20/06/2018 - Esame di geometria - 6 crediti
Ingegneria informatica - a.a. 2017-2018

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 2 ore e mezza.
- **Ti sono stati consegnati due fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti, in STAMPATELLO leggibile, il tuo cognome, nome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- Le risposte vanno **motivate** brevemente, ma in maniera adeguata e comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno corretti eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia $\Sigma : A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ il sistema lineare dato da:

$$A = \begin{pmatrix} k & k-1 & k+1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2k & 2-2k & -2k-2k^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

con k parametro reale.

3	

(a) Determinare il numero di soluzioni di Σ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Risposta:
Se $k = 1$, il sistema ha ∞^2 soluzioni.
Se $k = -1$, il sistema ha ∞^1 soluzioni.
Se $k \neq 1$ e $k \neq -1$, il sistema ha 1 soluzione.

2	

(b) Nel caso $k = 1$, determinare esplicitamente tutte le soluzioni di Σ.

Risposta:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{con } t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

2	

(c) Determinare se esistono soluzioni di Σ valide per ogni valore reale di k. Se esistono trovarle tutte esplicitamente.

Risposta:
Esistono. L'unica è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo con matrice associata rispetto alla base canonica nel dominio e nel codominio:

$$A = A_{f,\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1-k & 0 \\ k & 2 & 1 \\ 0 & 1 & k-\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

con k parametro reale.

4	

(a) Per quali $k \in \mathbb{R}$ esistono una matrice D diagonale e una matrice M ortogonale tali che $D = M^{-1}AM$? Per tali k, se esistono, calcolare delle matrici D e M che soddisfino l'uguaglianza indicata.

Risposta:

$$k = \frac{1}{2},$$
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$
$$M = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{5\sqrt{30}}{30} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{30}}{30} & \frac{2\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.$$

2	

(b) Per quali $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di f rispetto all'autovalore $\lambda = \frac{5}{2}$?

Risposta:
Per $k = 1$.

3	

(c) Per quali $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f è invertibile? Nel caso $k = 2$, calcolare la matrice associata a f^{-1} rispetto alla base canonica nel dominio e nel codominio.

Risposta:
L'endomorfismo è invertibile se $k \neq 0$ e $k \neq 1$ e $k \neq \frac{1}{2}$. Se $k = 2$ si ha

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano e sia P un punto di coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ rispetto a tale riferimento.

4	

(a) Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse y' la retta r con equazione cartesiana $x - 2y + 5 = 0$ orientata rispetto alle$x$ decrescenti, la base $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ equiversa alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e O' il punto di intersezione tra la retta r e la retta di equazione cartesiana $x+3 = 0$. Determinare le coordinate di P rispetto a RC' e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$C_{RC}(O') = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\left\{ \mathbf{i}' = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \mathbf{j}' = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \right\},$$
$$C_{RC'}(P) = \begin{pmatrix} -\frac{16}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{7}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

4	

(b) Sia C il punto del piano con coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto al riferimento RC. Sia P' l'immagine del punto P rispetto alla rotazione del piano in senso antiorario di centro C e angolo $\theta = \frac{7}{4}\pi$. Determinare le coordinate di P' rispetto a RC e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$
$$C_{RC}(P') = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} + 2 \\ -4\sqrt{2} + 3 \end{pmatrix}.$$

4. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento cartesiano dello spazio. Sia r_1 la retta di equazioni cartesiane

$$r_1 : \begin{cases} x - y - 3z - 1 = 0 \\ x + z + 5 = 0, \end{cases}$$

e sia r_2 la retta di equazioni parametriche

$$r_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

3

(a) Determinare la posizione reciproca delle due rette r_1 e r_2.

Risposta:
Le due rette sono sghembe.

3

(b) Determinare se esiste un piano che contiene le due rette e, se esiste, trovare delle euqazioni parametriche per esso. Calcolare inoltre la distanza $d(r_1, r_2)$ tra le due rette.

Risposta:
Non esiste un piano che contiene entrambe le rette e si ha

$$d(r_1, r_2) = \frac{4}{3}.$$

2

(c) Determinare, usando i quaternioni, l'immagine P' del punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto alla rotazione di angolo $\theta = \frac{3}{2}\pi$ e asse la retta a di equazioni parametriche

$$a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

orientata rispetto alle z crescenti.

Risposta:

$$q = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}i - \frac{\sqrt{2}}{6}j + \frac{\sqrt{2}}{3}k,$$

$$C_{RC}(P') = \begin{pmatrix} \frac{25}{9} \\ \frac{13}{9} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$