19/06/2019 - Esame di geometria - 6 crediti
Ingegneria informatica - a.a. 2018-2019

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 2 ore e mezza.
- **Ti sono stati consegnati due fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti, in STAMPATELLO leggibile, il tuo cognome, nome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- Le risposte vanno **motivate** brevemente, ma in maniera adeguata e comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno corretti eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Si consideri il sistema lineare $\Sigma : \begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=k \\ 3x+ky=1 \\ x-2y=k-1. \end{cases}$

4	

Determinare il numero di soluzioni del sistema lineare Σ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e per i valori di k per cui esistono soluzioni, determinare tali soluzioni esplicitamente.

Risposta:
Se $k \neq 0$ e $k \neq 5$, il sistema non ha soluzioni.
Se $k = 0$, il sistema ha un'unica soluzione: $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3}. \end{cases}$
Se $k = 5$, il sistema ha un'unica soluzione: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \end{cases}$

2. Sia $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2+4x_4 \\ -x_1-x_3 \\ 2x_2-2x_3+8x_4 \end{pmatrix}$.

2	

(a) Determinare $f^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Risposta:

$$f^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-t_1 \\ 1+t_1-4t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

3	

(b) Data la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ di $\mathbb{R}^3$, calcolare la matrice $A_{f,\mathcal{E}_4,\mathcal{B}}$ rappresentativa di f rispetto alle basi indicate, dove $\mathcal{E}_4$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Risposta:

$$A_{f,\mathcal{E}_4,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ -1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -6 \end{pmatrix}.$$

3	

(c) Determinare la dimensione e una base (se esiste) di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$.

Risposta:

$\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 2$,

$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\ker f$,

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f) = 2$,

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathrm{Im} f$.

3. Data $A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, determinare se A è diagonalizzabile e, in tal caso, trovare una matrice D diagonale e una matrice $M \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, tali che $D = M^{-1}AM$. Se possibile trovare M ortogonale.

4	

Risposta:
La matrice A è diagonalizzabile e si ha

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

4. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano, sia r una retta di equazione cartesiana $3x+y=1$ e siano A, C e P punti di coordinate $A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$ e $P\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ rispetto a tale riferimento.

4	

(a) Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse x' la retta r orientata rispetto alle y decrescenti, come asse y' la retta perpendicolare a r passante per A e la base $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ equiversa alla base $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. Determinare le coordinate di P rispetto a RC' e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$C_{RC}(O') = \begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}, \ \mathbf{i}' \equiv \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{10}}{10}\\ -\frac{3\sqrt{10}}{10}\end{pmatrix}, \ \mathbf{j}' \equiv \begin{pmatrix}\frac{3\sqrt{10}}{10}\\ \frac{\sqrt{10}}{10}\end{pmatrix},$$

$$C_{RC'}(P) = \begin{pmatrix}\sqrt{10}\\ \frac{3\sqrt{10}}{5}\end{pmatrix}.$$

4	

(b) Sia P' l'immagine del punto P rispetto alla rotazione del piano in senso antiorario di centro C e angolo $\theta = \frac{5}{6}\pi$. Determinare le coordinate di P' rispetto a RC e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix},$$

$$C_{RC}(P') = \begin{pmatrix}\frac{4\sqrt{3}+17}{2}\\ \frac{3\sqrt{3}-2}{2}\end{pmatrix}.$$

5. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento cartesiano dello spazio. Sia P il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ e siano π_1 e π_2 i piani di equazioni

$$\pi_1 : 3x + y - z = 1, \quad \pi_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

2	

(a) Determinare gli angoli formati da π_1 e π_2.

Risposta:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{14}{\sqrt{286}}\right)$$
$$\beta = \pi - \alpha = \arccos\left(-\frac{14}{\sqrt{286}}\right).$$

2	

(b) Determinare la posizione reciproca di π_1 e π_2.

Risposta:
I due piani sono incidenti.

2	

(c) Calcolare la distanza $d(P, \pi_2)$.

Risposta:

$$d(P, \pi_2) = \frac{2}{\sqrt{26}}.$$

2	

(d) Determinare, usando i quaternioni, l'immagine P' del punto P rispetto alla rotazione di angolo $\theta = \frac{\pi}{2}$ e asse la retta a passante per l'origine O e vettore direttore $\mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, orientata rispetto alle x decrescenti.

Risposta:

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}k,$$
$$C_{RC}(P') = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$