ ومنها ق+ قَ(س) = ٣س٢  
 ، ٦)١( = ))١( ، ق١( لكن نقطة التامس هي  
)1 س- = م(س1 ص- معادلة املامس هي: ص  
 ٢- ) ومنها ص = ٨س١ - ٦ = ٨(س- أي: ص  
 ١-  
 = ٨١-  
ميل العمودي عىل املامس = ميل املامس  
ومنها تكون معادلة العمودي عىل املامس هي:  
 ٩٤ = ٠ (حتقق من ذلك)- س+ ٨ص  
 مع االجتاه املوجب °١٤ ، س > ٠ ، يصنع زاوية قياسها ٥٣  
 مثال ٢ : إذا كان املامس ملنحنى ق(س) = س  
ملحور السينات، أثبت أن العمودي عىل املامس عند نقطة التامس ملنحنى ق(س) يمر بالنقطة (٠ ، ٠).   
) 1 ، ص1 احلل : نفرض نقطة التامس أ(س  
٤ -  
 ، قَ(س) = س٢١- = ١ميل املامس = ظا ٥٣  
٤ -  
٢  
١ = س١لكن ميل املنحنى عند س  
٤-  
٢  
١= س١- ومنها  
 > ٠١ = ٢ ألن س١إذن س  
١ = ١-  
١- = نقطة التامس هي (٢ ، ٢) ، ومنها ميل العمودي  
 ٢) ومنها ص = س - (س١ = ٢- معادلة العمودي هي ص  
النقطة (٠ ، ٠) تقع عىل العمودي عىل املامس.  
أي أن العمودي عىل املامس يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

# Page 36

23  
1 = عند النقطة التي إحداثيها السيني  
س٢  
 مثال ٣ : جد معادلة املامس ملنحنى االقرتان ق(س) = هـس  
 (ملاذا ؟)١  
) = هـ١(َ ومنها يكون ميل املامس = ق  
 هـس  
 س٢-   
٢س هـس  
(هـس)٢  
 احلل : قَ(س) =   
 فتكون معادلة املامس هي:١  
 = هـ١، فإن ص١ = ١عندما س  
) ، ومنها هـ ص = س١ - (س١  
 = هـ١  
 هـ- ص  
١ + ٥س+ ٢س٢- = ) جـ يمس منحنى ق(س+ ٣س- = مثال ٤ : إذا كان املستقيم ص  
جد نقطة/ نقط التامس.  
 5+ 4س- = )) ، قَ(س1 ، ص1 احلل : نفرض أن نقطة التامس (س  
وبام أن ميل املامس = ميل املنحنى   
 = 2 1 5 ومنها س+ ١4س- = 3- إذن  
نقطة التامس = (٢ ، ق(٢)) = (٢ ، ٣) (حتقق من ذلك)  
 ب س٢ + ٥ يمس منحنى االقرتان ق(س) = أ س٣+ مثال 5 : إذا كان املستقيم ص = جـ س  
٣) جد قيم أ ، ب ، جـ - ، ١-( عند النقطة  
 ٥ + ١- × ٣ = جـ- ٣) حتقق معادلة املستقيم، ومنها- ، ١-( احلل : النقطة  
 ٥+ جـ أي أن جـ = ٨ ومنها ص = ٨س- = ٨-  
 ٣) حتقق معادلة املنحنى- ، ١-( لكن النقطة  
) ١( ... ب+ أ- = ٣- )٢ أي أن١-( × ب+ )٣١-( × ٣ = أ-  
)٣- ، ١-( كام أن ميل املامس = ميل املنحنى عند النقطة  
 ٢ب = ٨ ... (٢)- = ٨ ومنها ٣أ  
١-= س ٢ب س+ ومنها ٣أس٢  
١- = وبحل املعادلتني ينتج أن: أ = ٢ ، ب

# Page 37

33  
:ثانياً: تطبيقات فيزيائية  
 نشاط ٢: الشكل املجاور يمثل املسار(امللون) بني مدينتني   
أ ، ب ، انتقلت سيارة من املدينة أ باجتاه املدينة   
ب، ثم عادت إىل املدينة أ. هل الزمن الذي   
تستغرقه السيارة يف اإلياب يتساوى مع الزمن   
الذي استغرقته يف الذهاب؟   
أ  
هـ  
م  
ن  
ل  
ب  
 لتكن (و) نقطة عىل املستقيم ل وحترك جسم  
عليه بحيث كانت ف متثل بعد اجلسم عن   
النقطة (و) بعد ن ثانية فإن:  
 ، ن٢]١الرسعة املتوسطة يف الفرتة [ن  
)١ ف(ن- )ف(ن٢  
١ ن- ن٢  
∆ف =   
تساوي ∆ن)١ف(ن  
و  
ف(ن٢)  
ل  
:تعريف  
د ف = فَ   
الرسعة اللحظية (ع) عند الزمن ن هي ع(ن) = د ن  
د٢ ف = فَ   
د ع = د ن٢  
التسارع اللحظي (ت) عند الزمن ن هو د ن  
 مثال ٦ : حترك جسم عىل خط مستقيم، بحيث إن بعده عن نقطة ثابتة (و) يتحدد بالعالقة   
 ٧ حيث ف بعده باألمتار ، ن الزمن بالثواين، جد:+ ٩ن٢- ف = ن٣  
 ، ٣]١[ الرسعة املتوسطة للجسم يف الفرتة1  
.٢ تسارع اجلسم عندما يعكس اجلسم من اجتاه حركته  
 ٧ + ٩ن٢- احلل : ف = ن٣  
٣٢ م/ ث.- = ١- - ٧٤-  
١ - ٣  
 = )١( ف- )ف(٣  
١ - ٣  
∆ف =   
 الرسعة املتوسطة ∆ن١

# Page 38

34  
ن١ ٨- ٢ فَ(ن) = ع(ن) = ٣ن٢  
 يعكس اجلسم اجتاه حركته يف اللحظة التي تتغري فيها إشارة ع   
 ٦) = ٠ ، ن = ٠، ن = ٦ ثوانٍ - ن = ٠ ⇐ ٣ن(ن١ ٨- أي عندما ع(ن) = ٠ ومنها ٣ن٢  
 يعكس اجلسم اجتاه حركته بعد 6 ثوانٍ  
 م/ث٢١ = ٨١ ٨- ⇐ ت(٦) = ٦ × ٦١ ٨- ت(ن) = ٦ن  
 مثال ٧ : قذف جسم رأسياً إىل أعىل من نقطة عىل سطح األرض، بحيث   
 ٥ن٢ ، - يتحدد بعده عن سطح األرض بالعالقة ف(ن) = ٠٢ن  
حيث ف: ارتفاع اجلسم باألمتار، ن: الزمن بالثواين، جد:   
 أقىص ارتفاع يصله اجلسم.1  
 . م من سطح األرض1٢ رسعة اجلسم وهو عىل ارتفاع 5  
٣ املسافة التي قطعها اجلسم خالل الثواين األربعة األوىل.  
 م١٥  
 ٥ن٢- احلل : ف(ن) = ٠٢ن  
 عندما يصل اجلسم أقىص ارتفاع فإن ع(ن) = ٠١  
 ن = ٠ أي أن ن = ٢ ثانية١ ٠- ع(ن) = ٠٢  
 ٥ × ٤ = ٠٢م- ∴ أقىص ارتفاع = ف(٢) = ٠٢ × ٢  
١م فإن ف(ن) = ٥1٢ عندما يكون اجلسم عىل ارتفاع 5  
 = ٠١ ٥+ ٠٢ن- ⇐ ٥ن٢١ ٥ن٢ = ٥- ⇐ ٠٢ن  
 ، ن = ٣١ = ٣) = ٠ ومنها ن- )(ن١ - ⇐ (ن  
م عندما:١ يكون اجلسم عىل ارتفاع ٥  
 م/ث، اجلسم صاعد.١ = ٠١ × ١ ٠- ) = ٠٢١( أي أن ع١ = ن   
) م/ث، (ماذا تعني الرسعة السالبة؟١٠- = × ٣١ ٠- ن = ٣ ، أي أن ع(٣) = ٠٢   
، = ٠م١ ٥ × ٦- ٣ عندما ن = ٤ ثانية يكون اجلسم عىل ارتفاع : ف(٤) = ٠٢ × ٤  
 أي يكون اجلسم قد وصل سطح األرض،   
 ف(٤) = ٠٤م- وتكون املسافة املقطوعة = ٢ × أقىص ارتفاع

# Page 39

53  
 مثال ٨ : قذف جسم رأسياً إىل أعىل من قمة برج بحيث إن ارتفاعه  
عن الربج باألمتار بعد ن ثانية يعطى بالعالقة  
 ٥ن٢ ، جد:- ف(ن) = ٠٣ن  
 ارتفاع الربج علامً بان أقىص ارتفاع للجسم عن سطح 1  
م١األرض = ٠٨  
٢ رسعة ارتطام اجلسم بسطح األرض.  
٣ املسافة الكلية املقطوعة خالل الثواين السبعة األوىل.  
 م١٠٨  
 عند أقىص ارتفاع عن قمة الربج تكون ع(ن) = ٠١  
 : احلل  
ن = ٠ ومنها ن = 3 ١ ٠- ع(ن) = فَ(ن) = ٠٣  
 أقىص ارتفاع عن قمة الربج = ف (3) = ٥٤م  
م١ ٥٤ = ٥٣- ١م ، ارتفاع الربج = ٠٨١ لكن أقىص ارتفاع عن سطح األرض= ٠٨  
م (فسّ ).١٥٣- = )٢ يرتطم اجلسم باألرض عندما تكون ف(ن  
٠٦ م/ ث- = × ٩١ ٠- بحل املعادلة ينتج أن ن = 9 ومنها الرسعة ٠٣  
م (ملاذا؟)153 أي أن املسافة املقطوعة = 52- = ٣ عندما ن = 7 اإلزاحة

# Page 40

63  
 ٥- تمارين ١  
 التي يكون عندها املامس للمنحنى عمودياً ١ + ٢س- جد النقطة/النقط عىل منحنى ق(س) = س٢١  
 ٤ = صفر- ٢ص+ عىل املستقيم س  
π  
 ظا٢س عندما س = ٤- ٢ جد معادلة املامس ملنحنى ق(س) = ٣  
س عندما س = ٢ يقطع حموري السينات والصادات يف   
٣ إذا كان املامس ملنحنى ق(س) = لــو هـ ٢  
النقطتني ب ، جـ عىل الرتتيب، جد مساحة املثلث م ب جـ ، حيث م نقطة األصل.  
٣س ، س ≠ ٢ ، جد قيم أ.  
 ٢- ٦ص يمس منحنى االقرتان ق(س) = س- ٤ إذا كان املستقيم س = أ  
 ٥ن٢، حيث ف ارتفاعه باألمتار، ن بالثواين. جد - ٥ قذف جسم رأسياً إىل أعىل وَفق العالقة ف = ٠٤ن  
 م.1رسعة اجلسم عندما تكون املسافة الكلية املقطوعة 00  
٦ من نقطة عىل سطح األرض قذف جسم رأسياً إىل أعىل، وكان ارتفاعه   
 ٥ن٢، - ف باألمتار بعد ن من الثواين يعطى بالعالقة ف = ٠٣ن  
جد:   
أ أقىص ارتفاع يصله اجلسم.  
ب رسعة اجلسم وهو نازل عندما يكون عىل مستوى سطح العامرة التي ترتفع ٠٤ م.

# Page 41

73  
)Chain Rule( ٦ قاعدة السلسلة- ١  
: تعترب الرتوس (املسننات) من األجزاء امليكانيكية ١ نشاط  
املهمة التي تسهم يف نقل احلركة وهي عبارة عن   
عجالت دائرية هلا بروزات تتشابك مع أسنان الرتس   
اآلخر، وهكذا لتشكل سلسلة من الرتوس بأحجام   
خمتلفة، تسهم يف تسهيل احلركة املطلوبة ونقلها.   
باالعتامد عىل الشكل املجاور.  
٠٢  
١٥  
٠٣  
 حدد اجتاه احلركة للرتسني: األمحر واألصفر علامً بأن حركة األزرق باجتاه عقارب الساعة. 1  
 4 س مرة  
2 إذا فرضنا أن الرتس األزرق يدور س مرة، فإن األمحر (ح) يدور 3  
٢ س).  
 ح مرة (ص = 3١  
4 س)، أما األصفر (ص) فيدور ٢  
 (ح = 3  
د ص ؟  
 (الحظ عدد املسننات يف كل ترس). هل يمكن إجياد د س  
)٣، واملطلوب إجياد قَ(س)، وهنا نلجأ إىل فك املقدار ١ + تواجهنا بعض االقرتانات مثل ق(س) = (س٢  
أوالً ثم اشتقاق الناتج، أو استخدام مشتقة حاصل الرضب، ولكن هذه الطريقة تزداد صعوبةً وتعقيداً كلام   
كان األسّ كبرياً، وهذا يدعو إىل البحث عن طريقة أسهل إلجياد مشتقة هذه االقرتانات. فمثالً، إذا كان   
 فيكون ص = ق(ع) = ع٣١ + )٣، وفرضنا أن ع = هـ(س) = س٢١ + ص = ق(س) = (س٢  
:أتذكر  
(ق ∘ هـ) (س) = ق(هـ(س)) هو االقرتان املركب من ق ، هـ   
:قاعدة السلسلة  
إذا كانت ص = ق(ع) ، ع = هـ(س)  
وكان هـ(س) قابالً لالشتقاق و ق(س) قابالً لالشتقاق   
عند هـ(س) ، مدى هـ ⊆ جمال ق  
د ع  
د ص × د س  
د ص = د ع  
فإن د س  
أي أن (ق ∘ هـ)َ (س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)  
ق ∘ هـ  
معدل تغري ق ∘ هـ عند س  
هـ قَ(هـ(س)) × هـَ(س) ق  
معدل تغري هـ عند س  
 هـَ(س)  
معدل تغري ق عند هـ(س)  
 قَ(هـ(س))

# Page 42

83  
: س ، هـ(س) = س٢ ، جد+ : إذا كان ق(س) = س٣١ مثال  
٢ (هـ ∘ هـ)َ (٢)  
 (ق ∘ هـ)َ (س) 1  
 ، هـَ(س) = ٢س١ + احلل : قَ(س) = ٣س٢  
 (ق ∘ هـ)َ (س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)١  
 ٢س+ ) × ٢س = ٦س٥١ + = قَ(س٢) × ٢س = (٣(س٢)٢  
٢ (هـ ∘ هـ)َ (٢) = هـَ(هـ (٢)) × هـَ(٢)  
 = هـَ(٤) × هـَ(٢) =٨ × ٤ = ٢٣  
د ص عندما س = ٠  
 ، جد د س١  
١ + ٥ع ، ع = س- مثال ٢ : إذا كان ص = ع٢  
1 = ، عندما س = 0 فإن ع١-  
)٢١ + ٥) × (س- د ع = (٢ع  
د ص × د س  
د ص = د ع  
د س  
 احلل :   
 = ٣١- × ٣- =   
١-  
)٢١ + ٥) × (٠- = (٢  
١ = س = ٠ ، ع د ص  
ومنها د س  
) عندما س = ٢، علامً بأن ق(س) ١ + مثال ٣ : جد معادلة املامس ملنحنى العالقة ص = س ق(س٢  
1- = )قابل لالشتقاق، قَ(٥) = 3 ، ق(٥  
) ١ + س × ٢س قَ(س٢+ )١ + × ق(س٢١ = د ص  
د س  
 احلل :   
 42 = 32+1- = ) ٨ قَ(٥+ ) = ق(٥  
 س = ٢ د ص  
ميل املامس = د س  
2) . (ملاذا؟)- ، ميل املامس = ٣٢ ، نقطة التامس هي (2  
 ٨٤- ٢) ومنها ص = ٣٢س- ٢ = ٣٢(س- - معادلة املامس هي ص

# Page 43

93  
:نتيجة  
 ، وكان هـ(س) قابالً لالشتقاق ، ن ∊ ص   
إذا كان ص = (هـ(س))ن  
 × هـَ(س)  
١-د ص = ن(هـ(س))ن  
فإن د س  
 ، جد قَ(٢)  
)٥١ + س  
١ - مثال ٤ : إذا كان ق(س) = ( س  
)١ + (س١ - ١ × )١ - (س  
)٢١ - (س  
)٤ × ١ + س  
١ - احلل : قَ(س) = ٥( س  
 ٢-  
)٢١ - (س  
)٤ × ١ + س  
١ - = ٥( س  
٨١٠- = ٢- × قَ(٢) = ٥ × ٣ ٤  
 ظاس)ن فإن:+ نشاط ٢: إذا كان ص = (قاس  
 (..........)١- ظاس)ن+ د ص = ن(قاس  
د س  
 ظاس) = ..........+ (قاس١- ظاس)ن+ = ن قاس(قاس  
:مالحظة  
يمكن تعميم قاعدة السلسلة لتشمل أكثر من اقرتانني.  
 = 09   
 س = ٢ د ص  
 ٤ ، جد أ بحيث د م+ ٤٦ ) ، ع = س٣ ، س = أ م  
 ع+ مثال ٥ : إذا كان ص = (ع٢  
د س   
د ع × د م  
د ص × د س  
د ص = د ع  
د م  
 احلل :   
٤٦ ) × ٣س٢ × أ ، عندما س = 2 ، فإن ع = ٨  
 ع٢- د ص = (٢ع  
د م  
أي أن   
١  
 × أ = ٠٩ ومنها أ = ٢١) × ٢١ - ١ = (٦  
 س = ٢ د ص  
د م  
ومنها

# Page 44

40  
:قاعدة  
إذا كان ك(س) اقرتاناً قابالً لالشتقاق فإن:   
 ق(س) = هـ ك(س) قابل لالشتقاق، وتكون قَ(س) = كَ(س) هـ ك(س)  
)كَ(س  
 م(س) = لــو هـ ك(س) ، ك(س) > ٠ قابل لالشتقاق وتكون مَ(س) = ك(س)  
π  
د ص عندما س = ٢  
 إذا كان ص = هـ جتاس فجد د س1  
 : مثال ٦  
٢- = ٢ إذا كان ص = لــو هـ س٢ ، فبيّ أن: صَ . هـ ص  
١- = هـ ٠١- = π  
 س = ٢ د ص  
جاس هـ جتاس ومنها د س- = د ص  
د س  
 ١  
 : احلل  
٢ (ملاذا؟)-  
٢ = هـص-  
٢ ، صَ = س٢  
٢ ص = ٢لــو هـ س ومنها صَ = س  
٢ - = أي أن صَ . هـ ص

# Page 45

٢.- = ) ، قَ(٢١ = )علامً بأن ق(٢  
 .  
١ = ن د ص  
 = ٢ ، جد د س  
١ = ن د ن  
 ٥ن وكانت د س+ ٦ إذا كان ص = ن٢  
 ، هـ(س) = جتاس ، س ≠ ٠، أثبت أن: (ق ∘ هـ)َ (س) = جا٣س قا٢س.١ س+ ٧ إذا كان ق(س) = س  
 ظا ٢س- ) هـ+ ظا(٢س  
هـ  
   
هـ ← ٠ ٨ جد: أ  
٢- = )١(َ ، علامً بأن ق) ٣هـ- ١( ق- ) ٣هـ+ ١(ق  
 هـ١٠  
   
هـ ← ٠ ب

# Page 46

42  
)Implicit Differentiation( ٧ االشتقاق الضمني- ١  
: شب حريق يف إحدى البنايات، وهرعت 1 نشاط  
قوات الدفاع املدين للمشاركة يف إطفاء احلريق   
وإنقاذ املواطنني، فاستخدم أحد رجال اإلطفاء   
سلّامً طوله 02 مرتاً للوصول إىل أحد شبابيك   
البناية، ولكن السلّم بدأ بالتزحلق بحيث يبتعد   
أسفل السلّم عن البناية بشكلٍ أفقيٍّ .  
 ص٢ = ٠٠٤+ تالحظ من الشكل أن العالقة بني س ، ص هي س٢  
د ص بناءً عىل ما تعلمته سابقاً؟  
ما اجتاه سري أعىل السلّم ؟ وهل يمكنك إجياد د س  
 ، واستخدام قاعدة السلسلة س٢- ٠٠٤ = يمكنك كتابة العالقة السابقة عىل الصورة ص  
يف إجياد مشتقة العالقة.  
سبق لك إجياد مشتقة االقرتان ص = ق(س) عندما تكون العالقة بني املتغريين رصحية (ص معرفة بداللة س)،   
 ٣ ليس من السهل كتابة ص بداللة س ، فنسميها عالقةً ضمنيةً، - ٥ص٢ = س ص+ ولكن يف العالقة س٢  
د ص بطريقة تسمى االشتقاق الضمني، حيث يتم اشتقاق كل من طريف العالقة بالنسبة إىل س ضمن   
ونجد د س  
قواعد االشتقاق.  
)١ ، ١( د ص عند النقطة  
د ص ، ثم جد د س  
 ص ، جد د س- = ٤س١ + ص٢+ : إذا كان س٢١ مثال  
 احلل : نشتق طريف العالقة ضمنياً بالنسبة إىل س :  
 صَ- ٢ص صَ = ٤+ ٢س  
 ٢س (جتميع احلدود التي حتوي صَ عىل جهة واحدة)- صَ = ٤+ َ٢ص ص  
 ٢س (إخراج عامل مشرتك صَ من الطرف األيمن)- ) = ٤١ + صَ (٢ص  
٢  
 ٢ = ٣- ٤  
١ + ) = ٢١ ، ١( د ص عند النقطة  
 ٢س ومنها د س- ٤  
١ + ⇐ صَ = ٢ص

# Page 47

43  
د ص  
 مثال ٢ : إذا كان ٣ص = جاس جتا٢ص ، جد د س  
 احلل : نشتق طريف العالقة ضمنياً بالنسبة إىل س   
 ٢جا٢ص × صَ - × جاس+ ٣صَ = جتاس جتا٢ص  
 ٢جاس × جا٢ص × صَ = جتاس جتا٢ص + َ٣ص  
جتاس × جتا٢ص  
 ٢جاس × جا٢ص+ ومنها صَ = ٣  
 ٣ص٢ = ٥ ، ص > ٠ ، عند نقطة تقاطع - ص)٣+ مثال ٣ : جد معادلة املامس ملنحنى العالقة (س  
 ص = ٢+ منحناها مع املستقيم س  
 ٣ص٢ = ٥ - ص بالعدد ٢ يف معادلة املنحنى ينتج أن: ٢ ٣+ احلل : بالتعويض بدل س  
) 1 ، 1( ، ومنها نقطة التقاطع هي١ = إذن ص  
)1 ، 1( لكن ميل املامس = ميل املنحنى عند النقطة  
 ٦ص صَ = ٠ - ) َ ص+ ١( ص)٢+ نشتق العالقة ضمنياً بالنسبة إىل س فينتج ٣(س  
2 - = َ ٦ صَ = ٠ ومنها ص- ) َ ص+ ١( )٢١ + ١() ينتج أن: ٣1 ، 1( وبتعويض النقطة  
 ٣+ ٢س- = 2 وتكون معادلة املامس هي: ص- = ميل املامس  
د ص ، عندما ع = ٢ ، س > ٠  
 ٢ ، جد د س- ، س٢ع = ع٢١ + مثال ٤ : إذا كانت ص = ع٣  
د ع  
د ص × د س  
د ص = د ع  
د س  
 احلل :   
 ٢ ضمنياً بالنسبة إىل س وينتج - د ع نشتق العالقة س٢ع = ع٢  
إلجياد د س  
د ع   
 ٢س ع = ٢ع د س+ د ع  
س٢ د س

# Page 48

44  
 ٢س ع- = ) ٢ع- د ع (س٢  
ومنها د س  
٢س ع-  
 ٢ع- د ع = س٢  
أي أن: د س  
٦س ع٣-  
 ٢ع- ٢س ع = س٢-  
) ٢ع- د ص = ٣ ع٢ × (س٢  
د ص = ٣ ع٢ فإن د س  
وبام أن: د ع  
 (ملاذا)١ = عندما ع = ٢ ، س  
١ = ٦  
١ = س د ص  
د س  
:قاعدة  
١ -  
   
م  
م س ن  
د ص = ن  
 ، م ، ن ∊ ص ، م ≠ ن ، ن ≠ ٠ ، فإن د س  
م  
إذا كانت ص = س ن  
:نتيجة  
 ، ن ∊ ح   
إذا كان ق(س) = (هـ(س))ن  
 × هـَ(س)  
١-وكان هـ(س) اقرتاناً قابالً لالشتقاق فإن قَ(س) = ن (هـ(س))ن  
 ، جد قَ(٢)  
٣  
 ٢) ٤- ٥س+ مثال ٥ : إذا كان ق(س) = (س٣  
 ٥)+ × (٣س٢  
١  
 ٤-) ٢- ٥س+ ٣ (س٣  
 احلل : قَ(س) = ٤  
) ٥+ (٣س٢  
 ٢- ٥س+ ٣ × ٤ س٣  
 = ٤  
 ) ٥+ (٣ × ٢ ٢  
 ٢- ٥ × ٢+ ٢ ٣  
٣ × ٤  
قَ(2) = ٤  
٥ ١  
 = ٨١٧  
٣ × ٢  
 = ٤

# Page 49

45  
 . ٢ باستخدام قاعدة لوبيتال- ٧+ ٣ س  
١ - س  
   
١ ← س مثال ٦ : احسب  
٠ وبتطبيق قاعدة لوبيتال   
 ٢ = ٠- ٧+ ١  
٣  
١ - ١  
 احلل : بالتعويض املبارش تكون  
 ..... (ملاذا؟)١  
١ = ٢  
٢-  
 ٧) ٣+ (س  
١  
٣  
١  
   
١ ← س = ٢- ٧+ ٣ س  
١ - س  
   
١ ← س  
ص = ٣ التي يكون عندها املامس موازياً للمستقيم + س مثال ٧ : جد النقط عىل منحنى العالقة  
 ٢س = ٥+ ص  
2 (ملاذا؟) - = احلل : ميل املامس = ميل املستقيم املوازي له  
 = ٠ (ملاذا)َص  
٢ ص  
 +   
١  
٢ س  
نشتق العالقة ضمنياً بالنسبة إىل س :   
ص-  
س = َومنها ص  
س - ص = ٣ لكن  
٢- = ٣- س  
س = َومنها ص  
 ومنها ص = 4 ١ = ⇐ س١ = س ⇐ س = ٣ أي أن: ٣  
 ، 4). 1( أي أن: النقطة املطلوبة هي

# Page 50

46  
٣ = ٥س ص ، س ، ص ≠ ٠  
 ص+ ٢  
 نشاط ٢: إذا كان س  
٣س = ٥س٢ص٢ + برضب طريف املعادلة باملقدار (س ص) ينتج ٢ص1  
.............................. :ً٢ نشتق طريف املعادلة ضمنيا  
د ص ...........................   
د س  
٣   
 تساوي ....................  
)١ ، ١( د ص  
د س  
٤   
د ص عند النقطة (2 ، 3)؟ ..... (ملاذا؟)   
٥ هل يمكن إجياد د س  
   
 س)٤+ )٥ (٢١ + (س  
)٣١ + (س٢  
نشاط ٣: إذا كانت ص =   
 نأخذ لوغاريتم الطرفني فيصبح:  
 س = ٠ د ص  
إلجياد د س  
 س)٤+ )٥ (٢١ + (س  
)٣١ + (س٢  
ص = لــو هـ   
لــو هـ   
وبتطبيق قوانني اللوغاريتامت تصبح:  
)١ + ٣لــو هـ(س٢- ) س+ ٤لــو هـ(٢+ )١ + ص = ٥لــو هـ(س  
لــو هـ   
د ص = ........................................  
وباشتقاق الطرفني بالنسبة إىل س تكون د س  
 = ........................................  
 س = ٠ د ص  
ومنها د س  
٧

# Page 51

47  
 ٧- تمارين ١  
د ص لكل مما يأيت :  
 جد د س١  
 ٣+   
 س٢- ١   
٥  
ب ص =   
 ٢ص٢ = ٥ + س ص+ أ س٣  
 = ٢١  
 س+ ١  
د ص  
 ص) + جـ ص = جا(س  
 ص٢ = ٥٢ ، عند كل من + ٣س- ٢ جد معادلة العمودي عىل منحنى الدائرة التي معادلتها ص = س٢  
 ٥+ ٣س- نقطتي تقاطعها مع منحى ص = س٢  
 ٤٢ حيث ف املسافة باألمتار، ن الزمن + ٣ يتحرك جسم عىل خط مستقيم وَفق العالقة ف٢ = أن٢  
 م/ ث.1 بالثواين، جد قيمة أ املوجبة. علامً بأن رسعته بعد 2 ثانية تساوي  
 م)، أ ≠ ٠ هي معادلة احلركة جلسيم يتحرك عىل خط مستقيم، حيث أ ، م + ٤ إذا كانت ف = أجا(٢ن  
4 ف عددياً. ف املسافة باألمتار، ن الزمن بالثواين.- = عددان ثابتان، أثبت أن: ت  
 ص٢ = ٤، جد نقطة/نقط التامس.+ 2 ، 0) يمس منحنى العالقة ٤س٢-( ٥ إذا كان املستقيم املار بالنقطة  
).1 ، 1-( د ص عند النقطة  
س ، فجد د س- هـ+ ص- هـس = هـ+ ٦ إذا كان هـص  
 ، هـ).1( د ص عند النقطة  
٧ إذا كانت س٢ = لــو هـ(س ص) ، س ، ص > 0 ، فجد د س  
   
 × (هـ(س))م  
٨ إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقرتانني قابلني لالشتقاق وكانت ص = (ق(س))م  
) (س) ، حيث م ≠ ٠ ، ق(س) ، هـ(س) ≠ ٠َهـ  
 هـ+ َق  
 = م ( قَص  
أثبت أن : ص

# Page 52

48  
تمارين عامة  
 ضع دائرة حول رمز اإلجابة الصحيحة يف كلٍ مما يأيت:١  
 ، ٣] يساوي ٤ وكان متوسط تغري نفس االقرتان١[ إذا كان متوسط تغري االقرتان ق(س) يف الفرتة١  
 ، ٧]؟١[ 5، فام متوسط تغري االقرتان ق(س) يف- يف الفرتة [٣ ، ٧] يساوي  
2-   
) د١- ) جـ١ )أ) ٢ ب  
 مع االجتاه °١) يصنع زاوية قياسها ٥٣١- ، ٢ إذا كان املامس املرسوم ملنحنى ق(س) عند النقطة (٢  
؟) ق(٢- )ق(س  
 ٤- ٢س  
   
س ← ٢ املوجب ملحور السينات، فام قيمة  
١   
) د١  
 جـ) ٢١-  
 ب) ٢1- )أ  
 ٦ق(س) ؟+ )٣ إذا كان ق(س) = جتا٢س، فام قيمة قَ(س  
 د) ٢جا٢س  
 جـ) ٢جتا٢س  
أ) جتا٢س ب) جا٢س  
 ٢ وكان ق قابالً لالشتقاق، فام قيمة قَ(٣) ؟+ ) = س٣١ + ٢س(٤ إذا كان ق  
1 ب) 92 جـ) 84 د) 441أ) 6  
) ؟ 1- ، 1( د ص عند النقطة  
 ص٢ = ٣، فام قيمة د س+ س ص- ٥ إذا كان س٢  
 د) 21 ) جـ1- )2 ب- )أ  
 ٢ ، س ≠ ٥ ، فام قيمة قَ(٥) ؟+ س٢  
س ، س = ٥١٠  
٦ إذا كان ق(س) =   
 د) غري موجودة1أ) 0 ب) 4 جـ) 0  
٧ يتحرك جسيم عىل خط مستقيم وَفق العالقة: ف(ن) ع(ن) = ن   
ف: املسافة باألمتار، ن : الزمن بالثواين، ع(ن) الرسعة، وكانت ع(٢) = ٣م/ث،  
فام قيمة التسارع عندما ن = 2 ثانية؟  
م/ ث٢12-   
) م / ث٢ د18 م/ث٢ ب) 8م /ث٢ جـ) 2-   
) أ

# Page 53

49  
 ، هـ(س) = ظاس ، فام قيمة (ق ∘ هـ)َ (س) ؟١  
 س٢+ ١ = )٨ إذا كان قَ(س  
 د) قا٢س ظا٢س1 ) جـ  
أ) قا٢س ب) جتا٢س  
) ؟١(َ ، فام قيمة ق  
٢  
 ٧) ٣+ ٩ إذا كانت ق(س) = (س٢  
١  
٢  
 د) ١٥  
١٤ جـ) ٨  
٩  
 ب) ١١  
١٨  
أ)   
د ص ؟  
] ، فام قيمة د سπ  
 إذا كانت س = جتاص ، ص ∊ ]٠ ، ٢١٠  
س  
 س٢- ١  
   
) د  
س-  
 س٢- ١  
 ) جـ١-  
 س٢- ١  
 ) ب١  
 س٢- ١  
   
) أ  
 ٩ ، هـ َ(٣) = ٥ ، فام قيمة هـ(٣)؟- ، وكان ق(س) = س٢1 إذا كان (ق ∘ هـ)َ (٣) = 5١١  
 جـ) 2 د) 3١٫أ) 0 ب) ٥  
 أي االقرتانات اآلتية يكون قابالً لالشتقاق عىل جماله؟١٢  
 |س|- | ٢- ٢] ب) ق(س) = |س- أ) ق(س) = [س  
 [س] - ] ٢+ د) ق(س) = [س١ + ٢س+ س٢ = )جـ) ق(س  
 )١( ق- ) ٩هـ+ ١(ق  
١ - هـ+ ١   
   
هـ ← ٠ ٢ ، قَ(٣) = ٤ ، جد- = )٢ ، ق(٣- = )١(َ٢ إذا كان ق  
1 س عندما تتغري س من 0 إىل-)هـس٢١ + ٣ جد متوسط التغري لالقرتان ص = ق(س) = (س  
.) ق(٢- )١ - ٢س+ ق(س٢  
١ - س٢  
   
١ ← س ، جد١- = )٤ إذا كان ق(٢) = ٣ ، قَ(٢  
٥ جد قيمة كل من النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال  
 هـ س- هـ س٢  
٢س  
   
س ← ٠ ب  
 ١ -   
هـ ٤س  
ظاس  
   
س ← ٠ أ  
 جتاس- ١  
 س جاس  
س ← ٠ د  
 جاس - جا٢س  
٢س  
   
س ← ٠ جـ

# Page 54

05  
، وكان متوسط تغري االقرتان ق(س)١ ≥ ) ، س١ - ق(س+ س٢  
١ < ق(س) ، س  
٦ إذا كان هـ(س) =   
يف الفرتة [٠ ، ٢] يساوي 3 جد متوسط تغري االقرتان هـ(س) يف الفرتة [٠ ، ٣]  
 ٢ = ٣، ق متصالً عىل ح.- )ق(س  
١ - س  
١ ← س ٧ إذا كانت  
)١( ق- )س٣ ق(س  
١ - س  
   
١ ← س جد  
(ن) = ٥ن٢، ويف اللحظة ١٨ يقف أمحد ونزار عىل سطح بناية، أفلت أمحد كرةً من السكون وَفق العالقة ف  
 ٥ن٢، فإذا ارتطمت كرة + ن١نفسها، رمى نزار كرةً أخرى عمودياً إىل أسفل وَفق العالقة ف٢(ن) = ٥  
أمحد باألرض بعد ثانية واحدة من ارتطام كرة نزار، ما رسعة ارتطام كرة نزار باألرض؟   
(ف اإلزاحة باألمتار، ن الزمن بالثواين)  
) = ٠ ، أ ≠ ٠π  
٣س فجد قيمة أ بحيث (هـ ∘ ق)َ ( ٦  
١ + ٩ إذا كان ق(س) = أجاس ، هـ(س) = س٢  
   
 ،  
 س٢ ، ٠≤ س < ٢+ ] س- [٢  
٢ ، س ≥ ٢  
١ + س  
   
 إذا كان ق(س) = ١٠  
ابحث يف قابلية االقرتان لالشتقاق عىل جماله.  
٢ن)، بيّ أن تسارع اجلسم يف أي حلظة - هـ- يتحرك جسم عىل خط مستقيم وَفق العالقة ف = ٢(هـ٢ن١١  
)يساوي ٤ف عددياً. (ف اإلزاحة باألمتار، ن الزمن بالثواين  
).π  
 جتا٣س ، جد قَ( 4- إذا كان ق(س) = جا٣س١٢  
 جد جمموعة قيم س التي تكون عندها قَ(س) = ٠ يف كل مما يأيت: ١٣  
 ٢س)٤، س ∊ [٠ ، ٣]+ ٢)٣ (٣- أ ق(س) = (س  
]π  
 جتاس) ، س ∊ [٠ ، ٢+ ١( ب ق(س) = جاس

# Page 55

51  
:د ص لكل من االقرتانات اآلتية  
 جد د س١٤  
 ، جاس ≠ ٠  
س هـ٦س  
أ ص = ق(س) = جاس  
س لــو هـ س ، حيث س > 0 ، جتاس ≠ ٠   
جتاس  
ب ص = ق(س) =   
 جا٢ن) حيث ف متثل بعد اجلسم + يتحرك جسم يف خط مستقيم حسب العالقة ف(ن) = أ(جتا٢ن١٥  
عن النقطة الثابتة (و)، ن الزمن بالثواين. ما تسارع اجلسم عندما يكون عىل بعد 3 أمتار من النقطة (و)؟  
 ، س ≠ ٠ ١  
 س+ جد النقطة/ النقاط التي يكون عندها املامس ملنحنى ق(س) = س١٦  
٥ )  
 ، ٢) ، (٢ ، ٢١( موازياً للقاطع الواصل بني النقطتني  
 أقيّم ذايت: أكمل اجلدول اآلين: ١٧  
مستوى االنجاز  
مؤرش االداء  
منخفض   
متوسط  
مرتفع   
أجد متوسط التغري جربيا وهندسيا  
استخدم قاعدة لوبيتال يف اجياد املشتقات   
أجد مشتقات االقرتانات واحل مسائل منوعة عليها  
أجد مشتقة اقرتانات ليست كثرية حدود  
أوظف قاعدة السلسلة واالشتقاق الضمني يف اجياد مشتقة اقرتانات

# Page 56

25  
تطبيقات التفاضل  
٢  
الوحدة  
ما سبب اهنيار بعض السدود؟   
Differentiation Applications

# Page 57

35  
يتوقع من الطلبة بعد اإلنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين عىل توظيف   
تطبيقات التفاضل يف احلياة العمليّة من خالل اآليت:  
 إجياد فرتات التزايد والتناقص والنقاط احلرجة القرتان معلوم.1  
.٢ التعرف إىل نظرية القيمة املتوسطة، ونظرية رول، وبعض التطبيقات عليها  
٣ إجياد القيم العظمى والصغرى ملنحنى اقرتان معلوم.   
٤ إجياد فرتات التقعر لألعىل ولألسفل ونقاط االنعطاف ملنحنى اقرتان معلوم.  
٥ حتديد خصائص اقرتان، إذا علم منحنى إحدى مشتقاته.   
٦ توظيف القيم القصوى املطلقة يف حل مسائل حياتية.

# Page 58

54  
)Rolle's Theorem( ١ نظريتا رول والقيمة املتوسطة- ٢  
أوالً: نظرية رول\*   
: الشكل املجاور يمثل جزءاً من األقواس التي تزين 1 نشاط  
املسجد العمري الكبري بغزة حيث اخلط أ ب يمثل   
خطاً أفقياً يصل بني هنايات األعمدة.  
ما ميل اخلط األفقي أ ب ، وما ميل اخلط األفقي   
املار بالنقطة (جـ)؟ وما قيمة قَ(جـ)؟  
:\* نظرية رول  
إذا كان ق(س) اقرتاناً متصالً يف الفرتة [أ ، ب]، وقابالً لالشتقاق يف ]أ ، ب[، وكان   
ق(أ) = ق(ب) فإنه يوجد عدد حقيقي واحد عىل األقل جـ ∊ ]أ ، ب[ بحيث قَ(جـ) = ٠  
]. ثم جد ١ ، ٦ حيقق رشوط نظرية رول يف الفرتة [٠- س- : بيّ أن االقرتان ق(س) = س٢١ مثال  
قيمة، أو قيم جـ التي تعينها النظرية.  
]١ ، نبحث يف حتقق رشوط نظرية رول عىل اإلقرتان ق(س) يف الفرتة [٠١  
 : احلل  
[ ألنه كثري حدود١ ، ] وقابل لالشتقاق يف الفرتة ]٠١ ، ق(س) متصل يف الفرتة [٠  
) ١(٦ ، ومنها ق(٠) = ق- = )١(٦ ، ق- = ) ق(٠  
 حتققت رشوط نظرية رول   
[ بحيث قَ(جـ) = ٠ ١ ، إذن يوجد عىل األقل جـ ∊ ]٠  
٢ نجد قيمة/ قيم جـ التي تعينها النظرية:  
 = ٠١ - ومنها قَ(جـ) = ٢جـ١ - قَ(س) = ٢س  
[١ ، ∊ ]٠١  
 جـ = ٢  
)1961( \* ميشيل رول : هو عامل رياضيات فرنيس اشتهر بوضعه مربهنة رول  
للعلمي فقط

# Page 59

55  
 ]π ، ٢جاس حيقق رشوط نظرية رول يف الفرتة [أ+ مثال ٢ : إذا علمت أن االقرتان ق(س) = جتا٢س  
حيث أ > 0 ، فام قيمة/قيم الثابت أ ؟   
] π ، احلل : بام أن االقرتان ق(س) حيقق رشوط نظرية رول يف الفرتة [أ  
 (ملاذا؟) ١ = ٢جاأ+ ) ومنها جتا٢أπ(فإن ق(أ) = ق  
 ٢جاأ = ٠ ..... (ملاذا؟) + ٢جا٢أ- إذن  
 (مرفوضة)π ، ) = ٠ ومنها إما جاأ = ٠ فتكون أ = ٠١ - ٢جاأ(جاأ  
π  
 فتكون أ = ٢١ = ) = ٠ ومنها جاأ١ - أو (جاأ  
١- < ٤ ≤ س- ، ٢- س  
١ ≤ ≤ س١- ، ٧- مثال ٣ : ابحث يف حتقق رشوط نظرية رول عىل االقرتان ق(س) = س٢  
] ثم جد قيمة/قيم جـ التي حتددها النظرية (إن وجدت).1 ، 4-[ يف الفرتة  
] 1 ، 4-[ احلل : نبحث يف حتقق رشوط نظرية رول عىل اإلقرتان ق(س) يف الفرتة  
[ ألنه كثري حدود1- ، 4-[ ق(س) متصل يف١   
] ألنه كثري حدود1 ، 1-] ق(س) متصل يف  
 ..... (ملاذا؟) 1- = لكن ق(س) غري متصل عند س  
] 1 ، 4-[ ومنها فإن ق(س) غري متصل عىل  
 ، ١- < ٤ < س- ، ١  
١ < < س١- ، ٢ قَ(س) = ٢س  
) غري موجودة (ملاذا؟)١-(َ ق  
[ 1 ، 4-] إذن ق(س) غري قابل لالشتقاق عىل  
٦- = )١(٤) = ق-(٣ ق  
] ، وهذا ال يعني بالرضورة عدم وجود قيم1 ، 4-[ مل تتحقق رشوط نظرية رول عىل  
 لـِ جـ ، وللبحث عن قيم جـ بحيث قَ(جـ) = ٠ فإنه:   
 تكون قَ(س) ≠ ٠ ، ال يوجد جـ يف هذه الفرتة١- < ٤ < س- عندما  
[1 ، 1-] ∊ فإن ٢جـ = ٠ ، أي أن جـ = ٠١ < < س١- عندما  
 هل يتعارض هذا مع نظرية رول ؟ ..... (ملاذا؟)

# Page 60

65  
 ، ب] حيقق رشوط1-[ ∊ ، س) أ+ ٦)(س+ ٥س- (س٢  
 ٣- س  
 مثال ٤ : إذا علمت أن االقرتان ق(س) =   
 ، ب]، وكانت قيمة جـ التي تعينها النظرية هي جـ = ٠، فجد الثابتني أ ، ب1-[ نظرية رول يف  
 ، ب] فإن:1-[ احلل : بام أن االقرتان ق(س) حيقق رشوط نظرية رول يف الفرتة  
 ، ب] ومنها فإن ب < 3، ..... (ملاذا؟) 1-[ ق(س) متصل يف  
 ٢أ ، س ≠ ٣ (ملاذا؟)- ٢س- أس+ أ) = س٢+ ٢)(س- وبالتايل ق(س) = (س  
) (ملاذا؟)1( ......... أ- أب = ٣+ ٢ب- ) فان ب٢١-(وبام أن ق(ب) = ق  
 ، ب[ 1-] ∊ ٢ ، س- أ+ لكن قَ(س) = ٢س  
وبام أن جـ = ٠ فإن قَ(٠) = ٠ ومنها أ = ٢ (ملاذا؟)  
١ = ) نحصل عىل أن قيمة ب1( بتعويض قيمة أ = ٢ يف املعادلة  
 مثال ٥ : إذا كان ق(س) اقرتاناً متصالً عىل [أ ، جـ] بحيث قَ(س) موجودة يف ]أ ، جـ[ ،   
وكان ق(أ) = ق(ب) = ق(جـ)، حيث أ < ب < جـ.  
أثبت وجود عدد حقيقي واحد عىل األقل د ∊ ]أ ، جـ[ بحيث قَ(د) = ٠   
 نبحث يف حتقق رشوط نظرية رول عىل االقرتان ق(س) يف [أ ، ب]١  
 : احلل  
 وحيث أن قَ(س) موجودة يف ]أ ، جـ[ فإن:  
 ق(س) متصل عىل [أ ، ب] و قابل لالشتقاق عىل ]أ ، ب[ ، ق(أ) = ق(ب)  
) = ٠١ ∊ ]أ ، ب[ بحيث قَ(جـ١ ∴ حتققت رشوط نظرية رول ومنها يوجد جـ  
٢ نبحث يف رشوط نظرية رول عىل االقرتان ق(س) يف [ب ، جـ]  
 ق(س) متصل عىل [ب ، جـ] وقابل لالشتقاق عىل ]ب ، جـ[ ، ق(ب) = ق(جـ)  
 ∴ حتققت رشوط نظرية رول ، ومنها يوجد جـ٢ ∊ ]ب ، جـ[ بحيث قَ(جـ٢) = ٠  
 < جـ٢ ..... (ملاذا؟) ١ الحظ أن جـ  
 ، جـ٢]١٣ نبحث يف حتقق رشوط نظرية رول عىل االقرتان قَ(س) يف [جـ  
 ، جـ٢[ (ملاذا؟)١ ، جـ٢] وقابل لالشتقاق يف ]جـ١ قَ(س) متصل يف [جـ  
) = قَ(جـ٢) ١ قَ(جـ  
 ، جـ٢]١∴ حتققت رشوط نظرية رول عىل قَ(س) يف [جـ  
 ، جـ٢[ ⊆ ] أ ، جـ [ بحيث قَ(د) = ٠١يوجد عىل األقل عدد مثل د ∊ ]جـ

# Page 61

75  
\* )Mean Value Theorem( ثانياً: نظرية القيمة املتوسطة  
 نشاط ٢: الشكل املجاور يمثل منحنى االقرتان ق(س) يف الفرتة [أ ، ب] .   
هل ق(س) متصل يف [أ ، ب]، وقابل لالشتقاق يف ]أ ، ب[؟  
ما ميل القاطع الواصل بني النقطتني (أ ، ق(أ)) ، (ب ، ق(ب))؟  
 1هل ميل مماس املنحنى عند س = جـ  
يساوي ميل القاطع؟ ..... (ملاذا؟)  
هل يوجد يف الشكل مماسات أخرى هلا نفس امليل؟  
أ١جـ  
ب  
ق(س)  
مماس  
قاطع  
ق(أ)  
ق(ب)  
)١ق(جـ  
ص  
س  
 :نظرية القيمة املتوسطة  
إذا كان ق(س) اقرتانا متصالً يف [أ ، ب] وقابالً لالشتقاق يف ]أ ، ب[  
) ق(أ- )ق(ب  
 أ- ب  
فإنه يوجد عدد حقيقي واحد عىل األقل جـ ∊ ]أ ، ب[ بحيث أن قَ(جـ) =   
] ثم ١ ، ٢-[ حيقق رشوط نظرية القيمة املتوسطة يف الفرتة١ + مثال ٦ : بيّ أن االقرتان ق(س) = س٣  
جد قيمة/ قيم جـ التي حتددها النظرية.  
] ١ ، ٢-[ احلل : نبحث يف حتقق رشوط نظرية القيمة املتوسطة عىل االقرتان ق(س) يف  
[ ألنه كثري ١ ، ٢-] ]، وقابل لالشتقاق يف الفرتة١ ، ٢-[ االقرتان ق(س) متصل يف الفرتة  
] ١ ، ٢-[ حدود، إذن حتققت رشوط نظرية القيمة املتوسطة عىل االقرتان ق(س) يف  
 )٢-( ق- )١(ق  
٢)-( - ١  
 = )[ بحيث قَ(جـ١ ، ٢-] ∊ يوجد عىل األقل جـ  
١ ± = أي أن جـ)٧-( - ٢  
٣  
ومنها ٣جـ٢ =   
[ ..... (ملاذا ؟)١ ، ٢-] ∊ ١- = ومنها جـ  
)1813-1 (637Lagrange \* تنسب نظرية القيمة املتوسطة للريايض الفرنيس الغرانج

# Page 62

85  
 ، حيقق رشوط١- ≤ ٣ ≤ س- ، ب+ أس  
 < س ≤ ٥١- ، س٢- = ) مثال ٧ : إذا علمت أن االقرتان ق(س  
٣ ، ٥] ، جد الثابتني أ ، ب.-[ نظرية القيمة املتوسطة يف الفرتة  
٣ ، ٥] فإن: -[ احلل : بام أن ق(س) حيقق رشوط نظرية القيمة املتوسطة يف الفرتة  
١- = ٣ ، ٥] ومنه ق(س) متصل عند س-[ ق(س) متصل عىل  
) 1( .......... ١- = ب+ أ- :أي أن  
٣ ، ٥[: -] كام أن: ق(س) قابل لالشتقاق يف  
، أ ، ب ∊ ح ١- ≤ ٣ < س- ، أ  
 < س < ٥١- ، ٢س- = )قَ(س  
 وينتج أن: أ = ٢  
-)١-(َ = ق  
+)١-(َوتكون ق  
١ = ) ينتج أن ب1( بتعويض قيمة أ = ٢ يف املعادلة  
]، ١ ، ] يف الفرتة [٠١ + مثال ٨ : ابحث يف حتقق رشوط نظرية القيمة املتوسطة لالقرتان ق(س) = [٢س  
ثم جد قيمة/قيم جـ التي تعينها النظرية (إن وجدت).  
 احلل : نكتب االقرتان ق(س) دون استخدام رمز أكرب عدد صحيح.  
١  
٠ ، ٠ < س < ٢  
١ < < س١  
٢  
٠ ،   
 ومنها قَ(س) =   
١  
 ، ٠ ≤ س < ٢١  
١ < ≤ س١  
٢  
٢ ،   
١ = ٣ ، س  
ق(س) =   
]١ ، نبحث يف حتقق رشوط نظرية القيمة املتوسطة عىل االقرتان ق(س) يف [٠  
] (ملاذا؟) ١ ، ق(س) غري متصل يف [٠  
[ (ملاذا؟)١ ، ق(س) غري قابل لالشتقاق يف ] ٠  
] ، وهذا ال يعني عدم وجود قيم ١ ، مل تتحقق رشوط نظرية القيمة املتوسطة عىل ق(س) يف [٠  
لـ جـ، وللبحث عن قيمة /قيم جـ (إن وجدت)   
 = ٢ ) ق(٠- )١(ق  
 ٠- ١  
 = )قَ(جـ  
[ ١ ، [ ، وبالتايل ال يوجد جـ ∊ ] ٠١ ، لكن قَ(س) ≠ ٢ ، ⩝ س ∊ ] ٠

# Page 63

95  
 ١- تمارين ٢  
 بيّ أيّاً من االقرتانات اآلتية حيقق رشوط نظرية رول يف الفرتة املعطاة، ثم جد قيمة، أو قيم جـ التي ١  
 .)حتددها النظرية يف كل حالة (إن وجدت  
 س٢ ، س ∊ [0 ، 4]- ٤س = )أ ق(س  
 ، ٣]١-[ ∊ ٣ ، س- ٢س- ب ق(س) = س٢  
 ، ٢]١  
) ، س ∊ [ ٢١ س+ جـ ق(س) = لــو هـ(س  
]π  
 ٢جاس ، س ∊ [0 ، ٢+ د ق(س) = جا٢س  
٢ بيّ أيّاً من االقرتانات اآلتية حيقق رشوط نظرية القيمة املتوسطة يف الفرتة املعطاة، ثم جد قيمة أو قيم   
جـ التي حتددها النظرية يف كل حالة (إن وجدت):   
 ، ٢]١-[ ∊ ، س١ - س- أ ق(س) = س٣  
 ، ٢]١-[ ∊ ، س  
٤  
 ٢+ ب ق(س) = س  
 ٢س ، س ∊ [٤ ، ٩]+ س = )جـ ق(س  
 ٢س ، ٠ ≤ س ≤ ٢ ، حيقق رشوط نظرية القيمة املتوسطة يف + أس٢  
 ، ٢ < س ≤ ٣١ ٢+ ب س- ٣ إذا كان ق(س) = س٣  
 الفرتة [0 ،3] ، جد قيم الثابتني أ ، ب، ثم جد قيمة/ قيم جـ التي حتددها النظرية.  
 ، س ∊ [أ ، ب] ، س > صفر، فأثبت باستخدم نظرية القيمة املتوسطة وجود ١٤ إذا كان ق(س) = س  
عدد حقيقي واحد عىل االقل جـ ∊ ] أ ، ب [ ، بحيث جـ٢ = أ . ب  
٥ إذا كان ع(س) = (ق ∘ هـ)(س)، س ∊ [أ ، ب]، ق(س) ، هـ(س) اقرتانني متصلني يف [أ ، ب]   
وقابلني لالشتقاق يف ]أ ، ب[، وكان هـ(أ)= ب، هـ(ب) = أ.  
 أ)- ع(ب) = قَ(جـ)(ب- ) أثبت وجود عدد واحد عىل األقل جـ ∊ ]أ ، ب[ بحيث ع(أ  
] استخدم نظرية رول إلثبات أن القيمة التي تعينها π  
٦ إذا كان ق(س) = سجتاس ، س ∊ [٠ ، ٢  
النظرية هي عندما س = ظتاس.

# Page 64

06  
)Increasing and Decreasing Functions( ٢ االقرتانات املتزايدة واملتناقصة- ٢  
: أراد أحد املغامرين السري بسيارته عىل شارع 1 نشاط  
فوق سلسلة اجلبال التي تراها يف الصورة،   
مبتدئاً من النقطة (أ) ومنتهياً بالنقطة (و)،   
بحيث يلتزم بخط السري الظاهر يف الصورة.   
 )تالحظ أن السيارة أثناء سريها بني (أ) ، ( ب  
تكون يف حالة صعود.  
حدد نقطتني عىل الصورة تكون السيارة بينهام يف حالة نزول. إذا كانت إحداثيات النقطة   
 ؟١) وإحداثيات النقطة جـ(س٢ ، ص٢)، أهيام أكرب ص٢ أم ص١ ، ص١ب(س  
 :تعريف  
 ، س٢ ∊ [أ ، ب]١يكون منحنى االقرتان ق(س) املعرف يف [ أ، ب] ، س  
) < ق(س٢)١ < س٢ فإن ق(س١ متزايداً يف [ أ، ب] إذا حتقق الرشط: عندما س١  
)) > ق(س٢١ < س٢ فإن ق(س١٢ متناقصاً يف [ أ، ب] إذا حتقق الرشط: عندما س  
) = ق(س٢)١ < س٢ فإن ق(س١٣ ثابتاً يف [ أ، ب] إذا حتقق الرشط: عندما س  
 : يف الشكل املجاور، حدد الفرتات التي يكون فيها ١ مثال  
منحنى االقرتان ق(س) متزايداً، أو متناقصاً، أو ثابتاً.  
أ  
جـ  
د  
ق(س)  
ب ] احلل : يكون منحنى االقرتان ق(س) ثابتاً يف [ أ، جـ  
ويكون متناقصاً يف [جـ ، د] ألنه كلام زادت قيمة   
س يف الفرتة [جـ ، د] تقل قيمة ق(س)، ويكون   
متزايداً يف [د ، ب] (ملاذا؟)  
(مالحظة : ال يطلب من الطالب التحقق من التزايد والتناقص جربياً باستخدام التعريف)

# Page 65

61  
 التزايد والتناقص باستخدام اختبار املشتقة األوىل  
 نشاط 2: الشكل أدناه يمثل منحنيات االقرتانات : ق(س)، هـ(س)، ع(س) املعرفة يف الفرتة [ أ، ب] ،   
معتمداً عليها قم بام يأيت:   
أ  
أ  
أ  
جـ  
جـ  
جـ  
د  
د  
د  
هـ(س)  
ق(س)  
ع(س)  
ب  
ب  
ب  
 .] حدد أي االقرتانات السابقة يكون منحناه متزايداً، وأهيا متناقصاً، وأهيا ثابتاً يف الفرتة [ أ، ب1  
.٢ ارسم لكل منحنى مماساً عند النقطة جـ ومماساً عند النقطة د  
٣ نوع زاوية امليل للمامسات املرسومة هي ............  
٤ إشارة ظل زاوية ميل املامس لكل من املامسات التي رسمت هي ............ (ملاذا؟)  
٥ ما إشارة كل من قَ(س)، هـَ(س)، عَ(س) يف ] أ، ب[ ؟  
٦ ما العالقة بني فرتات التزايد والتناقص وإشارة املشتقة األوىل لالقرتان؟  
 :نظرية  
إذا كان ق(س) اقرتاناً متصالً يف [ أ، ب] وقابالً لالشتقاق يف ] أ، ب[ فإن منحنى :   
 االقرتان ق(س) يكون متزايداً يف [ أ، ب] إذا كانت قَ(س) > صفر، ⩝ س ∊ ] أ، ب[١  
 [ ٢ االقرتان ق(س) يكون متناقصاً يف [ أ، ب] إذا كانت قَ(س) < صفر، ⩝ س ∊] أ، ب  
٣ االقرتان ق(س) يكون ثابتاً يف [ أ، ب] إذا كانت قَ(س) = صفر، ⩝ س ∊ ] أ،ب [   
 مثال ٢ : جد فرتات التزايد والتناقص ملنحنى االقرتان ق(س) علامً بأن:   
 ٢)، س ∊ ح + )(س١ - قَ(س) = (س٢  
 ٢) = ٠+ )(س١ - احلل : نضع قَ(س) = صفر، ومنها (س٢  
 ٢) = ٠ + ) (س١ + ) (س١ - ومنها (س  
2 - = أو س1- = أو س1 = فينتج أن س  
٢-  
١  
١-  
٠  
٠  
٠  
- - -  
)اشارة قَ(س  
سلوك ق(س)  
- - - - - - -  
+ + +  
+ + +  
:من إشارة قَ(س) يف الشكل املجاور يكون  
، ∞[.1[ ، ]1- ، 2-[ ] ، ومتزايداً يف1 ، 1-[ ، ]2- ، ∞-] منحنى ق(س) متناقصاً يف

# Page 66

26  
 ٥، س ∊ ح+ ٤س+ مثال ٣ : عيّ فرتات التزايد والتناقص لالقرتان ق(س) = س٤  
 احلل : ق(س) متصل يف ح ألنه كثري حدود.  
 (ملاذا؟)1- = = ٠ فتكون س١ + ٤ نجعل قَ(س) = ٠ ومنها س٣+ قَ(س) = 4س٣  
ومن إشارة قَ(س) يف الشكل املجاور:   
١-  
٠  
- - -  
)اشارة قَ(س  
سلوك ق(س)  
+ + +  
[∞ ، 1-[ يكون منحنى ق(س) متزايداً يف الفرتة  
].1- ، ∞-] ومتناقصاً يف الفرتة  
١- ≠ ، س١ - س  
١ + مثال ٤ : عيّ فرتات التزايد والتناقص لالقرتان ق(س) = س  
}١-{ - متصل يف ح١- ≠ ، س١ - س  
١ + احلل : ق(س) = س  
٢  
)٢١ + قَ(س) = (س  
}١-{ - قَ(س) ≠ ٠ ⩝ س ∊ ح  
والشكل املجاور يبيّ إشارة قَ(س) ١-  
+ + +  
)اشارة قَ(س  
سلوك ق(س)  
+ + +  
 [∞ ،1-] ، [1- ، ∞-] ومنه يكون منحنى االقرتان ق(س) متزايداً يف الفرتتني  
فكّر وناقش  
}؟١-{ - يف املثال السابق هل يمكن القول أن ق(س) متزايد يف ح  
 [ π  
 ، ٢π-  
 ظاس متزايد يف الفرتة ] ٢+ مثال ٥ : أثبت أن منحنى االقرتان ق(س) = ٢س  
 [ (ملاذا؟)π  
 ، ٢π-  
 احلل : ق(س) متصل وقابل لالشتقاق يف الفرتة ] ٢  
 قا٢س) ≠ ٠+ قَ(س) = (٢  
ومن إشارة قَ(س) يف الشكل املجاور   
 [ π  
 ، ٢π-  
يكون منحنى ق(س) متزايداً يف الفرتة ] ٢  
)اشارة قَ(س  
سلوك ق(س)  
+ + + + + +  
π  
٢  
π-  
٢

# Page 67

36  
 مثال ٦ : عيّ فرتات التزايد والتناقص ملنحنى االقرتان  
]π ، ، يف الفرتة [٠  
π  
جاس ، ٠ ≤ س ≤ ٢  
π ≤ < سπ  
 جتاس ، ٢+ س  
ق(س) =   
،  
π  
جتاس ، ٠ < س < ٢  
π < < سπ  
 جاس ، ٢- ١  
 = ) احلل : قَ(س  
) غري موجودة. (ملاذا؟) π  
قَ( ٢  
[ (ملاذا؟)π ، وتكون قَ(س) ≠ ٠ ، ⩝ س ∊ ] ٠  
ومن إشارة قَ(س) يف الشكل املجاور   
)اشارة قَ(س  
سلوك ق(س)  
+ + + +  
+ + + +  
π  
٢  
٠  
غري موجودة  
غري موجودة  
غري موجودة  
π  
]π ، π  
] ، ] ٢  
π  
يكون منحنى ق(س) متزايداً يف الفرتتني [٠ ، ٢  
٣ ، ٢]-[ ∊ ٤| ، س- مثال ٧ : عيّ فرتات التزايد والتناقص ملنحنى االقرتان ق(س) = |س٢  
 احلل : نكتب ق(س) دون استخدام رمز القيمة املطلقة.   
٢- < 3 ≤ س- ، 4- س٢  
٢ ≤ س ≤ 2- ، س2- ٤| = 4- ق(س) = |س٢  
3 ، 2] ألنه اقرتان قيمة مطلقة القرتان متصل -[ ق(س) متصل يف الفرتة  
٢- < 3 < س- ، 2س  
٢ < س < 2- ، 2س- = )قَ(س  
2 ، 2 (ملاذا؟)- ، 3- = قَ(س) غري موجودة عندما س  
نجعل قَ(س) = 0 ، ومنها س = ٠  
ومن إشارة قَ(س) يف الشكل املجاور يكون   
٣-٢-٠  
٢  
- - - + + + + +  
 - - - - -  
)اشارة قَ(س  
سلوك ق(س)  
غري موجودة غري موجودة  
صفر  
غري موجودة  
2، 0]-[ منحنى ق(س) متزايداً يف  
2 ] ، [0، 2] - ، 3-[ ومتناقصاً يف

# Page 68

64  
 ٢- تمارين ٢  
 حدد فرتات التزايد والتناقص ملنحنى االقرتان ق(س) يف احلاالت اآلتية:١  
 ]٢ ، ٥-[ ∊ س٣ ، س- أ ق(س) = ٣س٢  
]π ، جا٢س ، س ∊ [٠+ ب ق(س) = س  
 ، س ∊ ح ١ + ٢س- س٢ = )جـ ق(س  
.+، فأثبت أن منحنى ق(س) متزايد يف ح١- > ) ، س١ + لــو هـ (س- ٢ إذا كان ق(س) = ٢س  
، يف الفرتة [0، 2]١ < س٣ ، ٠ ≤ س  
 ≤ س ≤ 2١ ، ٢- ٣ جد فرتات التزايد والتناقص ملنحنى االقرتان ق(س) = س2  
 س٢، فحدد + ) هـ٢(س+ )٤ إذا كان ق(س) ، هـ(س) قابلني لالشتقاق عىل ح، وكان ك(س) = ق٢(س  
ق(س).- = )فرتات التزايد والتناقص ملنحنى االقرتان ك(س)، علامً بأن قَ(س) = هـ(س)، هـَ(س  
 ٤س)، فحدد فرتات التزايد - ٥ إذا كان ق(س) كثري حدود متزايداً عىل ح، وكان ك(س) = ق(س٢  
والتناقص ملنحنى االقرتان ك(س).  
٦ إذا كان ق(س) ، هـ(س) كثريي حدود معرفني يف الفرتة [0، 4]، بحيث إن منحنى ق(س) متناقص   
يف جماله، ويقع يف الربع الرابع، ومنحنى هـ(س) متزايد يف جماله، ويقع يف الربع األول، أثبت أن منحنى   
االقرتان ق(س) × هـ(س) متناقص يف الفرتة [0، 4].  
]، فجد جماالت التزايد والتناقص ملنحنى االقرتان   
π  
 جتاس ، س ∊ [٠ ، ٢+ ٧ إذا كان ق(س) = جاس  
قَ(س).

# Page 69

02.14-1399  
السنة  
٨٠٠٢  
٠٢١٤١٣٩٩١٨٩٩  
عدد البطاقات املصادرة  
)كان عدد البطاقات املصادرة عام 8002 أكرب ما يمكن. (ملاذا؟  
:تعريف القيم الصغرى والعظمى املحلية  
ليكن ق(س) اقرتاناً معرفاً عىل املجال ع، ولتكن جـ ∊ ع، عندها يكون لالقرتان ق(س):   
 قيمة عظمى حملية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فرتة مفتوحة (ف) حتوي جـ، ١  
 )بحيث أن ق(جـ) ≥ ق(س) جلميع قيم س ∊ (ف ∩ ع  
٢ قيمة صغرى حملية عند س = جـ هي ق(جـ) إذا وجدت فرتة مفتوحة (ف) حتوي جـ،   
بحيث أن ق(جـ) ≤ ق(س) جلميع قيم س ∊ (ف ∩ ع)  
٣ قيمة عظمى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≥ ق(س) جلميع قيم س ∊ ع  
٤ قيمة صغرى مطلقة عند س = جـ هي ق(جـ) إذا كانت ق(جـ) ≤ ق(س) جلميع قيم س ∊ ع  
مالحظة: تسمى كل من القيم العظمى والقيم الصغرى قيامً قصوى، سواء أكانت حملية أم مطلقة.  
فكّر وناقش  
هل كل قيمة قصوى حملية هي قيمة قصوى مطلقة، أم العكس هو الصحيح؟   
للعلمي فقط

# Page 70

66  
 : يمثل الشكل املجاور منحنى االقرتان ق(س) يف الفرتة١ مثال  
2 ، 2]، اعتمد عليه يف إجياد القيم القصوى املحلية -[  
 واملطلقة (إن وجدت). ثم جد قيمة املشتقة األوىل عند كل  
قيمة منها (إن وجدت).   
٢-  
١-  
١٢  
ق(س)  
 )2-(2 هي ق- = احلل : يوجد لالقرتان ق(س) قيمة صغرى حملية عندما س  
2 - [ حتوي العدد١- ، ٣-] = ألنه يوجد فرتة مفتوحة مثل ف  
[ ١- ، ٢-[ = ]2 ، 2-[ ∩ ٢) ≤ ق(س) ⩝ س ∊ ف-(بحيث أن ق  
٢) غري موجودة (ملاذا؟) -(َق  
2 ، 2] -[ ∊ ) ≥ ق(س) ⩝ س١-() قيمة عظمى حملية وهي مطلقة ألن ق١-(وأيضاً ق  
) = ٠ (ملاذا؟)١-(َق  
2 ، 2] -[ ∊ ق(٢) قيمة صغرى حملية وهي مطلقة ألن ق(٢) ≤ ق(س) ⩝ س  
قَ(٢) غري موجودة (ملاذا؟)   
 مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٤ ، س ∊ [٠ ، ٣[   
جد القيم القصوى املحلية لالقرتان ق(س).  
٣  
٤  
ق(س) = ٤  
 [ احلل : ق(س) متصل يف [٠ ، ٣  
قَ(س) = ٠ ⩝ س ∊ ]٠ ، ٣[   
وحسب التعريف ⩝ س ∊ [٠ ، ٣[ يوجد قيمة صغرى حملية هي ٤   
ألن ق(س) ≥ ٤ ⩝ س يف تلك الفرتة  
كام أنه حسب التعريف ⩝ س ∊ [٠ ، ٣[ يوجد قيمة عظمى حملية هي ٤   
ألن ق(س) ≤ ٤ ⩝ س يف تلك الفرتة  
:فكّر وناقش  
ما صحة القول أن القيمة العظمى املحلية لالقرتان دائامً أكرب من القيمة الصغرى املحلية له؟

# Page 71

76  
]2 ، 2-[ نشاط ٢: الشكل املجاور يمثل منحنى االقرتان هـ(س) يف الفرتة  
2 والسبب .......- = يوجد قيمة عظمى حملية عند س1  
....... ٢ عند س = 0 يوجد قيمة ....... حملية والسبب  
٢) = .......-(َ٣ هـَ(٢) = ....... ، هـَ(٠) = ....... ، هـ  
٢-  
١٢  
هـ(س)  
١-  
:تعريف  
تسمى النقطة (أ ، ق(أ)) نقطة حرجة لالقرتان ق(س) إذا كانت:   
 أ ∊ جمال ق(س)١  
.٢ قَ(أ) = ٠ أو قَ(أ) غري موجودة  
 ، ٣]1-] < س ≤ ٢ ، يف١- ، ٣- س٢  
 ، ٢ < س ≤ ٣  
 س- ٣  
 مثال ٣ : عيّ مجيع النقط احلرجة لالقرتان ق(س) =   
 < س < ٢١- ، ٢س  
 ، ٢ < س < ٣١- = ) احلل : ق(س) متصل عند س = 2 ، قَ(س  
قَ(٢) غري موجودة ، قَ(٣) غري موجودة، ..... (ملاذا؟)  
 ، 2[ 1-] ∊ نجعل قَ(س) = ٠ ومنها س = 0  
ال يوجد قيم لـِـ س ∊ ]2 ، 3[ بحيث قَ(س) = ٠ (ملاذا؟)   
 ألهنا ال تنتمي إىل جمال ق(س)1- = ال يوجد نقطة حرجة عند س  
) ، (3 ، 0) 1 ، 3) ، (2- ، ومنها النقط احلرجة هي (0  
 ، ٣]١[ ≤ س ≤ ٢ ، يف١ ، س٣  
 س] ، ٢ < س ≤ ٣+ مثال ٤ : عيّ مجيع النقط احلرجة لالقرتان ق(س) = [٣  
 احلل : نكتب ق(س) دون استخدام رمز أكرب عدد صحيح  
 ، 3] 1[ ، س  
 ≤ س ≤ ٢١ ، س٣  
٥ ، ٢ < س < ٣  
٦ ، س = ٣  
ق(س) =   
ق(س) غري متصل عند س = 2، وعند س = 3 ومنها قَ(٢) غري موجودة، قَ(٣) غري موجودة،

# Page 72

86  
)) غري موجودة ..... (ملاذا؟١(َكذلك ق  
 ، 3[ 1] ، س  
 < س < ٢١ ، ٣س٢  
قَ(س) = ٠ ، ٢ < س < ٣  
} فإن (س ، ق(س)) نقطة حرجة لالقرتان ق(س). (ملاذا؟)١{ ] [2 ، ٣ س   
 اختبار املشتقة األوىل لتعيني القيم القصوى  
إذا كان ق(س)اقرتاناً متصالً يف الفرتة [أ ، ب] وكانت (جـ ، ق(جـ)) نقطة حرجة لالقرتان ق(س)،  
 ]أ ، ب[ فإنه: جـ  
 إذا كان قَ(س) > ٠ عندما أ < س < جـ ،١  
 وكان قَ(س) < ٠ عندما جـ < س < ب  
 فإن ق(جـ) قيمة عظمى حملية لالقرتان ق(س)   
أ  
جـ  
ب  
+ + + + - - - - - - -  
)اشارة قَ(س  
غري موجودة  
غري موجودة  
سلوك ق(س)  
٢ إذا كان قَ(س) < ٠ عندما أ < س < جـ ،   
 وكان قَ(س) > ٠ عندما جـ < س < ب  
 فإن ق(جـ) قيمة صغرى حملية لالقرتان ق(س)  
أ  
جـ  
ب  
- - - - + + + + + + +  
)اشارة قَ(س  
غري موجودة  
غري موجودة  
سلوك ق(س)  
 ٥- ٥س- س٢+ مثال ٥ : جد القيم القصوى املحلية لالقرتان ق(س) = س٣  
 احلل : ق(س) اقرتان متصل عىل ح ألنه كثري حدود   
 ح ، نجعل قَ(س) = ٠ س ، ٥- ٢س+ قَ(س) = ٣س٢  
١ = ٥ أو س-  
) = ٠ ، إذن س = ٣١ - ٥)(س+ ٥ = ٠ أي أن (٣س- ٢س+ ومنها ٣س٢  
ومن إشارة قَ(س) يف الشكل املجاور تكون   
٠٤ قيمة عظمى حملية لالقرتان ق(س)  
٥ ) = ٧٢-  
ق( ٣  
٨ قيمة صغرى حملية لالقرتان ق(س)- = )١(ق  
١  
+ + + +  
+ + + +  
- - - -  
)اشارة قَ(س  
صفر  
صفر  
سلوك ق(س)  
٥-  
٣  
:فكّر وناقش  
هل يأخذ االقرتان ق(س) يف املثال السابق قيامً قصوى مطلقة؟ حددها (إن وجدت).

# Page 73

96  
 س  
 س) ٣- مثال ٦ : جد القيم القصوى املحلية لالقرتان ق(س) = (٨  
 احلل : ق(س) متصل يف ح   
2-  
 س 31  
 س) × 3- (٨+ )١-( س  
قَ(س) = ٣  
 {0} (ملاذا؟)- ح ، س) س- (٨  
 س٢  
3 ٣  
 + س  
 ٣- = )قَ(س  
 ) ٤س- (٨  
 س٢  
3 ٣  
إذن قَ(س) =   
 ٤س = ٠ ومنها س = 2 - نجعل قَ(س) = ٠ ومنها ٨  
قَ(س) غري موجودة عند س = 0 (ملاذا؟)  
ومن إشارة قَ(س) يف الشكل املجاور،  
يوجد قيمة عظمى حملية لالقرتان ق(س) عند س = 2  
 ٢  
قيمتها ق(٢) = ٦٣  
٠  
٢  
+ + + + - - - -  
+ + + +  
)اشارة قَ(س  
غري موجودة  
صفر  
سلوك ق(س)  
:فكّر وناقش  
هل يوجد قيم قصوى لالقرتان عندما س = 0 يف املثال السابق (ملاذا؟)  
١ ≠ ٣ ، س+ س٢  
١ - مثال ٧ : جد القيم القصوى املحلية لالقرتان ق(س) = س  
} 1{ - احلل : ق(س) متصل يف ح  
 ١ ≠ ٣ ، س- ٢س- س٢  
)٢١ - (س  
قَ(س) =   
 1- = وبوضع قَ(س) = ٠ ينتج أن س = 3 أو س  
ومن إشارة قَ(س) يف الشكل املجاور تكون  
٢ قيمة عظمى حملية لالقرتان ق(س)- = )١-(ق  
ق(٣) = ٦ قيمة صغرى حملية لالقرتان ق(س)١-  
١٣  
- - - -  
+ + + +  
+ + + +  
- - - - -  
)اشارة قَ(س  
صفر  
صفر  
سلوك ق(س)

# Page 74

07  
 1- = د ، وكان لالقرتان قيمة عظمى حملية عند س+ جـ س+ ب س٢+ مثال ٨ : إذا كان ق(س) = أ س٣  
، فجد قيم الثوابت أ ، ب ، جـ ، د.1- قيمتها1 = قيمتها 2 وقيمة صغرى حملية عند س  
)١( .......... د+ جـ- ب+ أ- = ) = ٢ ومنها ٢١-( احلل : ق  
 د .......... (٢)+ جـ+ ب+ = أ١- ومنها١- = )١(ق  
 جـ+ ٢ب س+قَ(س) = ٣أ س٢  
 جـ = ٠ .......... (٣)+ ٢ب- ) = ٠ ومنها ٣أ١-(َق  
 جـ = ٠ .......... (٤)+ ٢ب+ ) = ٠ ومنها ٣أ١(َق  
بحل النظام الناتج من املعادالت األربع فإن:  
1  
٩ ، د = ٢-  
٣ ، ب = ٠ ، جـ = ٤  
 أ = ٤  
:اختبار أطراف الفرتة  
إذا كان ق(س) اقرتاناً متصالً يف [أ، ب] وقابالً لالشتقاق يف ]أ، ب[ فإن:   
 ق(أ) قيمة صغرى حملية، إذا كانت قَ(س) > ٠ عندما س > أ (بداية تزايد)١  
)٢ ق(أ) قيمة عظمى حملية، إذا كانت قَ(س) < ٠ عندما س > أ (بداية تناقص  
٣ ق(ب) قيمة عظمى حملية، إذا كانت قَ(س) > ٠ عندما س < ب (هناية تزايد)  
٤ ق(ب) قيمة صغرى حملية، إذا كانت قَ(س) < ٠ عندما س < ب (هناية تناقص)  
 ≤ س ≤ ٢١- ، س٢  
٤ ، ٢ < س < ٣  
 مثال ٩ : إذا كان ق(س) =   
 جد جمموعة قيم س للنقط احلرجة لالقرتان ق(س).1  
.)2 حدّد القيم القصوى املحلية لالقرتان ق(س  
 ، 3[ 1-[ ق(س) اقرتان متصل يف١  
 : احلل  
 < س < ٢١- ، ٢س  
٠ ، ٢ < س < ٣  
 قَ(س) =

# Page 75

71  
 ، ٢[ نجعل قَ(س) = ٠١-] أوالً: عندما س  
 فيكون ٢س = ٠ ومنها عند س = ٠ يوجد نقطة حرجة   
 ثانياً: عندما ٢ < س < ٣ تكون قَ(س) = ٠  
 ]٢ ، ٣[ يوجد نقطة حرجة وهذا يعني أنه عند كل س  
) غري موجودة١-(َ قَ(٢) غري موجودة، ق  
، ]٢ ، ٣[}١- ، فتكون جمموعة قيم س للنقط احلرجة {٠  
٢ من إشارة قَ(س) يف الشكل املجاور يكون  
٠١-٢  
٣  
+ + + +صفر- - - -  
)اشارة قَ(س  
صفر  
غري موجودة  
غري موجودة  
سلوك ق(س)  
 يوجد قيمة عظمى حملية ألهنا بداية تناقص١- = عند س  
 عند س = ٠ يوجد قيمة صغرى حملية  
 عند س = ٢ يوجد قيمة عظمى حملية   
 ]٢ ، ٣[ يوجد قيمة عظمى حملية وصغرى حملية يف آن واحد. عند كل س  
 ]٠ ، ٥] ، فحدد القيم املحلية التي يكون عندها س ، س  
 ٢لــو هـ - : إذا كان ق(س) = س٢١ مثال ٠  
لالقرتان ق(س) قيم قصوى حملية.   
٢  
 س- احلل : ق(س) متصل يف الفرتة ]٠ ، ٥] ، قَ(س) = ٢س  
٢ = ٠   
 س- نجعل قَ(س) = ٠ ومنها ٢س  
 (ملاذا؟)١ = وتكون س1 = أي أن س٢  
قَ(٥) غري موجودة، فتكون جمموعة قيم س التي يكون  
 ، ٥}١{ عندها نقط حرجة هي  
من إشارة قَ(س) يف الشكل املجاور  
١٠  
٥  
+ + + + + + + +  
- - - -  
)اشارة قَ(س  
صفر  
غري موجودة  
سلوك ق(س)  
) قيمة صغرى حملية لالقرتان ق(س١ = )١(ق  
 ٢لــو هـ ٥ قيمة عظمى حملية لالقرتان ق(س) (هناية تزايد)- ق(٥) = ٥٢

# Page 76

27  
 ]1 ، 1-[ ، س  
١ < ≤ س١- ، س٣  
١ = ، س١  
٢  
: إذا كان ق(س) = 11 مثال  
جد القيم القصوى املحلية لالقرتان ق(س)  
[ 1 ، 1-[ احلل : ق(س) متصل يف  
[1 ، 1-] قَ(س) = ٣س٢ ، س  
نجعل قَ(س) = ٠ ومنها س = 0   
٠١-  
١  
+ + + + +  
+ + + + +  
)اشارة قَ(س  
صفر  
سلوك ق(س)  
ومن إشارة قَ(س) يف الشكل املجاور   
١- = )١-( يوجد قيمة صغرى حملية، قيمتها ق1- = عند س  
 فإن ق(س) منفصل، فال يمكن احلكم عليها من خالل إشارة املشتقة األوىل؛ 1 = أما عند س  
 ١  
) = ٢١( ق(س) فإن ق-١ ← س < )١( ق(س) وبام أن ق-١ ← س ) مع١(لذا نلجأ إىل مقارنة ق  
قيمة صغرى حملية.   
 :نظرية القيم القصوى املطلقة  
إذا كان ق(س) اقرتاناً متصالً يف [أ، ب]   
فإن ق(س) يتخذ قيمه القصوى املطلقة يف الفرتة [أ، ب].

# Page 77

37  
 س٢- : جد أكرب قيمة وأصغر قيمة لالقرتان ق(س) = س ٤١ مثال ٢  
2 ، 2]-[ س٢ ≥ ٠ ، نستنتج أن جمال ق(س) هو- احلل : بحل املتباينة ٤  
٢ ، ٢[-] ، س  
 ٢س٢- ٤  
 س٢- ٤  
 = )2 ، 2] ، قَ(س-[ ق(س) متصل عىل  
٢ ، ٢[ -] 2 = وعندما قَ(س) = 0 يكون س  
٢ ، ٢[ -] 2- = س  
2- = ) 2-(2) = 0 ، ق-(ويكون ق  
 2 ) = 2 ، ق(٢) = ٠(ق  
2- = ) 2-(أصغر قيمة لالقرتان هي ق  
 2 ) = 2 (وأكرب قيمة لالقرتان هي ق  
 2 ) = 2(أي أن القيمة العظمى املطلقة هي ق  
2- = ) 2-(والصغرى املطلقة هي ق  
:أتعلم  
إذا كان ق(س) متصالً عىل فرتة يف جماله، وكان له نقطة قيمة قصوى وحيدة فهي مطلقة يف   
تلك الفرتة.

# Page 78

74  
 ٣- تمارين ٢  
 جد النقط احلرجة لالقرتانات اآلتية:١  
]٢ ، ٣-[ ، س١  
 ٣+ س٢- س٣١  
أ ق(س) = ٣  
٨ ، ٨]-[ ، س  
2  
ب ق(س) = س 3  
 و) جد القيم العظمى والصغرى املحلية لالقرتان ق(س) (إن وجدت)- ٢ يف التامرين من (أ  
 س٢- 4 = )ب ق(س  
 ح ٤٢س ، س+ ٩س٢- أ ق(س) = س٣  
١ ≠ س١ - س٣  
١ - د ق(س) = س  
 ح ، س  
 ٣)هـس- جـ ق(س) = (س٢  
 ح ، س  
 ٢)٢- (س-و ق(س) = هـ  
] π ، [٠ جا٢س ، س- هـ ق(س) = جتا٢س  
٣ جد أكرب وأصغر قيمة (إن وجدت) لكل من االقرتانات اآلتية:  
 [٠ ، ٣] س٣ ، ٠ ≤ س ≤ ٢ ، س  
 ٤ ، ٢ < س ≤ ٣+ أ ق(س) = س٢  
 [٠ ، ٣] هـ س ، س-   
ب ق(س) = هـس  
]   
π ٣  
 ، ٢π  
 [ ٢ جتا٣س ، س١  
 ٣- جـ ق(س) = جتاس  
، 1 = ح اقرتان له قيمة عظمى حملية عند س ، أ ،ب١ + ٩س+ ب س٢+ ٤ إذا كان ق(س) = أ س٣  
وقيمة صغرى حملية عند س = 3 ما قيمة كل من الثابتني أ ، ب؟  
 ٩٢ سالب دائامً.- س٤- ٥ باستخدام القيم القصوى أثبت أن املقدار ٤س٣

# Page 79

57  
)Concavity and Points of Inflection( ٤ التقعّر و نقط االنعطاف- ٢  
: تزخر فلسطني باألماكن الرتفيهية وحتتوي بعض هذه األماكن ألعاباً مرعبة، مثل القطار املوجود ١ نشاط  
يف الصورة املجاورة. هل سبق وركبت مثل هذا القطار؟  
حدد مستعيناً بالرموز املدرجة عىل الصورة   
املناطق التي يشعر فيها راكب القطار بالرعب   
واخلطر، واملناطق التي تكون أكثر أماناً. فسّ   
إجابتك.  
) نشاط ٢: الشكل املجاور يمثل منحنى االقرتان ق(س  
 ما إشارة ميل املامس ملنحنى االقرتان ق(س) عند كل 1  
من جـ ، د؟ (الحظ أن ممايس االقرتان ق(س) عند  
 جـ ، د يقعان فوق منحناه)  
٢ ما إشارة ميل املامس ملنحنى االقرتان ق(س) عند   
هـ ، و؟ (الحظ أن ممايس االقرتان عند هـ ، و   
يقعان حتت منحناه).  
جـ  
د  
ق(س)  
هـ  
و  
:تعريف  
يقال ملنحنى االقرتان ق(س) أنه مقعّر لألعىل يف الفرتة [أ، ب] إذا كان واقعاً فوق مجيع   
مماساته يف الفرتة ] أ، ب[ وأنه مقعّر لألسفل يف الفرتة [أ، ب] إذا كان واقعاً حتت مجيع   
مماساته يف الفرتة ] أ، ب[.  
:\*اختبار التقعّر باستخدام املشتقة الثانية  
إذا كان ق(س) اقرتاناً متصالً يف الفرتة ]أ ، ب[، وكان قَ (س) معرفاً يف الفرتة ]أ ،ب[ فإن منحنى   
ق(س) يكون:  
 ] أ،ب[ . مقعّراً لألعىل يف الفرتة ]أ ، ب[ إذا كانت قَ(س) > 0 جلميع قيم س١  
. [ ] أ،ب ٢ مقعّراً لألسفل يف الفرتة ]أ ، ب[ إذا كانت قَ(س) < 0 جلميع قيم س  
 ] أ، ب[. ٣ غري مقعّر لألعىل أو لألسفل يف الفرتة ]أ ، ب[ إذا كانت قَ(س) = ٠ جلميع قيم س  
للعلمي فقط  
\* سيتم التعامل مع الفرتات املفنوحة.

# Page 80

67  
[٢ ، ٥-] س٣ ، س- : جد جماالت التقعّر لألعىل ولألسفل ملنحنى االقرتان ق(س) = ٣س٢١ مثال  
٢ ، ٥[ ألنه كثري حدود-] احلل : ق(س) متصل يف  
 ٦س- ٣س٢ ، قَ(س) = ٦- قَ(س) = ٦س  
 1 = ٦س = 0 ، أي س- بوضع قَ(س) = ٠ تكون ٦  
ومن إشارة قَ(س) يف الشكل املجاور   
١٢-٥  
- - - - - - -  
+ + + + +  
)اشارة قََ(س  
صفر  
غري موجودة  
غري موجودة  
سلوك ق(س)  
 يكون منحنى ق(س) مقعّراً لألعىل  
 ، 5[ 1] [ ، ومقعّراً لألسفل يف الفرتة1 ،2-] يف الفرتة  
 ، س ≠ ٠١ + س٢  
س  
 مثال ٢ : جد جماالت التقعّر لألعىل ولألسفل ملنحنى االقرتان ق(س) =   
 احلل : ق(س) متصل عىل جماله   
١  
 س٢- ١ = ) ومنها قَ(س١  
 س+ ق(س) = س  
٢ ≠ ٠ ،   
قَ(س) = س٣  
ومن إشارة قَ(س) يف الشكل املجاور يكون:   
∞ ، 0[ ،-] منحنى ق(س) مقعّراً لألسفل يف الفرتة  
ومقعّراً لألعىل يف الفرتة ]0 ، ∞[ ..... (ملاذا؟)  
٠  
 + + + + +  
- - - - -  
)اشارة قََ(س  
سلوك ق(س)  
.[ مقعر لألسفلπ  
 ]٠ ، ٣ مثال ٣ : أثبت أن منحنى االقرتان ق(س) = لــو هـ جتاس ، س  
[ (ملاذا؟)π  
 احلل : ق(س) متصل يف ]٠ ، ٣  
ظاس- = جاس-  
قَ(س) = جتاس  
قا٢س- = )قَ(س  
[π  
 ]٠ ، ٣ س ، وبام أن قَ(س) ≠ ٠ ، قَ(س) < ٠  
[π  
فإن ق(س) مقعّر لألسفل يف ]٠ ، ٣  
٠  
- - - - -  
)اشارة قََ(س  
غري موجودة  
سلوك ق(س)  
π  
٣

# Page 81

77  
:تعريف  
 تسمى النقطة (جـ ،ق(جـ)) نقطة انعطاف لالقرتان ق(س) إذا كان:١  
 ق(س) اقرتاناً متصالً عند س = جـ  
 . يغيَّ َ االقرتان اجتاه تقعّر منحناه عند س = جـ من األعىل إىل األسفل، أو العكس  
 .2 زاوية االنعطاف: هي زاوية ميل املامس املرسوم ملنحنى ق(س) عند نقطة االنعطاف  
3 إذا كانت (جـ ، ق(جـ)) نقطة انعطاف وكان قَ(جـ) = ٠ فتسمى النقطة (جـ ، ق(جـ))   
نقطة انعطاف أفقي.  
[π ، ]٠ مثال ٤ : جد نقاط االنعطاف (إن وجدت) لالقرتان ق(س) = ٣جاس جتاس ، س  
[π ، ]٠ ٣جتا٢س = ٣جتا٢س ، س+ ٣جا٢س- = ) احلل : قَ(س  
٦جا٢س - = )قَ(س  
π  
٦جا٢س = ٠ ومنها س = ٢- نجعل قَ(س) = ٠ فيكون  
 ، ويغيّ من π  
وبام أن ق(س) متصل عند س = ٢  
اجتاه تقعّره عندها (كام تشري إشارة قَ(س) يف الشكل املجاور)  
 ، ٠) نقطة انعطاف π  
)) = ( ٢π  
 ، ق( ٢π  
فإن النقطة ( ٢  
 ، ٠) نقطة انعطاف أفقي؟ فسّ إجابتك.π  
هل النقطة ( ٢  
٠π  
+ + + + +  
- - - - -  
)اشارة قََ(س  
صفر  
غري موجودة  
غري موجودة  
سلوك ق(س)  
π  
٢  
٣ ، ٣[-] س٢ نقطة انعطاف يف الفرتة- ٩ = ) مثال ٥ : بيّ أنه ال يوجد لالقرتان ق(س  
٣ ، ٣[-] س٢ متصل يف الفرتة- ٩ = ) احلل : ق(س  
٣ ، ٣[-] ، س  
س-  
 س٢- ٩  
 = )قَ(س  
٣ ، ٣[ ولكن قَ(س) < صفر دائامً-] س ، ≠ ٠  
٩-  
 س٢)٣- (٩  
 = )قَ(س  
٣ ، ٣[-] ومنها يكون منحنى ق(س) مقعّراً لألسفل يف  
٣ ، ٣[-] وبام أن ق(س) ال يغري من اجتاه تقعره، فال يوجد نقاط انعطاف لالقرتان ق(س) يف

# Page 82

87  
 ح ، فجد فرتات التقعّر لألعىل ولألسفل لالقرتان ٢س٣ ، س- مثال 6 : إذا كان ق(س) = س٤  
ق(س)، ثم جد نقط وزوايا االنعطاف (إن وجدت).  
 احلل : ق(س) متصل ألنه كثري حدود.  
س١ ٢- س٢١ ٦س٢ ، قَ(س) = ٢- قَ(س) = ٤س٣  
 ، س = ٠١ = بوضع قَ(س) = ٠ ينتج أن س  
 ومن إشارة قَ(س) يف الشكل املجاور يكون:   
١٠  
- - - - -   
+ + + + +  
+ + + + +  
)اشارة قََ(س  
صفر  
صفر  
سلوك ق(س) ، ]∞ ، 0-] ق(س) مقعراً لألعىل يف الفرتة  
 ، ∞[١[ وكذلك يف الفرتة  
]١ ، ويكون مقعراً لألسفل يف الفرتة [٠  
) مها نقطتا انعطاف ..... (ملاذا؟)1- ، 1( ، )النقطتان (0 ، 0  
إلجياد زوايا االنعطاف  
 زاوية االنعطاف عند النقطة (0 ، 0)١ نفرض هـ  
 = ٠١ = قَ(٠) = ٠ ومنها هـ١ ظا هـ  
)1- ، 1( نفرض هـ ٢ زاوية االنعطاف عند النقطة  
٢)-(١-٢ ومنها هـ ٢ = ظا- = )١(َظا هـ ٢ = ق  
س٣ ، ٠ < س ≤ ٢  
 مثال ٧ : عيّ جماالت التقعّر لألعىل ولألسفل ملنحنى االقرتان ق(س) = س٢ ، ٢ < س < ٤  
 احلل : ق(س) غري متصل عند س = 2 ومنها قَ(٢) غري موجودة  
٦س ، ٠ < س < ٢  
2 ، ٢ < س < ٤  
٣س٢ ، ٠ < س < ٢ ، قَ(س) =   
٢س ، ٢ < س < ٤  
قَ(س) =   
 قَ(س) = ٠ ، عندما 0< س < 2 ١  
 ) فيكون 6س = 0 ومنها س = 0 ترفض (ملاذا؟  
٢ عندما 2 < س < 4 فإن قَ(س) ≠ ٠ (ملاذا؟)  
ومن إشارة قَ(س) يف الشكل املجاور يكون  
منحنى ق(س) مقعّراً لألعىل يف ]0 ، 2[ كذلك يف ]2 ، 4[  
٤  
٢  
٠  
+ + + + +  
+ + + + +  
)اشارة قََ(س  
غري موجودة  
غري موجودة  
غري موجودة  
سلوك ق(س)

# Page 83

97  
) مثال 8 : الشكل املجاور يمثل منحنى االقرتان قَ(س  
معتمداً عليه، جد كالً مما يأيت:  
)قَ(س  
٣١  
١-٣-  
) فرتات التزايد والتناقص لالقرتان ق(س1  
)٢ القيم القصوى املحلية لالقرتان ق(س  
٣ جماالت التقعّر لألعىل ولألسفل ملنحنى االقرتان ق(س).  
٤ قيم س التي يكون عندها نقاط االنعطاف (إن وجدت) .  
 احلل : نمثل إشارة قَ(س) كام يف الشكل املجاور:   
٣-٠  
٣  
+ + + +  
+ + + +  
- - - -  
- - - -  
)اشارة قَ(س  
صفر  
صفر  
صفر  
سلوك ق(س)  
 يكون منحنى ق(س)١  
[∞ ، 3 ، 0[ ويف ]3-] متزايداً يف  
3[ ويف ]0 ، 3]- ، ∞-] ومتناقصاً يف  
3) قيمة صغرى حملية-(٢ ق  
 ق(٠) قيمة عظمى حملية  
 ق(٣) قيمة صغرى حملية.   
 ونمثل إشارة قَ(س) كام يف الشكل املجاور:١  
١-  
- - - - -   
+ + + + +  
+ + + + +  
)اشارة قََ(س  
صفر  
صفر  
سلوك ق(س)  
 ٣ يكون منحنى ق(س) مقعّراً لألعىل  
 ، ∞[1] [ وكذلك يف1- ، ∞-] يف  
[ 1 ، 1-] ومقعّراً لألسفل يف  
 ..... (ملاذا؟)1 = ، س1- = ٤ نقاط االنعطاف تكون عند س  
:مالحظة  
)) نقطة انعطاف لالقرتان ق(س)، فإن ١إذا كان ق(س) كثري حدود وكانت (س ، ق(س  
) = صفر.١قَ(س

# Page 84

08  
 نشاط 2: إذا كان ق(س) كثري حدود من الدرجة الثالثة، وكان منحناه يمر بالنقطة (0 ، 5) وله نقطة  
)، جد قاعدة االقرتان ق(س)1 ، انعطاف أفقي عند النقطة (2  
 ح ، أ ≠ ٠ د ، حيث أ ، ب ، جـ ، د+ جـ س+ ب س٢+ نفرض أن ق(س) = أ س٣  
بام أن ق(٠) = ٥ فإن قيمة الثابت د هي ........  
 ، قَ(٢) = ٠ ، قَ(٢) = ........١ = )) نقطة انعطاف أفقي فإن ق(٢1 ، وبام أن (2  
) 1( ................ ١ = د+ ٢جـ+ ٤ب+ ومنها ٨أ١ = )ق(٢  
قَ(س) = ................  
 جـ = ٠ ................ (2)+ ٤ب+ أ١قَ(٢) = ٠ ومنها ٢  
قَ(س) = ..................  
قَ(٢) = .......... ومنها ................ (3)  
وبحل املعادالت الناجتة يكون االقرتان ق(س) = ........  
Second Derivative Test اختبار املشتقة الثانية يف تعيني القيم القصوى  
 :نظرية  
إذا كان ق(س) اقرتاناً قابالً لالشتقاق يف فرتة مفتوحة حتوي جـ وكان قَ(جـ) = ٠ فإن:  
 ق(جـ) قيمة عظمى حملية، إذا كانت قَ(جـ) < 0١  
 ٢ ق(جـ) قيمة صغرى حملية، إذا كانت قَ(جـ) > 0  
٣ يفشل تطبيق االختبار إذا كانت قَ(جـ) = 0 ، أو قَ(جـ) غري موجودة.  
 ٦س٢، + ٨س٣- مثال ٩ : جد القيم العظمى والصغرى املحلية لالقرتان ق(س) = ٣س٤  
باستخدام اختبار املشتقة الثانية (إن أمكن).  
 احلل : ق(س) متصل وقابل لالشتقاق يف ح ألنه كثري حدود  
س١ ٢+ ٤٢س٢- س٣١ قَ(س) = ٢  
س = ٠١ ٢+ ٤٢س٢- س٣١قَ(س) = ٠ ومنها ٢  
١ = )٢ = ٠ ، ومنها إمّا س = ٠ أو س١ - س(س١) = ٢١ + ٢س- س(س٢١٢

# Page 85

81  
 ١ ٢+ ٨٤س- قَ(س) = ٦٣س٢  
 > ٠ إذن ق(٠) = ٠ قيمة صغرى حملية.١قَ(٠) = ٢  
) باستخدام اختبار املشتقة الثانية ١() = ٠ فال نستطيع حتديد نوع القيمة القصوى ق١(َبام أن ق  
لذا نلجأ إىل اختبار املشتقة األوىل.  
من الشكل املجاور ال يوجد قيمة قصوى   
 ..... (ملاذا؟)1 = حملية عند س  
٠١  
+ + + + +  
+ + + + +  
- - - -  
)اشارة قَ(س  
صفر  
صفر  
سلوك ق(س)  
 ٤ - تمارين 2  
 عيّ فرتات التقعّر لألعىل ولألسفل ملنحنى االقرتان ق(س) يف احلاالت اآلتية:١  
 ح ٢) ، س+ ٤)(س- ٣س- أ قَ(س) = (س٢  
[  
π  
 ، ٢π-  
 ] ٢ س ، س- ب قَ(س) = جاس  
 ]٠ ، ٤[ س ، س+ س٤- جـ ق(س) = ٤س٣  
 ، س > ٣  
٣  
 ٣)٢- د ق(س) = (س  
[ π ، ]٠ س ، س  
هـ ق(س) = جا ٢  
[π ]٠ ، ٢ و ق(س) = هـس جتاس ، س  
 < س ≤ ٣١ ، ]١ - س١  
[ ٣  
 س٣ ، ٣ < س < ٥  
ز ق(س) =   
٢ حدد نقاط االنعطاف ملنحنى االقرتان ق(س) يف احلاالت اآلتية (إن وجدت):  
 س + أ ق(س) = س٣  
[ π ]٠ ، ٢ ب ق(س) = جتاس ، س  
 س - ٥  
جـ ق(س) = ٣

# Page 86

28  
٣ جد القيم القصوى املحلية لكل من االقرتانات اآلتية، وحدد نوع كل منها باستخدام اختبار املشتقة   
الثانية (إن أمكن تطبيقها)، ويف حالة عدم إمكانية تطبيقها استخدم اختبار املشتقة األوىل:  
 ٦س٢ + أ ق(س) = س٣  
 ٦|+ ب ق(س) = |س  
 ، فجد قيمة/ قيم الثابت أ.1- = س٣ نقطة انعطاف عند س+ ٤ إذا كان لالقرتان ق(س) = أ س٢  
٥ الشكل املجاور يمثل منحنى االقرتان قَ(س)  
إذا علمت أن قَ(٠) = قَ(٦) = ٠ ، جد كالً مما يأيت:   
أ فرتات التقعّر، ونقاط االنعطاف ملنحنى االقرتان ق(س)  
ب القيم القصوى املحلية لالقرتان ق(س)  
جـ فرتات التزايد والتناقص ملنحنى االقرتان ق(س)   
)قََ(س  
٣  
٤١2١-  
 ، 5) وله نقطة انعطاف عند1( ٦ إذا كان ق(س) اقرتان كثري حدود من الدرجة الثالثة، يمر منحناه بالنقطة  
 ص = ٧ ، جد قاعدة االقرتان ق(س).+ س = 2 بحيث إن معادلة املامس عند نقطة االنعطاف هي: 3س  
 ، 2) ،1( ك(س) نقطة انعطاف أفقي هي+ ٤س٣- ٧ إذا كان لالقرتان كثري احلدود ق(س) = س٤  
).١(َوكان ع(س) = ك٢(س)، احسب ع  
3 ، 2] وحيقق الرشوط اآلتية: -[ ٨ إذا كان ق(س) اقرتاناً متصالً يف الفرتة  
٢) = ٠ ، قَ(س) > ٠ عندما س > ٠ ، قَ(س) < ٠ عندما س < ٠-(َ) = ٠ ، ق١(َق(٠) = ٠ ، ق  
اعتمد عىل هذه املعلومات لإلجابة عن األسئلة اآلتية:   
أ حدد فرتات التزايد والتناقص ملنحنى االقرتان ق(س).  
ب ما قيمة/ قيم س التي يكون لالقرتان ق(س) عندها قيم قصوى؟ وما نوع كل منها؟  
جـ ما قيمة/ قيم س التي يكون لالقرتان ق(س) عندها نقط انعطاف؟

# Page 87

38  
)Applications of Extrema( ٥ تطبيقات عملية عىل القيم القصوى- 2  
: أمحد مزارع فلسطيني يسكن مدينة يافا، ويملك أراضٍ واسعةٍ من حقول الربتقال، أراد يف أحد 1 نشاط  
األيام أن خيترب ذكاء أبنائه الثالثة، فاشرتى سياجاً طويالً وقسّ مَه إىل ثالثة أجزاء متساوية يف   
الطول، وأعطى كالَ منهم جزءاً من السياج، وطلب أن حييط كل واحد منهم جزءاً من األرض   
بالسياج الذي أخذه؛ لتصبح األرض التي أحاطها ملكاً له. رسَّ األبناء هبدية والدهم، وأراد كل   
منهم أن حيصل عىل أكرب مساحة ممكنة فاختار أحدهم جزءاً مربعاً من األرض، واختار الثاين   
جزءاً مستطيالً، أما الثالث فقد اختار جزءاً عىل شكل مثلث متساوي الساقني.   
لو كنت أحد األبناء، ما الشكل الذي ستختاره ؟ (وملاذا؟)  
حصة األول  
 حصة  
الثالث  
حصة الثاين  
 نشاط ٢: قررت إحدى بلديات الوطن إنشاء مُتَنَزّ هٍ عىل شكل مستطيل، باسم الشهيد الراحل يارس  
عرفات، أمام مبنى املقاطعة الذي دمره االحتالل. وقد الحظ مهندسو البلدية وجود شارعني   
متقاطعني وقرروا أن يكون رأسان من رؤوس املتنزه عىل الشارعني، والرأسان اآلخران عىل   
شارع الشهداء (انظر الشكل) فإذا كانت معادلة الشارع األول (شارع األمة) عىل اخلريطة هي   
 س - ص = هـ(س) = 02س ومعادلة الشارع الثاين (شارع الكرامة) هي ص = ق(س) = 24  
وشارع الشهداء أفقي معادلته ص = 0، فلمعرفة مساحة أكرب متنزه يمكن إنشاؤه نتبع ما ييل:   
نفرض أن طول املتنزه (س)   
فيكون عرضه هو هـ(ع) = ٠٢ع  
وتكون مساحة املتنزه = الطول × العرض  
أي أن م = س × ٠٢ع = ٠٢س ع (ملاذا؟)  
 ع) (ملاذا؟) + لكن هـ(ع) = ق(س  
 ع (ملاذا؟) - س- ومنها فإن ٠٢ع = ٢٤  
الكرامة  
األمة  
الشهداء  
املتنزه  
للعلمي فقط

# Page 88

84  
) س- ٠٢ س (٢٤  
٢١ = ) أي أن ع = .......... وتصبح املساحة م(س  
ولتحديد أكرب قيمة للمساحة فإننا نستخدم مفهوم القيم القصوى  
مَ = .............. ومنها س = ......  
وللتأكد من أن قيمة س السابقة جتعل املساحة أكرب ما يمكن نجد مَ ونكمل احلل.......  
إذن مساحة أكرب متنزه = ...............  
 : عددان موجبان جمموعهام 06، جد العددين إذا كان حاصل رضهبام أكرب ما يمكن.1 مثال  
 احلل : نفرض أن العددين مها س ، ص وأن حاصل رضهبام هو م فيكون   
م = س × ص   
 س- ص = ٠٦ ومنه ص = ٠٦+ لكن س  
 س٢- س) = ٠٦س- م = س × ص = س × (٠٦  
 ٢س - مَ = ٠٦  
 ٢س = ٠ أي س = ٠٣ - نجعل مَ = ٠ ومنها ٠٦  
٢ < 0- =   
 س = ٠٣ َ٢ ومنها م- = َللتحقق م  
(عند س = 03 يكون حاصل الرضب أكرب ما يمكن).  
فيكون العددان مها 03 ، 03  
 مثال ٢ : يراد صنع صندوق هدايا قاعدته مربعة الشكل من الكرتون   
املقوى حجمه 8 دسم3، جد أبعاده بحيث تكون تكلفة   
تصنيعه أقل ما يمكن. (سعر املرت ثابت)  
ص  
س  
س  
 احلل : نفرض طول ضلع قاعدة الصندوق (س دسم) وارتفاعه(ص دسم)   
احلجم = الطول × العرض × االرتفاع  
 ح = س2ص ومنها س2ص = ٨  
 مساحة القاعدتني + املساحة الكلية للصندوق = مساحة اجلوانب األربعة

# Page 89

58  
٨  
 ٢س٢ ، لكن ص = س٢+ ت = ٤س × ص  
 ٢س٢+ ٢٣  
 ٢س٢ = س+ ٨  
ومنها ت = ٤س × س٢  
 ٤س وبوضع تَ = ٠+ ٢٣-  
وباالشتقاق ينتج أن: تَ = س٢  
٢٣ = ٤س ، أي أن س٣ = ٨ ، ومنها س = ٢دسم   
س٢  
 ٤ + ٤٦  
تَ = س٣  
 > 0 (صغرى حملية وحيدة فهي صغرى مطلقة)1 4 = 2+ ٤٦  
 = 8  
 س = 2 َومنها ت  
التكلفة تكون أقل ما يمكن عندما تكون قاعدة الصندوق مربعةً طول ضلعها 2دسم، وارتفاع   
الصندوق 2 دسم.  
 س٢ = ٨ - مثال ٣ : جد أقرص مسافة بني النقطة ك (2 ، 0) ومنحنى العالقة ص٢  
 احلل : نفرض النقطة ل(س ، ص) عىل منحنى العالقة   
)ل(س ، ص  
ك(٢ ، ٠)  
ف  
ونفرض ف = املسافة بني ك ، ل  
 ص٢+ ٢)٢- (س = حسب قانون املسافة بني نقطتني ف  
١ ٢+ ٤س- ٢س٢ = ٨ ، فتكون ف+ لكن ص٢ = س٢  
 ٤- ٤س  
١ ٢+ ٤س- ٢ ٢س٢  
فَ =   
 ..... (ملاذا؟)١ = بوضع فَ = ٠ ينتج أن س  
ومن إشارة فَ يف الشكل املجاور  
١  
صفر  
- - -  
)اشارة فَ(س  
سلوك ف(س)  
+ + +  
 ٣± = ، ص١ = تكون املسافة أقرص ما يمكن عندما س  
وألن لالقرتان قيمة قصوى وحيدة فهي صغرى مطلقة  
 وحدة.١ ٠ = وتكون أقرص مسافة هي ف

# Page 90

68  
 مثال ٤ : سلك طوله 65سم قسم إىل جزأين، ثني أحدمها عىل شكل مربع، واجلزء اآلخر عىل شكل  
دائرة، ما أبعاد كل من املربع والدائرة ليكون جمموع مساحتيهام أقل ما يمكن؟  
 احلل : نفرض طول اجلزء الذي صنع منه دائرة (س)   
 س - فيكون طول اجلزء الثاين 65  
س  
π ومنها نق = ٢π س = ٢نق  
 س١  
 ٤- ١ س = ٤ص ومنها ص = ٤- كام أن ٦٥  
 ص٢+ π جمموع مساحتيهام م = نق٢  
س  
 س- ٦٥  
املحيط = ٤ص  
ص  
π املحيط = ٢نق  
نق  
 س)٢١  
 ٤- ١ (٤+   
س٢  
π م = ٤  
 ٧- س١  
 ٨+ س  
π ) = ٢  
١  
٤  
-() س١  
 ٤- ١ ٢(٤+ ٢س  
π ومنها مَ = ٤  
 π ٦٥  
π + ٧ = ٠ وبعد التبسيط ينتج أن س = ٤- س١  
 ٨+ س  
π نضع مَ = ٠ ومنها ٢  
٦٥  
π + = ٤π ١٤  
π + ٤-١) = ٤  
π ٦٥  
π + (٤١  
 ٤- ١٨٢ ، ص = ٤  
π + ومنها نق = ٤  
 > 0 (يوجد قيمة صغرى حملية، وبام أهنا وحيدة فهي صغرى مطلقة)١  
 ٨+ ١  
π مَ = ٢  
 سم21 مثال ٥ : أوجد أقل حميط ممكن ملستطيل مساحته 6  
 احلل : نفرض طول املستطيل (س سم) وعرضه (ص سم)  
ص  
س١٦  
 ومنها ص = س١مساحة املستطيل م = س ص = ٦  
٢٣  
 س+ ٢ص ومنها يكون ح = ٢س+ حميط املستطيل ح = ٢س  
٢٣ = ٠ ومنها س = ٤   
 س٢- ٢٣ وعندما حَ = ٠ يكون ٢  
 س٢- حَ = ٢  
 املحيط أقل ما يمكن ) (موجب١ = )٤٦ ومنها حَ(٤  
حَ = س٣  
 سم 1فيكون أقل حميط للمستطيل هو 6

# Page 91

78  
 ٥- تمارين ٢  
 يريد رجل عمل حديقة مستطيلة الشكل يف أرضه، وذلك بإحاطتها بسياج، فإذا كان لديه 08 مرتاً من ١  
األسالك، فام مساحة أكرب حديقة يمكن للرجل إحاطتها؟  
 سم3 فإذا علمت أن سعر كل π ١٢ مقلمة عىل شكل أسطوانة دائرية قائمة مفتوحة من أعىل سعتها ٢٩  
سم2 من البالستيك املستخدم 1 سم2 من البالستيك املستخدم لصنع القاعدة، يعادل ثالثة أمثال سعر1  
.يف صنع اجلوانب، جد أبعاد املقلمة ذات األقل تكلفة  
٣ طريق منحنٍ معادلته يف املستوى الديكاريت هي  
 ، النقطة م(3 ، 0) متثل موقع مستشفى، ١ - ٢س = ) ص = ق(س  
يراد شق شارع فرعي مستقيم من النقطة (و) إىل موقع املستشفى(م)،   
عيّ إحداثيات النقطة (و) ليكون طول الشارع (و م) أقل ما يمكن .  
 (انظر الشكل املجاور).)م (٣ ، ٠  
و  
٤ جسم يسري يف خط مستقيم بحيث إن بعده ف باألمتار بعد ن ثانية يعطى بالعالقة  
 ن فإذا كانت الرسعة املتوسطة للجسم يف الفرتة الزمنية [0 ، 2]π  
 ب جا ٤+ نπ  
 ف = أ جتا ٤  
ث. احسب الثابتني أ ، ب.1 = م/ث، وكانت رسعة اجلسم أقل ما يمكن عند ن1هي 0  
 1٥ يف الساعة الثانية عرشة ظهراً كانت الباخرة ب عىل بعد 03كم شامل الباخرة أ وتسري غرباً برسعة 0  
كم /الساعة، فإذا كانت أ تسري شامالً برسعة 02كم يف الساعة، فمتى تكون املسافة بني الباخرتني أقل   
ما يمكن؟  
سم ، ونصف 1٦ جد حجم أكرب أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل خمروط دائري قائم ارتفاعه 2  
قطر قاعدته 4سم.  
٧ شبه منحرف فيه 3 أضالع متساوية يف الطول وطول كل منها   
6 سم، جد أكرب مساحة ممكنة لشبه املنحرف.   
٦ سم  
٦ سم  
٦ سم  
 سم، م نقطة عىل الضلع أ ب بحيث1٨ أ ب جـ د مستطيل عرضه أب = 8 سم وطوله ب جـ = 0  
3 س سم، جد قيمة س بحيث تكون مساحة   
 أ م = س سم ، ن نقطة عىل الضلع ب جـ بحيث ن جـ = 2  
املثلث م ن جـ أكرب ما يمكن.

# Page 92

88  
تمارين عامة  
): 14-1( ضع دائرة حول رمز اإلجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات١  
 ، فام جمموعة قيم س التي يكون عندها١ ≤ س ، ٠ ≤ س- س٢  
 < س ≤ ٣١ ،   
١ - إذا كان ق(س) = س١  
 لالقرتان ق(س) نقطة حرجة يف الفرتة [0 ، 3]؟  
 ، 3}1 ، ١  
 ، 3} د) {0 ، ٢١  
، 3} ب) {0 ، 3} ج) {0 ، ٢1 ، أ) {0  
٢ ، ٢]، فام قيمة س التي يكون لالقرتان ق(س) عندها -[ س٢ ، س- ٤ = )٢ ليكن ق(س  
قيمة عظمى مطلقة؟  
 د) 21 )2 ب) 0 ج- )أ  
 ٢)٤ فام الفرتة التي يكون فيها ق(س) متناقصاً؟ - )٣ (س١ - ٣ إذا كان قَ(س) = (س٢  
 ، ٢] د) [٢ ، ∞[١[ )] ج١ ، ١-[ )] ب١- ، ∞-] )أ  
]، فام القيمة الصغرى املطلقة لالقرتان ١ ، ٣-[ ٣س معرفاً يف الفرتة- ٤ إذا كان ق(س) = س٣  
ق(س)؟  
٢-   
)٣ د- ) ج١٨- )٦٣ ب- )أ  
٥ إذا كان ق(س) كثري حدود وكان قَ(س) > ٠ عندما س < ٤ ، قَ(س) < ٠، عندما س > ٤   
وكان قَ(٣) = ٠ ، فام العبارة الصحيحة دائامً من العبارات اآلتية؟  
أ) قَ(٣) = ٠ ب) قَ(٤) = ٠  
ج) ق(٣) قيمة عظمى حملية د) ق(٣) قيمة صغرى حملية  
٦ ما جمموعة مجيع قيم جـ التي يمكن احلصول عليها من تطبيق نظرية رول عىل االقرتان ق(س) = ٨   
] ؟١ ، يف الفرتة [٠  
[١ ، [ د) [٠١ ، أ) { } ب) {0} ج) ]٠  
٧ باالعتامد عىل الشكل املجاور، الذي يمثل منحنى ق(س)   
ما النقطة التي يكون عندها قَ(س)، قَ(س) موجبتني:  
أ) هـ ب) ن   
ج) م د) و  
هـ  
و  
ن  
ق(س)  
م

# Page 93

98  
 ، ٣[ ، ق(س) ١] ، 3] وكان قَ(س) < ٠ جلميع قيم س١[ ٨ إذا كان ق(س) اقرتاناً متصالً عىل  
 ، 3] وكان قَ(٢) = ٠، فام العبارة الصحيحة مما يأيت؟١[ له ثالث نقاط حرجة فقط يف  
٥ ) > ق(٢)  
٥ ) > ٠ ب) ق( ٢  
أ) ق( ٢  
٥ ) < ق(٢)  
٥ ) = ق(٢) د) ق( ٢  
ج) ق( ٢  
 ٩س نقطة انعطاف- م س٢+ ٩ ما قيمة الثابت م التي جتعل ملنحنى االقرتان ق(س) = س٣  
 ؟ 1- = عند س  
4-   
)3 د- )أ) 3 ب) 6 ج  
 ، ٢]؟١-[ ٦ يف- س+ ما قيمة جـ التي حتددها نظرية القيمة املتوسطة عىل االقرتان ق(س) = س٢١٠  
١-  
٢  
 د) ١  
٢  
٣ ج)   
٥ ب) ٢  
٢  
أ)   
 إذا كان ق(س) = س|س| فام العبارة الصحيحة فيام يأيت؟١١  
 ) غري موجودة ب) ق(٠) قيمة عظمى حملية١(َأ) ق  
ج) ق(٠) قيمة صغرى حملية د) (٠ ، ق(٠)) نقطة انعطاف  
 الشكل املجاور يمثل منحنى قَ(س)، ما جمموعة حل املتباينة قَ(س) > ٠ ؟١٢  
 ، ٣[ ب) ]٢ ، ∞[ ١] )أ  
 ]٣ ، ∞[ [١ ، ∞-]   
)∞ ، ٢[ د-] )ج  
)قَ(س  
213  
 إذا كان ق(س) كثري حدود من الدرجة الثالثة معرفاً عىل [ أ ،ب[ ، ما أكرب عدد ممكن من النقط١٣  
احلرجة يمكن أن نحصل عليها لالقرتان ق(س)؟  
 ب) 2 ج) 3 د) 4 1 )أ  
[، متى يكون منحنى ق(س) متزايداً؟π ، π  
 [ 4 إذا كان ق(س) = لــو هـ جاس ، س١٤  
] π ، π  
[ د) [ ٢π ، π  
[ ج) [ 2π ، π  
] ب) [ 4  
π  
 ، ٢π  
أ) [ 4

# Page 94

09  
):1 3- أجب عن األسئلة اآلتية (2  
] أثبت أن ق(س) متزايد عىل جماله.   
π  
 [٠ ، 4 جتاس ، س+ ٢ إذا كان ق(س) = جاس  
.١ + س  
 ٣+ ٣ جد فرتات التزايد والتناقص والقيم القصوى املحلية لالقرتان ق(س) = س٢  
 ، أ] جد قيمة/قيم الثابت أ.١-[ أ حيقق رشوط نظرية رول عىل- ٣س- ٤ إذا كان ق(س) = س٢  
٢ ، ٦[ جد:-] ٥ معرفاً يف الفرتة+ ٩س- ٣س٢- ٥ إذا كان ق(س) = س٣  
أ القيم القصوى املطلقة لالقرتان ق(س).  
ب فرتات التقعّر لألعىل ولألسفل ملنحنى االقرتان ق(س).  
جـ نقط االنعطاف، وزوايا االنعطاف ملنحنى االقرتان ق(س).   
٦ معتمداً عىل الشكل املجاور، الذي يمثل منحنى االقرتان قَ(س) جد:   
أ فرتات التقعّر لألعىل ولألسفل ملنحنى االقرتان ق(س).  
ب اإلحداثيات السينية لنقط االنعطاف.   
)قَ(س  
٣  
٢  
٤-٥-  
 ٧ إذا كان االقرتان ق(س) كثري حدود معرفاً عىل [٢ ، ٦] ويقع منحناه يف الربع األول، ومتناقصاً عىل  
 س بيّ أن االقرتان ك(س) = (ق × هـ)(س) متناقص يف [٢ ، ٦].- جماله، وكان االقرتان هـ(س) = ٨  
 سم؟1٨ ما أبعاد أكرب خمروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها 0  
]، حيث هـ(س) قابل لالشتقاق، أثبت أن   
π  
 [٠ ، ٢ ٣س ، س+ ) هـ(س- ٩ إذا كان ق(س) = جتاس  
 هـ)(س) متزايد يف تلك الفرتة.+ االقرتان (ق

# Page 95

91  
 الشكل املجاور يبيّ منحنى االقرتانني ق ، هـ املعرفني عىل [أ ، ب] بيّ أن١٠  
 هو اقرتان متزايد عىل ]أ ، ب[.)قَ(س  
االقرتان هـ(س)  
)ق(س  
هـ(س)  
أ  
ب  
 إذا كان ق(س) كثري حدود من الدرجة الثالثة، جد قاعدة االقرتان ق(س) إذا علمت أن النقطة١١  
.)) هي نقطة قيمة صغرى حملية، وأن النقطة (0 ، 3) هي نقطة انعطاف لالقرتان ق(س1- ، (2  
 مسار للسباق طوله 004 م، حييط بميدان عىل شكل مستطيل ١٢  
يف كل من طرفيه نصف دائرة. ما أبعاد املستطيل التي جتعل   
مساحته أكرب ما يمكن؟  
البداية  
 سم، صنع منه مثلثان كل منهام متساوي األضالع، ما طول ضلع كل من املثلثني ليكون1 سلك طوله 8١٣  
جمموع مساحتيهام أصغر ما يمكن؟  
 أقيّم ذايت: أكمل اجلدول اآلين: ١٤  
مستوى االنجاز  
مؤرش االداء  
منخفض   
متوسط  
مرتفع   
احل مسائل منوعة عىل نظريتي رول واملتوسطة  
احدد جماالت التزايد والتنتاقص لالقرتانات  
احدد جماالت التقعر لالقرتانات  
احل مشكالت وتطبيقات حياتية عىل املشتقات

# Page 96

29  
املصفوفات واملحددات  
Matrices and Determinants  
٣  
الوحدة  
إذا طلب منك إعادة تنظيم بيانات املديريات حسب اللون املجاور لكل منها، فكيف   
يمكنك ترتيبها بطريقة منظمة تساعد يف دراستها؟ ماذا يمثل كل لون؟

# Page 97

39  
يتوقع من الطلبة بعد اإلنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين عىل توظيف   
املصفوفات واملحددات يف احلياة العمليّة من خالل اآليت:  
 التعرف إىل املصفوفة، وبعض املصفوفات اخلاصة.1  
.٢ إجياد رتبة املصفوفة، وعدد مدخالهتا  
٣ التعرف إىل رشوط تساوي مصفوفتني، وحل معادالت ناجتة من تساوهيام.  
٤ إجراء العمليات عىل املصفوفات.  
٥ التعرف إىل مفهوم املحددات، وخصائصها.  
٦ حساب حمدد املصفوفات املربعة من الرتبة األوىل والثانية والثالثة، ومتييز املنفردة منها.  
٧ إجياد النظري الرضيب للمصفوفات املربعة غري املنفردة من الرتبة الثانية.  
٨ توظيف املصفوفات يف حل أنظمة معادالت خطّيّة.

# Page 98

94  
\*)Matrix( 1 املصفوفة- ٣  
: تريد جمموعة من السياح التنقل بني بعض مدن فلسطني، فجمعت املعلومات اخلاصة باملسافات 1 نشاط  
كم 1 كم، وإىل نابلس 76 كم، وإىل رفح 8211بني هذه املدن وهي: من القدس: إىل جنني 2  
 كم. ومن جنني إىل رفح 322 كم.1ومن نابلس: إىل جنني 05 كم، وإىل رفح 08  
ولتسهيل التعامل مع هذه املعلومات، رتبها أحد السياح كام يأيت:  
القدس  
رفح  
رفح  
رفح  
جنني  
جنني  
نابلس  
 كم١٨٢  
٣٢٢ كم  
 كم١٠٨  
٠٥ كم  
٧٦ كم  
 كم١١٢  
ما رأيك هبذا التمثيل؟ هل يعطي الصورة احلقيقية للمسافات بني املدن؟ حاول متثيل املعلومات   
السابقة بطرق أخرى؟  
إن تنظيم هذه املعلومات له طرق متعددة، وسيتم التعرف عىل تنظيم جديد للبيانات، يسمى «املصفوفة».  
:تعريف  
املصفوفة هي تنظيم مستطيل الشكل ملجموعة من األعداد، عىل هيئة صفوف وأعمدة   
حمصورة بني قوسني [ ] ويرمز هلا بأحد األحرف أ ، ب ، ........... وتسمى األعداد داخل   
املصفوفة مدخالت.   
 تتحدد رتبة املصفوفة بعدد الصفوف وعدد األعمدة فيها، عىل النحو م × ن حيث م يمثل   
عدد صفوفها، ن يمثل عدد أعمدهتا (وتقرأ م يف ن).  
عدد مدخالت املصفوفة = عدد صفوفها × عدد أعمدهتا.  
.م1 عام 758A .A. Cayley \* أول من قدم املصفوفات بصورهتا احلالية هو العامل الريايض

# Page 99

59  
:الصورة العامة للمصفوفةمن الرتبة م × ن تكون عىل النحو  
١١ أ  
٢١ أ  
هـ)..١ ..(أ  
ن١ أ  
١أ ٢  
أ ٢٢  
.......  
أ ٢ن  
)١(أ ي  
(أ ي٢)  
..(أ ي هـ)..  
أ ي ن  
١أ م  
أ م٢  
.......  
أ م ن  
أ م × ن =   
   
وتتحدد أي مدخلة فيها بحسب الصف والعمود الواقعة فيهام، فاملدخلة التي تقع يف تقاطع الصف ي مع   
العمود هـ هي املدخلة أ ي هـ.  
٣  
٥-٦  
١٤  
٨  
 ، ب =   
٤  
٢-  
٥١  
٧  
٠  
 : إذا كانت أ = ١ مثال  
 ١٢ ، ب ٢١ ٢ جد أ  
 جد رتبة كل من املصفوفتني أ ، ب 1  
 املصفوفة أ تتكون من 3 صفوف وعمودين فهي من الرتبة 3 × 21  
 : احلل  
 واملصفوفة ب من الرتبة 2 × 3   
1 = ١2 ، ب ٢- = ٢١ ٢ قيمة املدخلة أ  
:أنواع خاصة من املصفوفات  
 املصفوفة املربعة: هي املصفوفة التي يكون عدد صفوفها = عدد أعمدهتا = ن، وتسمى عندئذ ١  
.مصفوفة مربعة من الرتبة ن  
2 مصفوفة الوحدة: ويرمز هلا بالرمز (م) وهي مصفوفة مربعة، وتكون مدخالهتا عىل النحو اآليت:   
 وهكذا ...  
١٠  
٠  
٠١٠  
٠  
٠١  
 = ، م ٣١٠  
٠١  
 = فمثالً م ٢  
 ، ي = هـ١  
 م ي هـ = ٠ ، ي ≠ هـ  
٠  
٠  
٠  
٠  
٠  
٠  
3 املصفوفة الصفرية (و): هي املصفوفة التي مجيع مدخالهتا أصفار، مثل و ٢ × ٣ =

# Page 100

69  
٢١-٤  
4 مصفوفة الصف: هي املصفوفة املكونة من صف واحد مثل ص =   
٨  
٢  
٩  
5 مصفوفة العمود: هي املصفوفة املكونة من عمود واحد مثل جـ =   
6 املصفوفة القطرية: هي املصفوفة املربعة س بحيث س ي هـ = ٠ ، ⩝ ي ≠ هـ   
 ، ونسمي القطر الذي مدخالته: س ي هـ ، ⩝ ي = هـ  
١١ س  
٠  
٠  
٠  
س ٢٢  
٠  
٠  
٠  
س ٣٣  
 مثل س =   
 بالقطر الرئييس للمصفوفة س.  
7 املصفوفة املثلثية العلوية: هي املصفوفة املربعة التي تكون مدخالهتا التي حتت القطر الرئييس أصفاراً،   
١١ س  
٢١ س  
٣١ س  
٠  
س ٢٢  
س ٢٣  
٠  
٠  
س ٣٣  
 = ، س١١ أ  
٢١ أ  
٠  
أ ٢٢  
 مثل: أ =   
٨  
٢  
٥  
 ، جـ =   
٠١  
١٠  
 ، ب =   
٢  
٣-٨-  
١٥  
٩  
 مثال 2 : لديك املصفوفات أ =   
 ما نوع املصفوفة جـ؟1  
٢ هل ب مصفوفة وحدة؟  
٣ ما جمموع مدخالت العمود الثاين من املصفوفة أ ؟  
 املصفوفة جـ هي مصفوفة عمود.1  
 : احلل  
٢ املصفوفة ب ليست مصفوفة وحدة. (ملاذا؟)  
٣ جمموع مدخالت العمود الثاين من املصفوفة أ يساوي 2

# Page 101

٥٢.2 وكذلك± = أي أن ص

# Page 102

89  
 1- تمارين ٣  
 ينتج مصنع ألبان نوعني من العبّوات: حجم كبري، وحجم صغري، فإذا كان هلذا املصنع فروع يف كل من: ١  
:اخلليل وطولكرم وغزة، وكان عدد العبّوات التي ينتجها كل فرع يومياً كام يأيت  
فرع اخلليل: 008 عبّوة من احلجم الكبري، 009 عبّوة من احلجم الصغري.  
فرع طولكرم: 006 عبّوة من احلجم الكبري، 054 عبّوة من احلجم الصغري.  
فرع غزة: 057 عبّوة من احلجم الكبري، 056 عبّوة من احلجم الصغري.  
أ نظم املعلومات السابقة بمصفوفة، بحيث متثل الصفوف فيها أنواع العبّوات، ثم اكتب رتبتها؟  
ب ماذا يمثل جمموع مدخالت العمود الثاين؟  
 فجد:   
٢  
٥  
٤-  
٦  
٢  
س  
١س-٧  
٣  
٠٢  
٧  
٢ إذا كانت أ =   
) جـ قيمة س بحيث إن: (أ ٣٢)٣ = ٧٢١ أ ٢+ ٣١ ب قيمة (أ  
 أ رتبة املصفوفة أ   
 ، فجد قيمة / قيم س.  
٢١٠  
٥١ - س  
 =   
٢١ + س٢  
٥  
٢  
٣ إذا كانت   
 هـ - ٤ كوّن مصفوفةً مربعةً من الرتبة 2 بحيث تعطى مدخالهتا حسب العالقة أ ي هـ = ٢ ي  
 ، فجد املصفوفة ب من الرتبة 3×2   
٢-٥١  
٦  
٣-٥  
٥ إذا كانت أ =   
بحيث إن أ ي هـ = ب هـ ي جلميع قيم ي ، هـ

# Page 103

99  
)Operations on Matrices( 2 العمليات عىل املصفوفات- ٣  
أوالً: جمع املصفوفات:  
: تبيع رشكة ألبسة بدالت رياضية يف فرعيها يف كل من ١ نشاط  
بيت حلم ونابلس، فإذا كانت ألوان البدالت املبيعة   
أمحر وأزرق وأبيض، وسجلت أعداد البدالت التي   
تم بيعها يف الفرعني خالل شهري أيلول وترشين أول   
02 فكانت كام يف اجلدول اآليت:1من العام 6  
الفرع  
الشهر  
اللون  
أمحر  
أزرق  
أبيض  
نابلس  
أيلول  
004  
004  
005  
1 ترشين  
003  
005  
082  
بيت حلم  
أيلول  
005  
004  
008  
1 ترشين  
003  
053  
052  
٠٠٤  
٠٠٤  
٠٠٥  
٠٠٣  
٠٠٥  
٠٨٢  
 إذا مثلنا ما باعه فرع نابلس يف الشهرين املذكورين باملصفوفة س = 1  
......... فإن رتبتها  
٢ مثل ما باعه فرع بيت حلم يف الشهرين املذكورين باملصفوفة ص، وعني رتبتها.  
٣ هل املصفوفتان س ، ص من نفس الرتبة؟   
٤ هل يمكن إجياد مصفوفة (ع) متثل جمموع ما باعته الرشكة من البدالت يف فرعيها يف املدينتني؟  
٥ كوّن املصفوفة ع (إن أمكن).  
:تعريف  
 ب هي مصفوفة من الرتبة م × ن + إذا كانت أ ، ب مصفوفتني من الرتبة م × ن، فإن جـ = أ  
 ب ي هـ + مدخالهتا ناجتة من مجع املدخالت املتناظرة يف كل من أ ، ب أي أن: جـ ي هـ = أ ي هـ

# Page 104

100  
٣-٧  
٥  
٢١٦  
 ، ع =   
٥  
٧-  
٣  
٤-  
 = ، ص  
٢  
٣  
٥  
٤  
 : إذا كانت س = 1 مثال  
 ع+ ٣ ص  
 س + ٢ ص  
 ص + س1  
 )جد ناتج ما يأيت (إن أمكن  
٧  
٤-  
٨  
٠  
 =   
 ٥+ ٢  
٧- + ٣  
 ٣+ ٥  
٤- + ٤  
 =   
٥  
٧-  
٣  
٤-  
 + ٢  
٣  
٥  
٤  
 ص = + س1  
 : احلل  
 (ماذا تالحظ؟)  
٧  
٤-  
٨  
٠  
 =   
٢  
٣  
٥  
٤  
 + ٥  
٧-  
٣  
٤-  
 = س+ ٢ ص  
 ع غري معرفة؛ ألن رتبة ص ≠ رتبة ع.+ ٣ ص  
ثانيًا: رضب املصفوفة بعددٍ حقيقيٍ  
:تعريف  
إذا كانت أ مصفوفةً من الرتبة م × ن ، وكان ك عدداً حقيقياً، فإن ك أ = جـ ، حيث جـ   
مصفوفة من الرتبة م × ن، وتكون مدخالهتا عىل النحو: جـ ي هـ = ك أ ي هـ جلميع قيم ي ، هـ.  
أ)-( + ٣ أ  
أ - ٢  
 ٢أ 1 ، فجد  
٣-٤١  
٢-٠  
٥  
 مثال 2 : إذا كانت أ =   
٦-٨  
٢  
٤-٠١٠  
 =   
٣- × ٢  
٢ × ٤١ × ٢  
٢- × ٢  
٢ × ٠  
٢ × ٥  
 2أ = 1  
 : احلل  
٣  
٤-  
١-  
٢  
٠  
٥-  
 = ٣-٤١  
٢-٠  
٥  
١- = )أ١-( = أ- ٢  
 (فسّ اإلجابة).  
٠  
٠  
٠  
٠  
٠  
٠  
 =   
٣  
٤-  
١-  
٢  
٠  
٥-  
 + ٣-٤١  
٢-٠  
٥  
أ) =-( + ٣ أ

# Page 105

101  
 ٢ب+ فجد ٣أ  
٤-٣  
٣  
٧  
 ، ب =   
٢١-  
٥١  
 = مثال 3 : إذا كانت أ  
٤-٣  
٣  
٧  
 ٢ + ٢١-  
٥١  
 ٢ب = ٣+ احلل : ٣أ  
٢-٣  
٢١  
١٧  
 =   
٨-٦  
٦١٤  
 + ٦  
٣-  
١٥  
٣  
 =   
ثالثاً: طرح املصفوفات   
:تعريف  
 ب)-( + ب = أ- إذا كانت أ ، ب مصفوفتني من نفس الرتبة م × ن ، فإن أ  
 أ- فجد املصفوفة ب  
٤  
٣  
٠  
٥  
 ، ب =   
٣  
٢-  
١٢  
 مثال 4 : إذا كانت أ =   
١٥  
١-٣  
 =   
٣-٢  
١-٢-  
 + ٤  
٣  
٠  
٥  
أ) = -( + أ = ب- احلل : ب  
١٥  
١-٣  
 =   
 3- ٤  
٢- - ٣  
١ - ٠  
 ٢- ٥  
 =   
٣  
٢-  
١٢  
 - ٤  
٣  
٠  
٥  
 أ = - أو : ب  
 أ تنتج من طرح مدخالت املصفوفة أ من املدخالت املناظرة هلا يف املصفوفة ب- الحظ أن مدخالت ب  
 : ٍّخصائص مجع املصفوفات ورضهبا بعددٍ حقيقي  
إذا كانت ( أ ، ب ، جـ ، و) مصفوفات من نفس الرتبة، ك ∈ ح فإن:  
 أ .................................................. (اخلاصيّة التبديلية)+ ب = ب+ أ١  
 ) جـ) .................................... (اخلاصيّة التجميعية+ (ب+ جـ = أ+ ) ب+ 2 (أ  
 أ = أ .................. (املصفوفة الصّ فّرية املحايدة لعملية مجع املصفوفات)+ و = و+ 3 أ  
 أ = و ............................................ (النظري اجلمعي)+ ) أ-( = ) أ-( + 4 أ  
 ك ب .............. (توزيع الرضب بعدد حقيقي عىل مجع املصفوفات) + ب) = ك أ+ 5 ك (أ

# Page 106

120  
 ٦  
٣-  
٥١  
 = ٢-٣  
١٠  
 + مثال 5 : حل املعادلة املصفوفية س  
 إىل طريف املعادلة تصبح:  
٢-٣  
١٠  
 احلل : بإضافة النظري اجلمعي للمصفوفة   
٢  
٣-  
١-٠  
 + ٦  
٣-  
٥١  
 = ٢  
٣-  
١-٠  
 + )  
٢-٣  
١٠  
 + (س  
   
٢  
٣-  
١-٠  
 + ٦  
٣-  
٥١  
 = )  
 ٢  
٣-  
١-٠  
 + ٢-٣  
١٠  
(   
 + ومنها س  
   
٨  
٦-  
٤١  
 = ومنها س  
٨  
٦-  
٤١  
 = و+ أي أن س  
تدريبات:  
 ٢ب- ٢أ ، ٣أ+ ، فجد ب  
٤-  
١٦  
٢  
٥  
٨  
 ، ب =   
٢  
٣-٥  
١٦  
٢  
أ إذا كانت أ =   
 ١  
 د = ٩م٢+ فبيّ أن: جـ  
٥١  
٢-٥  
 ، د =   
٤١-  
٢  
٤  
ب إذا كانت جـ =   
 م٢ + ٣س = س-   
١٥-  
٥  
٢  
٢ حل املعادلة املصفوفية: ٢   
 جـ = و+ فجد املصفوفة أ بحيث: ٢أ  
٢  
٥-  
١٣  
٣ إذا كانت جـ =   
٠  
٩  
٣-  
 =   
٠  
٣  
٥  
 ص +   
٠  
٠  
٣  
٤ جد قيم س ، ص احلقيقية التي حتقق املعادلة: س   
 فجد املصفوفتني س ، ص.  
٣  
٥-  
٨  
٥-  
 = ص- ، ٣س١٣  
٢-  
١١-  
 = ٢ص+ ٥ إذا كانت س

# Page 107

130  
)Matrix Multiplication( رابعًا: رضب املصفوفات  
 نشاط ٢: بعد انتهاء املرحلة األوىل من دوري كرة القدم الفلسطيني يف املحافظات الشاملية للعام   
02م، كانت الفرق الثالثة األوىل، هي: (ثقايف طولكرم(ط)، وهالل القدس(ق)، 102/716  
وشباب السمّوع (س)، فإذا علمت أن مصفوفة نتائج مباريات هذه الفرق هي:  
٧  
٨  
٥  
٣  
٢  
٣  
١  
١٣  
فوز  
تعادل  
خسارة  
ط ق س  
ش =   
 وأن الفريق الفائز حيصل عىل 3 نقاط، واملتعادل حيصل  
عىل نقطة واحدة، واخلارس ال حيصل عىل أي نقطة.  
 متثل النقاط التي حيصل عليها الفريق يف أي مباراة يلعبها،  
٣١٠  
 إذا كانت املصفوفة ص = 1  
 متثل نتائج مباريات فريق هالل القدس، كم نقطة يكون رصيد هذا الفريق؟  
٨  
٢  
١  
 = واملصفوفة ع  
٢ كوّن مصفوفةً متثل نتائج الفرق الثالثة من النقاط، ثم رتّب الفرق تنازليًا حسب عدد النقاط.  
:تعريف  
إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م × ن، ب مصفوفة من الرتبة ن × ل، فإن حاصل الرضب  
أ . ب = جـ ، حيث جـ مصفوفة من الرتبة م × ل ، وتكون مدخالت املصفوفة جـ عىل النحو  
 أ ي ن × ب ن هـ + ... + أ ي ٢ × ب ٢ هـ+ هـ١ × ب١ جـ ي هـ = أ ي  
٢  
٢  
٣  
٥  
 ، جـ =   
٥  
٢  
٣-٦  
٢١  
 = ، ب  
٣١-٢  
٥  
٤  
٠  
 مثال 6 : لتكن أ =   
٣ ب . جـ  
٢ أ . ب   
 أ . جـ 1  
   
:فأي العمليات اآلتية تكون معرفة

# Page 108

104  
) أ من الرتبة ٢ × ٣ ، جـ من الرتبة ٢ × ٢، فإن أ . جـ غري معرفة. (ملاذا؟1  
 : احلل  
٢ أ . ب معرفة ألن عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب.  
٣ ب . جـ معرفة أيضاً. (ملاذا؟)  
 مثال 7 : يعمل ثالثة خيّاطني يف مشغلٍ للخياطة، ينتج ثالثة   
أنواع من األلبسة (قميص، بنطال، بلوزة)، فإذا   
كانت أجرة خياطة القميص 5 دنانري، وأجرة خياطة   
البنطال 6 دنانري، وأجرة خياطة البلوزة 3 دنانري،   
ويف أحد األيام كان إنتاجهم كام يف اجلدول املجاور.  
العدد1خيّاط  
خيّاط2  
خيّاط3  
قميص  
2  
3  
2  
بنطال  
4  
2  
5  
بلوزة  
6  
5  
2  
ما األجرة التي حصل عليها كل خياط يف ذلك اليوم؟  
 احلل : حلساب أجرة اخليّاط األول مثالً، فإننا نجري العمليات اآلتية:  
 3 × 6 = 25 ديناراً.+ 6 × 4+ 5 × 2  
ولكن باستخدام املصفوفات يمكن حتديد أجرة كل خيّاط، بحيث نكون مصفوفتني: األوىل   
٥  
٦  
٣  
مصفوفة أجرة خياطة القطعة الواحدة من كل نوع، وهي س =   
٢  
٣  
٢  
٤  
٢  
٥  
٦  
٥  
٢  
والثانية مصفوفة كميات إنتاج اخليّاطني ذلك اليوم وهي جـ =   
وعليه فأجرة كل خيّاط تستخرج من ناتج الرضب س . جـ  
٢  
٣  
٢  
٤  
٢  
٥  
٦  
٥  
٢  
 .   
٥  
٦  
٣  
أي أن: س . جـ =   
 ٣×٦+ ٦×٤+ ٥×٢  
 ٣×٥+ ٦×٢+ ٥×٣  
 ٣×٢+ ٦×٥+ ٥×٢  
=   
٢٥  
٢٤  
٦٤  
=   
وتكون أجرة اخليّاط األول 25 ديناراً، والثاين 24 ديناراً، والثالث 64 ديناراً.

# Page 109

150  
:) فجد (إن أمكن  
٤١٢  
٥-٩  
٢-  
 = ، جـ  
٣-٥  
١٦  
 مثال 8 : إذا كانت أ =   
٢ جـ . أ  
 أ . جـ 1  
 بام أن رتبة أ هي 2×2 ، رتبة جـ هي 2×31  
 : احلل  
   
٤١٢  
٥-٩  
٢-  
 . ٣-٥  
١٦  
 فإنه يمكن إجياد ناتج الرضب عىل النحو أ . جـ =   
٥-× ٥+ ٣×٤- ٥×٩+ ١×٣-٢-× ٥+ ٣×٢-  
٥-× ٦+ ×٤١ ٦×٩+ ١×١٢-× ٦+ ×٢١  
 =   
 = ل  
٧٣-٢٤١٦-  
٦٢-٥٥١٠-  
 =   
 ٢ = ٢٤ ، ناجتة من رضب مدخالت الصف األول من أ مع ما١ الحظ أن املدخلة ل  
يناظرها من مدخالت العمود الثاين من جـ.  
٢ ال يمكن إجياد حاصل الرضب جـ . أ (ملاذا؟)  
 ، فجد(إن أمكن) كالً من: أ . ب ، ب . أ  
٣  
٢  
٧  
٥  
 ، ب =   
٢  
٥  
٢-٠  
 نشاط ٣: إذا كانت أ =   
   
4192  
6-4-  
 = ٣  
٢  
٧  
٥  
 .   
٢  
٥  
٢-٠  
 أ . ب = ١  
 = .......... ماذا تستنتج؟  
٢  
٥  
٢-٠  
 .   
٣  
٢  
٧  
٥  
٢ ب . أ =   
 مثال 9 : لتكن أ مصفوفةً من الرتبة ٢ × ن، ب مصفوفةً من الرتبة ٥ × ك  
فام قيم كل من ن، ك التي جتعل أ . ب ، ب . أ معرفتني؟  
 احلل : حتى يكون أ . ب معرفاً فإن قيمة ن = 5، وليكون ب . أ معرفاً فإن قيمة ك = 2(ملاذا؟)

# Page 110

160  
٣  
١  
 . )   
٤  
٥  
١٢  
٠  
٣  
 .   
٢  
٣١-  
 ( : جد ناتج١ مثال ٠  
٣ = ٦٤ ، ما رتبة املصفوفة الناجتة؟  
١  
 .   
١١  
١٣  
 احلل :   
 :خصائصُ عملية الضّ ب عىل املصفوفات  
إذا كانت أ ، ب، جـ مصفوفات حيثُ أن عمليتي الرضب واجلمع معرفتان، م املصفوفة املحايدة، ك ∈ ح فإنّ:  
 (أ . ب) . جـ = أ . (ب . جـ ) ................. اخلاصيّة التجميعيّة.١  
. (أ . جـ) ............ توزيع الضّ ب عىل اجلمع من اليمني+ ) جـ ) = (أ . ب+ ٢ أ . (ب  
 (ب . جـ) .......... توزيع الضّ ب عىل اجلمع من اليسار.+ ) ب ) . جـ = (أ . جـ+ ٣ (أ  
٤ أ . م = م . أ = أ .................................. (العنرص املحايد لعملية رضب املصفوفات).  
٥ ك (أ . ب) = (ك أ) . ب = أ . (ك ب)  
 فجد أ . ب ، أ . جـ١-٢-  
٢  
٥  
 ، جـ =   
٣-٢  
٥١-  
 = ، ب  
٦  
٤  
٣  
٢  
: إذا كانت أ = 11 مثال  
٢  
٨  
١٤  
 =   
٣-٢  
٥١-  
 . ٦  
٤  
٣  
٢  
 احلل : أ . ب =   
٢  
٨  
١٤  
 = ١-٢-  
٢  
٥  
 .   
٦  
٤  
٣  
٢  
أ . جـ =   
الحظ أن أ . ب = أ . جـ ، لكن ب ≠ جـ (ماذا تستنتج؟)

# Page 111

170  
 2- تمارين ٣  
 إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أن أ . ب =جـ فام رتبة ب يف كل مماييل:١  
 ب أ ٣×٣ ، جـ ٣×٥  
أ أ ٢×٥ ، جـ ٢×٤   
 فجد ما يأيت:  
١٤-  
٣  
٥  
٢  
٢  
 ، جـ =   
٥  
٦  
٢-  
٤  
٠  
٧  
 ، ب =   
٤  
٥  
٢-  
١  
 = ٢ إذا كانت أ  
جـ أ ٢   
ب جـ . ب   
أ أ . ب   
٠٢  
٤٦  
٥  
٤٣-  
 =   
١٦  
٤ ص  
٥  
٨  
 .   
٣  
س  
٥  
١-٤  
٢-  
 ٣ جد قيم س ، ص بحيث  
 فبيّ أن: س = ٥ص  
٧ ٨  
 ، ص =   
٢  
٦  
١٢-  
 .   
٤  
٥  
١٢  
٠  
٣  
 .   
٢  
٣١-  
 = ٤ إذا كانت س  
 ب)+ ب) (أ- ب٢ ≠ (أ- ، فبيّ أن: أ٢١-٢  
١٤  
 ، ب =   
٢١  
٠  
٣  
٥ إذا كانت أ =   
 ، فهل يمكن إجياد قيمة/قيم س بحيث إن: أ٢ = ب؟١٠  
٥١  
 = ، ب  
س  
٠  
١  
١  
 = ٦ إذا كانت أ  
١٠  
 ٣١-  
 = ، جـ  
٣  
٢  
١٠  
 ، ب =   
٢  
٣- = ٧ إذا كانت أ  
 د = ب . د+ أ جد املصفوفة د بحيث أن: أ  
ب بيّ أن: جـ٣ = جـ

# Page 112

180  
)Determinants( ٣ – 3 املحدّدات  
: اتفق سليم وأخته منال عىل طريقةٍ لتشفري األعداد، وذلك بربط العدد املشفَّر(أ) ١ نشاط  
 ص × ل = أ - حيث س × ع  
س  
ص  
ل  
ع  
بالشكل   
٤  
٣١٢  
فمثالً تشفري العدد 5 يمكن أن يكون   
، وهكذا ... ، تشفري العدد 6 هو ......، ١٢  
٤  
٣  
5 هو - وتشفري العدد  
تشفري العدد 0 هو .......... ، هل يكون تشفري العدد وحيداً؟  
٣  
٧-٢-٨  
 وهو ١ما رأيك لو مثلنا تشفري العدد ٠  
 ......  
٣  
٧-  
٢-٨  
بمصفوفةٍ مربعةٍ عىل النحو   
اكتب3 مصفوفات متثل تشفرياً للعدد (0).  
للمحددات كثري من التطبيقات واالستخدامات يف جماالت عدة، يف اجلرب واهلندسة ، فاملحدد يمثل اقرتاناً يربط   
كل مصفوفةٍ مربعةٍ بعددٍ حقيقيٍ ، ويفاد منه يف حل أنظمة املعادالت، ويف إجياد النظري الرضيب للمصفوفة املربعة،   
وسوف تقترص دراستنا يف هذا الدرس عىل إجياد حمدد املصفوفات املربعة من الرتبة األوىل، والثانية، والثالثة فقط.  
:تعريف  
إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً فإننا نرمز ملحددها بالرمز | أ | :  
 ١١ فإن | أ | = أ  
١١ إذا كانت أ = أ١  
١٢ × أ ٢١ أ- × أ ٢٢١١ = أ١١ أ  
٢١ أ  
١أ ٢  
أ ٢٢  
 فإن | أ | = ١١ أ  
٢١ أ  
١أ ٢  
أ ٢٢  
٢ إذا كانت أ =   
١١ أ  
٢١ أ  
٣١ أ  
١أ ٢  
أ ٢٢  
أ ٢٣  
1أ 3  
أ 32  
أ 33  
٣ إذا كانت أ =   
 ١أ ٢  
أ ٢٢  
١أ ٣  
أ ٣٢  
٣ ١ أ+   
١أ ٢  
أ ٢٣  
١أ ٣  
أ 33  
٢ ١ أ- أ 22  
أ 23  
أ 32  
أ 33  
 ١١ فإن | أ | = أ

# Page 113

190  
 | ب+ ٢ |أ  
 | أ | ، |ب| 1 :، فجد١-٢-  
٤-٣  
 ، ب =   
٢  
٣  
٥١  
 = : إذا كانت أ١ مثال  
13- = 5 × 3- 1 × = 2  
٢ ٣  
٥١  
 =   
 | | أ1  
 : احلل  
١١- = )٢-( × )٤-( - × ٣١- =   
١-٢-  
٤-٣  
 | ب | =   
 = ٣ (ماذا تالحظ)؟١ - = ٤١  
١  
١٤  
 ب| = + ، |أ١  
١  
١٤  
 ب = + ٢ أ  
 :نظرية  
إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً من الرتبة الثالثة، فإنه يمكن إجياد | أ | بداللة مدخالت أي   
صف، أو أي عمود وذلك برضهبا باملحدد الناتج من تصور شطب الصف ي والعمود هـ،   
هـ+) ي١-( وإعطاء إشارة حلاصل الرضب وَفْق القاعدة  
   
 باستخدام التعريف ٢ بداللة مدخالت العمود الثاين 1  
   
٢  
٣-  
١  
٤  
٥-٢  
١٦  
٧  
 مثال ٢ : جد   
 1 = 3  
٤  
٥-  
١٦  
 ١ + ٤ ٢  
١٧  
٣ - - ٥-٢  
٦ ٧  
 = ٢   
٢  
٣-  
١  
٤  
٥-٢  
١٦  
٧  
 بالتعريف يكون 1  
 : احلل  
   
٢  
٣-  
١  
٤  
٥-٢  
١٦  
٧  
٢ بداللة مدخالت العمود الثاين يكون   
   
٢١  
٤ ٢  
 (٦)   
٢+)٣١-( + ٢١  
١٧  
٥) -(   
٢+)٢١-( + ٢ ٤  
١٧  
٣) -(   
٢+١)١-( =   
 ٢١  
٤ ٢  
 ٦ - ٢١  
١٧  
 ٥ - ٢ ٤  
١٧  
 = ٣   
 (ماذا تالحظ)؟1 ٥٦ = 3- ٦(٠) = ٨٧- )١ ٥(٣- ) = ٣ (٦٢

# Page 114

110  
 = 02  
١٢  
٣-  
٢ س١  
٠  
٠  
٥  
 مثال ٣ : جد قيمة س بحيث   
 احلل : نجد قيمة املحدد بداللة مدخالت الصف الثالث، حيث حيوي أصفاراً.  
 4) = 02 أي س = 8- = ٠٢ ومنها 5(س١٢  
٢ س  
٣ +)٣١-( = ٥  
١٢  
٣-  
٢ س١  
٠  
٠  
٥  
أي أن   
:بعض خصائص املحددات  
يلزمنا يف كثري من احلاالت حساب قيم املحددات بصورةٍ رسيعةٍ، وخاصة عندما تكون املدخالت أعداداً   
كبريةً، ولتحقيق ذلك، وتوفرياً للوقت واجلهد، سوف نتعرف عىل بعض خصائص املحددات:  
) .1-( عند تبديل صف مكان صف، أو عمود مكان آخر، فإن قيمة املحدد ترضب بـ١  
.) (حتقق من ذلك  
٣ ٤  
١٥  
) ١-( = ٣ ٤  
٥١  
 ً فمثال  
٢ يمكن إخراج عامل مشرتك من أي صف، أو أي عمود،  
١٢  
٣-  
٢  
٧  
٩  
١٢  
٥  
 = ٣   
١٢  
٣-  
٢  
٧  
٩  
٣  
٦١٥  
 فمثالً   
 (بإخراج العدد 3 كعامل مشرتك ملدخالت الصف الثالث ورضبه بمحدد املصفوفة الناجتة).  
 حتقق من تساوي املحددين  
٣ إذا أضيف ملدخالت أي صف، أو أي عمود مضاعفات نظائرها يف صفٍ آخر، أو عمودٍ آخر،  
 (حتقق من ذلك)  
 ٤ × ٥+ ٢  
 ٤ × ٦+ ٣  
٥  
٦  
 =   
٢ ٣  
٥ ٦  
 فال تتغري قيمة املحدد، فمثالً   
 (رضب مدخالت الصف الثاين بـ ٤ واضافتها لنظائرها يف مدخالت الصف األول)

# Page 115

111  
.ً٤ إذا تساوت املدخالت املتناظرة يف صفني أويف عمودين يف مصفوفة فإن حمددها يساوي صفرا  
 = ٠ (حتقق من ذلك)  
٣  
٦  
٨  
٢  
٧  
٩  
٣  
٦  
٨  
 فمثالً يكون   
٥ إذا كانت املصفوفة مصفوفة مثلثية علوية فإن حمددها يساوي حاصل رضب املدخالت عىل القطر   
 × أ ٢٢ × أ 33١١ فإن | أ | = أ  
١١ أ  
٢١ أ  
٣١ أ  
٠  
أ ٢٢  
أ ٢٣  
٠  
٠  
أ 33  
 الرئييس فمثالً اذا كانت أ =   
:فكّر وناقش  
ما قيمة حمدد املصفوفة املربعة التي حتتوي عىل صفٍ ، أو عمودٍ، كل مدخالته أصفار؟  
 فإن:١٢  
٣  
٤  
 نشاط ٢: إذا كانت املصفوفة أ =   
 قيمة | أ | = ...... ١  
 | ٨ = ٤| أ | = (٢)٢| أ- = ٦ × ٤- = ٢ × ٨  
٢ ٤  
٦ ٨  
٢ |٢أ| =   
٣أ|= ........-| ٣  
٤ |ك أ| = ........   
:)1( قاعدة  
 | أ |، حيث ك ∈ ح  
إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً من الرتبة ن ، فإن |ك أ| = ك ن  
 مثال ٤ : إذا كانت أ مصفوفةً مربعةً، وكان | أ | = ٥، |٢أ| = ٠٤، فام رتبة املصفوفة أ؟  
 احلل : نفرض أن أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن، وبام أن |٢أ| = ٠٤ فإن ٢ن | أ | = ٠٤  
ومنها ٢ن × ٥ = ٠٤ أي أن ٢ن = ٨ ومنها ينتج أن: ن = 3  
أي أن أ مصفوفة مربعة من الرتبة ٣

# Page 116

112  
:)٢( قاعدة  
إذا كانت أ ، ب مصفوفتني مربعتني من الرتبة ن فإن | أ . ب| = | أ | × |ب|   
 ، فجد | أ . ب| ١٤-  
٣-٢  
 ، ب =   
٢-٣  
٤  
٥-  
 = مثال ٥ : إذا كان أ  
2 - = 1 2- 1 = 0  
٢-٣  
٤  
٥-  
 = | احلل : | أ  
10- =1 2- = 2١٤-  
٣-٢  
وكذلك |ب| =   
 = ٠٢ ١٠- × ٢- = |ومنه | أ . ب| = | أ | × |ب  
هل يمكنك إجيادها بطريقة أخرى؟  
٢ ، فإلجياد |س . ص| فإننا نجد  
٣  
 ، ص =   
٤  
٥  
 نشاط ٣: إذا كانت س =   
س . ص = ٣٢ ومنها |س . ص| = ٣٢   
 ص . س = ........... ١  
........... = |٢ |ص . س  
ماذا تالحظ؟

# Page 117

113  
 تمارين ٣ – 3  
 جد قيمة كل من املحددات اآلتية :١  
   
 |جـ |٥م٣  
   
٢  
٤-  
٤ ٨  
ب   
   
٤-٣  
٢  
٦  
٥١  
٤-٣  
٢  
أ   
   
س١-  
١  
 س  
 =   
٢١-٣  
٤ س ٥  
١٦  
٣  
٢ حل املعادلة اآلتية:   
 ١٢- = |٣ إذا كانت أ ، ب مصفوفتني مربعتني من الرتبة الثانية بحيث إن: |٣أ| = ٤٥ ، |أ . ب  
 |٥ب| ؟+ |فام قيمة |٢أ  
، فام قيمة/ قيم س؟١ ، وكان |أ٣| = ٥٢  
س  
٢  
٢  
س  
٤ إذا كانت أ =   
) ، (س2، ص2)1، ص1٥ إذا علمت أن معادلة املستقيم يف املستوى واملار بالنقطتني (س  
 = ٠  
س ص١  
١س١ص١  
س٢  
ص٢١  
 تعطى بالقاعدة  
فاستخدم القاعدة يف إجياد معادلة املستقيم املار بالنقطتني (3،2 )، (5، 7 ).  
٦ اذكر خاصية/ خصائص املحددات التي استخدمت يف كل من املتساويات اآلتية:  
٦ ٧  
١١٩  
 - = ٧ ٦  
٩١١  
 جـ  
 = ٠   
٢ ٦  
٥١٥  
ب   
   
٢  
٤-  
١  
١٠  
 =   
٢  
٤-  
2 5  
أ   
٧ باستخدام خصائص املحددات أثبت ما ييل:  
٠٠٢ - =   
٥  
٢١١  
٠  
٤-٩  
٠  
٠١٠  
ب   
 = ٠   
جـ+ب  
أ١  
ب+أ  
جـ١  
جـ+أ  
ب١  
 أ

# Page 118

114  
)Inverse of a Square Matrix( 4 النظري الرضبي للمصفوفة املربعة- ٣  
عرضنا يف درس سابق املصفوفة املحايدة (م) يف عملية رضب املصفوفات، وتعرّ فنا إىل خاصية مهمة من   
خصائص رضب املصفوفات، وهي أ . م = م . أ = أ حيث أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن.  
٢-  
٦  
٤  
٦  
٤-  
٦  
٥  
٦  
 ، ب =   
٥  
٤-  
٤  
٢-  
 = : إذا كانت أ١ نشاط  
 | أ | = ٦١  
 = م٢١٠  
٠١  
 =   
٢-  
٦  
٤  
٦  
٤-  
٦  
٥  
٦  
 .   
٥  
٤-  
٤  
٢-  
 = ٢ أ . ب  
٣ ب . أ = ..... ماذا تالحظ؟  
:تعريف  
تسمى املصفوفة املربعة أ مصفوفةً غري منفردةٍ إذا وجدت مصفوفة مربعة ب من نفس الرتبة   
بحيث أ . ب = ب . أ = م، وتسمى املصفوفة ب نظرياً رضبياً للمصفوفة أ، ونرمز هلا   
 . أ = م ١- = أ١-) ويكون أ . أ١- ونكتب (ب = أ١-بالرمز أ  
 ١- فبيّ فيام إذا كانت ب = أ  
٣  
٢-  
١-  
١  
 = ، ب١٢  
١٣  
 : إذا كانت أ = ١ مثال  
 = م٢ ١٠  
٠١  
 = ٣  
٢-  
١-  
١  
 .   
١٢  
١٣  
 احلل : أ . ب =   
 = م٢ ١٠  
٠١  
 =   
١٢  
١٣  
 .   
٣  
٢-  
١-  
١  
 = ب . أ  
 (ملاذا؟)١-ومنها ب = أ

# Page 119

115  
٢-٨١٩-  
١٤-  
١٠  
١٣-٧  
 ، ب =   
٢١٤  
٣  
٥١  
١٢  
٠  
 نشاط ٢: إذا كانت أ =   
١٠  
٠  
٠١٠  
٠  
٠١  
 =   
٢-٨١٩-  
١٤-  
١٠  
١٣-٧  
 .   
٢١٤  
٣  
٥١  
١٢  
٠  
أ .ب =   
   
 = ......... ماذا تستنتج ؟  
٢١٤  
٣  
٥١  
١٢  
٠  
 .   
٢-٨١٩-  
١٤-  
١٠  
١٣-٧  
ب . أ =   
 ، حتقق فيام إذا كان للمصفوفة س نظرياً رضبياً أم ال؟  
٣  
٢  
٠  
٠  
 مثال ٢ : إذا كانت س =   
 ، ومن التعريف يكون  
أ  
ب  
جـ  
د  
 احلل : نفرض أن للمصفوفة س نظرياً رضبياً هو ص =   
س . ص = ص .س = م٢  
 ٢جـ+ ٣أ  
 ٢د+ ٣ب  
٠  
٠  
 =   
أ  
ب  
جـ  
د  
   
٣  
٢  
٠  
٠  
أي أن: س . ص =   
 (ملاذا؟)10  
٠1  
 ≠ ٢جـ+ ٣أ  
 ٢د+ ٣ب  
٠  
٠  
لكن   
∴ ال يوجد للمصفوفة س نظري رضيب.  
:تعريف  
املصفوفة املنفردة هي املصفوفة املربعة التي ال يوجد هلا نظري رضيب.  
 :نظرية  
املصفوفة أ منفردة إذا وفقط إذا كان | أ | = ٠

# Page 120

116  
٣١٢  
٦  
٢  
٤  
٥  
٣١-  
 = ، ب  
2  
٤-  
٤  
٨  
 مثال ٣ : أي املصفوفات اآلتية منفردة وأهيا غري منفردة؟ أ =   
 = 23 ≠ صفر ، ومنها تكون املصفوفة أ غري منفردة.  
٢  
٤-  
٤ ٨  
 احلل : | أ | =   
 = ٠ أي أن املصفوفة ب منفردة.  
٣١٢  
٦  
٢  
٤  
٥  
٣١-  
 = | | ب  
 منفردة.  
٢  
٨  
٣  
)١+(س  
 مثال ٤ : جد قيمة س التي جتعل املصفوفة أ =   
 ٤٢ - )١ + = ٢(س  
٢  
٨  
٣  
)١+(س  
 احلل : | أ | =   
وبام أن أ مصفوفة منفردة فيكون | أ | = ٠  
 ٤٢ = ٠ - )١ + ٢(س  
11 = ٤٢ = ٠ ومنها س- ٢+ ٢س  
   
:خصائص النظري الرضيب  
إذا كانت أ ، ب مصفوفتني مربعتني، وغري منفردتني، ومن نفس الرتبة ، وكان ك عدداً حقيقياً ≠ ٠، فإن:  
١- . أ١- = ب١-)٣ (أ . ب  
) ١- (أ١  
 = ك١-)٢ (ك أ  
 = أ ١-)١- (أ١  
   
:إثبات اخلاصية الثالثة  
(الربهان للمعرفة فقط)  
 من اليمني ينتج أن: ١- = م برضب طريف املعادلة باملصفوفة أ١-)(أ . ب) (أ . ب  
 . م ١- = أ١-) . أ) . ب . (أ . ب١- . م ومنها ينتج (أ١- = أ١-) . (أ . ب) . (أ . ب١-أ  
 من اليمني ينتج أن:١- . م وبرضب طريف املعادلة باملصفوفة ب١- = أ١-)أي أن ب . (أ . ب  
 . م ١- . أ١- = ب١-) . ب) . (أ . ب١- . م ومنها (ب١- . أ١- = ب١-) . ب . (أ . ب١-ب  
 × (أ . ب) = م ١-)، وبنفس الطريقة نثبت أن (أ . ب١- . أ١- = ب١-)أي أن: (أ . ب

# Page 121

117  
:إيجاد النظري الرضبي للمصفوفة  
سوف نتعرف عىل طرق إجياد النظري الرضيب للمصفوفة املربعة، وستقترص دراستنا عىل النظري الرضيب   
للمصفوفات املربعة من الرتبة الثانية فقط.  
 (إن وجد).  
٥  
٣  
٦  
٤  
 مثال ٥ : جد النظري الرضيب للمصفوفة أ =   
س ص  
ع  
ل  
 = ١- احلل : نفرض أن: أ  
10  
٠1  
 =   
س ص  
ع  
ل  
   
٥  
٣  
٦  
٤  
 = م٢ أي ١-أ . أ  
10  
٠1  
 = ٣ع+٥س  
٣ل+٥ص  
٤ع+٦س  
٤ل+٦ص  
ومنها   
٥  
٣  
٦  
٤  
   
س ص  
ع  
ل  
 . أ = م٢ أي ١-كام أن أ  
 10  
٠1  
 = ٦ص+٥س  
٤ص+٣س  
٦ل+٥ع  
٤ل+٣ع  
=   
وبحل املعادالت الناجتة من تساوي املصفوفتني يف احلالتني السابقتني:  
٥  
٣ ، ل = ٢-  
٣ ، ص = ٢- = ينتج أن: س = ٢ ، ع  
 (حتقق من ذلك)  
٢  
٣-  
٢  
٣-٥  
٢  
 = ١-أي أن: أ  
:تعميم  
أ٢٢  
٢١أ-  
١أ٢-  
١١أ  
 1  
| = | أ١- مصفوفةً غري منفردةٍ فإن أ١١أ  
٢١أ  
١أ٢  
أ٢٢  
إذا كانت أ =   
 تنتج من رضب املصفوفة أ بمقلوب حمددها بعد تبديل أماكن مدخالت القطر ١-أي أن: أ  
الرئييس وتغيري إشارة مدخالت القطر اآلخر من املصفوفة أ .

# Page 122

118  
.) (إن أمكن١- ، فجد س  
٢  
٢  
٣١-  
 = مثال ٦ : إذا كانت س  
٨ ≠ ٠- = ٦- ٢- = | احلل : |س١  
٨  
١  
٤  
٣  
٨  
١-  
٤  
 = ١-2-  
3-٢  
 ١  
٨- = ١-املصفوفة س هلا نظري رضيب، وتكون س  
|، وقيمة | أ |، فجربت عدة مصفوفات من الرتبة ١- نشاط ٣: حاولت مريم إجياد العالقة بني قيمة |أ  
الثانية، وحصلت عىل النتائج اآلتية:  
 ١  
| = ٢١- | أ | = ٢ ، |أ١  
| = ٧١- ، |أ١  
2 | أ | = ٧  
1  
| | = | أ١-| = ..... ، واستنتجت العالقة |أ١-3 | أ | = ك ، ك ≠ ٠ ، |أ  
هل العالقة التي حصلت عليها مريم صحيحة دائامً؟ فسّ إجابتك.

# Page 123

119  
 تمارين ٣ – 4  
 بيّ أي من املصفوفات اآلتية هلا نظري رضيب.١  
 جاس  
٣  
١-  
١  
 = ب  
٤  
٨-  
٣  
٦  
أ =   
٢١-٣  
٦  
٣-٩  
٢  
٨١-  
 = د  
٣  
٣  
٣  
٣  
جـ =   
ك  
٤  
١ك  
 ب =   
ك  
ك  
٤  
٢ك  
2 ما قيم ك التي جتعل كالً من املصفوفات اآلتية منفردةً ؟ أ =   
١-)١-ب (أ  
 (إن أمكن) ١-أ أ  
 ، فجد:   
٤  
٥  
٢  
٣  
3 إذا كانت أ =   
 ، فام قيمة س؟١  
| = ٥١- ، وكان |أ  
س  
٥  
٢  
٣  
4 إذا كانت أ =   
| = | أ | فام قيمة/ قيم املقدار (س ص)؟١- ، وكان |أ  
س  
٣-  
١ص  
5 إذا كانت أ =   
 ١- ، وكان أ . جـ = ب ، فجد جـ  
٢  
٣  
٣  
٤  
 ، ب = ١٣  
٤  
٢  
6 إذا علمت أن أ =   
٧ إذا كانت أ ، ب مصفوفتني مربعتني وكانت أ مصفوفةً غري منفردةٍ بحيث أ . ب = أ . جـ  
فأثبت أن: ب = جـ ، بحيث جـ مصفوفة.

# Page 124

102  
 5 حل أنظمة املعادالت الخطية باستخدام املصفوفات- ٣  
)Solving Systems of Linear Equations(   
 : يزرع احلاج أبو رفيق أرضه سنوياً بالقمح والشعري، ويبيع املحصول يف السوق الفلسطيني، فإذا1 نشاط  
 ديناراً، وكان ثمن 5 أكياس 1كان ثمن 3 أكياس من القمح مع 5 أكياس من الشعري يساوي 04  
من القمح يزيد عن ثمن 4 أكياس من الشعري بمقدار 63 ديناراً.  
حاول أمحد كتابة النظام املكون للمسألة من معادلتني، بفرض أن س متثل سعر الكيس الواحد   
من القمح ، ص سعر الكيس الواحد من الشعري، فحصل عىل املعادلتني  
)١( .......... ١ ٥ص = ٠٤+ ٣س  
 ٤ص = ٦٣ .......... (٢)- ٥س  
 = وكتب مصفوفة املعامالت أ  
 = ، ومصفوفة الثوابت جـ  
س  
ومصفوفة املتغريات ك = ص  
ثم كتب املعادلة املصفوفية أ . ك = جـ  
وتعرفنا يف صفوف سابقة عىل حل أنظمة املعادالت اخلطّيّة (عدد املعادالت = عدد املتغريات، وهلا حل   
وحيد) بطريقتي احلذف والتعويض، ويف هذا الدرس سنربز أمهية املصفوفات واملحددات يف حل هذه   
األنظمة، وسنتناول ثالث طرق:  
 طريقة النظري الرضيب\* ١  
 \*2 طريقة كريمر  
3 طريقة جاوس  
.\* يكتفى بحل نظام مكون من معادلتني خطيتني فقط عند احلل بطريقتي النظري الرضيب وكريمر  
للعلمي فقط

# Page 125

121  
أوالً: طريقة النظري الرضبي  
يمكننا متثيل نظام من املعادالت اخلطّيّة عىل شكل معادلة مصفوفية، باستخدام ثالث مصفوفات، هي:   
مصفوفة املعامالت أ، ومصفوفة املتغريات ك، ومصفوفة الثوابت جـ .   
إذا كان لدينا نظام املعادالت اخلطّيّة اآليت:  
٢  
٣  
٣-٥  
٥ص = ٤ ، فإن مصفوفة املعامالت هي: أ = + ٣س- ، ١ ٣ص = ٠+ ٢س  
١٠  
٤  
 ، ومصفوفة الثوابت هي: جـ =   
س  
ومصفوفة املتغريات هي: ك = ص  
ويمثل النظام السابق من املعادالت اخلطّيّة بمعادلةٍ مصفوفيةٍ كام يأيت:  
 وهي عىل الصورة أ . ك = جـ وبالتايل: ١٠  
٤  
 =   
س  
 . ص  
٢  
٣  
٣-٥  
 . جـ برشط أن أ مصفوفة غري منفردة (ملاذا؟)١-تكون ك = أ  
، باستخدام طريقة النظري الرضيب.١ = ص+ ، ٤س١- = ص+ : حل النظام : ٢س١ مثال  
 ١-  
١  
 =   
س  
 . ص  
٢١  
٤١  
 : احلل : نكتب املعادلة املصفوفية عىل النحو  
١-  
٢  
١  
٢  
٢١-  
 =   
١  
١-  
٤-٢  
 ١  
٢- = ١-٢ ومنها أ- = ٤- = ٢  
٢١  
٤١  
 = | | أ  
3- = ، ص1 = أي أن: س١  
٣- =   
١  
 ٢+   
١  
٢  
١- + ٢-  
 = ١-  
١  
 .   
١-  
٢  
١  
٢  
٢١-  
 =   
س  
ص  
:فكّر وناقش  
ماذا حيدث لإلجابة إذا تم تغيري ترتيب املعادلتني هكذا:  
١- = ص+ ، ٢س١ = ص+ ٤س

# Page 126

3.حوّل سفيان النظام إىل املعادلة املصفوفية اآلتية:  
٣ وهي عىل الصورة أ . ك = جـ  
 = ب  
س  
 . ص  
٣  
ب-  
ب  
٣-  
 ما إشارة | أ |؟١  
   
.......... = ١-2 أ  
3 قيمة ص = ..........  
ثانياً: طريقة كريمر  
سبق وأن مثلنا أي نظام من املعادالت اخلطّيّة بمعادلةٍ مصفوفيةٍ عىل النحو أ . ك = جـ  
حيث إن مصفوفة املعامالت أ غري منفردةٍ، ك مصفوفة املتغريات، جـ مصفوفة الثوابت، فإذا كان النظام   
| | أص  
 ، ص = | أ || | أس  
يتضمن املتغريين س ، ص ، فإننا نجدمها عىل النحو: س = | أ |  
حيث إن: أ س املصفوفة الناجتة من استبدال عمود معامالت س بعمود الثوابت.  
 أ ص املصفوفة الناجتة من استبدال عمود معامالت ص بعمود الثوابت.  
 3 ص = 0+ ، 2 س1 = 5ص+ مثال ٢ : باستخدام طريقة كريمر حل النظام اآليت: 3 س  
 فيكون:  
٣١  
٢  
٠  
 ، أ ص = ١٥  
٠  
٣  
 ، أ س =   
٣  
٥  
٢  
٣  
 احلل : نكون املصفوفات: أ =   
٢- = ٣١  
٢ ٠  
 ٠ = ٣ ، |أ ص| = - = ٣١٥  
٠ ٣  
 ، |أ س| = ١- = ١ ٠- = ٩  
٣ ٥  
٢ ٣  
| أ | =   
٢ = ٢-  
١- = | | أص  
٣ ، ص = | أ |- = ٣  
١- = | | أس  
∴ س = | أ |

# Page 127

132  
 نشاط 3: قامت حنني بحل نظام مكون من معادلتني خطّيتني باملتغريين س ، ص، فوجدت أن املصفوفة  
 فإن: ١٥  
٣١  
 = ، واملصفوفة أ ص  
٥  
٢  
١  
١-  
 = أ س  
مصفوفة املعامالت للنظام الذي حلّته حنني هي: ....................  
س = .................... ، ص = ....................  
ثالثاً: طريقة جاوس  
) هذه الطريقة التي تعتمد عىل تكوين مصفوفة ممتدة 1558-1لقد قدم الريايض األملاين كارل جاوس (777  
(تشمل املعامالت والثوابت يف نظام املعادالت)، فإذا كان لدينا النظام:   
١ ع = جـ  
٣ ١ أ+ ص  
٢ ١ أ+ س  
 ١١ أ  
ع = جـ ٢  
 أ ٢٣ + ص  
 أ ٢٢ + س  
 ١أ ٢  
ع = جـ ٣  
 أ ٣٣ + ص  
 أ ٣٢ + س  
 ١أ ٣  
١١ أ  
٢١ أ  
٣١ أ١ جـ  
١أ ٢  
أ ٢٢  
أ ٢٣  
جـ ٢  
١أ ٣  
أ ٣٢  
أ ٣٣  
جـ ٣  
 أ = فإن املصفوفة املمتدة للنظام هي  
 أ ، لنحصل عىل مصفوفةٍ مثلثيةٍ علويةٍ وللحصول عىل حل للنظام، نجري بعض العمليات عىل صفوف  
ونجد منها أوالً قيمة املتغري ع ، ثم بالتعويض العكيس نجد قيمة املتغري ص، ثم املتغري س.   
والعمليات التي يمكن إجراؤها عىل صفوف املصفوفة أ :  
 تبديل صف مكان صف آخر.١  
.ً2 رضب مدخالت أي صف بعدد ال يساوي صفرا  
3 رضب مدخالت أي صف بعدد ال يساوي صفراً، وإضافتها إىل صف آخر.  
:مالحظة  
 = ٠ ، فيمكن تبديل صف مدخلته األوىل ≠ ٠ مكان الصف األول يف املصفوفة ١١ إذا كانت أ  
 أ املمتدة

# Page 128

124  
3- = 5 ص- ، 2 س1 7 ص = 0+ مثال ٣ : استخدم طريقة جاوس حلل النظام: 3 س  
 ونجري العمليات عىل النحو اآليت:   
٣  
٧١٠  
٢  
٥-٣-  
 = أ احلل : املصفوفة املمتدة للنظام هي  
   
٣  
٧١٠  
٠  
٩٢-  
3  
٩٢-  
3  
   
١٢ ص-  
 ٣+ ص٢  
   
٣  
٧١٠  
٢  
٥-٣-  
١ = ٩٢ ، أي أن ص-  
٩٢ ص = ٣-  
ومنها تكون ٣  
1 = ومنها س١) = ٠١( ٧+ وبالتعويض العكيس ٣س  
 ٢ع = ٢- س- ، ٣ع = ٣+ ع = ٩ ، ص- ص+ مثال ٤ : استخدم طريقة جاوس حلل النظام: س  
 ونجري العمليات اآلتية:  
١  
١  
١-٩  
٠١٣  
٣  
١-٠  
٢-٢  
 أ = احلل : نكون املصفوفة املمتدة  
١  
١  
١-٩  
٠١٣  
٣  
٠  
٠  
٦-٨  
   
 ص٢- ص٣  
   
١  
١  
١-٩  
٠١٣  
٣  
٠١٣-  
١١  
   
١ ص+ ص٣  
   
١  
١  
١-٩  
٠١٣  
٣  
١-٠  
٢-٢  
وهبذا حصلنا عىل مصفوفةٍ مثلثيةٍ علويةٍ، فنجد قيم املجاهيل بالتعويض العكيس  
 ٣ع = ٣ ، ومنها ص = ٧+ ٤ كذلك ص-  
٦ع = ٨ ، ومنها ع = ٣- فتكون  
٢  
 ع = ٩ ومنها س = ٣- ص+ كام أن: س

# Page 129

152  
 5- تمارين ٣  
 حل كالً من األنظمة اآلتية باستخدام طريقة النظري الرضيب:1  
 ص = ٢+ ب س  
 ص = ٣ - أ س  
١١ = ص+ س١ ص = ٦ ٠+ ٢س  
2 حل أنظمة املعادالت اآلتية باستخدام طريقة كريمر:  
٣- = ص+ ب س  
 ص = ٥ - أ س  
٢- = س+ ٢ص = ٢ ٢ص+ س  
3 عند حل نظام مكون من معادلتني خطّيتني باملتغريين س ، ص بطريقة كريمر، وجد أن:  
 ، فجد قيمة س ، ص   
٥  
٣-  
٣-  
١  
 = ، أ س  
٢  
٣-  
١-  
١  
 = أ  
4 استخدم طريقة جاوس يف حل األنظمة اآلتية:  
 ٢ص = ٥+ ، س١ = ص- أ ٣س  
 ع = ٠- ص+ ع = ٣ ، ٢س+ ٢ص+ ع = ٦ ، س+ ص- ب س

# Page 130

162  
تمارين عامة  
 اخرت اإلجابة الصحيحة فيام يأيت:١  
٣ ؟١ أ- ١ فام قيمة أ ٢  
٤١-٥  
٦  
٣-٩  
٢  
٧١-  
 = إذا كانت أ١  
3-   
) د1 ) جـ1- )أ) 4 ب  
 فام جمموعة قيم س ؟  
٣  
٢  
 س+ س٢  
٥  
 =   
٣ س  
٦  
٥  
٢ إذا كانت   
٣ ، 2}-{   
)٣} جـ) {2} د-{ )2} ب- ، أ) {3  
 ٧٢ب؟+ ) ٢ب+ ٥(أ- ، فام قيمة املصفوفة ٢٢أ  
٣-٥  
١٦-  
 = ، ب  
٣  
٥-  
٢  
٤  
٣ إذا كانت أ =   
٠  
٠  
٥١٤٣  
 د)   
٠  
٠  
٥١٤٣-  
 ) جـ  
٠  
٠  
١٧١٧  
 ب)   
٠  
٠  
٣  
٢-  
 )‌أ  
٤ إذا كانت أ ، ب مصفوفتني مربعتني غري منفردتني، فام العبارة الصحيحة دائام فيام يأيت؟  
 |ب| + | ب| = | أ+ أ‌) |٢أ| = ٤| أ | ب) |أ  
| | ب  
| = | أ |١-جـ) أ . ب = ب . أ د) |ب . أ  
٥ إذا كان س . ص = ص . س = م ، فام العبارة الصحيحة دائامً فيام يأيت: (س ، ص مربعتان من نفس الرتبة)  
ص- = = ص ب) ص مصفوفة منفردة جـ) س = ص د) س١-أ‌) س  
 فامذا يمكن أن تكون املصفوفة س؟ ١  
2  
 = ١  
2  
٦ إذا كانت س مصفوفة بحيث س .   
١  
١  
   
) د١  
١  
 ) جـ١٠  
٠١  
 ) ب  
٠١  
١٠  
أ‌)

# Page 131

172  
 هي النظري الرضيب ١- أ ، حيث أ+ ١- ، فام املصفوفة التي تساوي أ  
٢  
٣  
٣  
٥  
٧ إذا كانت أ =   
للمصفوفة أ؟  
 د) ٧ م٢  
٤  
٠  
٠١٠  
 جـ)   
٤  
٦  
٦١٠  
أ‌) و ب)   
٨ إذا كانت أ ، ب مصفوفتني مربعتني غري منفردتني  
، وكان| أ | ≥ |ب| فام قيمة | أ | ؟١١ = | |ب+ | ، | أ١بحيث إن: | أ . ب| = ٨  
 أ) 7 ب) 9 جـ) 2 د) 6  
 أ ؟- ، فام قيمة أ ٢  
٢  
٢  
٣١-  
 = ٩ إذا علمت أن أ  
 د) ٨ م٢  
٤  
٤  
٩١  
 ) جـ١٠  
٢  
٣  
٧  
 م٢ ب) ١أ‌) ٠  
 استخدم أمحد طريقة كريمر حلل نظام مكون من معادلتني خطّيتني يف املتغريين س ، ص١٠  
|أ ص| ، فام قيم س، ص عىل الرتتيب؟١  
٢- = | فوجد أن: |أ س| = ٢| أ  
١-  
2 د) 2 ، ٢- ،1 )4 ، 2 جـ- )4 ب- ، أ) 2  
 = ٧ ، فام قيم س ، ص؟١-ص  
٤-س  
 =   
س١  
ص ٢  
2 إذا كان   
 ١-)٢أ-( جـ  
ب | ٣أ |   
 ١- فجد : أ | أ | أ  
٣-٥  
٢-٤  
3 إذا كانت أ =   
٩- =   
١س  
٢  
س  
٣  
س  
٤  
س  
٥  
٤ جد قيم س التي جتعل

# Page 132

182  
٥ حل املعادالت املصفوفية اآلتية:   
٣ (باستخدام النظري الرضيب)  
١  
 =   
س  
 . ص١٢  
٣  
٤  
أ   
٤  
٣-  
١١  
 =   
١  
١-٣  
٢  
٠  
٤  
 .   
٣  
٠  
٠  
٢-  
 . س ص  
ب   
   
 ، فام قيم س ، ص؟  
٤ ص  
٥-٤  
 = ١- ، أ  
س ٣  
٥  
٤  
٦ إذا كانت أ =   
٧ إذا كانت أ ، ب مصفوفتني مربعتني غري صفريتني، بحيث أن أ . ب = و ، فأثبت أن:   
إحدى املصفوفتني أ ، ب عىل األقل ليس هلا نظري رضيب.  
 ص = ٣ ، ن ، ك عددان حقيقيان ال يساويان صفراً. + ص = ٥ ، ك س- ٨ عند حل املعادلتني ن س  
 متثل حمدد أ ص   
٦ ٥  
٢ ٣  
باستخدام طريقة كريمر، إذا كانت   
ب س ، ص   
أ ن ، ك   
جد قيمة:   
)٢ (ماذا تالحظ؟)١- ، (أ١-) فجد (أ ٢١٢  
١٣  
 = ١-٩ إذا كانت أ  
 س = 3+ 4 ، 5 ص- = 2 ص+ استخدم طريقة كريمر حلل نظام املعادالت: 3س١٠  
 استخدم طريقة جاوس يف حل النظام اآليت:١١  
 ٤- = ع- س+ ٢ع = ٢ ، ٣ص+ ٣ص+ ٤ع = ٩ ، ٢س+ ص- س  
٠٥ ، فجد قيم س مستخدماً خصائص املحددات.- =   
س  
٢١١  
٠  
٤-٩  
٠  
٠  
 س١  
٢  
 إذا كانت ١٢  
 أقيّم ذايت: أعرب بلغتي عن املفاهيم األكثر إثارة يف هذه الوحدة.١٣

# Page 133

192  
 الفصل الدرايس  
الثاين

# Page 134

103  
 التكامل غري املحدود  
وتطبيقاته  
٤  
الوحدة  
كيف يستطيع املهندسون تصميم املباين ذات املنحنيات واملنحدرات املعقدة؛ لتبدو  
يف النهاية يف غاية اإلبداع واإلتقان؟  
Indefinite Integral  
 and its Applications

# Page 135

131  
 يتوقع من الطلبة بعد اإلنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين عىل توظيف  
التكامل غري املحدود وتطبيقاته يف احلياة العمليّة من خالل اآليت:  
 إجياد االقرتان األصيل القرتان معطى (إن أمكن) وحتديد العالقة بني التفاضل والتكامل.1  
.2 التعرف إىل قواعد التكامل غري املحدود، واستخدامها يف إجياد تكامالت معطاة  
3 إجياد التكامل غري املحدود القرتانات كثرية حدود، ومثلثية، وأسّ ية، ولوغاريتمية، ونسبية.   
4 استخدام طرق التكامل، مثل: التكامل بالتعويض، وباألجزاء، وبالكسور اجلزئية يف إجياد تكامالت   
معطاة.  
5 توظيف التكامل غري املحدود يف تطبيقات هندسية وفيزيائية.

# Page 136

123  
 )Indefinite Integral( 1 التكامل غري املحدود- 4  
تعاين حمافظات الوطن من شحّ يف املياه، وتعترب مشكلة املياه من أبرز معوّقات التنمية يف فلسطني بشكل عام،   
لذلك يعكف املهتمون بالتنقيب عن املياه اجلوفية وحفر اآلبار االرتوازية، للتغلب عىل أسباب شحّ املياه،   
والتفكري يف البحث عن مصادر متجددة.  
: كان معدل ترسب املاء من خزان رئييس يعطى بالعالقة 1 نشاط  
د ص = ٣ن م3 /ساعة حيث ن متثل الزمن بالساعة،  
د ن  
برأيك كيف يمكن حتديد قاعدة االقرتان (ص) الذي   
يمثل كمية املاء املترسب من هذا اخلزان بعد فرتة حمددة   
من الزمن؟  
: نشاط ٢: من خالل ما تعلمته يف التفاضل، أكمل اجلدولني اآلتيني، ثم أجب عن األسئلة التي تليهام  
)اجلدول (أ  
اجلدول (ب)  
ق(س)  
قَ(س)  
قَ(س)  
ق(س)  
س  
٧  
 ٥+ س  
2س  
جاس  
٣س٢  
 ٣+ س٣  
 ٤+ س٢  
2س  
قا٢س  
هـ س١  
س  
 تسمى العملية يف اجلدول (أ) عملية اشتقاق.١  
 ........)2 اقرتح اسمً للعملية يف اجلدول (ب  
3 ما العالقة بني العمليتني؟.........................................  
4 هل االقرتان ق(س) يكون وحيدًا لكل حالة يف اجلدول (ب)؟ أعط أمثلة.

# Page 137

133  
 Antiderivative تعريف: معكوس املشتقة  
إذا كان االقرتان ق(س) متصالً يف الفرتة [أ ، ب] فإن م(س) يسمى معكوس املشتقة (اقرتان   
 ] أ ، ب[ س ، )أصيل) لالقرتان ق(س) إذا كان: مَ(س) = ق(س  
 س٤ اقرتان أصيل لالقرتان ق(س) = س٣ 1  
 : حتقق من أن االقرتان م(س) = 41 مثال  
 س٤) = س٣1  
د ( 4  
 س٤ هو اقرتان أصيل لالقرتان ق(س) ألن د س1  
 احلل : االقرتان م(س) = 4  
(الحظ أن ق(س) متصل ألنه كثري حدود).  
 نشاط ٣: جد اقرتاناً أصلياً لالقرتان ق(س) = ٢س   
حسب التعريف يكون أحد االقرتانات األصلية لالقرتان ق(س) هو م(س) = س٢   
د (س٢) = ٢س  
ألن د س  
 ٥ اقرتانان أصليان آخران لالقرتان ق(س)؟+ ٢ ، م٢(س) = س٢- (س) = س٢١ هل م١  
2 هل يوجد عدد حمدد من االقرتانات األصلية لالقرتان ق(س). ما العالقة بينها؟  
:قاعدة  
 جـ هي الصورة العامة ألي + )إذا كان م(س) اقرتاناً أصلياً لالقرتان ق(س) فإن م(س  
اقرتان أصيل لالقرتان ق(س) حيث جـ ثابت.  
:أتعلم  
الفرق بني أي اقرتانني أصليني القرتان معني يساوي اقرتاناً ثابتاً دائامً.  
 مثال 2 : إذا كان االقرتانان م(س) ، هـ(س) اقرتانني أصليني لالقرتان املتصل ق(س)،  
 هـ(س)، فجد لَ(٣).- )وكان ل(س) = م(س  
 احلل : االقرتانان م(س) ، هـ(س) اقرتانان أصليان لالقرتان املتصل ق(س)  
 هـ(س) = جـ (ثابت)، ومنه ل(س) = جـ- )إذن م(س  
لَ(س) = ٠ ومنها لَ(٣) = ٠

# Page 138

134  
 مثال ٣ : بيّ أن جمموعة االقرتانات األصلية لالقرتان ق(س) = ٣ هي جمموعة من االقرتانات التي  
منحنياهتا مستقيامت متوازية.  
 احلل : مجيع االقرتانات األصلية تكون عىل الصورة:  
 ح، وهي عبارة عن جـ ، حيث جـ+ م(س) = ٣س  
جمموعة من االقرتانات التي منحنياهتا مستقيامت متوازية،  
 ٥ + (س) = ٣س١فمثالً إذا كان جـ = 5 فإن م  
 ٣ وهكذا ...- 3 فإن م٢(س) = ٣س- = وإذا كانت جـ  
س  
 جـ+ م(س) = ٣س  
ص  
 اقرتانًا أصليًا لالقرتان١ - س٣  
س٢  
 مثال ٤ : بيّ فيام إذا كان االقرتان م(س) =   
٢ ، س ≠ ٠   
 س٣+ ١ = )ق(س  
٢ - س- = س١  
 س٢- = س١ - س٣  
س٢  
 احلل : م(س) =   
٢ = ق(س)  
 س٣+ ١ = ١-٢-٢)س-( - ١ = )ومنها مَ(س  
∴ م(س) اقرتان أصيل لالقرتان ق(س).  
:تعريف  
 تسمى جمموعة كل االقرتانات األصلية لالقرتان ق(س) بالتكامل غري املحدود ١  
 )ق(س) دس ويقرأ تكامل ق(س لالقرتان ق(س) بالنسبة لـ س ويرمز له بالرمز  
دال س.  
 جـ حيث جـ ثابت. (ثابت + )ق(س) دس = م(س ٢ إذا كان مَ(س) = ق(س) فإن  
التكامل).  
ق(س) دس) = ق(س).( د  
٣ إذا كان ق(س) اقرتاناً متصالً فإن د س

# Page 139

153  
 جـ) = س٣+   
س٤  
د ( ٤  
 جـ وذلك ألن د س+   
س٤  
س٣دس = ٤ نشاط ٤: الحظ أن  
 جـ وذلك ألن .............+ ١-  
2دص = ص-ص وكذلك  
 جـ وذلك ألن .............+ جتاس دس = جاس وباملثل  
 ٥+ ٣س- ق(س) دس = س٣ مثال 5 : إذا كان ق(س) اقرتاناً متصالً وكان  
جد ق(٢) ، قَ(٢).   
 احلل : بام أن ق(س) اقرتان متصل   
 ٣- ق(س) دس) = ق(س) = 3س2( د  
إذن د س  
 3 = 9 - ومنها ق(٢) = 3(٢)2  
١قَ(س) = 6س ومنها قَ(٢) = ٢  
).١( دس ، وكان ق(٠) = ٣ ، فجد ق  
هـس = ) مثال ٦ : إذا كان ق(س  
 جـ+   
 دس = هـس  
هـس = ) احلل : ق(س  
 جـ = 3+ لكن ق(٠) = ٣ ، ومنها يكون هـ٠  
 جـ = ٣ ومنها جـ = ٢+ ١ أي أن  
 ٢+ ٢ = هـ+ ١) = هـ١( ٢ ومنها ق+   
ق(س) = هـس

# Page 140

163  
 1- تمارين 4  
 بيّ فيام إذا كان م(س) اقرتاناً أصلياً لالقرتان ق(س) يف كل مما يأيت:١  
 س٢+ ٢ ، ق(س) = س  
٣  
 س٢) ٢+ (٢1  
أ م(س) = ٣  
ب م(س) = قا٣س ، ق(س) = ٣ قا٢س ظاس  
 ٢هـ٢س+ ٣س٢  
 هـ٢س+ ) ، ق(س) = س٣  
 هـ٢س+ جـ م(س) = لــو هـ(س٣  
٢ إذا كان م(س) ، هـ(س) اقرتانني أصليني لالقرتان ق(س)،   
).١( ٦ ، هـ(٣) = ٤، فجد هـ+ ٤س- وكان م(س) = س٢  
،١٣ إذا كان م(س) ، هـ(س) اقرتانني أصليني لالقرتان املتصل ق(س)، وكان ق(٤) = ٧ ، قَ(٤) = ٠  
 هـ) َ(٤)؟- فام قيمة (٣م  
 ،   
أ  
 جاس+ ١ = ) ٢قاس أحد االقرتانات األصلية لالقرتان ق(س- ٤ إذا كان م(س) = ٢ظاس  
]. احسب قيمة الثابت أ.  
π  
 [ ٠ ، 4 س  
 جـ س ، حيث ق(س) اقرتان متصل، + ق(س) دس = أ س٣ ٥ إذا كان  
) = ٤ ، قَ(٢) = ٤٢، فجد قيمة كلٍ من أ ، جـ .١-(وكان ق

# Page 141

173  
)Rules of Indefinite Integrals( 2 قواعد التكامل غري املحدود- 4  
: تَكثر اآلبار اجلوفية يف مَسافِرْ بني نعيم رشق 1 نشاط  
اخلليل، فإذا ضُ خّت املياه من بئرين يف التوقيت   
نفسه، األول بمعدل (٠٢ن)م3 /ساعة، والثاين   
بمعدل (٠٣ن)م3 /ساعة، حيث ن متثل الزمن   
بالساعة فإن:   
)ن٢ (ملاذا؟1 كمية املياه التي تضخ من البئر األول يف أي زمن ن تساوي 0١  
................... ٢ العالقة التي حتدد كمية املياه التي يتم ضخها من البئر الثاين هي  
٣ معدل ضخ املاء من البئرين معاً = ٠٥ن ( ملاذا؟)  
٤ العالقة التي حتدد كمية املاء التي يتم ضخها من البئرين معاً هي:...........   
ماذا تالحظ؟  
يتطلب إجياد االقرتان األصيل من خالل عمليات االشتقاق كثرياً من الوقت واجلهد، لذلك سنستخدم   
قواعد سيتم التعرف عىل بعض منها من خالل النشاط اآليت.  
 ح ، ثم أجب عن األسئلة التي تليه: نشاط ٢: أكمل اجلدول اآليت حيث أ  
)ق(س  
قَ(س)  
قَ(س) دس   
5  
جـ  
أ س  
 جـ+ أ س  
س٣  
سن ١-ن س ن  
س ، س > ٠  
لــو هـ  
   
قَ(س) دس ، يف كل حالة خيتلفان بمقدار ثابت. ، )الحظ أن املقدارين ق(س  
 ما العالقة بني نواتج العمود الثاين، ونواتج العمود الثالث؟ ١  
 ٢ باالعتامد عىل النتائج التي توصلت إليها، وأن التكامل عملية عكسية للتفاضل، يمكنك  
التحقق من صحة القواعد اآلتية:

# Page 142

183  
:قواعد التكامل غري املحدود  
١- ≠ جـ ، ن+   
١+سن  
١ + سن دس = ن ٢  
 ح جـ ، أ+ أ دس = أ س ١  
 جـ+ هـس دس = هـس ٤  
 جـ + | دس = لــو هـ |س١ س ٣  
 جـ+ جتاس دس = جاس ٦  
 جـ + جتاس- = جاس دس ٥  
 جـ+ ظتاس- = قتا٢س دس ٨  
 جـ + قا٢س دس = ظاس ٧  
 جـ+ قتاس- = قتاس ظتاس دس ١٠  
 جـ + قاس ظاس دس = قاس ٩  
:خواص التكامل غري املحدود  
إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقرتانني قابلني للتكامل فإن:  
ق(س) دس ، أ ≠ ٠ أ ق(س) دس = أ ١  
هـ(س) دس ± ق(س) دس = هـ(س)) دس± )(ق(س ٢  
 ويمكن تعميمها عىل أكثر من اقرتانني.  
 : جد كالً من التكامالت اآلتية:١ مثال  
 ظاس) دس + قاس (قاس ٢  
 ٣) دس + ١ (س 1  
 ظا٢س) دس- (٢ ٤  
) دس   
 هـس+ (س٢ ٣  
 جـ+ ٣س+ | ٣ دس = لــو هـ |س + دس١ س = ٣) دس+ ١ (س ١  
 : احلل  
 قاس ظاس) دس + (قا٢س = ظاس) دس+ قاس (قاس ٢  
 قاس ظاس دس + قا٢س دس =   
 جـ+ قاس+ = ظاس

# Page 143

193  
 جـ+   
 هـس+   
س٣  
 دس = ٣  
 هـس + س٢ دس = ) دس  
 هـس+ (س٢ ٣  
 قا٢س) دس- (٣ = )) دس١ - (قا٢س- (٢ = ظا٢س) دس- (٢ ٤  
 جـ+ ظاس- = ٣س  
 دس   
)٢١ + (س٢  
س٢  
 مثال ٢ : جد  
)٢ دس ١- س+ (س = دس  
)٢  
١ + س٢  
 ( س = دس  
)٢١ + (س٢  
س٢  
 : احلل  
2) دس - س+ 2+ (س٢ =   
 جـ+ ١ س- ٢س+   
س٣  
 = ٣  
:فكّر وناقش  
هل يمكنك إجياد ناتج التكامل بطريقة أخرى؟  
) = ٥، فإلجياد ق(٢) الحظ أن:١()، وكان ق١ - نشاط ٣: إذا كان قَ(س) = (٥س٤  
 جـ+ س- ) دس = س٥١ - (٥س٤ = قَ(س) دس = )ق(س  
) = .......... = ٥ ومنها جـ = ..........١(لكن ق  
فيكون ق(س) = ..............................  
ق(٢) = ..........  
:فكّر وناقش  
قَ(س) دس، علامً بأن ق(س) اقرتان متصل؟ ، ق(س) دس د  
ما الفرق بني: د س

# Page 144

140  
 2- تمارين 4  
 جد التكامالت اآلتية:١  
 ) دس  
٣  
 س٤+ ٤س- (٧س٢ ب  
 ٨ دس أ  
 قاس ظاس) دس + (٥س د  
 س دس ) س+ (٣ جـ  
 دس ١ - ٥س٢+ ٢س٣  
س٢  
 و  
 دس ١ - س  
١ - س  
 ٣ هـ  
٢ ) دس   
 س+   
 (٥هـس حـ  
 دس ١  
 جتا٢س ز  
١- = ) = جتاس ، جد ق(س) حيث ق(٠  
 هـس+ )2 إذا كان قَ(س  
 ٢ + جتاس- ق(س) دس = جاس 3 إذا كان ق(س) اقرتاناً متصالً عىل جماله وكان  
) = ٢  
π  
 قَ( ٢- )  
π  
أثبت أن: ق( ٢  
)١-() = ٤، ق(٢) = ٦، فجد ق١(َ ٢، وكان ق+ جـس٢+ س٢) دس = ٢س٣+ ) (قَ(س 4 إذا كان

# Page 145

141  
)Applications of Indefinite Integrals( 3 تطبيقات التكامل غري املحدود- 4  
 Geometric Applications :أوالً: تطبيقات هندسية  
: يسري رجل عىل طريق منحنٍ بحيث يكون ميل املامس عند أي نقطة أ (س ، ص) عىل الطريق1 نشاط  
)1 + ). (الحظ أن ميل املامس هو صَ = 2س1 + يساوي (2س  
 االقرتان الذي يمثل معادلة الطريق هو اقرتان تربيعي قاعدته ص = ........... ١  
........... = ٢ إذا كانت النقطة (0 ، 2) تقع عىل الطريق، فإن قاعدة االقرتان ص  
 ٢ يمس منحنى االقرتان ق(س) عند س = ٠ + : إذا كان املستقيم ص = س١ مثال  
وكان قَ(س) = ٦س ، جد قاعدة االقرتان ق(س).  
 قَ(س) دس = ) احلل : قَ(س  
١ جـ+ ٦س دس = ٣س٢ =   
 ) (ملاذا؟١ = )لكن قَ(٠  
١ + ، قَ(س) = ٣س٢1 = ١ومنها جـ  
 قَ(س) دس = )وأيضاً ق(س  
 جـ ٢+ س+ )دس = س٣١ + (٣س٢ =   
 وبام أن النقطة (0 ، 2) هي نقطة متاس  
فإن ق(٠) = ٢ ومنها جـ ٢ = ٢   
 ٢+ س+ ق(س) = س٣

# Page 146

142  
 )س فجد معادلة منحنى االقرتان ق(س١ مثال 2 : إذا كان قَ(س) = ٢  
).1 ، 1-( ، ) ، 31( علامً بأنه يمر بالنقطتني  
قَ(س) دس = ) احلل : بام أن قَ(س  
1 جـ+ س دس = 6س21 2 = )فإن قَ(س  
)1( ....... ) جـ 2 (ملاذا؟+ س  
١ جـ+ ) دس = 2س31 جـ+ (6س2 = )كام أن ق(س  
 ١ = )١-() = ٣ ، ق١(لكن ق  
) نحصل عىل:1( وبالتعويض يف املعادلة  
 جـ 2 = ٣+ ١ جـ- ، ١ = جـ 2+ ١ جـ  
 ، جـ 2 = 21- = ١ وبحل املعادلتني معاً نحصل عىل قيمة: جـ  
 ٢+ س- معادلة املنحنى املطلوبة هي: ق(س) = 2س3  
 Physical Applications ثانياً: تطبيقات فيزيائية  
   
 نشاط ٢: نظّمت وزارة الرتبية والتعليم العايل املرحلة النهائية   
 1 مرت، وشارك فيها 71من مسابقة العدو ملسافة 00  
متسابقاً عىل مستوى املحافظات الشاملية، وكان من   
املتسابقني حامد وحاتم، فإذا انطلقا معاً، بحيث كانت   
) م/ث.  
ن٢  
رسعة حامد (ن) م/ث ورسعة حاتم ( ٢  
(ن) = ن١الحظ أن رسعة حامد ع  
فتكون القاعدة التي حتدد املسافة التي قطعها حامد هي:  
 جـ +   
ن٢  
(ن) = ٢١ف  
ن٢  
(ن) = ٢١(0) = 0 فتكون ف١وبام أن ف

# Page 147

143  
وإلجياد زمن وصول حامد هناية السباق  
 ٠٠٢ ثانية = مرت ومنها ن1(ن) = 001نجعل ف  
 القاعدة التي حتدد املسافة التي قطعها حاتم هي : .......................١  
........................ ٢ الزمن الذي استغرقه حاتم يف قطع السباق يساوي  
٣ أهيام قطع مسافة السباق أوالً؟   
 تأمل املخطط اآليت، والحظ العالقة بني البعد ف(ن) والرسعة ع(ن) والتسارع ت(ن) يف  
التفاضل والتكامل.  
باالشتقاق  
بالتكامل  
باالشتقاق  
بالتكامل  
ع(ن)  
ت(ن)  
ف(ن)  
 مثال ٣ : بدأ جسم التحرك يف خط مستقيم من نقطة األصل ومبتعداً عنها، فإذا كانت رسعته يف أي  
 ٢ن ، فام بعد اجلسم عن نقطة األصل بعد ثانيتني من بدء + حلظة تعطى بالعالقة ع(ن) = ٣ن٢  
احلركة؟   
 ٢ن+ احلل : ع(ن) = ٣ن٢  
 جـ + ن٢+ ٢ن) دن = ن٣+ (٣ن٢ = ع(ن) دن = )ف(ن  
وبام أن ف(0) = 0 فإن جـ = 0  
 ن٢ + أي أن ف(ن) = ن٣  
 مرتاً١بعد اجلسم عن نقطة األصل بعد ثانيتني = ف(٢) = ٢

# Page 148

2.- تصله الكرة، علامً بأن تسارعها يساوي  
08 قدم  
األرض  
 ت(ن) دن = ) احلل : ع(ن  
١ جـ+ 23ن- = 23 دن- =   
 = 46١ لكن ع(0) = 46 ومنها جـ  
 ٤٦+ 23ن- = ) ع(ن  
تصل الكرة ألقىص ارتفاع بعد ثانيتني ..... (ملاذا؟)  
 جـ ٢+ ٤٦ن+ ن٢١٦- = ٤٦) دن+ 23ن-( = )ف(ن  
لكن ف(0) = 08 ومنها جـ ٢ = 08  
 ٠٨+ ٤٦ن+ ن٢١٦- = ) ف(ن  
 قدماً.1أقىص ارتفاع عن سطح األرض= ف(2) = 44

# Page 149

٠.، فجد قاعدة االقرتان ق(س).١ = )π() = ٢ ، قπ(َ٤ إذا كان قَ(س) = جتاس وكان ق  
٥ حترك جسم يف خط مستقيم من النقطة (و) مبتعداً عنها، برسعة ابتدائية مقدارها 3 م/ث، فإذا كان   
تسارعه يف أي حلظة يساوي (ن) م/ث2، فام رسعته بعد 5 ثوان من بدء احلركة، وما املسافة التي قطعها   
خالل هذه الثواين؟   
)  
١  
 س  
 + س( ٦ إذا كان ميل املامس ملنحنى االقرتان ق(س) عند أي نقطة عليه يساوي  
٢ ).  
 ، ٣١( فجد قاعدة االقرتان ق(س) علامً بأنه يمر بالنقطة  
٧ قذفت كرة رأسياً إىل أعىل من قمة برج ارتفاعه 54 مرتاً عن سطح األرض، وكانت الرسعة يف اللحظة   
 ٠٤)م/ث، جد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إىل سطح األرض.+ ن١٠-( ن تساوي

# Page 150

146  
 )Methods of Integration( 4 طرق التكامل- 4  
يصادفنا يف كثري من األحيان تكامالت ال يمكن إجيادها باستخدام قواعد التكامل غري املحدود، وسنتعرف   
يف هذا الدرس عىل ثالث طرق إلجياد التكامل غري املحدود، وهي:  
 التكامل بالتعويض.١  
.٢ التكامل باألجزاء  
٣ التكامل بالكسور اجلزئية.   
Integration by Substitution أوالً: التكامل بالتعويض  
 س٢)٢+ : إذا كان ق(س) = ٢س (٢١ نشاط  
 س٢)٣ اقرتان أصيل لالقرتان ق(س).+ (٢١  
 حتقق أن: م(س) = ٣١  
.......... = س٢)٢ دس+ ٢س (٢ ٢  
 س٢ فإن هـَ(س) = ..........+ ٣ ليكن هـ(س) = ٢  
 س٢ هي ..........+ ٤ العالقة بني ٢س ، ٢  
:فكّر وناقش  
 س دس ؟ ماذا تالحظ؟ . س دس = س دس س هل  
 قَ(س)  
١-د (ق(س))ن = ن(ق(س))ن  
تعلمت يف الفصل األول بأن د س  
 قَ(س)  
١- هو اقرتان أصيل لالقرتان ن(ق(س))ن  
أي أن (ق(س))ن  
 جـ +   
 (ق(س))ن١  
 قَ(س) دس = ن  
١-(ق(س))ن :وبذلك يكون  
:وبشكل عام  
ق(ع) دع = ق(هـ(س)) هـَ(س)) دس :إذا كان هـ(س) = ع فإن  
علامً بأن ق(س) ، هـ(س) اقرتانان متصالن.

# Page 151

147  
 ٤ دس+ س٢ ٢س : جد١ مثال  
د ع   
 ٤ ⇐ دع = ٢س دس ومنها دس = ٢س+ احلل : نفرض أن: ع = س٢  
وبالتعويض، ينتج أن:  
 جـ +   
٣  
٢ع ٢  
 ع دع = ٣ = د ع  
 ع ٢س ٢س = ٤ دس+ س٢ ٢س  
 جـ+   
٣  
 ٤)٢+ ٢(س٢  
٣  
 =   
)٥ دس ١ + (٢س مثال ٢ : جد  
د ع  
 ومنها يكون دع = ٢دس ، أي أن دس = ٢١ + احلل : نفرض أن: ع = ٢س  
 جـ +   
ع٦  
١د ع = ٢  
 ع٥ ٢ = )٥ دس١ + (٢س  
 جـ+ )٦١ + (٢س١  
1 = 2  
 ٢) دس + قا٢(٣س نشاط 2: إلجياد  
 ٢ ، فيكون دع = ٣ دس ومنها دس = ...........+ نفرض ع = ٣س  
 قا٢ع دع = ........... ١  
 ٢) دس = ٣+ (٣س  
 قا٢ فيصبح  
 جـ + ) ٢+ ظا(٣س١  
 = ٣  
:أتعلم  
 جـ+ ) ب+ ق(أ س١  
 ب) دس = أ+ قَ(أ س إذا كان ق(س) اقرتاناً قابالً للتكامل فإن  
حيث أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقية ، أ ≠ ٠

# Page 152

148  
 دس١+س هـ س٢ مثال 3 : جد  
د ع وبالتعويض واالختصار، ينتج أن:   
 ⇐ دس = ٢س١ + احلل : نفرض أن: ع = س٢  
 دع   
هـ ع ١  
 دس = ٢١+س هـ س٢  
 جـ+   
هـع  
 = ٢  
 جـ+   
 ١+هـ س٢  
٢  
 =   
 دس ١ + س + ١  
١ + س  
 مثال 4 : جد  
 ١ + س = احلل : نفرض أن: ع  
 دس ومنها دس = ٢ع دع ١  
١ + دع = ٢ س  
 جـ + ع٢+ ٢ع) دع = ٢ع+ (٢ = دس١ + س + ١  
١ + س  
 إذن  
 جـ (ملاذا؟)+ س+ ١ + = ٢ س  
جا٣س دس مثال 5 : جد  
 جتا٢س) جاس دس - ١( = جا٢س جاس دس = جا٣س دس : احلل  
جتا٢س جاس دس - جاس دس = جا٣س دس إذن  
 جـ (ملاذا؟)+ جتا٣س  
٣  
 + جتاس- =

# Page 153

149  
 )٣ دس١ + س٥(س٣ مثال 6 : جد  
د ع   
 ⇐ دس = ٣س٢١ + احلل : نفرض أن: ع = س٣  
س٣ ع٣ دع (ماذا تالحظ؟) ١  
د ع = ٣  
٣س٢  
س٥ ع٣ = )٣ دس١ + س٥(س٣  
 ع٣) دع- (ع٤ ١  
) ع٣ دع = ٣١ - (ع ١  
 = ٣  
 جـ + )  
ع٤  
 ٤-   
ع٥  
 ( ٥١  
 = ٣  
عوّض قيمة ع واكتب الناتج بداللة س  
جا٢س جتا٢س دس نشاط ٣: جد  
 جتا٢س- ١ = جتا٢س ، ٢جا٢س+ ١ = تعلم أن: ٢جتا٢س  
بالتعويض يف التكامل عن جا٢س ، جتا٢س يصبح:   
 جتا٢ ٢س دس - ١  
٤ = جا٢س جتا٢س دس  
 جتا٢ ٢س دس١  
 ٤- س١  
 جتا٢ ٢س) دس = ٤- ١( ١  
 = ٤  
 = .............................. (أكمل احلل)  
:قاعدة  
 جـ ، ق(س) ≠ ٠+ |) دس = لــو هـ |ق(س)قَ(س  
ق(س)  
 دس  
قا٢س  
 ظاس)+ ١( مثال 7 : جد  
 احلل : الحظ أن البسط يساوي مشتقة املقام  
 جـ + |) ظاس+ ١(| دس = لــو هـ  
قا٢س  
 ظاس)+ ١( وباستخدام القاعدة السابقة يكون

# Page 154

105  
)4 أ-تمارين (4  
 جد التكامالت اآلتية:١  
 ٢س) دس- س) جا(س٢- ١(  
 ب  
 دس   
٤  
 ٢)٥+ (س أ  
 دس١ + س ) ٢+ (س٢ د  
لــو هـ س دس   
س جـ  
جتا٤س دس و  
)٦ دس ١ - ٢)٢ (س+ (س هـ  
 دس  
هـ٢س  
 هـ٢س+   
هـس حـ  
 دس ١  
 جاس+ ١  
 ز  
٢ جد التكامالت اآلتية:   
 دس ١  
 جا س١  
س٢ ب  
 دس ١ + س  
س٥  
 أ  
 دس  
 ٢)٥+ (س  
س٧ د  
 قتاس)٢ دس + (جاس جـ  
ظا٣س دس و  
 دس   
١  
 س٣)٣+ س٢(س٧ هـ

# Page 155

151  
Integration by Parts :ثانياً: التكامل باألجزاء  
:فكّر وناقش  
س جتاس دس بطرق التكامل التي تعلمتها؟ هل يمكن إجياد  
:أتعلم  
د ق حيث ق ، ع اقرتانات قابلة لالشتقاق.  
 ع × د س+ د ع  
د (ق × ع) = ق × د س  
د س  
وبتكامل الطرفني بالنسبة إىل س ينتج أن:  
 ع دق ..... (ملاذا؟) + ق دع = ق × ع  
 ع دق - ق دع = ق × ع ومنها  
تسمى هذه النتيجة قاعدة التكامل باألجزاء، وتستخدم إلجياد تكامل بعض االقرتانات التي تكون عىل   
صورة حاصل رضب اقرتانني ليس أحدمها مشتقةً لآلخر.   
:قاعدة  
 ع دق - ق دع = ق × ع :قاعدة التكامل باألجزاء  
س جتاس دس : جد1 مثال  
 احلل : نفرض أن: ق = س دع = جتاس دس   
 ع = جاس دق = دس  
 ع دق - ق دع = ق × ع وحسب القاعدة  
 جـ+ جتاس+ جاس دس = س جاس - س جتاس دس = س جاس يكون  
للعلمي فقط

# Page 156

125  
:فكّر وناقش  
إضافة ثابت التكامل عند إجياد ع ال يغري من النتيجة.   
س٢ جاس دس : جد١ نشاط  
نفرض أن: ق = س٢ دع = جاس دس   
جتاس - = ع ∴ دق = ٢س دس  
 ٢ س جتاس دس + س٢ جتاس- = س٢ جاس دس إذن  
 = ................................ (أكمل احلل)  
)هـس دس ١ - (س مثال ٢ : جد  
 دع = هـس دس ١- احلل : نفرض أن: ق = س  
 ع = هـس ∴ دق = دس  
هـس دس - )هـس١ - )هـس دس = (س١ - (س إذن  
 جـ+ هـس- )هـس١ - = (س  
 دس   
 هـ س نشاط ٢: جد  
نبدأ بالتكامل بالتعويض   
 دس ١  
 س = ص فيكون دص = ٢ س بفرض  
ومنها ٢ص دص = دس  
 ص هـص دص دس = 2  
 هـ س إذن  
 = .................... (أكمل مستخدماً التكامل باألجزاء)

# Page 157

135  
 دس  
س  
 ٢+ س  
 مثال ٣ : جد  
 دس ١  
 ٢+ س  
 = احلل : نفرض أن: ق = س دع  
 ٢ + س ع = 2 ∴ دق = دس  
 دس ) ٢+ (س ٢ - ٢+ س دس = 2س  
س  
 ٢+ س  
   
) جـ (ملاذا؟+ ٢)٣+ (س ٤  
 ٣- ٢+ س = 2س  
:فكّر وناقش  
 دس من املثال السابق باستخدام التكامل بالتعويض.   
س  
 ٢+ س  
 أوجد  
هـس جاس دس مثال ٤ : جد  
 احلل : نفرض أن: ق = جاس دع = هـس دس   
 ع = هـس ∴ دق = جتاس دس  
هـس جتاس دس - هـس جاس دس = هـس جاس  
.هـس جتاس دس عىل نمط التكامل املطلوب نفسه :الحظ أن  
نفرض أن: ق = جتاس دع = هـس دس   
 ع = هـس جاس دس- = ∴ دق  
هـس جاس دس (ماذا تالحظ)؟ + هـس جتاس دس = هـس جتاس  
:هـس جتاس دس يف التكامل األصيل، فيصبح بالتعويض عن  
 جـ + هـس جاس دس - هـس جتاس- هـس جاس دس = هـس جاس  
) جـ ..... (ملاذا؟+ ) هـس جتاس- (هـس جاس١  
هـس جاس دس = ٢ ومنها

# Page 158

154  
 س) دس  
جتا(لــو هـ نشاط ٣: جد  
س واستفد من املثال السابق يف إكامل احلل ).  
 (افرض ص = لــو هـ   
تمارين 4 – 4 ب  
 جد كالً من التكامالت اآلتية:١  
 س قا٢س دس ب  
س دس   
 س لــو هـ أ  
 س جا٢س دس د  
 ٢)٣ دس + لــو هـ (س جـ  
 دس١ + س جا و  
 دس ١+ س٣ هـس٢ هـ  
 جاس جتاس دس  
 هـ س حـ  
 دس   
٢س هـس  
)٢١ + (س ز  
) دس١  
 جتا(س١  
س٣ ي  
 قتاس ظتاس) دس - (قتاس  
 هـ س ط  
 ، س > ٠ ١- ≠ جـ ، ن+ ) ١  
١ + ن- س  
 (لــو هـ   
١+سن  
١ + س دس = ن  
 سن لــو هـ :٢ أثبت أن

# Page 159

155  
Integration by Partial Fractions :ثالثاً: التكامل بالكسور الجزئية  
:فكّر وناقش  
 دس بطرق التكامل التي تعلمتها؟ ١ + س  
 ٤- س٢ هل يمكن إجياد  
 دس بالتكامل بالتعويض، ألن البسط مشتقة للمقام  
٢س  
١ - س٢ لقد تعلمنا يف الدروس السابقة إجياد  
 دس ؟١ + س  
 ٤- س٢ ولكن ماذا بالنسبة للتكامل  
يف مثل هذه احلالة نلجأ لطريقة جديدة تسمى التكامل بالكسور اجلزئية، وسوف نقترصها عىل االقرتانات   
النسبية، التي يمكن كتابة املقام فيها عىل شكل حاصل رضب ثالثة عوامل خطّيّة خمتلفة عىل األكثر.   
 ٢ عىل صورة كسور جزئية، نقوم بتحليل املقام إىل عوامله األولية، - س  
 س- : لكتابة ق(س) = س٣1 نشاط  
   
جـ  
١ + س+ ب  
١ - س+ أ  
 ٢ = س- س  
 س- وكتابة ق(س) عىل الصورة ق(س) = س٣  
وبتوحيد املقامات، واإلفادة من تساوي االقرتانات، نحصل عىل املعادلة:  
)١( ..... )١ - جـس(س+ )١ + بس(س+ )١ + ) (س١ - ٢ = أ(س- س  
ولتحديد قيم أ ، ب ، جـ نقوم بام ييل:  
١-  
) ومنها ب = ٢١( يف املعادلة1 = نعوض س  
٣-  
) ومنها جـ = ٢١( يف املعادلة1- = نعوض س  
) ومنها أ = .....١( وإلجياد قيمة أ نعوض س = ..... يف املعادلة  
   
٣-  
٢  
١ + س+   
١-  
٢  
١ - س+ ٢  
 ٢ = س- س  
 س- فيصبح : س٣  
هل يمكنك إجياد قيم أ ، ب ، جـ بطرق أخرى؟  
 بالكسور اجلزئية   
٣-  
٢  
١ + س+   
١-  
٢  
١ - س+ ٢  
 ٢ عىل الصورة س- س  
 س- نسمي كتابة املقدار س٣  
للعلمي فقط

# Page 160

165  
:مالحظة  
   
جـ  
 ل- س+ ب  
 ن- س+ أ  
 م- إذا أمكن كتابة االقرتان النسبي عىل الصورة س  
حيث أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقية ، فإن تكامله يساوي  
 ثابت التكامل+ | ل- جـ لــو هـ |س+ | ن- ب لــو هـ |س+ | م- أ لــو هـ |س  
ويراعى يف ذلك أن تكون درجة البسط أقل من درجة املقام،  
فإذا كانت درجة البسط ≥ درجة املقام نستخدم القسمة املطولة.  
 دس   
٢  
١ - س٢ : جد1 مثال  
 احلل : الحظ أن درجة البسط أقل من درجة املقام، وأن البسط ليس مشتقة للمقام لذلك نكتب:  
 (ملاذا؟)1- = ، ب١ = ومنها أ  
ب  
١ + س+ أ  
١ - = س  
٢  
١ - س٢  
 دس ١-  
١ + س + دس١  
١ - س = ) دس  
١-  
١ + س+   
١  
١ - (س = دس  
٢  
١ - س٢ إذن  
 جـ + |١ + لــو هـ |س- |١ - = لــو هـ |س  
(اكتب الناتج بصورة أخرى)  
 ٢ دس - س  
 س- س٣ مثال ٢ : جد  
   
٣-  
٢  
١ + س+   
١-  
٢  
١ - س+ ٢  
 ٢ = س- س  
 س- ) أن: س٣1( احلل : توصلنا من النشاط  
) دس  
٣-  
٢  
١ + س+   
١-  
٢  
١ - س+ ٢  
 (س = ٢ دس- س  
 س- س٣ وبالتايل  
 جـ + |١ + ٣ لــو هـ |س-  
 ٢+ |١ - لــو هـ |س١-  
 ٢+ | = ٢لــو هـ |س

# Page 161

175  
 دس  
س٣  
 س٢- ٤ مثال ٣ : جد  
 احلل : نالحظ أن درجة البسط أكرب من درجة املقام، لذا نقسم البسط عىل املقام باستخدام القسمة املطولة.  
ب  
 س+ ٢+ أ  
 س- = ٢  
٤س  
 س٢- ومنها يكون ٤  
٤س  
 س٢- ٤+ س- =   
س٣  
 س٢- وينتج أن: ٤  
٢ (ملاذا؟)- = وبتوحيد املقامات، ومساواة االقرتانني، ينتج أن: أ = ٢ ، ب  
٢-  
 س+ ٢+ ٢  
 س- ٢+ س- = ٤س  
 س٢- ٤+ س- =   
س٣  
 س٢- ويصبح ٤  
 جـ + | س+ ٢لــو هـ |٢- | س- ٢لــو هـ |٢-   
س٢-  
 دس = ٢  
س٣  
 س٢- ٤ ومنها  
 جـ ..... (ملاذا؟)+ | ٤- ٢لــو هـ |س٢-   
س٢-  
 = ٢  
) دس (بعد إجراء القسمة)  
٤س  
 س٢- ٤+ س-( = دس  
س٣  
 س٢- ٤ : حل آخر  
٢س )) دس -  
 س٢- ٢( ٤- س-( = ) دس  
٤س  
 س٢- ٤+ س-( ومنها  
 جـ ..... (ملاذا؟)+ | ٤- ٢لــو هـ |س٢-   
س٢-  
 = ٢  
 دس   
 س  
 ٩- س مثال ٤ : جد  
   
 س  
 ٩- س )٢(  
 ليس اقرتاناً نسبياً، ولكن يمكن كتابته عىل الصورة  
 س  
 ٩- احلل : نالحظ أن س  
 دس ومنها دس = ٢ص دص١  
 س فإن دص = ٢ س = وبفرض ص  
 دص   
٢ص٢  
 ٩- ص٢ = × ٢ص دص  
ص  
 ٩- ص٢= دس  
 س  
 ٩- س إذن  
(الحظ أن درجة البسط = درجة املقام؛ لذا نقسم البسط عىل املقام).  
) دص وبالكسور اجلزئية، تكون ١٨  
 ٩- ص٢+ (٢ = دص  
٢ص٢  
 ٩- ص٢ :وينتج أن  
 جـ (حتقق من ذلك)+ | ٣- س| ٣لــو هـ+ | ٣+ س| ٣لــو هـ- دس = ٢ س  
س  
 ٩- س

# Page 162

185  
 دس  
هـس  
 ٢-   
 هـس+   
 هـ٢س مثال ٥ : جد  
دس   
 = ص ومنها دص = هـس   
 احلل : نفرض هـس  
 ، وباستخدام الكسور اجلزئية، يكون:  
دص  
 ٢- ص+ ص٢ = دس  
هـس  
 ٢-   
 هـس+   
 هـ٢س  
)) (ملاذا؟١-  
 ، ب = ٣١  
 ومنها (أ = ٣  
ب  
 ٢+ ص+ أ  
١ - = ص١  
 ٢- ص+ ص٢  
 جـ + | ٢+ لــو هـ |ص١  
 ٣- |١ - لــو هـ |ص١  
 = ٣  
دص  
 ٢- ص+ ص٢  
 جـ+ ) ٢+   
 لــو هـ (هـس١  
 ٣- |١ -   
 لــو هـ |هـس١  
 دس = ٣  
هـس  
 ٢-   
 هـس+   
 هـ٢س ومنها  
 قاس دس نشاط 2: جد  
جتاس  
 جا٢س- ١ = جتاس  
 = جتا٢س١  
إرشاد: الحظ أن قاس = جتاس  
 دس وباستخدام التكامل بالتعويض بفرض ص = جاس  
جتاس  
 جا٢س- ١ = قاس دس إذن  
 دص ١  
 ص٢- ١ يصبح التكامل عىل الصورة  
= ..................... (أكمل احلل)  
 دس ) ظاس+ قاس(قاس  
 ظاس+ قاس  
 = قاس دس :وبطريقة أخرى  
 ظاس)+ (برضب البسط واملقام باملقدار قاس  
 قاس ظاس دس + قا٢س  
 ظاس+ قاس  
 = دس) ظاس+ قاس(قاس  
 ظاس+ قاس  
 فيكون  
 جـ (ملاذا؟)+ | ظاس+ = لــو هـ |قاس

# Page 163

195  
 دس  
جا٣س  
 جتاس+ ٢ مثال ٦ : جد  
 دس ..... (ملاذا؟)) جتا٢س- ١( جاس  
 جتاس+ ٢  
 = دس  
جا٣س  
 جتاس+ ٢ : احلل  
جاس دس- = نفرض أن: ص = جتاس ومنها دص  
 دص (ملاذا؟)١ -   
ص٢  
 ص+ ٢ = دص  
جاس- × ) ص٢- ١( جاس  
 ص+ ٢  
 = دس  
جا٣س  
 جتاس+ ٢  
)) دص (بعد إجراء القسمة املطولة  
٣  
 ص+ ٢+ ٢- (ص =   
 جـ+ | ص+ ٣لــو هـ |٢+ ٢ص-   
ص٢  
 = ٢  
 = ............................ (أكمل بكتابةالناتج بداللة س)  
 4 ج- تمارين 4  
 جد التكامالت اآلتية:١  
 دس  
 ٢+ س٢  
 ٦- س+ س٢ ب  
 دس   
 ٢+ س  
 ٣- ٢س- س٢ أ  
 دس   
 ٢+ س  
)١ + س) (س- (س٢ د  
 دس   
 س  
 ٢- س - س جـ  
 دس ١  
س)٢  
 س (لــو هـ- س و  
   
 قتاس دس هـ  
٢ جد التكامالت اآلتية:   
 دس   
جاس  
 جتا٢س- ١ ٦ ب  
   
 دس  
 ٧+ س-  
 ٢- س+ س٢ أ  
 دس   
س٢  
 س٣+ س٦ د  
 دس   
قتا٢س  
 قتا٢س- ٢ جـ

# Page 164

106  
: تمارين عامة  
 اخرت رمز اإلجابة الصحيحة:١  
،) إذا كان م(س) ، هـ(س) اقرتانني أصليني خمتلفني لالقرتان ق(س١  
 هـ(س)) دس ؟- )(م(س فامذا يمثل  
أ) اقرتاناً ثابتاً ب) اقرتاناً تربيعياً ج) اقرتانا خطّياً د) صفراً  
٢)؟ -( ٢) دس ، وكان ق(٢) = ٩، فام قيمة ق- (٣س٢ = )٢ إذا كان ق(س  
1   
)9 ج) 4 د- ) ب1- )أ  
 ع دق ، فام قيمة ع دق ؟ - س  
س دس = س٢ لــو هـ  
 ٢س لــو هـ ٣ إذا كان  
س دس  
س دس ب) س٢ دس ج) س دس د) س لــو هـ  
أ) لــو هـ  
 قتا٤س ظتاس دس؟ ٤ ما قيمة  
 جـ+ قتا٤س١-  
 جـ ب) ٤+ قتا٥س١-  
٥  
أ)   
 جـ+ قتا3س١  
3  
 جـ د) + قتا٣س١-  
٣  
ج)   
س-  
 س٢- ١  
 = ) س٢ هو اقرتان أصيل لالقرتان ق(س- ١ = )٢ أثبت أن: االقرتان م(س  
 ٣جاس ، قَ(٠) = ٣ ، ق(٠) = ٢ ، فجد ق(س). + ٣ إذا كانت قَ(س) = س٢  
)١ + لــو هـ (ن+ ٤ إذا كانت رسعة جسيم ع بعد ن دقيقة تعطى بالقاعدة: ع = ٤ن  
جد إزاحة اجلسيم بعد 3 دقائق، علامً بأنه قطع مسافة 8 أمتار بعد دقيقة واحدة.

# Page 165

161  
:٥ جد كالً من التكامالت اآلتية  
 دس ١  
 س+ ١ س٠ ٢  
 ٣ دس - س٢ س ١  
 ) دس١ + ) ظا(٣س١ + قا(٣س ٤  
 س دس قا٢ ٣  
) دس ١ - لــو هـ (س٢ ٦  
) جتاس دس ١ + (س٢ ٥  
 دس   
قا٤س  
 ظا٢س- ١   
 ٨  
   
 دس١ + س٢  
 س+ س٣ ٧  
 ظتاس)٨ قتاس دس + (قتاس ١٠  
 جا٤س) دس - (جتا٤س ٩  
 ٦س)٦ دس- (س٨ ١١  
 ف عدديا، حيث ع الرسعة (م/ث)، ف املسافة (م) فإذا كان ٦ يتحرك جسيم حسب العالقة ع = أ  
 مرتاً ، فام قيمة الثابت أ ؟١ف(٢) = ٩ أمتار ، ف(٤) = ٦  
) = ٠π( ق(س) = جتاس ، فجد قاعدة االقرتان ق(س) علامً بأن ق+ )٧ إذا كانت س قَ(س  
٨ أقيّم ذايت: أكمل اجلدول اآلين:   
مستوى االنجاز  
مؤرش االداء  
منخفض   
متوسط  
مرتفع   
اجد تكامل اقرتانات غري حمدودة  
اوظف قواعد التكامل يف حل مسائل منتمية  
اكامل اقرتانات باحد طرق التكامل

# Page 166

126  
التكامل املحدود  
وتطبيقاته  
٥  
الوحدة  
قلعة برقوق تاريخ وتراث، تقاوم من أجل البقاء، فهي شاهد حقيقي عىل التطور   
احلضاري والثقايف ملدينة خان يونس عرب العصور. يراد تغطية قوس القلعة بزجاج،   
اقرتح طريقة حلساب مساحة الزجاج املستخدم.  
Definite Integration  
and its Applications

# Page 167

136  
يتوقع من الطلبة بعد اإلنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين عىل توظيف   
التكامل املحدود وتطبيقاته يف احلياة العمليّة من خالل اآليت:  
 التعرف إىل التجزئة، وحساب جمموع ريامن.1  
.2 إجياد التكامل القرتان خطّي باستخدام التعريف  
3 التعرف إىل النظرية األساسية يف التفاضل والتكامل.  
4 التعرف إىل خصائص التكامل املحدود.  
5 حساب التكامل املحدود.  
6 إجياد مساحة منطقة مستوية باستخدام التكامل املحدود.  
7 توظيف التكامل املحدود يف حساب حجم اجلسم الدوراين، الناتج من الدوران ملنطقة حمدّدة حول حمور   
السينات.

# Page 168

164  
)Partition and Riemann Sum ( 1 التجزئة ومجموع ريمان- 5  
: للحفاظ عىل جودة البيئة، وجتميل شوارع مدينة 1 نشاط  
غزة، قررت البلدية تزيني شارع صالح الدين بزراعة   
كم، فكم 1 أشجار النخيل عىل امتداد الشارع بطول  
شجرة نخيل يلزم لزراعة شجرة كل 05م؟  
   
:تعريف  
إذا كانت [أ ، ب] فرتة مغلقة، وكانت:   
 ، س٢ ، س٣ ، ... ، سن = ب} حيث:١ ن = {أ = س٠ ، س  
] ن جتزئة نونية للفرتة [أ ، ب < س٢ < س٣ < ... < سن فإننا نسمى١س٠ < س  
١- س ر- س ر = س ر ، س ر] الفرتة اجلزئية الرائية، وطوهلا١-وتسمى الفرتة [س ر  
طول الفرتة الكلية = جمموع أطوال مجيع الفرتات اجلزئية  
 أ- ) = ب١- س ر- (س ر  
١ = ر  
ن  
وبالرموز   
 ن لفرتة ما جيب أن تكون: نالحظ من التعريف، أنه لكتابة أي جتزئة  
 الفرتة مغلقة. ١  
.٢ تبدأ التجزئة من بداية الفرتة، وتنتهي بنهايتها  
٣ عنارص التجزئة مرتبة ترتيباً تصاعدياً.  
للعلمي فقط

# Page 169

156  
. ] ، ٣١-[ : أي من اآلتية يعترب جتزئة للفرتة١ مثال  
٣ ، ٢ ، ٣}   
 ، ٢١ ، 4 = {0 ٢  
٣ ، ٢ ، ٣}   
 ، ٢١ ، ١-{ = 4 ١  
} ، ٠ ، ٢ ، ٣١ ، ١-{ = 4 ٤  
 ، ٢ ، ٣ ، ٤} ١ ، ١-{ = 4 ٣  
 ، س٤ = ٣ وعنارصها مرتبة تصاعدياً١- = 4 تعترب جتزئة للفرتة، ألن س٠ ١  
 : احلل  
 ١- ≠ 4 ليست جتزئة، ألن س٠ ٢  
 ، ٣]١-[ 4 ليست جتزئة، ألن 4 ٣  
 ، ٣] ألن عنارصها ليست مرتبة ترتيباً تصاعدياً١-[ 4 ليست جتزئة للفرتة ٤  
   
 مثال ٢ : اكتب 3 جتزئات مخاسية للفرتة [٢ ، ٧]   
 ٥ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦، ٧} : احلل  
٩ ، ٦، ٧}   
٥ ، ٤ ، ٢  
 ٥ = {٢ ، ٢  
} ، ٦، ٧١١  
٧ ، ٣ ، ٢  
 ٥ = {٢ ، ٣  
:فكّر وناقش  
كم جتزئة مخاسية للفرتة [٢ ، ٧] يمكن تكوينها؟  
 ، ٦]١-[ ، ٣ ، ٤ ، ٦} جتزئة ثالثية للفرتة١-{ = ٣ مثال ٣ : إذا كانت  
 ٣ ، ثم احسب طول كل منها. اكتب مجيع الفرتات اجلزئية الناجتة عن  
 ، ٣] ، [٣ ، ٤] ، [٤ ، ٦] ١-[ : ٣ هي احلل : الفرتات اجلزئية الناجتة عن  
 ، 2 1 ، وأطواهلا عىل الرتتيب 4  
تالحظ من املثال السابق أن:  
 ٣ = 4 ، عدد الفرتات اجلزئية = 3 عدد عنارص التجزئة  
 2 = 7 = طول الفرتة الكلية.+ 1 + ٣ = 4 جمموع أطوال الفرتات اجلزئية الناجتة عن

# Page 170

166  
]١} جتزئة رباعية للفرتة [٢ ، ٠١ 4 = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٠ نشاط ٢: إذا كانت  
]١ 4 هي [٢ ، ٤] ، [٤ ، ٦] ، [٦ ، ٨] ، [٨ ، ٠ الفرتات اجلزئية الناجتة عن١  
.......... : 4 هي ٢ العالقة بني أطوال الفرتات اجلزئية الناجتة عن  
٣ عدد الفرتات اجلزئية = ..........  
٤ عدد عنارص التجزئة = .......... (ماذا تالحظ؟)  
 :تعريف  
 ن جتزئة نونية منتظمة للفرتة [أ ، ب]، إذا كانت أطوال مجيع الفرتات اجلزئية تسمى التجزئة  
 أ - ب  
ن  
طول الفرتة الكلية =   
الناجتة عنها متساوية، ويكون طول الفرتة اجلزئية = عدد الفرتات اجلزئية  
   
]١٢ ، ٣-[ مثال ٤ : اكتب جتزئة مخاسية منتظمة للفرتة  
٢ = ٣ - - ١٣  
٥  
 أ = - ب  
ن  
 احلل : طول الفرتة اجلزئية =   
} ١ ، ٣١ ، ٤ ، ٧ ، ٠١ ، ٢-{ = ٥ ومنها تكون  
:فكّر وناقش  
]؟١٢ ، ٣-[ هل هناك جتزئات مخاسية منتظمة أخرى للفرتة  
، جد قيمة ب١  
 ٦ جتزئة منتظمة للفرتة [٥ ، ب] وكان طول الفرتة اجلزئية = ٣ مثال ٥ : إذا كانت  
 ١  
 أ = ٣- ب  
ن  
 احلل : طول الفرتة اجلزئية =   
 = ٦ وينتج أن ب = ٧١ ٥- فيكون ٣ب١  
 ٥ = ٣- ب  
٦  
ومنها

# Page 171

176  
 ن إلجياد قيمة أي عنرص يف التجزئة املنتظمة  
يكون العنرص األول س٠ = أ   
 أ- ب  
ن  
 + = أ١العنرص الثاين س  
 أ ) ..... (ملاذا؟)- ب  
ن  
٢(+ أ = أ- ب  
ن  
 + ١والعنرص الثالث س٢ = س  
   
 أ- ب  
ن  
) ١ - (ر+ = أ١-العنرص الرائي سر  
 ، ٢ ، ... ، ن١ ، أ × ر حيث ر = ٠- ب  
ن  
 + وبشكل عام، فإن: سر = أ  
 ، سر]١-وتكون الفرتة اجلزئية الرائية هي [سر  
   
]، فجد كالً من:١ ، ٩١-[ جتزئةً منتظمةً للفرتة١ ٢ مثال ٦ : لتكن  
٣ الفرتة اجلزئية اخلامسة  
٢ العنرص الثامن   
 س٢ ، س٩ ١  
٧  
 × ٢ = ٣١ + ١٩  
١ ٢+ ١- = أ × ر ومنها س٢- ب  
ن  
 + سر = أ١  
 : احلل  
١ × ٩ = ٤١ + ١٩  
١ ٢+ ١- = س٩  
٢٣  
 × ٧ = ٣١ + ١٩  
١ ٢+ ١- = ٢ العنرص الثامن س٧  
٢٢ ] (حتقق من ذلك)  
 ، ٣١٧  
٣ الفرتة اجلزئية اخلامسة = [س٤ ، س٥] = [ ٣  
 ن منتظمة وطول الفرتة ن للفرتة [٢ ، ٨]، الحظ أن التجزئة نشاط 3 : الشكل املجاور يبني التجزئة  
٦  
اجلزئية فيها = ن  
٢  
٨  
٦  
ن  
٦  
ن  
٦  
ن  
٦  
ن  
........... = ن ٢ عدد عنارص التجزئة  
 طول الفرتة الكلية = ........... ١  
.................... = ٤ العنرص السابع  
٣ س٧ = ...........   
٥ الفرتة اجلزئية السابعة = .................

# Page 172

186  
:تعريف  
 ن جتزئةً نونيةً للفرتة [أ ، ب]، إذا كان ق(س) اقرتاناً معرفًا يف الفرتة [أ ، ب]، وكانت  
 ، س ر] ١- [س ر   
\*  
) حيث س ر١- س ر- ) (س ر  
\*  
ق(س ر  
١ = ر  
ن  
فإن املقدار   
 ن ، ق)(يسمى جمموع ريامن، ويرمز له بالرمز م  
)   
\*  
ق(س ر  
١ = ر  
ن  
 أ- ب  
ن  
 ن ، ق) = (وإذا كانت التجزئة نونية منتظمة فإن م  
 ٣ = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} جتزئةً ثالتية ٢ ، وكانت- مثال ٧ : إذا كان ق(س) = س  
 ١- = س ر  
\*  
 ٣ ، ق) معترباً س ر(للفرتة [٣ ، ٦]، فاحسب م  
 احلل : نكوّن اجلدول اآليت:  
الفرتات اجلزئية١- س ر- س ر  
\*  
س ر  
)  
\*  
ق(س ر  
)١- س ر- ) × (س ر  
\*  
ق(س ر  
[٣ ، ٤]١٣١  
١  
][٤ ، ٥1٤  
٢  
٢  
[٥ ، ٦]1٥  
٣  
٣  
املجموع  
٦  
) = ٦١- س ر- ) (س ر  
\*  
 ق(س ر  
١ = ر  
٣  
 ٣ ، ق) = (أي أن م  
الحظ من الشكل املجاور أن جمموع مساحات املستطيالت  
 ٣ ، ق) = ٦(تساوي م  
١-  
١ -  
 2-  
 3-  
 4-  
213  
4  
5  
6  
س  
ص  
 2- ق(س) = س  
،]٣ ، ٥-[ ٤ جتزئةً رباعيةً منتظمةً للفرتة ٢س ، وكانت- مثال ٨ : إذا كان ق(س) = س٢  
 ١- = س ر  
\*  
 ٤ ، ق) حيث س ر(فاحسب م  
٨ = ٢ ،  
 احلل : بام أن التجزئة منتظمة فإن: طول الفرتة اجلزئية = ٤  
 ، ٣ ، ٥}١ ، ١- ، ٣-{ = ٤ وتصبح

# Page 173

196  
: ٤ هي الفرتات اجلزئية الناجتة عن  
 ، ٣] ، [٣ ، ٥] ١[ ، ]١ ، ١-[ ، ]١- ، ٣-[  
) ، ٣ (ملاذا؟١ ، ١- ، ٣- = املناظرة  
\*  
س ر  
) (ملاذا؟)  
\*  
 ق(س ر  
١ = ر  
ن  
 أ- ب  
ن  
) = ١- س ر- ) (س ر  
\*  
 ق(س ر  
١ = ر  
ن  
 ن ، ق) = (م  
 ق(٣))+ )١( ق+ )١-( ق+ )٣-() = ٢(ق  
\*  
 ق(س ر  
١ = ر  
٤  
 ٤ ، ق) = ٢(م  
 ٣) = ٠٤+ ١- + ٣+ ١ = ٢(٥  
   
 ، هـ٣]، ١[ ، هـ ، هـ٢ ، هـ٣} جتزئةً للفرتة١{ = ٣ س وكانت  
 مثال ٩ : إذا علمت أن ق(س) = لــو هـ   
 = س ر   
\*  
 ٣ ، ق) معترباً س ر(فاحسب م  
 ، هـ] ، [هـ ، هـ٢] ، [هـ٢ ، هـ٣]١[ : ٣ هي احلل : الفرتات اجلزئية الناجتة عن  
 هـ٢) ق(هـ٣)- (هـ٣+ ) هـ) ق(هـ٢- (هـ٢+ )) ق(هـ١ - ٣ ، ق) = (هـ(م  
 هـ٢) (٣)- (هـ٣+ ) هـ) (٢- (هـ٢+ )١( )١ - = (هـ  
١ - هـ- هـ٢- = ٣هـ٣  
]١ ، ١-[ ٤ جتزئةً منتظمةً للفرتة ]، وكانت١ ، ١-[ : إذا كان ق(س) = أس ، س1 مثال 0  
 ١- = س ر  
\*  
 ٤ ، ق) = ٢ ، س ر(فجد قيمة أ علامً بأن م  
} ١ ، ١  
 ، ٠ ، ٢١-  
 ، ٢١-{ = ٤ ، ١  
 احلل : طول الفرتة اجلزئية = ٢  
 ق(س٣))+ ) ق(س٢+ )١ ق(س+ ) (ق(س٠١  
) = ٢  
\*  
 ق(س ر  
١ = ر  
٤١  
 ٤ ، ق) = ٢(م  
))١  
 ق( ٢+ ) ق(٠+ )١-  
 ق( ٢+ )١-( (ق١  
 = ٢  
 أ ) = ٢١  
 ٢+ ٠+ أ١-  
 ٢+ أ-( ١  
 = ٢  
٤- = أ = ٤ ومنها أ-

# Page 174

107  
 1- تمارين 5  
 ، 2]، فجد: ١-[ 6 جتزئةً منتظمةً للفرتة إذا كانت١  
أ العنرص الثالث يف التجزئة ب الفرتة اجلزئية الرابعة  
 للفرتة [جـ ، ٧] يساوي 4، جد قيمة جـ.1 0 ٢ إذا كان العنرص اخلامس يف التجزئة املنتظمة  
 ٤ جتزئةً منتظمةً للفرتة نفسها، ، ٥] ، وكانت١[ س٢ معرفاً يف الفرتة- ٣ إذا كان ق(س) = ٦  
 = س ر   
\*  
 ٤ ، ق) معتربًا س ر(فجد م  
 ٣ جتزئةً منتظمةً للفرتة نفسها، ، 2] ، وكانت١-[ هـ س معرفاً يف الفرتة+ ٤ إذا كان ق(س) = ٢  
 ١- = س ر  
\*  
 ٣ ، ق) معتربًا س ر(فجد م  
 ، ٠ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨} جتزئة ١-{ = ٥ ، ٨]، وكانت١-[ أ س معرفاً عىل  
 ٢+ ٥ إذا كان ق(س) = س  
 ١- = س ر  
\*  
 ٥ ، ق) = ٦٫٥ ، اعترب س ر( ، ٨] ، فاحسب قيمة أ علامً بأن م١-[ للفرتة  
 جتزئةً منتظمةً ١ ٢ ٨ جتزئةً منتظمةً للفرتة [أ ، ب] والعنرص الثالث فيها يساوي 2 ، وكانت ٦ إذا كانت  
للفرتة [أ ، ب] والعنرص اخلامس فيها يساوي 4 ، جد قيم أ ، ب.  
} π  
 ، ٢π  
 ، ٣π  
 ، ٤π  
 ٤ = { ٠ ، ٦ ] ، وكانتπ  
 [0 ، ٢ ٧ إذا كان ق(س) = جاس ، س  
 ١- = س ر  
\*  
 ٤ ، ق) معترباً س ر(أوجد م  
 ن تجزئة نونية منتظمة للفترة نفسها، ] وكانت١ ، ٨ إذا كان ق(س) اقرتاناً معرفاً وحمدوداً يف الفرتة [ ٠  
١- = س ر  
\*  
 ن ، ق) = ك ، عندما س ر( = س ر و م  
\*  
 ن ، ق) = ل ، عندما س ر(وكانت م  
 ق(٠))- )١( (ق١  
 ك = ن- أثبت أن: ل

# Page 175

171  
 )The Definite Integral( 2 التكامل املحدود- 5  
: يعترب تل العاصور من اجلبال العالية الواقعة رشق ١ نشاط  
رام اهلل، يريد السيد جهاد حساب مساحة قطعة   
أرض له واقعة هناك (املنطقة املحدودة باللون األمحر   
يف الشكل املجاور)، الحظ أنه ال يمكن تقسيمها إىل   
أشكال منتظمة، وال يمكن إجياد مساحتها باستخدام   
قوانني املساحة املعروفة. كيف يمكنك مساعدة   
جهاد يف حساب مساحة قطعة األرض؟  
،] ٣ معرفاً يف الفرتة [٢ ، ٦+ : \* إذا كان ق(س) = ٢س١ مثال  
ولتكن ن جتزئةً نونيةً منتظمةً للفرتة نفسها  
 = س ر   
\*  
 ن ، ق) معتربًا س ر(فاحسب م  
)  
\*  
ق(س ر  
١ = ر  
٤ ن  
) = ن  
\*  
ق(س ر  
١ = ر  
 أ ن- ب  
 ن ، ق) = ن( احلل : م  
 أ ر- ب  
ن  
 + = س ر = أ  
\*  
لكن س ر  
٤ ر  
 ن+ فيكون س ر = 2  
٤ ر)   
 ن+ ق(2  
١ = ر  
ن  
٤   
 ن ، ق) = ن(م  
ر  
١ = ر  
ن  
٨   
٤ × ن  
 ن+ ٧  
١ = ر  
ن  
٤   
٨ ر) = ن  
 ن+ (٧  
١ = ر  
ن  
٤   
 = ن  
 وبعد التبسيط )١ + ن(ن  
٢  
٢٣ ×   
 ن٢+ ٤ × ٧ن  
= ن  
 ١٦  
 ن+ ن ، ق) = ٤٤(يكون م  
. ن ، ق) (ن غري حمددة) عىل اقرتانات كثرية حدود من الدرجة األوىل عىل األكثر(\* سوف نقترص دراستنا يف إجياد م  
أتذكر  
(ع ر)   
١ = ر  
ن  
 ± )(ك ر  
١ = ر  
ن  
 ع ر) =± (ك ر  
١ = ر  
ن  
(ك ر)   
١ = ر  
ن  
أ(ك ر) = أ  
١ = ر  
ن  
أ = أ ن  
١ = ر  
ن  
)١ + ن(ن  
٢  
ر =   
١ = ر  
ن  
للعلمي فقط

# Page 176

127  
 ٥ جتزئةً مخاسيةً منتظمةً هلذه ، ب] ، وكانت١[ ٢ معرفاً يف الفرتة- مثال ٢ : إذا كان ق(س) = ٥س  
 = س ر   
\*  
 ٥ ، ق) = ٦٣، جد قيمة ب حيث س ر(الفرتة بحيث ، م  
)  
\*  
 ق(س ر  
١ = ر  
ن  
 أ- ب  
ن  
 ن ، ق) = ( احلل : م  
 ر ١ - ب  
٥  
 + ١ = = س ر  
\*  
س ر  
 ر) ١ - ب  
٥  
 + ١( ق  
١ = ر  
٥١ - ب  
٥  
) =   
\*  
 ق(س ر  
١ = ر  
٥١ - ب  
٥  
 ٥ ، ق) = (م  
) ر)) ١ - (ب+ (٣  
١ = ر  
٥١ - ب  
٥  
 =   
٥ × ٦)) = ٦٣  
) ٢١ - (ب+ (٣ × ٥١ - ب  
٥  
ومنها يكون   
 = ٠ ، وبحل املعادلة، ينتج أن: ١ ٢- ب- وينتج بعد التبسيط أن: ب٢  
٣ (مرفوضة) .......... (ملاذا؟)- = ب = ٤ ، ب  
:تعريف التكامل املحدود  
إذا كان االقرتان ق(س) معرفاً وحمدوداً\* يف الفرتة [أ ، ب]،   
 ، س ر] فإن االقرتان ق(س)١- [س ر   
\*  
 ن ، ق) = ل جلميع قيم س ر( م  
ن ← ∞ وكانت  
 ق(س) دس = ل   
أ  
ب  
 يكون قابالً للتكامل يف الفرتة [أ ، ب]، ويكون  
(نسمي أ ، ب حدود التكامل)  
 جمال االقرتان س \* يكون االقرتان ق(س) حمدوداً إذا وجد عددان حقيقيان م ، ن حيث م ≤ ق(س) ≤ ن

# Page 177

137  
 ق(س) دس  
٠  
٣  
 = س ر ، احسب  
\*  
 [٠ ، ٣]، معترباً س ر ٤س حيث س- مثال ٣ : إذا كان ق(س) = ٥  
باستخدام تعريف التكامل املحدود .  
)  
\*  
 ق(س ر  
١ = ر  
ن  
 أ- ب  
ن  
   
ن ← ∞ = ق(س) دس  
أ  
ب  
 : احلل  
 ق(س ر)  
١ = ر  
ن  
 0- 3  
ن  
   
ن ← ∞ = ق(س) دس  
٠  
٣  
 إذن  
3 ر)) (ملاذا؟)  
 ٤ ( ن- (٥  
١ = ر  
3 ن  
 ن  
ن ← ∞ =   
)ر) (ملاذا؟  
١ = ر  
ن  
 ١٢  
 ن- ٥  
١ = ر  
ن  
3 (  
 ن  
ن ← ∞ =   
 )  
)١ + ن(ن  
٢  
 × ١٢  
 ن- ٣ (٥ن  
 ن  
ن ← ∞ =   
) ٦- ن-( ٣  
 ن  
ن ← ∞ =   
٣- = )  
١٨  
 ن- ٣-(   
∞ ← ن =   
   
:أتذكر  
 ق(س) =  
 ∞± ← س إذا كان ق(س) اقرتاناً نسبياً، فإن  
 عدداً حقيقياً ≠ 0، إذا كانت درجة البسط = درجة املقام،   
. وتكون قيمة النهاية = معامل سن يف البسط ÷ معامل سن يف املقام حيث ن أعىل أس يف البسط واملقام  
 صفراً إذا كانت درجة البسط أقل من درجة املقام.  
. ∞ ، إذا كانت درجة البسط أكرب من درجة املقام- إما ∞ ، أو

# Page 178

174  
 )١ + ) (٢أ ن١ + (ن  
ن٢  
 ن ، ق) = (ق(س) دس = ٩ ، وكان م  
١-  
٤  
 مثال ٤ : إذا علمت أن  
 ، ٤] ، فجد قيمة الثابت أ .١-[ ن جتزئة نونية منتظمة للفرتة حيث  
 ن ، ق) ( م  
ن ← ∞ = ق(س) دس  
١-  
٤  
 : احلل  
 = ٩)١ + ) (٢أ ن١ + (ن  
ن٢  
   
ن ← ∞ = ق(س) دس  
١-  
٤  
 إذن  
٩ ..... (ملاذا؟)  
ومنها يكون ٢أ = ٩ ومنها أ = ٢  
قابلية االقرتان ق(س) للتكامل يف الفرتة [أ ، ب]  
 :)١( نظرية  
إذا كان ق(س) اقرتاناً متصالً يف الفرتة [أ ، ب]، فإنه يكون قابالً للتكامل يف الفرتة [أ ، ب].  
٢ ، ٤]. وملاذا؟-[ ٥ قابل للتكامل يف الفرتة+ مثال ٥ : هل االقرتان ق(س) = س٢  
٢ ، ٤] -[ ٥ قابل للتكامل يف الفرتة+ احلل : ق(س) = س٢  
٢ ، ٤] كونه كثري حدود. -[ ألنه متصل يف الفرتة  
 :)٢( نظرية  
إذا كان االقرتان ق(س) قابالً للتكامل يف الفرتة [أ ، ب]، وكان االقرتان هـ(س) = ق(س)   
 [أ ، ب]، عدا عند جمموعة منتهية من قيم س يف تلك الفرتة ، فإن هـ(س) جلميع قيم س  
يكون قابالً للتكامل يف الفرتة [أ ، ب]   
ق(س) دس   
أ  
ب  
 = هـ(س) دس  
أ  
ب  
 ويكون

# Page 179

157  
.] س يف الفرتة [٤ ، ٦١  
٢ = ) مثال ٦ : ابحث يف قابلية التكامل لالقرتان ق(س  
2 ، 4 ≤ س < 6  
3 ، س = ٦  
 س = ١  
٢ = ) احلل : تعلم أن ق(س  
 [٤ ، ٦] ، الحظ أن هـ(س) قابل للتكامل ألنه متصل نفرض أن هـ(س) = ٢ حيث س  
 [٤ ، ٦] ما عدا عند س = 6 وبام أن هـ(س) = ق(س) جلميع قيم س  
 س يكون قابالً للتكامل عىل [٤ ، ٦].١  
٢ = )فإن االقرتان ق(س  
٢ ، ٢] -[ قابل للتكامل يف الفرتة١ - س٢  
١ + مثال ٧ : بيّ أن االقرتان ق(س) = س  
٢ ، ٢]-[ حيث س١ - احلل : نفرض أن هـ(س) = س  
٢ ، ٢]-[ الحظ أن هـ(س) اقرتان متصل؛ ألنه كثري حدود فهو قابل للتكامل يف الفرتة  
 1- = ٢ ، ٢] ما عدا عند س-[ وبام أن هـ(س) = ق(س) عند مجيع قيم س  
٢ ، ٢]-[ فإن االقرتان ق(س) يكون قابالً للتكامل يف  
 2- تمارين 5  
 ، ٣]، ١-[ ن جتزئةً نونيةً منتظمةً للفرتة ٥س، وكانت- إذا كان ق(س) = ٢١  
 = س ر  
\*  
 ن ، ق) معتربًا س ر(فاحسب م  
]،١ ، ن جتزئةً نونيةً منتظمةً للفرتة [٠ ب وكانت+ )٢ إذا كان ق(س) = أ هـ(س  
   
\*  
 ب جلميع اختيارات س ر+ ) ن ، هـ( ن ، ق) = أم(فأثبت أن: م  
٥٢ ، فام قيمة الثابت ب ؟  
 ن+ ن ، ق) = ٥٣( ، ب]، وكان م١[ ٣ إذا كان ق(س) = ٢س معرفاً يف الفرتة  
٤ استخدم تعريف التكامل املحدود يف إجياد قيمة كل من:  
 ٦س) دس - (٤  
١  
2  
 ب  
 دس ١  
٢١-  
٤  
 أ  
 π  
 ، ٢π  
٢  
- قابل للتكامل يف الفرتة١ - جتا٣س  
١ - ٥ بيّ أن االقرتان ق(س) = جتاس

# Page 180

167  
)Fundamental Theorem of Calculus( 3 العالقة بني التفاضل والتكامل- 5  
 س، - : الشكل املجاور يمثل منحنى االقرتان ق(س) = ٢١ نشاط  
واملار بالنقطتني أ ، ب  
 مساحة املثلث أ و ب = ..........١  
)٢ إذا كان م(س) هو االقرتان األصيل لالقرتان ق(س  
 جـ+   
س٢  
 ٢- س) دس = ٢س- (٢ = ) فإن م(س  
 م(٠) = .......... ماذا تالحظ؟- )٣ قيمة م(٢  
س  
ص  
 س- ق(س) = ٢  
و  
ب  
أ  
:تعريف  
إذا كان م(س) هو أحد االقرتانات األصلية لالقرتان املتصل ق(س) يف الفرتة [أ ، ب]،  
 م(أ) يساوي التكامل املحدود لالقرتان ق(س) يف الفرتة [أ ، ب]- )فإن املقدار م(ب  
ق(س) دس   
أ  
ب  
 ونرمز له بالرمز  
 النظرية األساسية للتفاضل والتكامل  
 إذا كان االقرتان ق(س) متصالً يف الفرتة [أ ، ب]، وكان م(س) اقرتاناً أصلياً لالقرتان ١  
 ) م(أ- )= م(ب  
أ  
ب  
 )ق(س) دس = م(س  
أ  
ب  
 ق(س) فإن  
أ إذا كان االقرتان ق(س) قابالً للتكامل يف الفرتة [أ ، ب]،  
٢   
 [أ ، ب] ق(ص) دص جلميع قيم س  
أ  
س  
= ) فإن ت(س  
 ويسمى ت(س) االقرتان املكامل لالقرتان ق(س).  
 ] أ ، ب [ ب إذا كان ق(س) اقرتاناً متصالً، فإن تَ(س) = ق(س) لكل س

# Page 181

177  
: : جد قيمة كل مما يأيت١ مثال  
) دس ١ - (٤س٣  
٢-  
٣  
 ١  
 ٣ س دس  
٤  
٩  
 ٢  
 دس   
هـس  
١  
٢  
 ٣  
 س اقرتان أصيل لالقرتان ق(س)- متصل عىل ح ، م(س) = س٤١ - ق(س) = ٤س٣1  
 : احلل  
٢-  
٣  
 ) س- = (س٤  
٢-  
٣  
 )) دس = م(س١ - (٤س٣  
٢-  
٣  
 إذن  
٢)] = ٠٦-( - ٢)٤-([ - ]) (٣- = [(٣)٤  
٣  
٢ الحظ أن أحد االقترانات األصلية لالقتران ٣ س هو ٢س٢  
= .......... (أكمل)  
٤  
٩  
   
٣  
 دس = ٢س٢  
١  
٣س٢  
٤  
٩  
 = ٣ س دس  
٤  
٩  
   
) هـ (ملاذا؟- = هـ٢  
١  
٢  
   
 دس = هـس  
هـس  
١  
٢  
 ٣  
 مثال ٢ : إذا كان م(س) اقرتان أصيل لالقرتان ق(س)  
ق(س) دس  
٣-  
٧  
 ، فجد13) = 4 ، م(7) = 2-(وكانت م  
   
٣-  
٧  
 )ق(س) دس = م(س  
٣-  
٧  
 : احلل  
3) = ٨-( م- ) = م(7

# Page 182

187  
،)٢ ، ٤]، فجد ت(س-[ مثال ٣ : إذا كان ق(س) = ٤س٣ معرفاً يف الفرتة  
)١(٢) ، ت-(ثم احسب ت  
ق(ص) دص   
أ  
س  
 = ) احلل : ت(س  
ق(ص) دص   
٢-  
س  
 =   
٢-  
س  
 ٤ص٣ دص = ص٤  
٢-  
س  
 =   
١ ٦- = س٤  
١٥- = ١ ٦- ١ = )١( = ٠ ، ت١ ٦- ١٢) = ٦-(ومنها ت  
:فكّر وناقش  
) دون إجياد ت(س)؟١(كيف يمكنك إجياد ت  
] ، فجد:π  
 [ ٠ ، ٢ جا٢س ، س+ مثال ٤ : إذا كان ق(س) = س٢  
 ق(س) دس  
π  
٤  
٠  
 ٣  
٢ ت(٠)   
 االقرتان املكامل ت(س) ١  
 جا٢ص) دص+ (ص٢  
٠  
س  
= ق(ص) دص  
٠  
س  
= ) ت(س1  
 : احلل  
 (ملاذا؟)١  
 ٢+ جتا٢س  
٢  
 -   
س٣  
 = ٣  
 = ٠١  
 ٢+ )جتا٢(٠  
٢  
 -   
(٠)٣  
٢ ت(٠) = ٣  
 (ملاذا؟)١  
 ٢+   
 ٣π  
١) = ٢٩π  
 ق(س) دس = ت ( ٤  
π  
٤  
٠  
 ٣

# Page 183

197  
:سوف نقدم االقرتان املكامل القرتان متعدد القاعدة يف الدرس التايل  
 :نظرية  
إذا كان ت(س) هو االقرتان املكامل لالقرتان ق(س) املعرف يف الفرتة [أ ، ب] فإن:  
 ت(س) اقرتان متصل دائامً يف الفرتة [أ ، ب]. ١  
٢ ت(أ) = ٠  
قا٥س ظاس دس   
٠  
π  
٣  
 مثال 5 : جد  
دص  
 احلل : نفرض ص = قاس فيكون دص = قاس ظاس دس ومنها دس = قاس ظاس  
 جـ +   
ص٥  
 ص٤ دص = ٥ = دص  
 ص٥ ظاس ص ظاس = قا٥س ظاس دس  
قا٥س هو أحد االقرتانات األصلية  
 جـ ، الحظ أن ٥+ قا٥س  
 قا٥س ظاس دس = ٥  
   
٠  
π  
٣ قا٥س  
قا٥س ظاس دس = ٥  
٠  
π  
٣  
 ومنها  
٣ ..... (ملاذا؟)١  
 = ٥)قا٥ (٠  
٥  
 -   
π  
 ٣  
قا٥  
٥

# Page 184

108  
 3- تمارين 5  
 جد قيم التكامالت املحدودة اآلتية:١  
 ٣)٣ دس- س(س٢  
١  
٢  
 ب  
 س )٢ دس + (٣  
٠  
٤  
 أ  
   
)٣ دس١ - س٢(س١٠٢  
٠  
٢  
 د  
س دس   
لــو هـ   
١  
هـ  
 جـ  
 [٠ ، ٤] ، أوجد ت(س) س ، س  
١ + ٢ إذا كان ق(س) = س  
٢ ≤ س ≤ ٣ ، هو االقرتان املكامل لالقرتان ق(س)- ، أ+ ٢س٢  
 ، ٣ < س ≤ ٥١ + بس  
٣ إذا كان ت(س) =   
٢ ، ٥] ، فجد قيم الثابتني أ ، ب .-[ يف الفرتة  
   
 جـ + سπ جا+ ق(ص) دص = س  
١  
٢  
س  
 ٤ إذا كان ق(س) اقرتاناً متصالً، وكان  
١  
فجد قيمة الثابت جـ ، ثم ق(٢) حيث س ≥ ٢  
 ، احسب قيمة أ .١- = )) دص وكان تَ(٢  
 هـص+ (أ  
١  
س  
= )٥ إذا كان ت(س  
)٥ دس ١ - ٢س) (س- (س٢  
٠  
١  
 ٦ جد

# Page 185

181  
 )Properties of Definite Integral( 4 خصائص التكامل املحدود- 5  
:للتكامل املحدود خصائص مهمة تسهل حساب قيمته، ومنها  
إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقرتانني قابلني للتكامل عىل [أ ، ب] فإن:   
ق(س) دس   
ب  
أ  
- = ق(س) دس  
أ  
ب  
 ١  
 ق(س) دس = 0  
أ  
أ  
 ٢  
 ح أ) حيث ك- ك دس = ك (ب  
أ  
ب  
 ٣  
 ح ق(س) دس حيث ك  
أ  
ب  
ك ق(س) دس = ك  
أ  
ب  
 ٤  
هـ(س) دس (يمكن تعميمها عىل أكثر من اقرتانني)  
أ  
ب  
± ق(س) دس  
أ  
ب  
= هـ(س)) دس± )(ق(س  
أ  
ب  
 ٥  
 : جد قيمة ما يأيت: ١ مثال  
 ٥ دس + ٧س٢- ٣س٤  
س٢  
١  
٢  
 ٣  
٣ جاس دس -  
π  
٣  
π  
٣  
 ٢  
دس   
٤-  
٦  
 ١  
١٤)) = ٠-( - دس = (٦  
٤-  
٦  
 1  
 : احلل  
٣ جاس دس = ٠ (ملاذا؟)-  
π  
٣  
π  
٣  
 ٢  
٥ ) دس  
 س٢+   
٧س٢  
 س٢-   
٣س٤  
( س٢  
١  
٢  
 = ٥ دس+ ٧س٢- ٣س٤  
س٢  
١  
٢  
 ٣  
 = .............. (أكمل)  
١  
٢  
 )٥  
 س- ٧س- ٢) دس = (س٣- ٥س+ ٧- (٣س٢  
١  
٢

# Page 186

128  
4 دس = 63 ، فام قيمة/ قيم الثابت أ ؟  
١+٣أ  
٥أ+٢  
 مثال ٢ : إذا كان  
)) = ٦٣١ + (٣أ- ) ٥أ+ 4 دس = ٤((٢  
١+٣أ  
٥أ+٢  
 احلل : حسب اخلاصية (3) يكون  
 ٤ = ٦٣ ومنها أ = ٤+ أي أن ٨أ  
 ، فجد: ١ق(س) دس = ٠  
٣  
٦  
 مثال ٣ : إذا كان ق(س) اقرتاناً قابالً للتكامل، وكان  
ق(س) دس   
6  
3  
 ٢  
ق(س) دس   
٣  
3  
 ١  
ق(س) دس = 0  
٣  
3  
 1  
 : احلل  
 ١٠- = ق(س) دس  
3  
6  
- = ق(س) دس  
6  
3  
 ٢  
:نظرية  
إذا كان ق(س) اقرتاناً قابالً للتكامل يف الفرتة [أ ، ب] ، وكان ق(س) ≥ ٠   
ق(س) دس ≥ ٠   
أ  
ب  
 : [أ ، ب] فإن لكل س  
٣س دس ≥ ٠  
 ٤+ س٢  
٠  
٥  
 : مثال ٤ : بدون حساب التكامل بيّ أن  
 [٠ ، ٥] س ، ٣س يف الفرتة [٠ ، ٥]، وبام أن ٣س ≥ ٠  
 ٤+ احلل : نبحث يف إشارة املقدار س٢  
 [٠ ، ٥] س ، ٤ ≥ ٤ > ٠+ وكذلك س٢  
٣س دس ≥ ٠  
 ٤+ س٢  
٠  
٥  
 [٠ ، ٥] ومنها س ٣س ≥ ٠  
 ٤+ إذن س٢

# Page 187

04.1  
٣  
 أكرب قيمة للمقدار

# Page 188

184  
:خاصية اإلضافة  
إذا كان ق(س) اقرتاناً قابالً للتكامل يف الفرتة ف ⊆ ح  
وكان أ ، ب ، جـ أي ثالثة أعداد تنتمي للفرتة ف فإن:   
ق(س) دس   
جـ  
ب  
 + ق(س) دس  
أ  
جـ  
 = ق(س) دس  
أ  
ب  
س  
ص  
ق(س)  
أ  
جـ  
م٢١م  
ب  
 ق(س) دس  
٤  
٩  
 + ق(س) دس  
1-  
٤  
 : مثال ٧ : عبّ بتكامل واحد عام يأيت  
ق(س) دس   
1-  
٩  
 = ق(س) دس  
٤  
٩  
 + ق(س) دس  
1-  
٤  
 : احلل  
   
٢ق(س) دس   
٢  
٨  
 ٥ ، فجد- = ق(س) دس  
٨  
٦  
 ق(س) دس = ٣ ، وكان  
٢  
٦  
 مثال ٨ : إذا كان  
ق(س) دس   
٦  
٨  
 + ق(س) دس  
٢  
٦  
 = ق(س) دس  
٢  
٨  
 : احلل  
5) = 8-( - ق(س) دس = 3  
٨  
٦  
 - ق(س) دس  
٢  
٦  
 =   
١ق(س) دس = ٦  
٢  
٨  
٢ق(س) دس = ٢  
٢  
٨  
 أي أن  
 ≤ س ≤ ٢ ، فجد االقرتان املكامل ت(س)١- ، ٣س٢  
 ٢ ، ٢ < س ≤ ٤+ ٤س  
مثال ٩ : إذا كان ق(س) =   
١ + ٣ص٢ دص = س٣  
١-  
س  
= ق(ص) دص  
١-  
س  
= ) ≤ س ≤ ٢ فإن ت(س١- عندما1  
 : احلل  
٢ عندما ٢ < س ≤ ٤ فإن:   
ق(ص) دص   
٢  
س  
+ ق(س) دس  
١-  
٢  
= ق(ص) دص  
١-  
س  
= ) ت(س  
 ٣ (ملاذا؟)- ٢س+ ٢) دص = ٢س٢+ (٤ص  
٢  
س  
+ = ٩

# Page 189

158  
 ≤ س ≤ ٢١- ، ١ + س٣  
 ٣ ، ٢ < س ≤ ٤- ٢س+ ٢س٢  
 ومنها ت(س) =   
) = ٠١-(الحظ أن ت(س) متصل ، ت  
 ٧ ، س > ٢ ، - ٣س٢  
٢س ، س ≤ ٢  
 نشاط : إذا كان ق(س) =   
(........) دس   
٢  
٣  
 + ٢س دس  
٢-  
٢  
 = ق(س) دس  
٢-  
٣  
 فإن  
 ......... + = صفر  
٢  
٣  
 ٧س- س٣+   
٢-  
٢  
 = س٢  
 دس ١  
 هـس+ ١  
١  
٢  
 : جد1 مثال 0  
 دس   
 هـس-   
 هـس+ ١  
 هـس+ ١  
١  
٢  
 للبسط يصبح  
 احلل : بإضافة وطرح هـس  
) دس   
هـس  
 هـس+ ١ - ١(  
١  
٢  
=   
١  
٢  
 )|  
 هـس+ ١| لــو هـ- = (س  
 هـ)))+ ١( لــو هـ- ١( - ) هـ٢+ ١( لــو هـ- = (٢  
 هـ ) (ملاذا؟)+ ١  
 هـ٢+ ١ ( لــو هـ+ ١ =  
:فكّر وناقش  
 هـ س+ ١ = جد التكامل السابق بالتكامل بالتعويض بفرض ص

# Page 190

168  
 س٢ قَ(س) دس  
٠  
٢  
 س ق(س) دس = ٨ ، ق(٢) = ٥ ، فجد  
٠  
٢  
 : إذا كان١١ مثال  
 احلل : نفرض أن: م = س٢ دع = قَ(س) دس   
 ع = ق(س) دم = ٢س دس  
   
٢س ق(س) دس   
٠  
٢  
- )س٢ قَ(س) دس = س٢ ق(س  
٠  
٢  
 :ومنها ينتج أن  
س ق(س) دس   
٠  
٢  
 ٢-   
٠  
٢  
 )س٢ قَ(س) دس = س٢ ق(س  
٠  
٢  
   
 ٢ × ٨- )) ٠ × ق(٠- ) = (٤ × ق(٢  
 = ٤١ ٦- = ٠٢  
 ؟١ > ٣ فام قيمة الثابت أ حيث أ  
 دس = ٢لــو هـ ٢  
٤  
١ - س٢  
٢  
أ  
 : اذا كان١ مثال ٢  
 دس بطريقة الكسور اجلزئية  
٤  
١ - س٢  
٢  
أ  
 احلل : نجد  
٢ (حتقق من ذلك) - = ، فتكون ل = ٢ ، ب  
ب  
١ + س+ ل  
١ - = س  
٤  
١ - نفرض أن س٢  
   
٢  
أ  
 )|١ + ٢لــو هـ |س- |١ - دس = (٢لــو هـ |س  
٤  
١ - س٢  
٢  
أ  
|١ - ٢  
١ + ٢لــو هـ |٢- | ١ - أ  
١ + = ٢لــو هـ |أ  
٣   
| = ٢لــو هـ ٢١ - ٢  
١ + ٢لــو هـ |٢- | ١ - أ  
١ + ويكون ٢لــو هـ |أ  
٣   
 = لــو هـ ٢١  
 لــو هـ ٣- ١ - أ  
١ + وبحل املعادلة لــو هـ أ  
٣ ومنها أ = ٣ (ملاذا؟)  
 = ٢١ - أ  
١ + وينتج أن ٣ × أ

# Page 191

178  
 4- تمارين 5  
 جد قيمة التكامالت اآلتية:١  
 )٢ دس  
 هـس+ ١(  
٠  
٢  
 ب  
جا٢س دس   
٠  
π  
 أ  
 دس   
 ٧٢- س٣  
 ٩+ ٣س+ س٢  
٢-  
١  
 د  
 ٤) دس + )(س٢١ + (س  
 ٣-  
 ٣  
 جـ  
٢ أثبت بدون حساب قيمة التكامل فيام يأيت:  
) دس ١ - (٢س  
1  
٢  
 ≥ ٢) دس+ (س٢  
1  
٢  
 أ  
 ٢) دس ≥ ٠+ (س٢  
٢  
٣  
 ب  
٣ عبّ عن كل مما يأيت بتكامل واحد:  
س٣ دس   
1  
٥  
+ س٣ دس  
٥  
٧  
 أ  
 ٢ دس + س  
٤  
٢  
- ٢ دس+ س  
١  
٢  
 ب  
 ٤) دس + (س٢  
٣  
٥  
+ ٤ دس  
٣  
١  
- س٢ دس  
1  
٣  
 جـ  
 دس   
 س٢- ١  
١ + س  
٧  
٥  
 + ) دس١ - (س  
٢  
٥  
 د  
ق(س) دس = ٧   
١  
٥  
 ٤ إذا كان  
) دس ١ + ٣س- )(٢ق(س  
١  
٥  
أ جد  
١ = ٢أق(س) دس  
١  
٥  
ب احسب قيمة أ علامً بأن

# Page 192

188  
ق(س) دس = ٨ فام قيمة؟  
١  
٥  
 ٥ إذا كان  
 ٢) دس- )(٣ق(س  
١  
٥  
 أ  
 ٢س) دس - ) ٢- (٤ق(س  
٣  
٧  
 ب  
٢ق(س) دس ؟  
٤  
٧  
 ، فام قيمة١٥ق(س) دس = ٠  
٢  
٤  
 ٣ق(س) دس = ٩ ، وكان  
٢  
٧  
 ٦ إذا كان  
١ق(س) دس = ٨  
١  
٣  
 ≤ س ≤ ٢ ،فجد قيمة الثابت أ علامً بأن١ ، ١ + أ س  
٣س٢ ، ٢ < س ≤ ٥  
٧ إذا كان ق(س) =   
، فام قيمة/قيم الثابت ب؟١٣ع٢ دع) دس = ٢  
١-  
٢  
 - (٤س  
١  
ب  
 ٨ إذا كان  
 [٠ ، ٥] ، أوجد االقتران المكامل ت(س). س| ، س- ٩ إذا كان ق(س) = |٢

# Page 193

198  
)Applications of Definite Integral( ٥ تطبيقات التكامل املحدود- ٥  
)Area( أوالً: املساحة  
 : الشكل املجاور يبني مبنى وزارة الرتبية والتعليم العايل ١ نشاط  
الفلسطينية، يراد طالء املنطقة املحددة باأللوان فوق   
مدخل املبنى، فإذا علمت أن املنحنى األزرق يمثل   
 3س٢، فكيف - تقريباً منحنى االقرتان ق(س) = 6  
يمكننا حتديد املساحة املراد طالؤها؟  
 ] ٣ بيانياً يف الفرتة [٠ ، ٤+ نشاط ٢ : إذا مثلنا منحنى االقرتان ق(س) = س  
كام يف الشكل املجاور، فإن:  
 املساحة املحصورة بني منحنى االقرتان ق(س) وحمور ١  
 السينات واملستقيمني س = 0 ، س = 4 هي مساحة شبه  
منحرف طويل قاعدتيه ....... ، ....... وارتفاعه 4 وحدات،   
وتكون قيمتها ....... وحدة مربعة.  
 ٣+ ق(س) = س  
١2  
3  
4  
............. = ٣) دس+ (س  
٠  
٤  
 ٢ قيمة  
٣ العالقة بني مساحة شبه املنحرف وناتج التكامل لالقرتان ق(س) يف [٠ ، ٤]   
 هي .......... ، ماذا تستنتج؟  
الحالة األوىل: مساحة منطقة محصورة بني منحنى اقرتان ومحور السينات يف الفرتة [أ ، ب]  
:)١( نظرية  
إذا كان ق(س) اقرتاناً قابالً للتكامل يف [أ ، ب] فإن مساحة املنطقة املحصورة بني منحنى   
|ق(س)| دس   
أ  
ب  
= االقرتان ق(س) وحمور السينات يف [أ ، ب] تعطى بالعالقة : م

# Page 194

109  
 وحمور السينات١ + : احسب مساحة املنطقة املحصورة بني منحنى االقرتان ق(س) = س١ مثال  
واملستقيمني س = ٢ ، س = ٣  
 احلل : نجد نقاط تقاطع منحنى االقرتان ق(س) مع حمور السينات   
 [٢ ، ٣] 1- = = 0 ومنها س1 + وذلك بوضع س  
 [٢ ، ٣] س ، > ٠1 + س  
|  
٢  
٣  
 س+   
س ٢  
| دس = | ٢١ + |س  
٢  
٣  
= |ق(س)| دس  
٢  
٣  
= م  
٧ وحدة مربعة.   
 ٢) = ٢- (٣١ +   
 ٢ ٢- ٣ ٢  
٢  
 =   
١ + ق(س) = س  
١-2  
م  
3  
 ٩ وحمور السينات- مثال ٢ : احسب مساحة املنطقة املحصورة بني منحنى االقرتان ق(س) = س٢  
 احلل : نجد نقاط التقاطع بني منحنى االقرتان وحمور السينات  
٣± = ٩ = ٠ ومنها س- بوضع س٢  
 ٩- ق(س) = س٢  
٣-املنطقة م  
3  
 ٩)| دس- |(س٢  
٣-  
٣  
= |ق(س)| دس  
٣-  
٣  
= م  
 = ٦٣ وحدة مربعة١٨٠  
| = ٣١٨٠-  
٣  
 | = |  
٣-  
٣ ) ٩س-   
س ٣  
 = |( ٣  
]π ، مثال ٣ : جد مساحة املنطقة املحصورة بني منحنى االقرتان ق(س) = جاس وحمور السينات يف [٠  
 احلل : نجد نقاط التقاطع بني منحنى االقرتان ق(س) وحمور السينات  
π ، يوضع جاس = ٠ ومنها س = ٠  
ق(س) = جاس  
π   
 |جاس| دس  
π  
٠  
 = |ق(س)| دس  
π  
٠  
 = م  
 = ٢ وحدة مربعة١ + ١ = |  
٠  
π  
 جتاس-| =

# Page 195

191  
:الحالة الثانية: مساحة املنطقة املحصورة بني منحنيني، أو أكثر  
:)٢( نظرية  
إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقرتانني قابلني للتكامل يف [أ ، ب] فإن مساحة املنطقة املحصورة   
بني منحنيي ق(س) ، هـ(س) يف [أ ، ب] تعطى بالعالقة :   
 هـ(س)| دس - )|ق(س  
أ  
ب  
= م  
 س٢ ، هـ(س) = س٢ - مثال ٤ : جد مساحة املنطقة املحصورة بني منحنيي االقرتانني ق(س) = ٨  
 احلل : نجد نقاط التقاطع بني منحنيي االقرتانني ق(س) ، هـ(س)   
 هـ(س) = 0 - )بوضع ق(س) = هـ(س) فتكون ق(س  
٢± = ٢س٢ = ٠ ومنها س- أي أن ٨  
 هـ(س)| دس- )|ق(س  
٢-  
٢  
 = م  
 ٢س٢)| دس - |(٨  
٢-  
٢  
= م  
٤٦ وحدة مربعة  
 | = ٣  
٢-  
٢  
)٢ س٣  
 ٣- = |(٨س  
 س٢- ق(س) = ٨  
هـ(س) = س٢  
٢-  
املنطقة م  
٢  
 س٢- مثال ٥ : احسب مساحة املنطقة املحصورة بني منحنيي االقرتانني ق(س) = |س| ، هـ(س) = ٢  
 احلل : نجد نقاط التقاطع بني منحنيي االقرتانني ق(س) ، هـ(س) بوضع ق(س) = هـ(س)  
س ، س ≤ ٠-  
لكن ق(س) = س ، س > ٠  
 (ملاذا؟)١- = س ومنها س- = س٢- عندما س ≤ ٠ ، ٢  
 (ملاذا؟) ١ = س٢ = س ومنها س- عندما س > ٠ ، ٢  
س- = )(س١ق  
ق٢(س) = س  
 س٢- هـ(س) = ٢  
١-  
م٢١م  
١

# Page 196

129  
 م٢+ ١ ق(س)| دس = م- )|هـ(س  
١-  
١  
 = م  
س)| دس -( - ) س٢- |(٢  
١-  
٠  
 = ١م  
٧ وحدة مربعة  
 | = ٦  
١-  
٠  
 ) س٢١  
 ٢+ س٣١  
 ٣- س)| دس = |(٢س+ س٢- |(٢  
١-  
٠  
 =   
٧ وحدة مربعة  
 | = ٦  
٠  
١  
) س٢١  
 ٢- س٣١  
 ٣- س)| دس = |(٢س- س٢- |(٢  
٠  
١  
 = م٢  
٧ وحدة مربعة  
 م٢ = ٣+ ١م = م  
٧  
٧ = ٣  
 = ٢ × ٦١ = م٢ ، وبالتايل م = ٢ × م١نالحظ أن: م  
س واملستقيمني:   
 مثال ٦ : احسب مساحة املنطقة املحصورة بني منحنى االقرتان ق(س) = لــو هـ   
، ص = 2 وحمور الصادات. 1 = ص  
 ، ص = ٢، كام يأيت:١ = احلل : نجد نقط تقاطع منحنى االقرتان مع املستقيمني ص  
 ومنها س = هـ١ = س  
نضع لــو هـ   
ق(س) = لــوس  
م٢١م  
ص = ٢  
١ = ص  
س = ٢ ومنها س = هـ٢  
نضع لــو هـ   
) دس = هـ وحدة مربعة ١ - (٢  
٠  
هـ  
 = ١م  
س دس   
لــو هـ   
هـ  
هـ٢  
 - ) هـ- س) دس = ٢(هـ٢  
 لــو هـ - (٢  
هـ  
هـ٢  
 = م٢  
| (ملاذا؟)  
هـ  
هـ٢ ) س- س  
 |(س لــو هـ - ٢هـ- = ٢هـ٢  
 هـ٢)- (٢هـ٢- ٢هـ- = ٢هـ٢  
 ٢هـ- = هـ٢  
 هـ وحدة مربعة- م٢ = هـ٢+ ١مساحة املنطقة املطلوبة = م

# Page 197

139  
 مثال ٧ : احسب مساحة املنطقة املحصورة بني منحنيي ق(س) = س٣ ، هـ(س) = س  
 احلل : نجد نقاط التقاطع بني منحنيي االقرتانني ق(س) ، هـ(س)   
 س = ٠ - بوضع ق(س) = هـ(س) اذن س٣  
١- = ، س١ = ومنها س = ٠ ، س  
)هـ(س  
ق(س)  
م٢  
١م  
 م٢+ ١ هـ(س)| دس = م- )|ق(س  
١-  
١  
 = م  
 س٣) دس - (س  
٠  
١  
 + س) دس- (س٣  
١-  
٠  
 = م  
 وحدة مربعة (ملاذا؟)١  
 = ٢  
 مثال ٨ : إذا علمت أن مساحة املنطقة املحصورة بني منحنيي االقرتانني ق(س) = س٢ ، هـ(س) = جـ   
 ح هي 63 وحدة مربعة ، فجد قيمة/ قيم جـ . جـ  
 احلل : نجد نقاط التقاطع بني منحنيي االقرتانني ق(س) ، هـ(س)،   
بوضع ق(س) = هـ(س)   
)هـ(س  
ق(س)  
املنطقة م جـ ± = جـ = ٠ أي أن س- ومنها س٢  
 هـ(س)| دس أي أن: - ) |ق(س  
جـ-  
جـ  
 = م  
 س٢) دس - (جـ  
جـ-  
جـ  
 = ق(س)) دس ومنها ٦٣- ) (هـ(س  
جـ-  
جـ  
 = ٦٣  
   
جـ )٣-( -   
جـ )٣(  
٣  
 - )جـ + جـ( ٦٣ = جـ  
جـ ومنها جـ = ٩ ٤جـ  
٣  
ينتج ٦٣ =

# Page 198

194  
تمارين 5 – 5 أ  
 احسب مساحة املنطقة املحصورة بني منحنى االقرتان ق(س) = جتاس وحموري السينات والصادات ١  
.والواقعة يف الربع األول  
 س٢ واملستقيم املار بالنقطتني - ٢ جد مساحة املنطقة املحصورة بني منحنى االقرتان ق(س) = ٣  
 ، 2) وحمور الصادات والواقعة يف الربع األول.1(أ(0 ، 0) ، ب  
) وحمور السينات ١ - ٩) (س٢- ٣ احسب مساحة املنطقة املحصورة بني منحنى االقرتان ق(س) = (س٢  
الواقعة يف الربع الثالث.   
س   
 ، ك(س) = لــو هـ   
٤ جد املساحة املحصورة بني منحنيي االقرتانني ق(س) = هـس  
 وحمور السينات. ١- = ، س١ = واملستقيمني ص  
 س حيث س ≤ ٢ ، - ٢ = )٥ جد مساحة املنطقة املحصورة بني منحنيي االقرتانني ق(س  
س وحمور السينات.- = )ك(س  
٦ احسب املساحة املحصورة بني منحنيات االقرتانات ق(س) = س٢ ، هـ(س) = ٤ ، ك(س) = ٢س

# Page 199

159  
)Solid Revolutions( ثانياً: الحجوم الدورانية  
 نشاط : متثل الصورة املقابلة أحد املباين الغريبة يف العامل،   
والذي يأخذ شكالً كروياً. نالحظ أن قاعدة االقرتان   
املمثل باملنحنى املرسوم باللون األخرض، هي:   
 ..... (ملاذا؟)  
 س٢- نق٢ = )ق(س  
 حجم املبنى = ..........١  
...... = ق٢(س) دس  
نق-  
نق  
π ٢ قيمة املقدار  
 ماذا تالحظ؟  
:نظرية  
إذا كان ق(س) : [أ ، ب] ⟵ ح ، وكان االقرتان ق٢(س) قابالً للتكامل عىل [أ ، ب]   
فإن حجم اجلسم الناتج من دوران املنطقة املحصورة بني منحنى االقرتان ق(س) وحمور   
السينات واملستقيمني س = أ ، س = ب   
 ق٢(س) دس  
أ  
ب  
π = دورة كاملة حول حمور السينات يعطى بالقاعدة: ح  
 : جد حجم اجلسم الناتج من دوران املنطقة املحصورة 1 مثال  
2 وحمور السينات   
بني منحنى االقرتان ق(س) = س  
 ، س = ٣ دورة كاملة حول حمور السينات. ١ = واملستقيمني س  
١3  
 ق٢(س) دس  
١  
٣  
π = احلل : ح  
٢ دس -٤س  
١  
٣  
π = دس  
2 )٢  
 (س  
١  
٣  
π = ح  
 وحدة حجمπ ٨  
) = ٣١-  
١ - ١-  
 ( ٣π = ٤  
١  
٣  
 )١-  
 (سπ = ٤١3  
للعلمي فقط

# Page 200

169  
 ٤- مثال 2 : جد حجم اجلسم الناتج من دوران املنطقة املحصورة بني منحنى االقرتان ق(س) = س٢  
وحمور السينات دورة كاملة حول حمور السينات.   
 احلل : نجد نقاط تقاطع منحنى االقرتان ق(س) مع حمور السينات  
٢± = ٤ = ٠ ومنها س- بوضع ق(س) = ٠ فيكون س٢  
)ق(س  
٢  
٢-  
 دس  
 ٤)٢- (س٢  
٢-  
٢  
π = ق٢(س) دس  
٢-  
٢  
π = ح  
 وحدة حجمπ ٥١٢  
١= ٥  
٢-  
٢  
)س١ ٦+ ٨ س٣  
 ٣-   
س٥  
 ( ٥π = ) دس١ ٦+ ٨س٢- (س٤  
٢-  
٢  
π =   
 مثال 3 : جد حجم اجلسم الناتج عن دوران املنطقة املحصورة بني منحنى االقرتان ق(س) = جاس  
 دورة كاملة حول حمور السينات. π ٣  
 ، ٢π  
٢ وحمور السينات يف  
 ق٢(س) دس   
π ٣  
٢  
π  
٢  
π = احلل : ح)ق(س  
π ٣  
٢  
π   
٢ جتا٢س) دس- ١( ١  
 ٢  
π ٣  
٢  
π  
٢  
π = جا٢س دس  
π ٣  
٢  
π  
٢  
π = ح  
 وحدة حجم   
 ٢π  
 = ٢  
π   
٢  
π ٣  
٢ ) جا٢س١  
 ٢- (سπ  
 = ٢  
 مثال 4 : استخدم التكامل املحدود إلثبات أن حجم املخروط الدائري القائم الذي نصف قطر قاعدته   
 نق٢ع π  
نق وارتفاعه ع يساوي ٣  
 احلل : ينتج املخروط من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول   
أحد ضلعي القائمة. نفرض أن طول أحد ضلعي القائمة   
يساوي (نق) واآلخر (ع) كام يف الشكل املجاور، فيكون وتر   
املثلث هو الراسم للمخروط.   
)ق(س  
نق  
ع

# Page 201

179  
 ))نجد أوالً معادلة وتر املثلث (املستقيم املار بالنقطتني (0 ، 0) ، ( ع ، نق  
نق س   
نق إذن ص = ع  
ص = ع  
س  
ص٢ دص   
٠  
ع  
π = ح  
 نق٢ع وحدة حجم. π  
 = ٣  
٠  
ع  
   
س٣  
 ٣  
نق٢π  
س٢ دس = ع٢  
٠  
ع  
   
نق٢π  
= ع٢  
:نظرية  
إذا كان ق٢(س) ، هـ٢(س) اقرتانني قابلني للتكامل يف [أ ، ب] وكان منحنى االقرتان   
هـ(س) ، ومنحنى االقرتان ق(س) يقعان عىل جهة واحدة من حمور السينات، فإن حجم   
اجلسم الناتج من دوران املنطقة املحصورة بينهام دورة كاملة حول حمور السينات هو  
 ق٢(س)| دس- ) |هـ٢(س  
أ  
ب  
π = ح  
 مثال ٥ : جد حجم اجلسم الناتج من دوران املنطقة املحدودة بمنحنيي االقرتانني  
 ، ك(س) = هـ وحمور الصادات دورة كاملة حول حمور السينات.  
ق(س) = هـس  
 احلل : نجد نقاط التقاطع بني منحنيي االقرتانني ق(س) ، ك(س)   
 ١ = = هـ ومنها س  
بوضع ق(س) = ك(س) ينتج أن هـس  
 ق٢(س))| دس- ) |(ك٢(س  
٠  
١  
π = ح  
|  
٠  
١  
 )  
 هـ٢س١  
 ٢- |(هـ٢سπ = )| دس  
 هـ٢س- |(هـ٢  
٠  
١  
π = ح  
 وحدة حجم.)١ + (هـ٢π  
٢  
 =

# Page 202

189  
 مثال ٦ : جد حجم اجلسم الناتج من دوران املنطقة املحدودة بمنحنيات االقرتانات  
س دورة كاملة حول حمور السينات.- = ) ٤س ، هـ(س- ق(س) = س٢  
 احلل : نجد نقاط التقاطع بني منحنيي االقرتانني ق(س) ، هـ(س) بوضع  
س- = ٤س- ق(س) = هـ(س) ومنها س٢  
 ٣س = ٠ ⟵ س = ٠ ، س = ٣- أي أن س٢  
س)٢| دس-( - ٤س)٢- |(س٢  
٠  
٣  
π = | هـ٢(س)) دس- )|(ق٢(س  
٠  
٣  
π = ومنها ح  
س٢)| دس ١ ٥+ ٨س٣- |(س٤  
٠  
٣  
π =   
 وحدة حجمπ ١٨٠  
٥  
| =   
٠  
٣  
 )  
 ٥س٣+ ٢س٤-   
س٥  
|( ٥π =

# Page 203

199  
 5 ب- تمارين 5  
 احسب حجم اجلسم الناتج من دوران املنطقة املحدودة بمنحنى االقرتان ق(س) = ٤ وحموري السينات ١  
.والصادات واملستقيم س = ٥ دورة كاملة حول حمور السينات  
٤ وحمور السينات   
س = )2 جد حجم اجلسم الناتج من دوران املنطقة املحدودة بمنحنى االقرتان ق(س  
 ، س = هـ٢ دورة كاملة حول حمور السينات.١ = واملستقيمني س  
3 استخدم التكامل املحدود إلجياد حجم اجلسم الناتج من دوران املنطقة املحدودة بشبه املنحرف أب جـ د   
) ، د (0 ، 4) دورة كاملة حول حمور السينات.1 ، حيث أ (0 ، 0) ، ب(3 ، 0) ، جـ (3  
4 احسب حجم اجلسم الناتج من دوران املنطقة املحدودة بمنحنيي االقرتانني   
 ٦ ، هـ(س) = ٥س دورة كاملة حول حمور السينات.+ ق(س) = س٢  
س وحمور   
5 جد حجم اجلسم الناتج من دوران املنطقة املحدودة بمنحنى االقرتان ق(س) = لــو هـ   
السينات واملستقيم س = هـ دورة كاملة حول حمور السينات.  
6 استخدم التكامل املحدود إلثبات أن حجم االسطوانة الدائرية القائمة التي نصف قطرها (نق)   
 نق٢ع.π وارتفاعها (ع) يساوي  
 وحمور   
٤  
١ - س٢ = )7 جد حجم اجلسم الناتج من دوران املنطقة املحصورة بني منحنى االقرتان ق(س  
السينات واملستقيمني س = ٢ ، س = ٣ دورة كاملة حول حمور السينات.

# Page 204

002  
تمارين عامة  
 ضع دائرةً حول رمز اإلجابة الصحيحة فيام يأيت: ١  
 ، ب} جتزئةً منتظمةً للفرتة [أ ، ب]، فام قيمة أ ؟١ ، ..... ، ٧١ ، ={ أ١ ٠ إذا كانت١  
٣-   
)٢ د- ) ج١- )أ) صفر ب  
 ، ٢] فام قيمة ١[ ن جتزئةً منتظمةً للفرتة ، ٢] وكانت١[ ٢ إذا كان ق(س) = ٥ معرفاً يف الفرتة  
 ن ، ق)؟(م  
 ج) 02 د) 051أ) 5 ب) 0  
 ، ٢] فام ١[ ن جتزئةً منتظمةً للفرتة ، ٢] وكانت١[ معرفاً يف الفرتة١ + ٣ إذا كان ق(س) = ٢س  
 ن ، ق)؟( م  
ن ← ∞ قيمة  
 ب) 2 ج) 4 د) غري موجودة1 )أ  
٢ق(س)) دس؟  
٣  
٧  
 ق(س)) دس = ٠٣ ، فام قيمة+ (٤  
٢  
٧  
 ، ق(س) دس = ٦  
٢  
٣  
 ٤ إذا كان  
1 ج) 06 د) 21أ) 8 ب) 6  
 جـ ،+ س٢+ ظا٢س- ق(س) دس = قا٢س ٥ إذا كان ق(س) اقرتاناً متصالً عىل جماله وكان  
قَ(س) دس ؟  
١-  
٢  
 فام قيمة  
أ) 2 ب) 3 ج) ٤ د) ٦  
 دس؟١ + ٢س- س٢  
١  
٢  
٦ ما قيمة  
١   
) د١  
٢  
 ج) ١  
 ب) ٣١  
٦  
أ)   
 ب ؟+ دس = ب ، فام قيمة أ١ + س  
 ٢+ س  
١  
٢  
 ، دس = أ١ + ٢س+ س٢  
 ٢+ س  
١  
٢  
 ٧ إذا كان  
١  
٢  
 د) 1 )٥ ج  
 ب) ٢١١  
٢  
أ)

# Page 205

021  
جا٢س دس فام قيمة قَ(٤) ؟  
١  
٤  
 + دص  
ص  
١ + ص٢  
١  
س  
 = )٨ إذا كان ق(س  
١٦  
٥٦  
٨ د)   
١٤ ج) ٧  
١٤ ب) ٧  
٥  
أ)   
)؟١-( ق- ) ٢، فام قيمة ق(٣- ٩ إذا كان ق(س) كثري حدود بحيث قَ(س) = ٣س  
أ) 0 ب) 2 ج) 4 د) 8  
 قَ(س) دس؟  
هـ  
٢  
١  
2  
 س ، فام قيمة  
 إذا كان ق(س) = س لــو هـ ١٠  
 د) هـ1 ) ب) 0 ج1- )أ  
أجب عن األسئلة اآلتية :   
، والعنرص الرابع 1 جتزئةً منتظمةً للفرتة [أ ، ب]، وكان العنرص السابع فيها يساوي 2١ ٢ ٢ إذا كانت  
فيها يساوي 7، فام قيم الثابتني أ ، ب ؟  
 س + )] وكان هـ(س) = ٣ق(س1٣ إذا كان ﻕ ، هـ اقرتانني معرفني يف الفرتة [ 2 ، 0  
]1 ٤ جتزئةً منتظمةً للفرتة [ 2 ، 0 = س ر علامً بأن  
\*  
 ٤ ، هـ) معتربًا س ر( ٤ ، ق) = ٦، جد م(بحيث م  
٣س دس   
١  
5  
 ٤ استخدم تعريف التكامل املحدود إلجياد  
 س٢ دس ≤ ٨ - ٤  
٢-  
٢  
 ≤ ٥ أثبت أن : ٠  
س ، فجد ق(٤) ، قَ(٤). - ق(ص) دص = س٢  
٠  
س  
 ٦ إذا كان ق(س) متصالً عىل جماله وكان  
 ، هو االقرتان املكامل ٢جـس ، ٢ ≤ س ≤ ٣+ ٢س٢  
 ب ، ٣ < س ≤ ٥ - أس  
٧ إذا كان ت(س) =   
لالقرتان املتصل ق(س) يف الفرتة [ 2 ، ٥]. جد:  
ق(س) دس   
٢  
٤  
 ب  
أ قيم أ ، ب ، جـ

# Page 206

202  
٨ جد التكامالت اآلتية:   
س دس   
 لــو هـ   
هـ  
هـ2  
 ب  
)٥ دس ١ - ٢)٢ (س- ٦٥(س  
1  
2  
 أ  
 س٢ دس + س٤  
0  
٢  
 د  
 5 دس + س  
 س- س٢  
٣  
5  
 جـ  
 دس١  
١ + س٢ س٢1  
٢  
 هـ  
 ، 5] وكان ق(س) ≥ هـ(س)١[ ٩ إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقرتانني قابلني للتكامل عىل  
 ٢) دس+ هـ(س  
3  
١-  
 ≤ ٢) دس- ق(س  
٧  
٣  
 : ، 5] ، أثبت أن١[ لكل س  
 احسب مساحة املنطقة املحصورة بني منحنيي االقرتانني ق(س) ، هـ(س) فيام يأيت : ١٠  
 س٢ ، س ≤ ٠- ٤  
 س ، س > ٠ - ٤  
 ٢ ، هـ(س) = + أ ق(س) = س  
   
]π ، يف الفرتة [٠١ = )ب ق(س) = ٢جاس ، هـ(س  
 ب.+ (جتا٢س) دس = ب ، فجد قيمة أ  
1  
٣  
 ، ) دس = أ  
 هـس+ (جا٢س  
1  
٣  
 إذا كان١١  
 س٢ واملامس املرسوم له عند النقطة١  
 جد مساحة املنطقة املحصورة بني منحنى االقرتان ق(س) = ٤١٢  
 (4 ، 4) وحمور السينات.  
 س - جد مساحة املنطقة املحصورة بني منحنى االقرتان ق(س) = جتاس، واملستقيم ص = ٣١٣  
واملحورين اإلحداثيني.  
 انطلق جسيم يف خط مستقيم من نقطة ثابتة (و) بحيث تعطى رسعته ع وفق العالقة: ١٤  
 ، 5ن٢ ، 0 ≤ ن ≤ ٢  
 ١ ٢ن ، 2 < ن ≤ ٢- ٤٢  
ع(ن) =   
أ بعد اجلسيم عن النقطة (و) عندما ن = 5 ثوان.  
فجد :   
ب متى يتوقف اجلسم عن احلركة، وما املسافة املقطوعة عندئذ؟

# Page 207

302  
 إذا كان قَ(س) = ق(س) ، ق(س) ≠ ٠ ، جد:١٥  
ب قاعدة االقرتان ق(س)  
(ق(س))ن دس أ  
 دس بداللة أ ؟  
جتاس  
 ٢)٢+ (س  
0  
π  
 جا٢س دس = أ ، فام قيمة  
)١ + (س  
π  
٢  
٠  
 إذا كان١٦  
 دس ؟) ك(س- )س كَ(س  
س٢  
   
١  
٣  
 ) = ٦ ، فام قيمة1( إذا كان ك(3) = ٣ك١٧  
 س٢ وحمور السينات + جد حجم اجلسم الناتج من دوران املنطقة املحصورة بني منحنى س ص = ٤١٨  
 ، س = ٤ دورة كاملة حول حمور السينات.١ = واملستقيمني س  
 = ظاس ومنحنى ص٢ = قاس ١ جد حجم اجلسم الناتج من دوران املنطقة املحصورة بني منحنى ص١٩  
 دورة كاملة حول حمور السينات.π  
 ، س = 3π  
واملستقيمني س = ٦  
٠٢ جد حجم اجلسم الناتج من دوران املنطقة املحصورة بني منحنيي االقرتانني   
ق(س) = س٣ ، هـ(س) = س دورة كاملة حول حمور السينات.  
 ٣) دس - س ق(س٢  
١-  
٢  
 ٢ يف الشكل املجاور، احسب١  
 وحدة مربعة١ = ٤ وحدات مربعة ، م٢ = ٢١ علامً بأن م  
)ق(س  
٢-  
١-م٢  
١م  
١  
 :٢٢ أقيّم ذايت: أكمل اجلدول اآلين  
مستوى االنجاز  
مؤرش االداء  
منخفض   
متوسط  
مرتفع   
اجد التجزئة وجمموع ريامن القرتانات حمددة  
اوظف العالقة بني التفاضل والتكامل  
اوظف خواص التكامل املحدود يف حل املسائل املنتمية

# Page 208

024  
األعداد املركبة  
٦  
الوحدة  
طلبت رشكة لالتصاالت من مكتب لإلعالنات تصميم لوحة إعالنية مستطيلة الشكل   
حميطها 8م ومساحتها 8م٢، رفض املكتب ذلك؟  
Complex Numbers

# Page 209

502  
يتوقع من الطلبة بعد اإلنتهاء من دراسة هذه الوحدة والتفاعل مع أنشطتها أن يكونوا قادرين عىل توظيف   
األعداد املركبة يف احلياة العمليّة من خالل اآليت:  
 التعرف إىل جمموعة األعداد املركبة.1  
.٢ إجياد ناتج: اجلمع، والطرح، والرضب عىل األعداد املركبة  
٣ التعرف إىل خصائص العمليات عىل األعداد املركبة.  
٤ التعرف إىل مقياس العدد املركب، ومرافقه، وخصائصهام.  
٥ إجياد ناتج قسمة عددين مركبني.   
٦ حل املعادالت الرتبيعية يف جمموعة األعداد املركبة.   
٧ متثيل العدد املركب بيانياً (بنقطة ومتجه).  
٨ كتابة العدد املركب بالصورة القطبية.  
٩ إجياد اجلذور الرتبيعية لألعداد املركبة.

# Page 210

602  
)Complex Numbers( 6 – 1 األعداد املركبة  
 ٨)م٢ وأحد أبعادها + ٥س- : أراد أبو حممود رشاء قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها (س٢1 نشاط  
 ٣)م. مل يقبل حممود فكرة أبيه وقال له إن هذه القطعة ليست مستطيلة الشكل، كيف + (س  
عرف حممود ذلك؟  
درست يف السنوات السابقة جمموعة األعداد الطبيعية، ثم األعداد الصحيحة، إىل أن تعرفت أخرياً إىل   
جمموعة األعداد احلقيقية، وقد الحظت وجود قصور يف نظام األعداد احلقيقية، حيث إننا ال نستطيع إجياد   
حلول للمعادالت كافةً باستخدام هذا النظام، وخاصةً املعادلة الرتبيعية التي مميزها سالب، فمن أجل وجود   
حلول للمعادلة الرتبيعية يف نظام األعداد احلقيقية، ال بد أن يكون املميز غري سالب؛ ألن اجلذر الرتبيعي   
للعدد السالب غري معرف يف هذا النظام.   
) بتعريف نظام جديد يف حماولته إلجياد Gerolamo Cardano( يف القرن السادس عرش قام العامل كاردانو  
 ثم قام بتعريف نظام جديد ١- = حلول للمعادلة الرتبيعية بشكل عام، فقام بتعريف عدد جديد هو ت  
لألعداد أسامه األعداد املركبة (ك) والتي هلا تطبيقات مهمة يف خمتلف العلوم، مثل: اهلندسة، والفيزياء   
وغريها...  
 س = ٠ يف ك ، فإننا نضع+ نشاط ٢: إلجياد جمموعة حل املعادلة س٣  
) = ٠١ + ) = ٠ وينتج أن: س = ٠، (س٢١ + س = ٠ ومنها س(س٢+ س٣  
ت+ = ..... ومنها س+ = فتكون: س٢ = .......، س  
جمموعة احلل = {٠ ، ..... ، .....}  
:تعريف  
 ص ت حيث س ،+ العدد املركب هو مقدار جربي عىل الشكل ع = س١  
 ١- = ح، ت ص  
 ويسمى س اجلزء احلقيقي للعدد املركب، ويسمى ص اجلزء التخييل له.  
 } ،١- = ح، ت ص ت، س ، ص+ ٢ جمموعة األعداد املركبة = {س  
 ويرمز هلا بالرمز ك.

# Page 211

702  
: : جد اجلزء احلقيقي، واجلزء التخييل لكل من1 مثال  
 ت - ع = ٤١  
 ٢ + ت  
٢  
٢ ع =   
 1- ت هو 4 ، بينام اجلزء التخييل هو- اجلزء احلقيقي للعدد ع = ٤1  
 : احلل  
 ٢   
 ٢ هو ٢ + ت  
٢  
٢ اجلزء احلقيقي للعدد ع =   
١  
 بينام اجلزء التخييل هو ٢  
   
:مالحظة  
 ص ت + يكون العدد املركب ع = س  
 عدداً حقيقياً إذا كانت ص = ٠  
 عدداً ختيلياً إذا كانت س = ٠  
 صفراً إذا كانت ص = ٠ ، س = ٠  
: نشاط ٣: أكمل بناء اجلدول اآليت  
العدد املركب  
اجلزء احلقيقي  
اجلزء التخييل  
١  
٢  
0  
٢ت  
٣ت- ٢  
٢  
1  
١٢-   
 ت٧+ ٣  
3

# Page 212

802  
:كانت إجابة أرشف كام ييل  
9 - × 4-   
 9- × 4- =  
 63 =  
= 6  
 9- × 4- نشاط ٤: أوجد كل من أرشف وخالد قيمة املقدار  
أهيام كانت إجابته صحيحة؟ وملاذا؟  
أما إجابة خالد فكانت كام ييل:  
9 - × 4-   
 1- × 9 × 1- × 4 =  
 1- × 9 × 1- × ٤ =  
 = ٢ت × ٣ت = ٦ت٢ = –٦  
:فكّر وناقش  
 س × ص دائامً. وملاذا؟ ≠ ص × س ح فإن إذا كان س ، ص  
 ١- = )٢١- ( = ١- × ١- = ومنها ت٢ = ت × ت١- = تعلم من التعريف أن ت  
 ........ (ملاذا؟) ١ = ت ، ت٤- = وكذلك فإن (ت)٣  
 فإن تن = تم حيث م هي باقي قسمة ن عىل4 ، ٠ ≤ م < ٤+ ص وبشكل عام إذا كانت ن  
٢+٤ن-٣ ت  
 ١  
٢ ت٢٢  
 ت٩٩ ١ : مثال ٢ : جد قيمة  
ت- = الحظ أن باقي قسمة 99 عىل 4 يساوي 3، ومنها فإن ت٩٩ = ت٣1  
 : احلل  
 (ملاذا؟)١- = ١  
 = ت٢١  
٢ ت٢٢  
١- = ١- ×   
ن-)٤ن × ت٢ = (ت٤-٢ = ت+٤ن-٣ ت

# Page 213

902  
 ت٣+ ت٢+ ت+ ١ مثال ٣ : جد قيمة  
 احلل : بالتبسيط واالختصار فإن:   
ت = ٠- + ١- + ت+ ١ = ت٣+ ت٢+ ت+ ١  
:طريقة أخرى: باستخدام التحليل للعوامل  
 ت) +١( ت٢+ ) ت+ ١( = ) ت٣+ ت٢+ ت+ ١(  
) ت٢) = ٠ (ملاذا؟+١( ) ت+١( =   
 1- تمارين 6  
 ص ت:+ اكتب ما ييل عىل الصورة س١  
٢- × ٨-   
 جـ  
٢ - + ٢٣-   
 ب  
٢ - + أ ٢  
٢ حدد اجلزء احلقيقي، واجلزء التخييل لكل مما يأيت:  
١- - ١ جـ  
٩ -   
 ب  
 ٣ - ٢ ت  
٥  
أ   
١  
٣  
و   
٢ت - هـ  
٤ - × ٩ د  
 ١ = ت٢)٣+ ت- ١( ت٢)٣+ ت+ ١( :٣ بيّ أن  
٤ اكتب كالً مما يأيت بأبسط صورة:   
١  
 ت٧٢+ جـ ت٧٢١  
أ ت٣٤ ب ت٥٦  
١- = ٢ت+ ت٣+ ٢ت٢+ ١  
 ت٤+ ت٣  
٥ أثبت أن:

# Page 214

210  
 )Operations on Complex Numbers( 2 العمليات عىل األعداد املركبة- 6  
: يستخدم الفيزيائيون األعداد املركبة يف الدارات الكهربائية ذات التيار املرتدد حلساب اجلهد ١ نشاط  
حيث أن: فرق اجلهد يعرف بالقانون جـ = م ش   
حيث م: املقاومة، ش: شدة التيار  
وإلجياد فرق اجلهد يف دارة كهربائية ذات تيار مرتدد عندما تكون:  
٢ فولت١ = شدة التيار = ٣ أمبري، املقاومة = ٧ أوم، فإن جـ = م ش = ٧ × ٣  
 ٣ت أوم.- ٢ت أمبري، املقاومة = ٩+ واآلن إذا كانت شدة التيار = ٢  
 ٢ت) = ....................... أكمل + ٣ت) × (٢- فإن جـ = م ش = (٩  
 ص ت فإنه يمكن تعريف + بام أن العدد املركب هو مقدار جربي يُكتب عىل الصورة س  
اجلمع والرضب عىل األعداد املركبة، من خالل عملية مجع ورضب مقدارين جربيني، ويكون   
هلام نفس خصائص عمليتي اجلمع والرضب للمقادير اجلربية، مع مراعاة خصائص قوى ت.  
تساوي عددين مركبني:  
:تعريف  
 ص٢ت إذا وفقط إذا كان هلام + ت ، ع٢ = س٢١ ص+ ١ = س١يتساوى العددان املركبان ع  
 = ص٢١ = س٢ ، ص١اجلزء احلقيقي نفسه، واجلزء التخييل نفسه، أي أن س  
 ص ت، جد كالً من س ، ص يف ح+ ) س+ ٣ت = (ص+ : إذا كان ٢س١ مثال  
)١( .................... ص+ احلل : بام أن العددين متساويان، فإن: ٢س = س  
 ٣ = ص .................... (٢)  
) ينتج أن: س = ٣١( بالتعويض يف

# Page 215

211  
:جمع األعداد املركبة، وطرحها  
:تعريف  
 ص٢ت + ت ، ع٢ = س٢١ ص+ ١ = س١إذا كان ع  
 ص٢) ت± ١ (ص+ ) س٢± ١ ع٢ = (س± ١فإن ع  
 ٤ت)- (٣+ ) ٣ت- مثال ٢ : جد ناتج (٢  
 ٤) - ٣-( ت+ ) ٣+ ٤ت) = (٢- (٣+ ) ٣ت- احلل : (٢  
 ٧ت - = ٥  
٥ت ، جد:- = ٢ت ، ع٣+ ١ = ت ، ع٢- = ٣١ مثال ٣ : إذا كان ع  
 ع٣- ) ع٢+ ١٢ (ع  
 ع٢) - ١ (ع١  
 ٣ت- ٢) ت = ٢- ١-( + )١ - ٢ت) = (٣+ ١( - ) ت- ع٢ = (٣- ١ ع1  
 : احلل  
٥ت)-( - )) ٢ت+ ١( + ) ت- ع٣ = ((٣- ) ع٢+ ١٢ (ع  
 ٦ت + = ٤  
:خصائص عملية اجلمع عىل األعداد املركبة  
 ك ع٢+ ١ ك فإن ع ، ع٢١ ع عملية اجلمع عملية مغلقة: أي أنه١  
:2 عملية اجلمع عملية جتميعية  
 ع٣) + (ع٢+ ١ ع٣ = ع+ ) ع٢+ ١ ك فإن (ع ، ع٢، ع٣١ ع أي أنه  
3 العنرص املحايد بالنسبة لعملية اجلمع عىل األعداد املركبة هو الصفر   
 ٠ = ع + ع = ع+ ك ، ٠ ع حيث  
 ك ع- ك فإن 4 لكل عنرص نظري مجعي: إذا كان ع  
ع النظري اجلمعي للعدد ع.- ع = ٠ ويسمى+ )ع-( = )ع-( + ويكون ع  
١ ع+ ع٢ = ع٢+ ١ ك ، ع ، ع٢١ ع :5 عملية اجلمع عملية تبديلية

# Page 216

212  
 :رضب األعداد املركبة  
:تعريف  
 ح ، ص٢١ص  
 ، س٢ ، ١ ص٢ت ، س+ ت ، ع٢ = س٢١ ص+ ١ = س١إذا كان ع  
)ت١ س٢ ص+ ص٢١ (س+ ) ص٢١ ص- س٢١ ع٢ = (س١فإن ع  
:نتيجة  
 جـ ص ت + ص ت) = جـ س+ ح فإن جـ (س إذا كانت جـ  
 ت٥)- ٥)(٣+ ٢ ت(ت  
 ٥ت) - ت)(٢+ (٣١  
 : مثال ٤ : جد ناتج  
 ٥ت)- ت)( ٢+ (٣1  
 : احلل  
 × ٢)ت ١ + ٥- × ( ٣+ )٥- × ١ - = (٣ × ٢  
ت (من تعريف عملية الرضب)١ ٣- ١١ =   
) ت٥- ٥)(٣+ ٢ ت(ت  
 ت) - ٥ت)(٣+ ١-( =   
)ت (ملاذا؟١ ٦+ = ٢  
 ٥ت فجد قيمة كل مما يأيت:- ٥ت ، ع٢ = ٦+ = ٣١ مثال ٥ : ليكن ع  
 ٢ت - ١ ٥ع+ ٢ ٣ع٢  
 ١ ٥ع١  
 ح ٣)، م- = م(ت١ ت ع- ٣ م حيث ٤  
 ٥ت) + = ٥(٣١ ٥ع1  
 : احلل  
 ٥٢ت + ١ = ٥  
 ٢ت - ١ ٥ع+ ٢ ٣ع٢  
 ٢ت - ) ٥ت+ ٥(٣+ ) ٥ت- = ٣(٦  
 ٨ت+ = ٣٣

# Page 217

213  
 ) ٥ت+ ت(٣- = ٤١ ت ع- ٣ ٤  
 ٥ت٢ - ٣ت- = ٤  
 ٣)- ٣ت = م(ت- = ٩  
 مت+ ٣م- = ٣ت- أي أن ٩  
٣- = ومنها م  
:خصائص عملية الرضب عىل األعداد املركبة  
 ك × ع٢١ ك ، ع ، ع٢١ ع : عملية الرضب مغلقة١  
) × (ع٢ × ع٣١ × ع٢) × ع٣ = ع١ ك ، (ع ، ع٢، ع٣١ ع :٢ عملية الرضب جتميعية  
 ك ع ، حيث1 ٣ العنرص املحايد لعملية الرضب هو العدد  
 = ع١ × × ع = ع١ يكون  
١ = ١  
 × ع = ع × ع١  
 ك بحيث ع ١  
 ك ، ع ≠ ٠ يوجد ع ع :٤ النظري الرضيب  
١- النظري الرضيب للعدد ع ونرمز له بالرمز ع١  
 ويسمى ع  
١ × ع٢ = ع٢ × ع١ ك ، ع ، ع٢١ ع :٥ عملية الرضب تبديلية  
 ٤ت باستخدام التعريف+ للعدد املركب ع = ٣١- نشاط ٢: إلجياد النظري الرضيب ع  
1 = × ع١- ص ت فيكون ع+ = س١-نفرض ع  
 ١ = ) ٤ت+ ص ت)(٣+ أي أن (س  
 ٣ص = ............+ ، ٤س١ = ٤ص- ومنها ٣س  
وبحل املعادلتني، ينتج أن س = ......... ص = .........،   
 = .................١-ومنها النظري الرضيب ع  
:مالحظة  
 ت  
ص-  
 ص٢+ س٢+ س  
 ص٢+ ص ت) هو س٢+ النظري الرضيب للعدد املركب (س

# Page 218

214  
 ٢ ٢ ت+ ١ = مثال ٦ : جد النظري الرضيب للعدد ع  
 ، ص = ٢ ٢ ، وينتج أن:١ = احلل : باستخدام القاعدة السابقة، حيث س  
 ت  
ص-  
 ص٢+ س٢+ س  
 ص٢+ = س٢١- ع  
٢ ٢ ت (حتقق من ذلك)  
٩  
 - ١  
 = ٩  
 2- تمارين 6  
 ب ت+ اكتب كالً مما يأيت عىل الصورة أ١  
) ٥ت- ٤ت)(٣+ ب (٣  
 ٢ت) - ٥(٣+ ) ٤ت+ أ ٤(٢  
 ٥ت)٢- ١(د ٤ت  
   
   
   
   
 ٤ت)٣ + جـ (٣  
 ت)٦ - ١( هـ  
 ٤ت)؟- ٥(س- = ٢س ت+ ب ت ، فام قيم س التي حتقق املعادلة س+ ٢ إذا كانت س = أ  
 س ت- ٢ = ص٢ ت- ص- ح والتي حتقق املعادلة س ٣ جد قيم س ، ص  
 ١ - ع٢ = ع+ ٤ بيّ أن: ع = ت حتقق املعادلة ع٥  
 ٢ = ٠+ ٢ع+ ت حتقق املعادلة ع٢+ ١- = ٥ بيّ أن: ع  
 ح. ٣ت ، جد قيمة الثابت أ حيث أ+١  
أ  
 =   
ت  
 ٣+ ٦ إذا كان ت  
 ب ت:+ لكل مما يأيت، واكتبه عىل الصورة أ١-٧ جد ع  
١ ت)٣+ ١( جـ  
ت  
 ٣- ت  
ب   
ت ١ ٢ + أ ٢  
٨ حِ ل النظام اآليت:   
 ٨ ت- = ٣ع٢+ ١ع  
 ك ، ع٢١ ٠٥ ت حيث ع = ٣ع٢- ١٢ع

# Page 219

215  
 )Division Of Complex Numbers( 3 قسمة األعداد املركبة- 6  
 ٥ ) سم، ١ ٤+ : رسم حممد لوحة مستطيلة الشكل مستخدماً األلوان الزيتية أبعادها (٨٢1 نشاط  
 سم . وعندما رآها معلم الرياضيات قال إهنا مربعة الشكل. ما رأيك؟١٤  
 ٢- ٥  
١  
 ٢ - ١  
 نشاط 2: إلنطاق املقام للمقدار  
 ٢ + ١ ٢ هو - ١ نعلم أن مرافق العدد  
نرضب كالً من البسط واملقام بمرافق املقام  
 ٢ = ................... (أكمل) + ١  
 ٢ + ١  
 ×   
١  
 ٢ - ١  
 =   
١  
 ٢ - ١  
 أي أن  
تعترب عملية القسمة يف األعداد املركبة مشاهبة إىل حد كبري لعملية إنطاق املقام،  
 ص ت + عىل الصورة ع = س  
١ع  
وذلك بكتابة ع٢  
:تعريف  
 ص ت + إذا كان ع = س  
 ص٢ مقياس العدد املركب ع ويرمز له |ع| + س٢ نسمي املقدار1  
 ص٢+ س٢ = |أي أن: |ع  
 ص ت + ) العدد املركب ع = سconjugate( ص ت مرافق- ٢ ونسمي العدد س  
 ص ت - ع = س : ع أي أن ويرمز له  
 ع | | ٣  
٢ |ع|   
 ع ١ : ٤ت ، جد+ : إذا كان ع = ٣١ مثال  
 ٤ت- ع = ٣ 1  
 : احلل  
 ٤ ٢ = ٥+ ٣ ٢ = | ٤ت+ ٢ |ع| = |٣  
 ٤ ٢ = ٥ ماذا تالحظ؟+ ٣ ٢ = | ٤ت- ع | = |٣| ٣

# Page 220

216  
: ٣ت فإن- ١ = ت ، ع٢+ = ٢١ نشاط ٣: إذا كان ع  
 ٥ = |١ |ع١  
............ = |2 |ع٢  
 ع٢| = ......... ماذا تالحظ؟١3 |ع  
| = ٢ ٥١٢ع-| 4  
| = ......... ماذا تالحظ؟١٢|ع- 5  
 نشاط ٤: أكمل ما يأيت:   
 ت = ........+ ١ ١  
 ت+ ١ = ت- ١ 2١  
٥ = ٥ 3  
٣ = ..........- 4  
ت = .......... 5  
 ت = ..........+ ٢ت  
 ٢ 6  
:خصائص املقياس، والعدد املرافق  
 ك فإن: إذا كان ع  
ع ) = ع( ١  
 ع ع = |ع|٢ = ع ٢ ع  
 ع || = |٣ |ع  
 ح ٤ |جـ ع| = |جـ| |ع| ، جـ  
 ع = ٢ب ت - ع = ٢أ ، ع + ب ت فإن ع+ ٥ إذا كان ع = أ  
| |ع٢|١ ع٢| = |ع١ ك ، فإن | ع ، ع٢١٦ إذا كان ع  
|١|ع  
| = |ع٢ |  
١ع  
 ك ، ع٢ ≠ ٠ فإن = | ع٢ ، ع٢١٧ إذا كان ع

# Page 221

217  
: نشاط ٥: أكمل اجلدول اآليت  
العدد املركب ع  
 ع املرافق  
املقياس |ع|١-النظري الرضيب ع  
 ٢+ ت  
 ٥  
 ت- ٣  
 ت+ ٣  
٢ت  
 ت١-  
2  
:تعريف  
 ع٢ ١ع  
 = |ع٢|٢  
 ع٢ ١ع  
 ع٢ = ع٢  
١ع  
 ع2 = ع٢ ١ ك ، ع2 ≠ ٠ فإن ع ، ع٢١إذا كان ع  
:مالحظة  
 ع  
 = |ع|٢ ع  
 ع ع  
 = ١  
 = ع١-إذا كان ع ≠ ٠ فإن ع  
 ص ت:+ ٣ت عىل الصورة س- ٢  
 ٤ت+ مثال ٢ : اكتب املقدار ٣  
2 باستخدام النظري الرضيب  
 باستخدام الرضب باملرافق ١  
: باستخدام الرضب باملرافق1  
 : احلل  
)١ ٢- ٩ت- ٨ت- (٦  
)١ ٦+ (٩  
 = ) ٤ت- ٣ت) (٣- (٢  
 ٤ت)- ٤ت) (٣+ ٣ت = (٣- ٢  
 ٤ت+ ٣  
   
 ت١٧-  
 ٥٢+ ٦-  
ت = ٥٢١ ٧- ٦-  
٥٢  
   
٢ باستخدام النظري الرضيب:  
٤ ت   
 ٥٢- ٣  
 ٤ت هو ٥٢+ النظري الرضيب للعدد ٣  
٤ ت)  
 ٥٢- ٣  
 ٣ت)( ٥٢- ٣ت = (٢- ٢  
 ٤ت+ إذن: ٣  
 ت (ماذا تالحظ؟)١٧-  
 ٥٢+ ٦-  
 = ٥٢

# Page 222

218  
Cartesian and Polar Representation التمثيل البياني والتمثيل القطبي لألعداد املركبة  
أوالً: التمثيل البياني لألعداد املركبة:  
 ص ت بيانياً يف املستوى + يمكن متثيل العدد املركب ع = س  
 ت يمثل + الديكاريت بالنقطة، أ (س ، ص)\*، فالعدد املركب 3  
) يف املستوى كام يف الشكل املجاور. ١ ، بالنقطة أ(٣  
)١ ، أ(٣  
يسمى هذا املستوى اإلحداثي باملستوى املركب (مستوى أرجاند).  
:فكّر وناقش  
ماذا يمثل كل من املحور األفقي واملحور الرأيس يف املستوى املركب؟  
 مثال ٣ : مثّل بيانياً كالً من األعداد اآلتية يف املستوى املركب:   
١  
٤  
- ، 3ت ، 4+ 2ت ، 2-  
 : احلل  
) ١  
جـ(٠ ، ٢)د(٤ ، ٠)٢- ، ب(٠  
)أ(٢ ، ٣  
)Complex Plane and Polar Representation( ثانياً: التمثيل القطبي لألعداد املركبة  
 ص ت بيانياً + كام أرشنا أعاله، بأنه يمكن متثيل العدد املركب ع = س  
يف مستوى األعداد املركبة بالنقطة، أو الزوج املرتب (س ، ص) وتتذكر   
أيضاً أن كل زوج مرتب، يمكن متثيله بمتجه قيايس بدايته النقطة (٠،٠)   
وهنايته النقطة (س ، ص) ويصنع زاوية هـ مع االجتاه املوجب ملحور  
السينات (املحور األفقي) وتسمى هـ السعة األساسية للعدد املركب،   
س  
هـ  
|ع| = ر  
ص  
.ً\* يعترب الزوج املرتب يف األعداد املركبة متجهاً قياسيا

# Page 223

219  
 كام يف الشكل ويكون طول املتجه = ر ، ويساوي مقياس العدد املركبπ ص ، ٠ ≤ هـ < ٢  
حيث ظاهـ = س  
 ص٢ .+ س٢ = | ص ت حيث ر = |ع+ ع = س  
 ص ت يمكن كتابته + نالحظ من الشكل أعاله أن س = رجتاهـ ، ص = رجاهـ وبذلك فإن العدد ع = س  
 ت جاهـ) ويسمى هذا التمثيل بالتمثيل القطبي للعدد املركب.+ عىل الصورة ع = ر(جتاهـ  
:تعريف  
 ت جاهـ) + ص ت ، ع ≠ ٠ هو ع = ر(جتاهـ+ الصورة القطبية للعدد املركب ع = س  
ص   
 ص٢ ، ظاهـ = س+ س٢ = |حيث ر = |ع  
 ٣ ت بالصورة القطبية. + ١ = مثال ٤ : اكتب العدد ع  
 ٣ ،   
ص = ٢  
 ٣ )٢ = ٢ ، جاهـ = ر(+ ٢١ = | احلل : ر = |ع  
π  
 ومنها هـ = ٣١  
س = ٢  
جتاهـ = ر  
)π  
 ت جا ٣+ π  
الصورة القطبية للعدد ع = ٢(جتا ٣  
 ب ت+ ) إىل الصورة أπ  
 ت جا ٤+ π  
 ٢ (جتا ٤ = مثال ٥ : حوّل العدد املركب ع  
) π  
 ت جا ٤+ π  
 ٢ (جتا ٤ = احلل : ع  
 ت+ ١ = )ت  
 ٢  
 + ١  
 ٢  
( ٢ =   
............. = ع ٣ت ، فإن- نشاط ٦: إذا كان ع = ٤  
 ع هندسياً يف املستوى املركب، ماذا تالحظ؟ ، مثّل كالً من ع

# Page 224

022  
 3- تمارين 6  
٤ |- + ١ | جد١  
: ت ، جد ما ييل- ١ = ت ، ع٢+ ١ = ١٢ إذا كان ع  
 ع2| ١د |٢ع  
|   
ع٢  
١جـ | ع  
| ١ ع ١ ع١  
ب | ٢  
| ١٣ع-| أ  
٤ ت ، جد:-  
 ٥+ ٣  
٣ إذا كان ع = ٥  
|  
 ع  
| د | ٥١-) جـ |(ع١-)ب (٣ع  
 ١-)أ (ع  
 ب ت:+ ٤ اكتب املقادير اآلتية عىل صورة أ  
 ٣ت+ ٢  
 ٣ت- ٢+ ٤ت+ ٣  
 ٥ت- ب ٣  
 ٢ ت + ١-  
 ت+ ٢  
أ   
 ك | حيث ع١ - ع| = |١ - ٥ أثبت أن: |ع  
٦ مثّل األعداد اآلتية يف املستوى املركب:  
١  
د ت ٢٥  
٩ - + ٤-  
 جـ  
٢ - + ب ٢  
أ ت53   
 ع )٢ فأثبت أن ع إمّا أن تكون عدداً حقيقياً، أو أهنا عدد ختييل.( = ٧ إذا كان ع٢  
 ت جاهـ):+ ٨ اكتب ما يأيت عىل الصورة القطبية ع = ر(جتاهـ  
 ٣ ت + ١-  
٢  
 جـ ع = ١-  
 ت ب ع = ٢+ ١- = أ ع  
 ب ت: + ٩ اكتب ما يأيت عىل الصورة أ  
) π  
   
 ت جا 6+ π  
   
ب ع = ٣(جتا 6  
) π ٣  
 ت جا ٤+ π ٣  
أ ع = ٧(جتا ٤  
π  
د |ع| = ٣ ، هـ = ٣  
) π  
 ت جا ٤- π  
جـ ع = ٢(جتا ٤

# Page 225

221  
 تمارين عامة  
 اخرت رمز اإلجابة الصحيحة لكل مما يأيت:١  
 ما قيمة (ت)٧٥؟١  
ت-   
) ج) ت د1- ) ب1   
) أ  
 ٢ ت) ؟ - ١( ت- ) ت- ٢( 2 ما قيمة  
2ت د) ت- )2 ب) ٢ت ج- )أ  
 ت ؟+ ٤  
 ٣ت- ٣ ما قيمة ٢  
ت١ ٤+ ٥  
١٣  
ت د) ١ ٤- ٥-  
٥  
ت ج) ١ ٤- ٥-  
٣  
ت ب) ١ ٤- ٥  
١٣  
أ)   
 ت ؟- ٢  
 ٥ت+ ٢ت+ ١  
 ٤ت- ٤ ما قيمة ٣  
٢  
٥  
 ٢ت د) - ٢-  
٥  
٢ت ج) -  
٥  
٢ ب) -  
٥  
أ)   
 ت ؟+ ع ٥ ما قيمة  
 ت- ع-   
) ت د+ ع- ) ت ج- ت ب) ع+ أ) ع  
 ٢ت ؟+ ٦ ما الصورة القطبية للعدد ع = ٢  
)π  
 ت جا ٤+ π  
) ب) ٢ ٢ (جتا ٤π  
 ت جا ٤- π  
أ) ٢ ٢ (جتا ٤  
)π  
 ت جا ٤+ π  
جتا ٤-() د) ٢ ٢π  
 ت جا ٤- π  
جتا ٤-(ج) ٢ ٢  
 ٢ت)٢ ؟+ ٧ ما سعة العدد املركب (٢  
 π  
2  
د   
 π  
٤  
جـ   
 π  
3  
ب   
أ 0

# Page 226

222  
 ت ، جد ناتج ما ييل:- ٢ت ، ع٢ = ٢+ ١ = ١٢ إذا كان ع  
 | ع٢| (ماذا تالحظ؟)+ |١د | ع  
 ع٢| + ١جـ | ع  
ب | ع٢|   
| ١أ | ع  
س٢ ت- = )ت١ - (ص+ س+ ح بحيث س٢ ٣ جد س ، ص  
 ٢- ت١١  
 ٢ت+ ١ = ، م) ت- ٥(٣  
 ت+ ٣  
٤ إذا كان ل =   
 م٢+ م ، ل م ، ثم جد قيمة ل٢+ ب احسب ل  
أ بيّ أن: ل ، م مرتافقان.   
   
٧  
)  
 ت- ٣  
 ٣ ت + ١( ٥ احسب قيمة  
٦ أقيّم ذايت: أكمل اجلدول اآلين:   
مستوى االنجاز  
مؤرش االداء  
منخفض   
متوسط  
مرتفع   
اجري عمليات حسابية عىل االعداد املركبة  
احل املعادالت واجد اجلذور لالعداد املركبة  
احترى دقة ومعقولية احلل

# Page 227

322  
 إجابات متارين  
الكتاب

# Page 228

224  
 حلول الوحدة األوىل: حساب التفاضل  
 1- تمارين 1  
١٧  
٤  
ب   
٨٧   
٥  
أ   
 ١  
1 ٥  
 1٤ 6  
٣ أ = ٤   
٤   
π  
 ٢  
2- ب  
 هـ - هـ٢+ ١ أ  
٨   
٦ ب = 2   
 ٢- تمارين ١  
٠٢ - جـ  
٣٤ ١ ب  
أ ٧   
 ١  
 ٢- ب  
أ ٩   
٢   
 ١٦- ٥  
 ١  
 ٣ ٢ ٣  
أ قَ(٠) = ٠   
٦ أوالً:   
ب هـَ(٠) غري موجودة   
   
 ≤ س < ٠١-  
٢  
س٢ ، -  
١  
 ٠ ، ٠ ≤ س < ٢  
جـ (ق × هـ) (س) =   
   
د (ق × هـ) َ (٠) = ٠  
   
 ثانياً: نستنتج أنه ال يمكن احلكم عىل وجود أو عدم وجود املشتقة لذلك نعود إىل إجياد قاعدة االقرتان   
األصيل ثم نحدد قيمة املشتقة وهذا ال يتناقض مع القاعدة املذكورة .  
١٩ ٠  
٨ أ = ٤٢   
٥ - = ٧ أ  
 ٣- تمارين ١  
٢قاس ظاس -   
 قاس)٢+ ١(  
 ب  
 ٢قا٢س - ٢جاس- أ  
 ١  
) س ظاس+ د س قاس(٢  
 ) س قتاس+ ١(  
) ظتاس+ جـ (قتاس  
   
 π- = ، سπ = ٤ س

# Page 229

522  
 ٤- تمارين ١  
١  
٦  
جـ   
ب ٤   
أ ٠   
 1  
د ٢ هـ ٢س  
٥ -  
جـ ٢س  
 ١  
ب ٢س  
 جتاس   
 هـ س+   
جاس هـ س- أ  
2   
٥ ٣  
 1 = 4 س  
 ١ ب  
أ ٢   
3   
 ٥- تمارين ١  
 وحدة مساحة ١ ٣  
 ٢ + π + ٤س- = ٢ ص  
) ١ ، (٢١  
أ أ = ٢٣ ، ٨  
٤   
٠٢م/ث - ٥  
 م/ث10- = ب الرسعة  
أ أقىص ارتفاع = 54م   
٦   
 ٦- تمارين ١  
هـ ٠  
 π- د  
٥ -  
٢  
جـ   
٢ - ب  
 ١-  
٩  
أ   
 ١  
 ٦س- ٣س٢  
 ٣س٢- س٣  
ب   
س +)هـ س٢١ + أ (٢س  
٣   
 ١ - ١  
هـ  
٢   
٠٣ - ٥  
) = ٤ ١(َ٤ ق  
٦-  
٥  
ب   
أ قا٢ ٢س   
٨   
 ١٦ ٤  
 ٧- تمارين ١  
   
٤-  
 س٢) ٥- ١(٢ س-  
٥  
ب   
 ص - ٣س٢-  
 ٤ص+ س  
أ   
 ١  
ص٢-  
س٢  
د   
 ١  
) ص+ جتا(س- ١ × ) ص+ جـ جتا(س  
 ٥ + س١  
 ٦ ، ص = ٣+ س١-  
٢ ص = ٣  
 ٣ )- ، ١-  
 ٣ ) ، ( ٢ ، ١-  
٥ ( ٢  
٣ أ = ٣   
٧ صَ = هـ  
 ١- = َ٦ ص

# Page 230

622  
تمارين عامة: الوحدة األوىل  
 ١  
رقم الفقرة12  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
910١١  
١٢  
رمز االجابة  
د  
ب  
ج  
د  
ج  
د  
د  
ج  
أ  
ب  
ب  
د  
األسئلة املقالية:  
١  
٢  
د   
 ١  
٢  
جـ   
 ١-  
٢  
ب   
أ ٤   
٥   
٢ - ٤  
 ١ ٣  
٦٣ - ٢  
٢± = ٩ أ  
٨ ٥٢ م/ ث   
٧ ٩   
٦ ٥   
 . ، ٢ غري موجودة١ ، عند س = ٠  
١ < ٢س ، ٠ < س  
 < س < ٢١ ، ٢س  
 ، س > ٢  
٢-  
)٢١ + (س  
 قَ(س) = ١٠  
π  
٣  
ب   
 ١  
أ س = ٢ ، ٢  
 ١٣  
 ٠ ١٢  
 جتاس   
 س هـ٦س- ) جاس  
 ٦س هـ٦س+   
(هـ٦س  
جا٢س  
أ   
 ١٤  
 س جاس لــو هـس + لــو هـس) جتاس+ ١(  
جتا٢س  
ب   
   
 ٢ ))( ٢ ، ق ( ، )) ٢\_( ٢ ، ق\_ ( ١٦  
 م/ث٢ ١٢- ١٥

# Page 231

722  
 حلول الوحدة الثانية: تطبيقات التفاضل  
 1- تمارين ٢  
أ جـ = ٢   
 ١  
   
١ = ب جـ  
   
 ١ = جـ جـ  
   
 ال حيققπ  
د جـ = ٣  
   
 ١ = أ جـ  
٢   
ب جـ = صفر   
٥٢  
جـ جـ = ٤  
 (تقبل)١٣  
٣  
 = ٥ (ترفض) ، جـ  
 ، ب = 6 ، جـ = ٢1 = ٣ أ  
٤)- ، π  
 ، ٤) ، ( ٣ ٤π  
 ومنها نقط التامس هي ( ٤π  
 ، ٣ ٤π  
٥ قيمة جـ = ٤  
 ٢- تمارين 2  
2 ، 0] ، [2 ، 5] ومتزايد يف [0 ، 2]-[ أ ق(س) متناقص يف  
 ١  
]π ، ب ق(س) متزايد يف [0  
 ، ∞[١[ ] ومتزايد يف١ ، ∞-] جـ ق(س) متناقص يف  
٩ ، ٠] ومتزايد يف [0 ، 9[-] د ق(س) متناقص يف  
 +٢ ق(س) متزايد عىل ح  
 ، ٢]١[ [ ، كذلك ق(س) متزايد يف١ ، ٣ ق(س) متزايد يف [٠  
∞ ، ٠]-] ٤ ق(س) متزايد يف [٠ ، ∞[ ، كذلك ق(س) متناقص يف  
∞ ، ٢]-] ٥ ل(س) متزايد يف [٢ ، ∞[ ، متناقص يف  
[π  
٧ قَ(س) متناقص يف ] ٠ ، ٢

# Page 232

822  
 ٣- تمارين ٢  
)١- ، ) ، (٢١  
) ، (٠ ، ٣١  
) ، (٣ ، ٣١٩-  
٢ ، ٣-( أ  
 ١  
 )8 ، 4) ، (8 ، 4-( ، )ب (0 ، 0  
 قيمة صغرى حملية 1أ ق(2) = 02 قيمة عظمى حملية ، ق(4) = 6  
٢   
2) = ق(2) = صفر قيمة صغرى حملية ، ق(٠) = ٢ قيمة عظمى حملية -(ب ق  
٢هـ قيمة صغرى حملية- = )١(٣ قيمة عظمى حملية ، ق-٣) = ٦هـ-(جـ ق  
٣ قيمة صغرى حملية  
) = ٤١  
٢-(د ق  
 قيمة صغرى حملية ١- = ) π  
 قيمة عظمى حملية ، ق( ٢١ = )π( قيمة عظمى حملية ، ق1= )هـ ق(0  
 قيمة عظمى حملية ١ = )و ق(٢  
 قيمة عظمى مطلقة (اكرب قيمة)1أ ق(0) = صفر قيمة صغرى مطلقة (اصغر قيمة ) ، ق(3)=3  
٣   
) = صفر قيمة صغرى مطلقة (اصغر قيمة)1(ب ق  
3هـ قيمة عظمى مطلقة (اكرب قيمة)- ق(3)= هـ3  
) = صفر قيمة π ٣  
) = ٠ قيمة عظمى مطلقة، ق( ٢π  
٢ قيمة صغرى مطلقة ، ق( ٢-  
) = ٣π(جـ ق  
عظمى مطلقة  
6 - = ، ب1 = ٤ أ  
2 قيمة عظمى حملية وهي مطلقة ألهنا وحيدة - =)٥ ق(3  
 ح ⟸ ق(س) سالب دائامً س ، ٢- ≤ )إذن ق(س  
 ٤ - تمارين ٢  
[ كذلك يف ]٤ ، ∞[، ١- ، ٢-] أ ق(س) مقعر إىل أعىل يف  
 ١  
[ ، ٤١-] ٢[ كذلك يف- ، ∞-] ومقعر إىل أسفل يف  
[π  
 ، ٠[ كذلك يف ]٠ ، ٢π-  
ب ق(س) مقعر إىل أسفل يف ] ٢  
جـ ق(س) مقعر إىل أسفل يف ]2 ، ٤[ ومقعر إىل أعىل يف ]٠ ، 2[  
د ق(س) مقعر إىل أعىل يف ]٣ ، ∞[   
[π ، هـ ق(س) مقعر إىل أسفل يف ]٠  
[π ، ٢π] [ و ق(س) مقعر إىل أعىل يفπ ، و ق(س) مقعر إىل أسفل يف ]٠  
 ، ٣[ ، ومقعر إىل أعىل يف ]٣ ، ٥[١] ز ق(س) اقرتان ثابت

# Page 233

922  
أ (٠، ق(٠)) = (٠ ، ٠) نقطة انعطاف  
٢   
 ، ٠) نقط انعطافπ ٣  
 ، ٠) ، ( ٢π  
ب ( ٢  
جـ يوجد نقطة انعطاف هي (٥ ، ٠)  
٤) = ٢٣ قيمة عظمى حملية -(أ ق(٠) = ٠ قيمة صغرى حملية ، ق  
٣   
٦) = ٠ قيمة صغرى حملية وهي صغرى مطلقة-(ب يفشل اختبار املشتقة الثانية ، ق  
٤ أ = 3  
∞ ، 3[ ، (٣ ، ق(٣)) نقطة انعطاف.-] أ ق(س) مقعر إىل أعىل يف ]3 ، ∞[ ومقعر إىل أسفل يف  
٥   
ب ق(٠) قيمة عظمى حملية ، ق(٦) قيمة صغرى حملية   
∞ ، ٠] كذلك يف [٦ ، ∞[ ومتناقص يف [٠ ، ٦]-] جـ ق(س) متزايد يف  
١ ٥+ س١ ٥- ٦س٢+ س٣- = )٦ ق(س  
) = 842١(َ٧ ع  
٣ ، س = ٢- = 2 ، س- = ، س1 = أ قيم س التي يكون لالقرتان عندها قيمة قصوى هي س  
٨   
٣) قيمة -(2) قيمة عظمى حملية، ق(٢) قيمة عظمى حملية، ق-() قيمة صغرى حملية و ق1( ق  
صغرى حملية  
ب نقطة االنعطاف هي (0 ، 0)   
]١ ، ٢-[ ، 2] ومتناقص يف١[ ٢] كذلك يف- ، ٣-[ جـ ق(س) متزايد يف  
 ٥- تمارين ٢  
 س = 02 م ، ص = 02 م ، أكرب مساحة = ٠٠٤ م٢١  
سم1٢ نق = 4سم ، ع = 2  
 ٣ ) ، ٣ و = (٢  
 ١٠- = ، أ١٤ ب = ٠  
 دقيقة 1٥ الساعة الواحدة و 2  
 سم3π ٦٥٢  
٩  
٨ ، ح =   
٦ نق = ٣  
 ٣ سم٢ ٧ أكرب مساحة ممكنة لشبه املنحرف هي ٧٢  
٨ س = ٤

# Page 234

032  
تمارين عامة: الوحدة الثانية  
 ١  
رقم الفقرة12  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
910١١  
١٢  
رمز االجابة  
جـ  
ب  
د  
جـ  
أ  
د  
أ  
جـ  
د  
جـ  
جـ  
أ  
 ، ∞ [١[ ، ] ٣- ، ∞-] ٣ ق(س) متناقص يف  
]١ ، ٣-[ ق(س) متزايد يف  
 قيمة صغرى حملية١-  
٣) = ٦-(ق  
 قيمة عظمى حملية١  
) = ٢١(ق  
4 أ = ٤  
 ، 3 ، 61- ، 2- = أ س  
5   
22 صغرى مطلقة ، ق(6) = 95 عظمى مطلقة - = ) ق(3  
 ، ٦[١[ [ ومقعر إىل أعىل يف١ ، ٢-] ب ق مقعر إىل أسفل يف  
١٢- = )١(َ6) نقطة انعطاف، ظل زاوية االنعطاف = ق- ،1( جـ  
[١ ، ٢-] ، ∞[ ومقعر إىل أسفل يف١] ٢[ كذلك يف- ، ∞-] أ منحنى ق(س) مقعر إىل أعىل يف  
6   
 1 = 2 ، س- = ب س  
 ٢ 02  
٣  
٠٤ سم ، نق =   
٨ ع = ٣  
 3+ ٣س- س٣١  
 ق(س) = ٤١١  
٠٠٢ م  
π = م ، وعرض املستطيل١ طول املستطيل = ٠٠١٢  
 طول ضلع املثلث األول ٣ سم ، طول ضلع املثلث الثاين ٣ سم١٣

# Page 235

321  
حلول الوحدة الثالثة: املصفوفات  
تمارين ٣ – 1  
ب انتاج فرع طولكرم  
 من الرتبة ٢ × ٣   
٠٠٨  
٠٠٦  
٠٥٧  
٠٠٩  
٠٥٤  
٠٥٦  
أ   
 ١  
3- جـ  
ب 2   
أ ٤ × ٣   
٢   
٢-٦  
٥  
٣-  
١٥  
٥ ب =   
 ١  
١  
٢  
٢١  
 ٤  
٣ س = ٣   
تدريبات:  
١٤١١-٣  
١-٨١٠-  
 ، ٠  
٥-  
١٦  
٤١٧١٢  
 ١  
   
 ٦ ، ص = ٣- = ٤ س  
   
١-٥  
٢  
١-  
٢  
٣-  
٢  
٣ أ =   
 ١  
١٠-  
١٠  
٣  
 ١  
٢ س = ٤  
٠  
٢  
٢-٤-  
 = ، ص١  
١-  
٢  
٣-  
 = ٥ س  
تمارين ٣ – 2  
ب ب 3 × 5  
أ ب 5 × 4   
 1  
6  
52  
10-9-  
 جـ  
   
11-6  
03-  
5318  
92  
181210  
ب   
   
04  
42  
72  
٦-  
12-  
11  
 أ  
٢   
 ١-  
٢  
أ   
٧   
٦ جمموعة احلل= ∅   
3 - =2 ، ص- = ٣ س

# Page 236

232  
تمارين ٣ – ٣  
١جـ ٥٢  
ب 23   
أ صفر   
 1  
3± = ٤ س  
62 - ٣  
3 - =٢ س=6 ، س  
 = 0 11 + 2ص+ 5س- ٥  
 ص2 + 12 ص- أ  
٦   
ب إخراج عامل مشرتك من كل من الصفني األول والثاين فتتساوى املدخالت املتناظرة يف الصفني   
فتصبح قيمته صفرا.  
)1-( جـ تبديل عمود مكان عمود فإن قيمة املحدد ترضب بـ  
تمارين ٣ – ٤  
 أ هلا نظري رضيب ب هلا نظري رضيب. جـ ، د ليس هلا نظري رضيب.1  
2- ، ٢ يف املصفوفة أ تكون قيم ك = 0 ، 2، ويف املصفوفة ب تكون قيم ك = 2  
 = أ  
٤  
٥  
٢  
٣  
ب   
   
٣  
٥-  
٢-٤  
 ١  
٢  
أ   
٣   
٨  
٦-  
٥-٥  
٦   
٢ - ، 4- = ٥ س . ص  
٤ س = 5   
تمارين ٣ – ٥  
1 = ، ص1 = ب س  
أ س = 3 ، ص = 0   
 ١  
1 = 4 ، ص- = ب س  
 1- =أ س = 4 ، ص  
٢   
 ١ = ٣ س = 4 ، ص  
 ، س = 21- = ب ع = 3 ، ص  
 ، ص = 2 1 = أ س  
٤

# Page 237

332  
تمارين عامة: الوحدة الثالثة  
 ١  
رقم الفقرة12  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
910  
رمز اإلجابة  
جـ  
جـ  
جـ  
د  
أ  
ب  
د  
ب  
د  
أ  
٢ س = 5 ، ص = 3  
١٥-  
٤  
١  
٢  
٣-  
٤  
جـ   
 ١٨- ب  
   
٤  
٥-  
٢  
٣-  
 أ  
٣   
٤ س أي عدد حقيقي.   
 ١-  
 ، ص = ٤1 = 5 ، ص = 4 ب س- = أ س  
٥   
 3 - = ٦ س = 4 ، ص  
 1 = ، ص1 = ب س  
أ ن = ٦ ، ك = ٢   
٨   
   
)٢١- = (أ  
١-)٩ (أ٢  
 1 = 2 ، ص- = س١٠  
2 ، س = 3 - = ، ص1 = ع١١  
 ٥± = س١٢

# Page 238

324  
حلول الوحدة الرابعة: التكامل غري املحدود، وتطبيقاته  
 1- تمارين ومسائل 4  
أ اقرتان أصيل   
 ١  
 ًب ليس اقرتانا أصليا  
   
جـ اقرتان أصيل   
   
) = ٤ ١(٢ هـ  
١ هـ)َ (٤) = ٤- ٣ (٣م  
٤ أ = ٢   
٢- = ٥ أ = ٢ ، جـ  
 ٢- تمارين ومسائل 4  
 جـ + أ ٨س  
 ١  
 جـ+ ١  
 س٣- ٢س٢- ٧ س٣  
٣  
ب   
   
 جـ +   
٥  
٢ س ٢  
 ٥+   
٣  
جـ ٢س ٢  
   
 جـ+ قاس+ 5 س٢  
د 2  
   
 جـ + س+   
٤  
٣ س ٣  
 ٤+   
٥  
٣ س ٣  
٥  
هـ   
   
 جـ + ١  
 س+ ٥س+ و س٢  
   
 جـ + ز ظاس  
   
 جـ+ | ٢لــو هـ|س+   
حـ ٥هـس  
   
 هـس- ٢ ق(س) = جاس  
١٥-  
) = ٢١-(٤ ق

# Page 239

532  
 ٣- تمارين ومسائل 4  
 ٣+ س٣- ٢ ق(س) = س٢  
 ١ + س٢- ص = ق(س) = س٣١  
π ٢- ٢س+ جتاس- = )٤ ق(س  
٣ ق(س) = ٢س٢   
 ٢-   
١  
 ٢س ٢+   
٣  
٢ س ٢  
٦ ص = ٣  
٢ مرتاً ١٥  
٣ م/ث ، ف(٥) = ٦١  
٥ ع(٥) = ٢  
 ٤ + | = لــو هـ|س  
ص٢  
 ٢+ ٨ ص  
٧ ن = ٩ ثانية   
 4 أ- تمارين 4  
 جـ+ ) ٢س- جتا(س٢١  
٢  
ب   
 جـ + ٤-) ٢+ (س- أ  
 ١  
 جـ+   
(لــو هـ س)٢  
٢  
جـ   
   
 جـ+   
3  
) ٢١ + 2(س+   
5  
) ٢١ + 4 (س  
 5-   
٧  
) ٢١ + ٢ (س  
٧  
د   
   
 جـ+   
)٧١ - ٩(س  
٧  
 +   
)٨١ - ٦(س  
٨  
 +   
)٩١ - (س  
٩  
هـ   
   
 جـ+ جا٤س١  
 ٢٣+ جا٢س١  
 ٤+ ٣ س  
٨  
و   
   
 جـ + |  
 هـس+ ١|حـ لــو هـ  
 جـ + قاس- ز ظاس  
   
 جـ+ ١  
ب جتا س  
 جـ +   
٣  
) ٢١  
 س+ ١( ٢-  
٣  
أ   
٢   
 جـ+   
٢ )٦  
 س+ ١( ١-  
١د ٢  
 جـ + ظتاس- جا٢س١  
 ٤- ٥ س  
٢  
جـ   
   
 جـ +   
٤  
) ٣١ + ٣ (س٤  
١هـ ٦  
   
 جـ+ | لــو هـ|جتاس+ ظا٢س  
٢  
و

# Page 240

632  
 4 ب- تمارين 4  
 جـ +   
س٢  
 ٤- س  
 لــو هـ  
س٢  
٢  
أ   
 ١  
 جـ+ لــو هـجتاس+ ب س ظاس  
   
 جـ+ ) ٢+ ٦لــو هـ (س+ ٣س- ) ٢+ جـ ٣س لــو هـ (س  
 جـ + جا٢س١  
 ٤+ س جتا٢س١-  
٢  
د   
 جـ+ ١+ هـس٢١  
 ٢- ١+ س٢ هـس٢١  
٢  
هـ   
 جـ+ ١ + س ٢جا+ ١ + س جتا١ + س ٢- و  
 جـ +   
 ٢هـس+   
٢س هـس-  
١ + س  
ز   
 جـ+ جا٢س  
 هـس١  
 ٥+ جتا٢س  
٢ هـس-  
٥  
حـ   
 جـ + قتاس  
ط هـس  
 جـ+ ١  
 جتا س- ١  
 جا س١-  
س  
ي   
 4 ج- تمارين 4  
 جـ+ |١ + لــو هـ|س١-  
 ٤+ | ٣- ٥ لــو هـ|س  
٤  
أ   
 ١  
 جـ+ | ٢- ٦ لــو هـ|س  
 ٥+ | ٣+ لــو هـ|س١١-  
 ٥+ ب س  
   
 جـ+ )١ + س(٢ لــو هـ  
 ٣- ) ٢- س(٨ لــو هـ  
 ٣+ جـ ٢ س  
   
 جـ+ |١ + لــو هـ|س١  
 ٢+ |١ - ٣ لــو هـ|س  
 ٢+ |٢ لــو هـ|س- د

# Page 241

732  
 جـ+ | ظتاس+ لــو هـ|قتاس- هـ  
   
 جـ+ |س  
 لــو هـ+ ١| لــو هـ١  
 ٢+ |س  
 لــو هـ- ١| لــو هـ١-  
٢  
و   
   
 جـ+ | ٢+ ٣ لــو هـ|س- |١ - ز ٢ لــو هـ|س  
   
 جـ+ | جتاس- لــو هـ|٤١  
 ٨+ | جتاس+ لــو هـ|٤١-  
٨  
حـ   
   
 جـ+ |١ + لــو هـ|ظتاس١  
 ٢- |١ - لــو هـ|ظتاس١  
٢  
ط   
   
 جـ+ )|١ + لــو هـ|س٣- | (لــو هـ|س٣١  
٣  
ي   
   
٥  
 ٣- |١ + س(| ٢لــو هـ- )١ + س( ص = ٢١  
٦  
٢   
تمارين عامة: الوحدة الرابعة   
 ١  
رقم الفقرة12  
3  
4  
5  
رمز االجابة  
جـ  
د  
جـ  
ب  
ب  
 ٢ + ٦س+ ٣جاس-   
س٤  
١٣ ق(س) = ٢  
 ٣لــو هـ ٤ مرتاً+ ٤ ف(٣) = ٢٢  
٧٤   
 ٨٤+   
١-  
 ٤س)٣- ٥ ص = ٦(٢س٣

# Page 242

832  
 جـ +   
٣  
 ٣) ٢- (س٢١  
٣  
 ١  
 ٦  
 جـ+ |١ + لــو هـ|س٩- | (لــو هـ|س٩١  
٩  
٢   
 جـ+ | س ٢لــو هـ|جتا+ س ٣ ٢ س ظا  
 جـ+ )١ + قا(٣س١  
٣  
٤   
 جـ + ٢جاس- ٢س جتاس+ ) جاس١ + ٥ (س٢  
 جـ+ |١ - لــو هـ|س- |١ + لــو هـ|س+ ٢س- )١ - ٦ س لــو هـ(س٢  
 جـ+ |٧ لــو هـ|س  
 جـ+ |١ - لــو هـ| ظاس- | ظاس+ ١| لــو هـ+ ظاس- ٨  
 جـ+ جا ٢س١  
٢  
٩   
 جـ+   
 ظتاس)٨+ (قتاس١-  
٨  
 ١٠  
 جـ+   
 ٦)٧-   
 (س٧١  
 ٩٤١١  
 ١ = ٧ أ  
٢   
 هـ+ ١  
 س- لــو هـس-  
س  
٨ ص =   
جاس  
٩ ق(س) = س

# Page 243

932  
حلول الوحدة الخامسة: التكامل املحدود، وتطبيقاته  
 1- تمارين 5  
03 - ٣  
٢ 2   
] ١ ، ١  
أ صفر ب [ ٢  
 ١  
٤ ، ب = ٠٢- = ٦ أ  
٥ أ = ٢   
 ١  
 هـ+ هـ+ ٤ ٧  
 ٢ ٣ )+ ٢ + ١( π  
٧ ٤٢  
 ٢- تمارين 5  
5- ب  
٥   
٢  
أ   
٤   
٣ ب = 6   
٠٤   
 ن- ١٢- ١  
 ٣- تمارين 5  
د ٦٩  
 ١ جـ  
 ١٥-  
٨  
ب   
أ 67   
 ١  
 )١ + لــو هـ (س- ٢ ت(س) = س  
٨ ب = 3 - = ٣ أ  
 π + ١ = )٣ ، ق(٢-  
٤ جـ = ٢  
 ١  
٦ ٤٢  
 ١ - هـ٢- = ٥ أ  
 ٤- تمارين 5  
 ١  
 ٢- ٢هـ٢+   
هـ٤  
٢  
ب   
 π  
٢  
أ   
 ١  
٢١-  
٢  
د   
 ٣ ١جـ ٠  
   
 ٢ دس + س  
١  
4  
 ب  
س٣ دس   
1  
٧  
 أ  
٣   
) دس١ - (س  
٢  
7  
 د  
 ٤) دس + (س٢  
1  
5  
 جـ  
 ١  
١ب أ = ٤  
 18- أ  
٤

# Page 244

240  
 ٨- ب  
 ١أ ٦  
٥   
٦ 2   
٤-  
٣  
٧   
 ، ٥١-  
٨ ب = ٢  
[ [٠ ، ٢ س٢ ، س١  
 ٢- ٢س  
 [٢ ، ٥] ٤ ، س+ ٢س- س٢١  
٢  
٩ ت(س) =   
 ٥ أ- تمارين 5  
٥ وحدة مساحة   
٣  
٢   
 وحدة مساحة 1 ١  
 وحدة مساحة١  
 هـ- ٤ هـ  
٤٠٣ وحدة مساحة   
١٥  
٣   
٨٢ وحدة مساحة   
٣  
٦   
 وحدة مساحة ١٠  
٣  
٥   
 ٥ ب- تمارين 5  
 وحدة حجمπ ٢ ٢٣  
 وحدة حجم π ٠٨١  
 وحدة حجمπ ٢٦  
١٤ ٥  
 وحدة حجم π ٢١ ٣  
٣ وحدة حجم   
 لــو هـ ٢π ٧ ٨  
 ٢) وحدة حجم - (هـπ = ٥ ح

# Page 245

241  
تمارين عامة: الوحدة الخامسة  
 ١  
الرقم12  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
910  
رمز االجابة  
ب  
أ  
جـ  
أ  
د  
جـ  
ب  
ب  
جـ  
جـ  
٢ أ = 2 ، ب = 22   
٣ 47   
٥٦   
٣ ٧ ، قَ(٤) = ٢٣  
٦ ق(٤) = ٤  
١ب ٤  
 12 ، أ = 8 ، ب = 8- = أ جـ  
٧   
 ٦لــو هـ ٢+ ٣  
جـ ٥لــو هـ ٥  
ب هـ٢   
 ١  
٣  
أ   
٨   
 ٢ ٢+ ٥-  
٢  
هـ   
) ١ -   
 ٥ )٣(( ١  
٣  
د   
 ٤ وحدة مساحة - π  
 ٣- ب ٤ ٣  
 وحدة مساحة ١٣  
٣  
أ   
 ١٠  
 هـ - هـ٣+ ب = ٢+ أ١١  
 ٤ وحدة مساحة  
٣  
 ١٢  
٧ وحدة مساحة  
٢  
 ١٣  
٠٤٣ وحدة مسافة   
 ، ٣1ب ن = 2  
 م ١٣٩  
أ ف(5) = ٣  
 ١٤  
   
 أهـس± = )ب ق(س  
 جـ +   
 (ق(س))ن١  
ن  
أ   
 ١٥  
 صفر ١٧  
 أ - ١  
 ٢+   
١  
 ٢+ π ١٦  
 وحدة حجم   
٢π  
٦  
 ١٩  
 وحدة حجم π ٧٥١٨  
4- ٢١  
 وحدة حجمπ ٨  
٢١ ٢٠

# Page 246

242  
حلول الوحدة السادسة: األعداد املركبة  
 1- تمارين 6  
 ٠ت+ ٤- جـ  
ب ٥ ٢ ت   
 ٢ ت + أ ٢  
 ١  
 2  
اجلزء احلقيقي  
3-010  
0١  
3  
اجلزء التخييل  
2  
5  
31-6  
2-0  
جـ ٠   
ت - ب  
ت - أ  
٤   
 ٢- تمارين 6  
 ٤٤ت+ ١١٧- جـ  
 ٣ت - ب ٩٢  
 ٦ت + أ ٣٢  
 ١  
 ٨ت+ هـ ٠  
 ٦٩ت - د ٠٤  
 ٣ت + ١ = ٢ س  
)١- ، ١( ، )٣ (٤ ، ٢  
١٦ أ = ٠  
 ت١  
١ ٨٢+ ١-  
١جـ ٨٢  
 ٣ت + ١ ب  
 ٣ ت   
 ٨- ١  
٨  
أ   
٧   
 ٢ ت- ، ٢ ت ٨  
 ٣- تمارين 6  
 ٥ ١  
د ٤  
 ١ جـ  
 ١ ب  
 ١ ٨ أ  
٢   
١  
٥  
د   
 ١ جـ  
٤ ت   
١ ٥+ ٣  
١ب ٥  
٤ ت   
 ٥+ ٣  
٥  
أ   
٣   
٩٥٧ ت  
 ٢٤٤+ ٣١٣-  
٢٤٤  
ب   
 ٢ ت 2+ 1  
5  
 + ٢ + ٢-  
5  
أ   
٤

# Page 247

243  
٦ متثيله يف مستوى األعداد املركبة  
) ٢ ، (٢  
ب   
   
)١- ، (٠  
أ   
) ، ٠١(  
 د  
   
)(٠ ، ٥  
جـ   
)π ٧  
 ت جا ٤+ π ٧  
 ٢ (جتا ٤ = أ ع  
٨   
)π ت جا+ π (جتا١  
ب ع = ٢  
)π ٢  
 ت جا ٣+ π ٢  
 (جتا ٣١ = جـ ع  
٣ ت  
 ٢+ ٣ ٣  
٢  
ب   
 ت   
٧  
 ٢ + ٧-  
 ٢ أ  
٩   
 ٣ ت ٣  
٢  
 + ٣  
٢  
د   
 ٢ ت - ٢ جـ

# Page 248

244  
 تمارين عامة: الوحدة السادسة  
 1  
رقم الفقرة12  
3  
4  
5  
6  
7  
اإلجابة  
جـ  
جـ  
د  
أ  
ب  
ب  
د  
 ٠٢ د  
 ١ ٠ جـ  
 ٥ ب  
 ٥ أ  
٢   
 ، ٠) ١-( ، )١ ، ٣ (٠  
 ١ م٢ = ٤+ م = ٨ ، ل م = ٥٢ ، ل٢+ ٤ ل  
٥ ت  
�أفكار ريادية  
\* تصميم دليل ارشادي لمدينة القدس للتعريف باهميتها، مع �إبراز اهم معالمها   
التاريخية والسياحية.  
\* تصميم اداة لقياس اثر استخدام مواقع التواصل الاجتماعي على تحصيل الطلبة.   
\* تعاني المحافظات الجنوبية (قطاع غزة) من مشكلات الماء والكهرباء، اصمم   
مقترحا لعرضه على الحكومة للتخفيف من حدة هذه الازمات.   
) عن وحدة التفاضل. Web quest( \* �إعداد رحلات معرفية  
\* �إعداد دراسة عن كيفية الافادة من الاراضي البور لدعم السلة الغذائية .

# Page 249

1.ينفّذه فرد �أو جماعة.

2.يرمي �إلى تحقيق �أهداف ذات معنى للقائمين بالتنفيذ.  
 .3   
.لا يقتصر على البيئة المدرسية و�إنما يمتد �إلى بيئة الطلبة لمنحهم فرصة التفاعل مع البيئة وفهمها

4.يستجيب المشروع لميول الطلبة وحاجاتهم ويثير دافعيّتهم ورغبتهم بالعمل.  
 .5   
:خطوات المشروع  
�أولاً: اختيار المشروع: يشترط في اختيار المشروع ما ي�أتي:  
�أن يتماشى مع ميول الطلبة ويشبع حاجاتهم.

1.�أن يوفّر فرصة للطلبة للمرور بخبرات متنوعة.

2.�أن يرتبط بواقع حياة الطلبة ويكسر الفجوة بين المدرسة والمجتمع.  
 .3   
.�أن تكون المشروعات متنوعة ومترابطة وتكمل بعضها البعض ومتوازنة، لا تغلّب مجالاً على الҙآخر

4.�أن يتلاءم المشروع مع �إمكانات المدرسة وقدرات الطلبة والفئة العمرية.  
 .5   
.ً�أن يُخطّط له مسبقا  
 .6   
:ثانياً: وضع خطة المشروع  
يتم وضع الخطة تحت �إشراف المعلم حيث يمكن له �أن يتدخّل لتصويب �أي خط�أ يقع فيه الطلبة.  
يقتضي وضع الخطة الҙآتية:  
تحديد الҙأهداف بشكل واضح.

1.تحديد مستلزمات تنفيذ المشروع، وطرق الحصول عليها.

2.تحديد خطوات سير المشروع.  
 .3   
 تحديد الҙأنشطة اللازمة لتنفيذ المشروع، (شريطة �أن يشترك جميع �أفراد المجموعة في المشروع

4.من خلال المناقشة والحوار و�إبداء الر�أي، بȌإشراف وتوجيه المعلم).  
تحديد دور كل فرد في المجموعة، ودور المجموعة بشكل كلّي.  
 .5

# Page 250

1.�إتاحة الفرصة للطلبة للتعلّم بالҙأخطاء.

2.الابتعاد عن التوتّر مما يقع فيه الطلبة من �أخطاء.  
 .3   
.التدخّل الذكي كلما لزم الҙأمر

4.دور الطلبة:  
القيام بالعمل ب�أنفسهم.

1.تسجيل النتائج التي يتم التوصل �إليها.

2.تدوين الملاحظات التي تحتاج �إلى مناقشة عامة.  
 .3   
.)ًتدوين المشكلات الطارئة (غير المتوقعة سابقا

4.رابعاً: تقويم المشروع: يتضمن تقويم المشروع الԽآتي:  
الԽأهداف التي وضع المشروع من �أجلها، ما تم تحقيقه، المستوى الذي تحقّق لكل هدف، العوائق في تحقيق

1.الҙأهداف �إن وجدت وكيفية مواجهة تلك العوائق.  
الخطة من حيث وقتها، التعديلات التي جرت على الخطة �أثناء التنفيذ، التقيّد بالوقت المحّدد

2.للتنفيذ، ومرونة الخطة.  
الԽأنشطة التي قام بها الطلبة من حيث، تنوّعها، �إقبال الطلبة عليها، توافر الҙإمكانات اللازمة، التقيد بالوقت المحدد.  
 .3   
 تجاوب الطلبة مع المشروع من حيث، الҙإ قبال على تنفيذه بدافعيّة، التعاون في عملية التنفيذ، الشعور

4.بالارتياح، �إسهام المشروع في تنمية اتجاهات جديدة لدى الطلبة.  
يقوم المعلم بكتابة تقرير تقويمي شامل عن المشروع من حيث:  
�أهداف المشروع وما تحقّق منها.  
 •  
   
الخطة وما طر�أ عليها من تعديل.  
 •  
   
الҙأنشطة التي قام بها الطلبة.  
 •  
   
المشكلات التي واجهت الطلبة عند التنفيذ.  
 •  
   
المدة التى استغرقها تنفيذ المشروع.  
 •  
   
الاقتراحات اللازمة لتحسين المشروع.  
 •

# Page 251

247  
. ) : الҙإ حصاء العام، دار الوفاء لدنيا الطباعة، الҙإ سكندرية2014( بسيوني، جابر �أحمد  
) ، الرياضيات للعلوم الҙإ دارية والمالية، دار وائل للنشر، عمان .2012( حمدان، فتحي خليل  
) : الرياضيات في العلوم المالية والҙإ دارية والاقتصادية، دار الحامد للنشر والتوزيع عمان.2009( شاهر، ثائر فيصل  
.2001 ،) : مبادئ الҙإ حصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي، دار وائل للطباعة والنشر، عمان2001( رمضان، زياد  
) :منهج الرياضيات المعاصر محتواه واساليب تدريسه، مكتبة الҙأنجلو المصرية، القاهرة .2014( الجندي، حسن عوض  
2014 ،المومني، غازي فلاح، الرياضيات المالية المعاصرة ، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان  
، دار المسيرة، عمان .1) : التفاضل والتكامل ج2012( الخطيب، روحي �إبراهيم  
، دار المسيرة، عمان .2) : التفاضل والتكامل ج2012( الخطيب، روحي �إبراهيم  
) –دار الفكر – عمان –الҙأردن1990(، عدنان عوض، �أحمد علاونة ، مفيد عزام  
): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الҙأول (ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية 1986( فريدريك بل  
للنشر والتوزيع   
): طرق تدريس الرياضيات: الجزء الثاني(ترجمة محمد المفتي وممدوح سليمان). قبرص: الدار العربية 1986( فريدريك بل  
للنشر والتوزيع   
): �أساليب تدريس الرياضيات، الطبعة الاولى. دار الشروق للنشر والتوزيع2010( ابو �أسعد ، صلاح عبد اللطيف  
): الҙإ حصاء التربوي، الطبعة الاولى، دار الشروق للنشر والتوزيع.2005( الزغلول، عماد  
): طرق التدريس في القرن الواحد والعشرين، الطبعة الҙأولى، دار المسيرة للنشر والتوزيع 2005( حسين فرج، عبد اللطيف  
والطباعة/ عمان   
Bostock&Perkins(1989 ) : Advanced Mathematics, volume1   
Howard Anton, John Wiley ( 1999): Calculus, 6th Edition ,  
Bell,E,T (1937):Men of Mathematics ,Simon and Schuter,N.Y   
Lanl B.Boyer(1989): History of Mathematics Wiley,N.Y  
Bostock&Perkins(1989 ) : Advanced Mathematics, volume2   
Edwards & Penny(1994): Calculus with Analytic Geometry‚ 4th Edition‚ Prentice hall   
المراجع

# Page 252

تَمَّ بِحَمْدِ اهلل  
تم مناقشة الكتاب بورشات عمل عىل مستوى مديريات الوطن  
جلنة املناهج الوزارية:  
املشاركون يف ورشات عمل كتاب الرياضيات للثاين عرش العلمي والصناعي:   
خليل حميسن  
نادية عبايس  
أمحد العملة  
فداء أبو عرة  
جوين مصلح  
توفيق السعدة  
رائد مالك  
أشجان جرب  
عيل زايد  
ابتسام بعباع  
مجيل معايل  
سميه سالمه  
ايناس سباعنة  
لبنى ابو باشا  
يوسف احلروب   
رهام مصلح  
عريب الزبون  
فهمي بشارات  
خالد طقاطقة  
صهيب عكر  
ماهر أبو بدر  
خوله الشاعر  
فادي زيدان  
عبدالرمحن عزام  
خالد الدشت  
هاشم عبيد  
أروى مشارقة  
آسيا العالمي  
صفية النجار  
سناء أبو محاد  
حممد ابو سليم  
سهيلة بدر  
هيثم مساملة  
عبري لعسوس  
حممد عليان  
مطيعة صوافطه  
سوزان عبداحلميد  
حممد موسى  
أيمن ابو زياد   
حممد مسلم  
حممد الفرا  
فالح الرتك   
رائد عبد العال   
رفيق الصيفي   
حسني عرفات   
سمرية حنيف   
مؤيد احلنجوري  
رسين أبو عيشة   
ابتسام اسليم   
منال الصباغ   
د.رمحة عودة   
هانم النخالة   
عزيزة عيطة   
صالح الرتك   
باسم املدهون  
سمري عمران  
مصطفى قنيص  
نادر أبو عقيل  
مريم احلوامدة  
وهيب جرب  
عبد احلافظ اخلطيب  
كفاية مضية  
حممد دراوشة  
عامد النابليس  
نجود رحيان  
د. صربي صيدم  
د. برصي صالح  
م. فواز جماهد  
أ. ثروت زيد  
أ. عزام أبو بكر  
أ. عبد احلكيم أبو جاموس  
د. شهناز الفار  
د. سمية النخالة  
م. جهاد دريدي  
اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:  
أ. ثروت زيد  
د. حممد صالح (منسقًا)  
د. معني جرب  
د. عيل عبد املحسن  
د. حتسني املغريب  
د. عادل فوارعة  
أ. وهيب جرب  
د. عبد الكريم ناجي  
د. عطا أبوهاين  
د. سعيد عساف  
د. حممد مطر  
د. عال اخللييل  
د. شهناز الفار  
د. عيل نصار  
د. أيمن األشقر  
أ. ارواح كرم  
أ. حنان أبو سكران  
أ. كوثر عطية  
د. وجيه ضاهر  
أ. فتحي أبو عودة  
د. سمية النخالة  
أ. أمحد سياعرة  
أ. قيس شبانة  
أ. مبارك مبارك  
أ. عبد الكريم صالح  
أ. نادية جرب  
أ. أحالم صالح  
أ. نشأت قاسم  
أ. نرسين دويكات