19/02/2018 - Esame di geometria - 6 crediti
Ingegneria informatica - a.a. 2017-2018

COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 2 ore e mezza.
- **Ti sono stati consegnati due fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti, in STAMPATELLO leggibile, il tuo cognome, nome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- Le risposte vanno **motivate** brevemente, ma in maniera adeguata e comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno corretti eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ e $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni lineari date da:

$$A_{f,\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_{g,\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

con k parametro reale, $\mathcal{E}_4$ base canonica di $\mathbb{R}^4$ ed $\mathcal{E}_2$ base canonica di $\mathbb{R}^2$.

3	

(a) Nel caso $k = 2$, calcolare (se possibile) la matrice rappresentativa di $f \circ g$, di $g \circ f$ e di $f \circ f$ rispetto alle basi canoniche nel dominio e nel codominio.

Risposta:

$f \circ g$ non esiste,

$$A_{g\circ f,\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -6 \\ 9 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{f\circ f,\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

4	

(b) Nel caso $k = 2$, determinare la dimensione e una base (se esiste) di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$. Calcolare inoltre (se esiste) la matrice rappresentativa di f^{-1} rispetto alle basi canoniche nel dominio e nel codominio.

Risposta:

$\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 0$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f) = 4$,

non esistono basi di $\ker f$, $\mathcal{E}_4$ è una base di $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^4$,

$$A_{f^{-1},\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2	

(c) Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, calcolare $g^{-1}(\mathbf{v})$.

Risposta:

$$g^{-1}(\mathbf{v}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + t_1 - 2t_2 \\ -6 - 4t_1 + 6t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2	

(d) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ lo spettro σ_f dell'endomorfismo f ha solo elementi reali.

Risposta:

$$p_f(\lambda) = (3 - \lambda)(-3 - \lambda)(\lambda^2 - 1 - k),$$
$$\sigma_f \subseteq \mathbb{R} \text{ per } k \geq -1.$$

4	

(e) Nel caso $k = 8$, trovare una base degli autospazi di f e dire se f è diagonalizzabile.

Risposta:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E(3), \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E(-3).$$

Inoltre f è diagonalizzabile.

2	

(f) Determinare una base (se esiste) di $(\ker g)^\perp$.

Risposta:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } \ker g,$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } (\ker g)^\perp.$$

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

2. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano e sia P un punto di coordinate $\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ rispetto a tale riferimento.

4	

(a) Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse x' la retta r con equazione cartesiana $12x - 6y + 21 = 0$ orientata rispetto alle x decrescenti, la base $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ equiversa alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e O' il punto di intersezione tra la retta r e la retta di equazione cartesiana $x - y = 0$. Determinare le coordinate di P rispetto a RC' e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$O' \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$
$$\left\{ \mathbf{i}' = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \mathbf{j}' = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \right\},$$
$$\mathcal{C}_{RC'}(P) = \begin{pmatrix} -3\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

4	

(b) Sia C il punto del piano con coordinate $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ rispetto a RC. Sia P' l'immagine del punto P rispetto alla rotazione del piano in senso antiorario di centro C e angolo $\theta = \dfrac{5}{6}\pi$. Determinare le coordinate di P' rispetto a RC e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{C}_{RC}(P') = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

3. Sia $RC(O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ un riferimento cartesiano dello spazio. Sia π il piano di equazione cartesiana $2x+2y-z+1=0$, sia P il punto di coordinate $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, sia Q il punto di coordinate $\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ e sia r la retta passante per il punto P e ortogonale al piano π.

2	

(a) Determinare le coordinate di H punto di intersezione tra r e π.

Risposta:
$r: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R},$
$H\begin{pmatrix}\frac{1}{9}\\\frac{10}{9}\\\frac{31}{9}\end{pmatrix}.$

3	

(b) Determinare un'equazione parametrica della retta s passante per i punti P e Q. Inoltre, calcolare l'ampiezza degli angoli formati dalle rette s e r e la distanza $d(Q,\pi)$ tra il punto Q e il piano π.

Risposta:

$$\begin{aligned} s: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R},\\ \theta_1 &= \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right),\\ \theta_2 &= \pi-\theta_1,\\ d(Q,\pi) &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

2	

(c) Determinare, usando i quaternioni, l'immagine Q' del punto Q rispetto alla rotazione di angolo $\theta = \frac{3}{2}\pi$ e asse la retta a di equazioni parametriche

$$a: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R},$$

orientata rispetto alle z crescenti.

Risposta:

$$\begin{aligned} q &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6}i + \frac{\sqrt{2}}{3}j + \frac{\sqrt{2}}{3}k,\\ \mathcal{C}_{RC}(Q') &= \begin{pmatrix}\frac{7}{9}\\-\frac{19}{9}\\\frac{20}{9}\end{pmatrix}. \end{aligned}$$