06/09/2017 - Esame di geometria - 6 crediti
Ingegneria informatica - a.a. 2016-2017

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 2 ore e mezza.
- **Ti sono stati consegnati due fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti, in stampatello leggibile, il tuo cognome, nome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- Le risposte vanno **motivate** brevemente, ma in maniera adeguata e comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno corretti eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare con matrice associata, rispetto alle basi canoniche nel dominio e nel codominio, data da $A_{f,\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si considerino, inoltre, le basi $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$ rispettivamente e il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ con coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$.

2	

(a) Calcolare le coordinate del vettore $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_1$.

Risposta:

$$C_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3	

(b) Calcolare la dimensione e determinare una base (se esiste) del nucleo e dell'immagine di f.

Risposta:

$$\dim_{\mathbb{R}}(\ker(f)) = 1,$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } \ker(f),$$
$$\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im}(f)) = 2,$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } \operatorname{Im}(f).$$

3	

(c) Calcolare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathcal{B}_1$ nel dominio e $\mathcal{B}_2$ nel codominio

Risposta:

$$A_{f,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2	

(a) Determinare lo spettro σ_A della matrice A.

Risposta:

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 3\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 2),$$
$$\sigma_A = \{-1, 4, 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}.$$

2	

(b) Dire se la matrice A è diagonalizzabile e spiegare perché.

Risposta:
Sì, poiché è simmetrica. (O anche perché ha ordine 4 e ha 4 autovalori distinti.)

4	

(c) Calcolare la dimensione e determinare una base (se esiste) degli autospazi relativi all'endomorfismo associato alla matrice A.

Risposta:

$$\dim_{\mathbb{R}}(E(-1)) = 1,$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E(-1),$$
$$\dim_{\mathbb{R}}(E(4)) = 1,$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E(4),$$
$$\dim_{\mathbb{R}}(E(2-\sqrt{2})) = 1,$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E(2-\sqrt{2}),$$
$$\dim_{\mathbb{R}}(E(2+\sqrt{2})) = 1,$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E(2+\sqrt{2}).$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano e sia P un punto di coordinate $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ rispetto a tale riferimento.

4	

(a) Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse y' la retta r con equazione cartesiana $y = 3x + 1$ orientata rispetto alle x decrescenti, la base $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ equiversa alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e O' il punto di intersezione della retta r con l'asse x. Determinare le coordinate di P rispetto a RC'.

Risposta:

$$\left\{ \mathbf{i}' = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}, \mathbf{j}' = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \right\},$$
$$\mathcal{C}_{RC'}(P) = \begin{pmatrix} -\frac{7\sqrt{10}}{5} \\ \frac{8\sqrt{10}}{15} \end{pmatrix}.$$

4	

(b) Sia C il punto del piano con coordinate $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ rispetto a RC. Sia P' l'immagine del punto P rispetto alla rotazione del piano in senso orario di centro C e angolo $\theta = \frac{\pi}{4}$. Determinare le coordinate di P' rispetto a RC.

Risposta:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{C}_{RC}(P') = \begin{pmatrix} 7 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

4. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento cartesiano dello spazio. Sia r_1 la retta di equazioni cartesiane

$$r_1 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4. \end{cases}$$

Siano P e Q i punti di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, rispettivamente, nel riferimento RC. Infine, sia r_2 la retta passante per P e Q.

4	

(a) Calcolare la distanza tra la retta r_1 e il punto P.

Risposta:

$$d(r_1, P) = \frac{\sqrt{8626}}{38}.$$

2	

(b) Calcolare l'ampiezza degli angoli θ_1 e θ_2 formati dalle due rette r_1 e r_2.

Risposta:

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{7\sqrt{209}}{418}\right),$$
$$\theta_2 = \pi - \arccos\left(\frac{7\sqrt{209}}{418}\right).$$

2	

(c) Sia A un punto di coordinate $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto al riferimento RC. Determinare, usando i quaternioni, l'immagine P' del punto P rispetto alla rotazione di angolo $\theta = \frac{3}{2}\pi$ e asse la retta passante per l'origine e per il punto A, orientata rispetto alle z decrescenti.

Risposta:

$$q = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i}{2} - \frac{k}{2},$$
$$\mathcal{C}_{RC}(P') = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$