Soluzioni foglio 2

Pietro Mercuri

4 novembre 2018

Esercizio 1. Sia S un sistema lineare. Studiare S utilizzando opportunamente l'algoritmo di Gauss-Jordan e il teorema di Rouché-Capelli verificando se S è compatibile (cioè ammette soluzioni) o incompatibile (cioè non ammette soluzioni). Nel caso sia compatibile dire se è determinato (cioè la soluzione è unica) o indeterminato (cioè ha infinite soluzioni). Nel caso sia determinato trovare esplicitamente la soluzione. Nel caso sia indeterminato dire da quanti parametri dipendono le soluzioni e trovare l'espressione delle soluzioni (che ovviamente dipenderà dalle variabili scelte come parametri).

1. $S : \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5 \\ x_1 + 12x_2 = 55; \end{cases}$

2. $S : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 = 9; \end{cases}$

3. $S : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$

4. $S : \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 = 8 \\ 5x_1 + 6x_2 = 9; \end{cases}$

5. $S : \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 4 \\ 3x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 6; \end{cases}$

6. $S : \begin{cases} 5x_2 + 6x_3 = 2 \\ x_1 + 6x_3 = 2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases}$

7. $S : \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$

8. $S: \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5 \\ -3x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 = -15 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -10; \end{cases}$

9. $S: \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2 \\ 3x_1 + 7x_2 = 3 \\ 13x_1 + 34x_2 = 17. \end{cases}$

Soluzione esercizio 1. La matrice incompleta (cioè dei coefficienti delle variabili) sarà denotata con A, la matrice completa (o orlata) sarà denotata con $A|B$.

1. Applichiamo l'algoritmo di Gauss alla matrice completa $A|B$.

$$A|B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 12 & 55 \end{pmatrix} \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 12 & 55 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \underset{R_2 \mapsto R_2 - 3R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 12 & 55 \\ 0 & -38 & -160 \end{pmatrix}.$$

   Poiché $\operatorname{rg} A = 2 = \operatorname{rg}(A|B)$, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile ed ha $\infty^{2-2} = \infty^0 = 1$ soluzioni. Proseguiamo con l'algoritmo di Gauss per trovare esplicitamente la soluzione

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & 55 \\ 0 & -38 & -160 \end{pmatrix} \underset{R_2 \mapsto -\frac{1}{38} R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 12 & 55 \\ 0 & 1 & \frac{80}{19} \end{pmatrix} \underset{R_1 \mapsto R_1 - 12R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{85}{19} \\ 0 & 1 & \frac{80}{19} \end{pmatrix},$$

   quindi l'unica soluzione è

$$\begin{cases} x_1 = \frac{85}{19} \\ x_2 = \frac{80}{19}. \end{cases}$$

2. Applichiamo l'algoritmo di Gauss alla matrice completa $A|B$.

$$A|B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} \underset{R_1 \mapsto \frac{1}{2} R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} \underset{R_3 \mapsto R_3 - 5R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{13}{2} & 5 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$$
$$\underset{R_3 \mapsto R_3 + \frac{13}{2} R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{23}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

   Poiché $\operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg}(A|B)$, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile ed ha $\infty^{3-3} = \infty^0 = 1$ soluzioni. Proseguiamo con l'algoritmo di Gauss per trovare esplicitamente la soluzione

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{23}{2} & 0 \end{pmatrix} \underset{R_3 \mapsto \frac{2}{23} R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_2 \mapsto R_2 - R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underset{R_1 \mapsto R_1 - \frac{3}{2} R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi l'unica soluzione è

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Applichiamo l'algoritmo di Gauss alla matrice completa $A|B$.

$$A|B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_1 \mapsto \frac{1}{2}R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_2 \mapsto R_2 - 5R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{19}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\operatorname{rg} A = 2 = \operatorname{rg}(A|B)$, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile ed ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Proseguiamo con l'algoritmo di Gauss per trovare esplicitamente le soluzioni

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{19}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \underset{R_2 \mapsto \frac{2}{19}R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{19} & \frac{2}{19} \end{pmatrix} \underset{R_1 \mapsto R_1 + \frac{3}{2}R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{19} & \frac{3}{19} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{19} & \frac{2}{19} \end{pmatrix},$$

quindi, scegliendo x_3 come parametro, le soluzioni sono della forma

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{8}{19}t + \frac{3}{19} \\ x_2 = \frac{1}{19}t + \frac{2}{19} \\ x_3 = t, \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$.

4. Applichiamo l'algoritmo di Gauss alla matrice completa $A|B$.

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \mapsto R_2 - 3R_1 \\ R_3 \mapsto R_3 - 5R_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & -13 \\ 0 & -4 & -26 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \mapsto -\frac{1}{2}R_2 \\ R_3 \mapsto R_3 - 2R_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\operatorname{rg} A = 2 = \operatorname{rg}(A|B)$, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile ed ha $\infty^{2-2} = \infty^0 = 1$ soluzioni. Proseguiamo con l'algoritmo di Gauss per trovare esplicitamente la soluzione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_1 \mapsto R_1 - 2R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi l'unica soluzione è

$$\begin{cases} x_1 = -6 \\ x_2 = \frac{13}{2}. \end{cases}$$

5. Applichiamo l'algoritmo di Gauss alla matrice completa $A|B$.

$$A|B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 4 \\ 3 & 9 & -6 & 6 \end{pmatrix} \underset{R_1 \mapsto \frac{1}{2}R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 9 & -6 & 6 \end{pmatrix} \underset{R_2 \mapsto R_2 - 3R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\operatorname{rg} A = 1 = \operatorname{rg}(A|B)$, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile ed ha $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni. Quindi, scegliendo x_2 e x_3 come parametri, le soluzioni sono della forma

$$\begin{cases} x_1 = -3t + 2s + 2 \\ x_2 = t \\ x_3 = s, \end{cases}$$

con $t, s \in \mathbb{R}$.

6. Applichiamo l'algoritmo di Gauss alla matrice completa $A|B$.

$$A|B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_3 \mapsto R_3 - 5R_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & -27 & -8 \end{pmatrix} \underset{R_2 \mapsto \frac{1}{5}R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 4 & -27 & -8 \end{pmatrix}$$
$$\underset{R_3 \mapsto R_3 - 4R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{159}{5} & -\frac{48}{5} \end{pmatrix}.$$

Poiché $\operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg}(A|B)$, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile ed ha $\infty^{3-3} = \infty^0 = 1$ soluzioni. Proseguiamo con l'algoritmo di Gauss per trovare esplicitamente la soluzione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{159}{5} & -\frac{48}{5} \end{pmatrix} \underset{R_3 \mapsto -\frac{5}{159}R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{16}{53} \end{pmatrix} \underset{\substack{R_1 \mapsto R_1 - 6R_3 \\ R_2 \mapsto R_2 - \frac{6}{5}R_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{53} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{53} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{16}{53} \end{pmatrix},$$

quindi l'unica soluzione è

$$\begin{cases} x_1 = \frac{10}{53} \\ x_2 = \frac{2}{53} \\ x_3 = \frac{16}{53}. \end{cases}$$

7. Applichiamo l'algoritmo di Gauss alla matrice completa $A|B$.

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_3 \mapsto R_3 - 2R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{R_3 \mapsto R_3 - 2R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\operatorname{rg} A = 2 < 3 = \operatorname{rg}(A|B)$, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è incompatibile.

8. Applichiamo l'algoritmo di Gauss alla matrice completa $A|B$.

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 5 \\ -3 & 3 & -6 & 6 & -15 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 3 & -10 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \mapsto R_2+3R_1 \\ R_3 \mapsto R_3-R_1 \\ R_4 \mapsto R_4+R_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_2 \leftrightarrow R_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_3 \mapsto R_3-R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\operatorname{rg} A = 2 = \operatorname{rg}(A|B)$, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile ed ha $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni. Proseguiamo con l'algoritmo di Gauss per trovare esplicitamente le soluzioni

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_1 \mapsto R_1+R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi, scegliendo x_3 e x_4 come parametri, le soluzioni sono della forma

$$\begin{cases} x_1 = t + s \\ x_2 = 3t - s - 5 \\ x_3 = t \\ x_4 = s, \end{cases}$$

con $t, s \in \mathbb{R}$.

9. Applichiamo l'algoritmo di Gauss alla matrice completa $A|B$.

$$A|B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 7 & 3 \\ 13 & 34 & 17 \end{pmatrix} \underset{R_1 \mapsto \frac{1}{2}R_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 13 & 34 & 17 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \mapsto R_2-3R_1 \\ R_3 \mapsto R_3-13R_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{11}{2} & 6 \\ 0 & \frac{55}{2} & 30 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_2 \mapsto \frac{2}{11}R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{12}{11} \\ 0 & \frac{55}{2} & 30 \end{pmatrix} \underset{R_3 \mapsto R_3-\frac{55}{2}R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{12}{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\operatorname{rg} A = 2 = \operatorname{rg}(A|B)$, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile ed ha $\infty^{2-2} = \infty^0 = 1$ soluzioni. Proseguiamo con l'algoritmo di Gauss per trovare esplicitamente la soluzione

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{12}{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_1 \mapsto R_1-\frac{1}{2}R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{17}{11} \\ 0 & 1 & \frac{12}{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi l'unica soluzione è

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{17}{11} \\ x_2 = \frac{12}{11}. \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia S un sistema lineare. Studiare S verificando se è compatibile (cioè ammette soluzioni) o incompatibile (cioè non ammette soluzioni). Nel caso sia compatibile dire se è determinato (cioè la soluzione è unica) o indeterminato (cioè ha infinite soluzioni). Nel caso sia determinato trovare la soluzione utilizzando opportunamente il metodo di Cramer. Nel caso sia indeterminato dire da quanti parametri dipendono le soluzioni e trovare l'espressione delle soluzioni (che ovviamente dipenderà dalle variabili scelte come parametri).

1. $S: \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5 \\ x_1 + 12x_2 = 55; \end{cases}$

2. $S: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 = 9; \end{cases}$

3. $S: \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$

4. $S: \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 = 8 \\ 5x_1 + 6x_2 = 9; \end{cases}$

5. $S: \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 4 \\ 3x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 6; \end{cases}$

6. $S: \begin{cases} 5x_2 + 6x_3 = 2 \\ x_1 + 6x_3 = 2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases}$

7. $S: \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$

8. $S: \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5 \\ -3x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 = -15 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -10; \end{cases}$

9. $S: \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2 \\ 3x_1 + 7x_2 = 3 \\ 13x_1 + 34x_2 = 17. \end{cases}$

Soluzione esercizio 2. Nel seguito sarà indicata con A la matrice dei coefficienti (o matrice incompleta) e con $A|B$ la matrice completa (cioè la matrice dei coefficienti orlata con la colonna dei termini noti). Si ricordi che si ha sempre $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}(A|B)$ e, per il teorema di Rouché-Capelli, un sistema è compatibile (cioè ammette soluzioni) se e solo se $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B)$. In tal caso, ponendo $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|B) = r$, si dice che il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni, dove n è il numero di incognite del sistema. Se $r = n$ si ha $\infty^0 = 1$ e quindi il sistema è determinato (cioè ammette un'unica soluzione). Altrimenti, se $r \leq n$, il sistema è indeterminato (cioè ammette un numero infinito di soluzioni) e le soluzioni dipendono da $n - r$ parametri.

1. Dato il sistema
$$S : \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5 \\ x_1 + 12x_2 = 55, \end{cases}$$
si ha che
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 12 \end{pmatrix},$$
$$A|B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 12 & 55 \end{pmatrix}.$$
Poiché
$$\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} = 36 + 2 = 38 \neq 0,$$
si ha che $\operatorname{rg} A = 2$. E poiché $2 = \operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}(A|B) \leq \min\{2, 3\} = 2$ si ha che $\operatorname{rg}(A|B) = 2$. Quindi per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile ed ha $\infty^{2-2} = \infty^0 = 1$ soluzioni. Per calcolare le soluzioni usiamo il metodo di Cramer. Siano
$$\Delta = \det A = 38,$$
$$\Delta_{x_1} = \det \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 55 & 12 \end{pmatrix} = 60 + 110 = 170,$$
$$\Delta_{x_2} = \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 55 \end{pmatrix} = 165 - 5 = 160.$$
Quindi l'unica soluzione del sistema è
$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{170}{38} = \frac{85}{19} \\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{160}{38} = \frac{80}{19}. \end{cases}$$

2. Dato il sistema
$$S : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 = 9, \end{cases}$$

si ha che

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 10 + 15 + 0 - 0 - 0 - 2 = 23 \neq 0,$$

si ha che $\operatorname{rg} A = 3$. E poiché $3 = \operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}(A|B) \leq \min\{3, 4\} = 3$ si ha che $\operatorname{rg}(A|B) = 3$. Quindi per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile ed ha $\infty^{3-3} = \infty^0 = 1$ soluzioni. Per calcolare le soluzioni usiamo il metodo di Cramer. Siano

$$\begin{aligned}
\Delta &= \det A = 23, \\
\Delta_{x_1} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 5 + 27 + 0 - 0 + 15 - 1 = 46, \\
\Delta_{x_2} &= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 5 \end{pmatrix} = -10 + 5 + 0 - 0 - 0 - 18 = -23, \\
\Delta_{x_3} &= \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix} = 18 - 15 + 0 - 5 - 0 + 2 = 0.
\end{aligned}$$

Quindi l'unica soluzione del sistema è

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{46}{23} = 2 \\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-23}{23} = -1 \\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{0}{23} = 0. \end{cases}$$

3. Dato il sistema

$$S : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \end{cases}$$

si ha che

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché
$$\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix} = 4-5 = -1 \neq 0,$$
si ha che $\operatorname{rg} A = 2$. E poiché $2 = \operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}(A|B) \leq \min\{2,4\} = 2$ si ha che $\operatorname{rg}(A|B) = 2$. Quindi per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile ed ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Ponendo la variabile x_2 come parametro t si ottiene

$$\begin{cases}2x_1 - 3t + x_3 = 0\\ 5x_1 + 2t + 2x_3 = 1\end{cases}$$
$$\begin{cases}2x_1 + x_3 = 3t\\ 5x_1 + 2x_3 = 1-2t.\end{cases}$$

Da cui, usando Cramer

$$\Delta = \det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix} = -1,$$
$$\Delta_{x_1} = \det\begin{pmatrix}3t & 1\\ 1-2t & 2\end{pmatrix} = 6t-1+2t = 8t-1,$$
$$\Delta_{x_3} = \det\begin{pmatrix}2 & 3t\\ 5 & 1-2t\end{pmatrix} = 2-4t-15t = 2-19t,$$
$$\begin{cases}x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{8t-1}{-1} = 1-8t\\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{2-19t}{-1} = 19t-2.\end{cases}$$

Quindi, al variare di un parametro $t \in \mathbb{R}$, tutte le soluzioni del sistema S sono della forma
$$\begin{cases}x_1 = 1-8t\\ x_2 = t\\ x_3 = 19t-2.\end{cases}$$

4. Dato il sistema
$$S : \begin{cases}x_1 + 2x_2 = 7\\ 3x_1 + 4x_2 = 8\\ 5x_1 + 6x_2 = 9,\end{cases}$$
si ha che
$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix},$$
$$A|B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 3 & 4 & 8\\ 5 & 6 & 9\end{pmatrix}.$$

Poiché
$$\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = 4-6 = -2 \neq 0,$$
si ha che $\operatorname{rg} A = 2$. Poiché
$$\det(A|B) = \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 3 & 4 & 8\\ 5 & 6 & 9\end{pmatrix} = 36+80+126-140-54-48 = 0,$$
si ha che $\operatorname{rg}(A|B) = 2$. Quindi per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile ed ha $\infty^{2-2} = \infty^0 = 1$ soluzioni. Per calcolare le soluzioni usiamo il metodo di Cramer. Scartiamo l'ultima equazione (poiché ridondante) e applichiamo Cramer al sistema così ottenuto che ha due equazioni e due incognite. Siano
$$\begin{aligned}\Delta &= \det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = -2,\\ \Delta_{x_1} &= \det\begin{pmatrix}7 & 2\\ 8 & 4\end{pmatrix} = 28-16 = 12,\\ \Delta_{x_2} &= \det\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 8\end{pmatrix} = 8-21 = -13.\end{aligned}$$
Quindi l'unica soluzione del sistema è
$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{12}{-2} = -6\\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-13}{-2} = \frac{13}{2}.\end{cases}$$

5. Dato il sistema
$$S: \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 4\\ 3x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 6,\end{cases}$$
si ha che
$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix}2 & 6 & -4\\ 3 & 9 & -6\end{pmatrix},\\ A|B &= \begin{pmatrix}2 & 6 & -4 & 4\\ 3 & 9 & -6 & 6\end{pmatrix}.\end{aligned}$$
Poiché $\det\begin{pmatrix}2\end{pmatrix} = 2 \neq 0$, per il teorema degli orlati è sufficiente controllare
$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}2 & 6\\ 3 & 9\end{pmatrix} &= 18-18 = 0,\\ \det\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & -6\end{pmatrix} &= -12+12 = 0.\end{aligned}$$

Quindi per il teorema degli orlati anche l'ultimo minore 2×2 ha determinante nullo e dunque $\operatorname{rg} A = 1$. Per calcolare il rango di $A|B$, tenendo in considerazione quanto già fatto su A, è sufficiente controllare

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 12 - 12 = 0.$$

Quindi, per il teorema degli orlati, tutti i minori 2×2 hanno determinante nullo e dunque $\operatorname{rg}(A|B) = 1$. Quindi per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile ed ha $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni. Ponendo le variabili x_2 e x_3 come parametri t_1 e t_2 rispettivamente e scartando l'ultima equazione (in quanto ridondante) si ottiene che

$$\left\{ 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 4 \right.$$
$$\left\{ x_1 = 2 - 3t_1 + 2t_2. \right.$$

Quindi, al variare di due parametri $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, tutte le soluzioni del sistema S sono della forma

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 3t_1 + 2t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2. \end{cases}$$

6. Dato il sistema

$$S : \begin{cases} 5x_2 + 6x_3 = 2 \\ x_1 + 6x_3 = 2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2, \end{cases}$$

si ha che

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$
$$A|B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 0 + 150 + 24 - 0 - 15 - 0 = 159 \neq 0,$$

si ha che $\operatorname{rg} A = 3$. E poiché $3 = \operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}(A|B) \leq \min\{3, 4\} = 3$ si ha che $\operatorname{rg}(A|B) = 3$. Quindi per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile ed ha $\infty^{3-3} = \infty^0 = 1$ soluzioni. Per calcolare le soluzioni usiamo il metodo di Cramer. Siano

$$\begin{aligned}
\Delta &= \det A = 159, \\
\Delta_{x_1} &= \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 0 + 60 + 48 - 0 - 30 - 48 = 30, \\
\Delta_{x_2} &= \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0 + 60 + 12 - 60 - 6 - 0 = 6, \\
\Delta_{x_3} &= \det \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 0 + 50 + 8 - 0 - 10 - 0 = 48.
\end{aligned}$$

Quindi l'unica soluzione del sistema è

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{30}{159} = \frac{10}{53} \\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{6}{159} = \frac{2}{53} \\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{48}{159} = \frac{16}{53}. \end{cases}$$

7. Dato il sistema

$$S : \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1, \end{cases}$$

si ha che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 + 0 + 2 - 0 - 0 - 0 = 0,$$

e la matrice A è non nulla (cioè non è la matrice con tutti gli elementi uguali a zero), si ha che $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 2$. E poiché

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0,$$

si ha che $\operatorname{rg} A = 2$. Ma poiché prendendo il minore di ordine 3 della matrice $A|B$ ottenuto scegliendo tutte e tre le righe e la prima, la seconda e la quarta colonna si ha

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = 2+0+2-0-0-1 = 3 \neq 0,$$

si può concludere che $\operatorname{rg}(A|B) = 3 \neq 2 = \operatorname{rg} A$. Quindi per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è incompatibile.

8. Dato il sistema

$$S : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5\\ -3x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 = -15\\ x_1 - x_3 - x_4 = 0\\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -10, \end{cases}$$

si ha che

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -2\\ -3 & 3 & -6 & 6\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -5 & 3\end{pmatrix},$$

$$A|B = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -2 & 5\\ -3 & 3 & -6 & 6 & -15\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -5 & 3 & -10\end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 0+1 = 1 \neq 0,$$

per il teorema degli orlati è sufficiente controllare

$$\det\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -3 & 3 & -6\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = -3+6+0-6+3+0 = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ -3 & 3 & 6\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = -3-6+0+6+3-0 = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & -5\end{pmatrix} = 0-1+4-0-5+2 = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix} = 0-1-4-0+3+2 = 0.$$

Quindi, per il teorema degli orlati, tutti i minori 3×3 hanno determinante nullo e dunque $\operatorname{rg} A = 2$. Per calcolare il rango di $A|B$, tenendo in considerazione quanto già fatto su A, è sufficiente controllare

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -3 & 3 & -15 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 15 + 0 - 15 - 0 - 0 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -10 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 10 - 0 - 10 - 0 = 0.$$

Quindi, per il teorema degli orlati, tutti i minori 3×3 hanno determinante nullo e dunque $\operatorname{rg}(A|B) = 2$. Quindi per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile ed ha $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni. Ponendo le variabili x_3 e x_4 come parametri t_1 e t_2 rispettivamente e scartando la seconda e la quarta equazione (in quanto ridondanti) si ottiene

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2t_1 - 2t_2 = 5 \\ x_1 - t_1 - t_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 - 2t_1 + 2t_2 \\ x_1 = t_1 + t_2, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 \\ x_2 = 3t_1 - t_2 - 5. \end{cases}$$

Quindi, al variare di due parametri $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, tutte le soluzioni del sistema S sono della forma

$$\begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 \\ x_2 = 3t_1 - t_2 - 5 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2. \end{cases}$$

9. Dato il sistema

$$S : \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2 \\ 3x_1 + 7x_2 = 3 \\ 13x_1 + 34x_2 = 17, \end{cases}$$

si ha che

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \\ 13 & 34 \end{pmatrix},$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 7 & 3 \\ 13 & 34 & 17 \end{pmatrix}.$$

Poiché

$$\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 7\end{pmatrix} = 14 - 3 = 11 \neq 0,$$

si ha che $\operatorname{rg} A = 2$. Poiché

$$\det(A|B) = \det\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & 7 & 3\\ 13 & 34 & 17\end{pmatrix} = 238 + 39 - 204 + 182 - 51 - 204 = 0,$$

si ha che $\operatorname{rg}(A|B) = 2$. Quindi per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile ed ha $\infty^{2-2} = \infty^0 = 1$ soluzioni. Per calcolare le soluzioni usiamo il metodo di Cramer. Scartiamo l'ultima equazione (poiché ridondante) e applichiamo Cramer al sistema così ottenuto che ha due equazioni e due incognite. Siano

$$\Delta = \det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 7\end{pmatrix} = 11,$$
$$\Delta_{x_1} = \det\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 7\end{pmatrix} = -14 - 3 = -17,$$
$$\Delta_{x_2} = \det\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix} = 6 + 6 = 12.$$

Quindi l'unica soluzione del sistema è

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = -\frac{17}{11} \\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{12}{11}. \end{cases}$$

Esercizio 3. Discutere, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, l'insieme delle soluzioni dei seguenti sistemi lineari.

1. $S : \begin{cases} x_1 + kx_2 + 2kx_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$

2. $S : \begin{cases} kx_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + kx_3 = 0 \\ (k+1)x_1 - x_2 = 1; \end{cases}$

3. $S : \begin{cases} x_1 + kx_2 = k - 1 \\ 2kx_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 - kx_2 = k + 1; \end{cases}$

4. $S : \begin{cases} x_1 + kx_3 = k - 2 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ (k-1)x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ kx_1 - x_3 = k - 2; \end{cases}$

5. $S: \begin{cases} x_1 + kx_2 + 2x_3 = k+1 \\ (k+1)x_3 = 0 \\ -kx_1 + kx_2 + 2x_3 = k+1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$

6. $S: \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ kx_1 + x_2 + 2x_3 = k \\ kx_1 - kx_2 = 1 \\ (3-k)x_2 + 3x_3 = 1; \end{cases}$

7. $S: \begin{cases} x_1 - x_2 + kx_3 = k-1 \\ kx_2 = k-1 \\ 2kx_1 + 3x_2 + 2x_3 = k-1 \\ 2x_1 + x_2 + (k+1)x_3 = k-1. \end{cases}$

Soluzione esercizio 3. 1. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & k & 2k & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

la matrice incompleta e completa rispettivamente.

Calcoliamo il rango di A

$$\det A = -2 + 0 + 4k - 0 + 2k - 0 = 6k - 2 = 2(3k-1).$$

Studiamo dunque l'equazione

$$2(3k-1) = 0.$$

Essa ha come unica soluzione

$$k = \frac{1}{3}.$$

Da questo si deduce che se $k \neq \frac{1}{3}$ allora $\operatorname{rg} A = 3$. Se $k = \frac{1}{3}$, si ha che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

e quindi, poiché $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, si deduce che $\operatorname{rg} A = 2$ (non è 3 perché per $k = \frac{1}{3}$ si ha che $\det A = 0$).

Calcoliamo il rango di $A|B$. Se $k \neq \frac{1}{3}$ si ha che $3 = \operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}(A|B) \leq \min\{3, 4\} = 3$, dunque $\operatorname{rg}(A|B) = 3$. Se $k = \frac{1}{3}$, si ha che

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, si deduce che $2 \leq \operatorname{rg}(A|B) \leq 3$. Ma i due minori di ordine 3, che contengono il minore di ordine 2 scelto, sono nulli (poiché uno è proprio $\det A$ che sappiamo essere nullo per $k = \frac{1}{3}$ e l'altro ha due colonne uguali), quindi per il teorema degli orlati $\operatorname{rg}(A|B) = 2$.

Applicando il teorema di Rouché-Capelli si ottiene che se $k \neq \frac{1}{3}$ allora $\operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg}(A|B)$ e quindi il sistema è determinato (cioè ammette un'unica soluzione), se invece $k = \frac{1}{3}$ allora $\operatorname{rg} A = 2 = \operatorname{rg}(A|B)$ e quindi il sistema ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

Se $k \neq \frac{1}{3}$ l'unica soluzione si può ottenere, ad esempio, utilizzando il metodo di Cramer ed è

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Se $k = \frac{1}{3}$ le soluzioni, ponendo ad esempio $x_2 = t \in \mathbb{R}$ come parametro e scartando la prima equazione, sono della forma

$$\begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = t \\ x_3 = t. \end{cases}$$

2. Siano

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 3 & 0 & k \\ k+1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A|B = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & k & 0 \\ k+1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice incompleta e completa rispettivamente.

Calcoliamo il rango di A

$$\det A = 0 - k(k+1) - 6 - 0 - 0 + k^2 = -k - 6.$$

Studiamo dunque l'equazione

$$-k - 6 = 0.$$

Essa ha come unica soluzione

$$k = -6.$$

Da questo si deduce che se $k \neq -6$ allora $\operatorname{rg} A = 3$. Se $k = -6$, si ha che

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi, poiché $\det \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$, si deduce che $\operatorname{rg} A = 2$ (non è 3 perché per $k = -6$ si ha che $\det A = 0$).

Calcoliamo il rango di $A|B$. Se $k \neq -6$ si ha che $3 = \operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}(A|B) \leq \min\{3, 4\} = 3$, dunque $\operatorname{rg}(A|B) = 3$. Se $k = -6$, si ha che

$$A|B = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ -5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 6 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 6 \neq 0$, si deduce che $\operatorname{rg}(A|B) = 3$.

Applicando il teorema di Rouché-Capelli si ottiene che se $k \neq -6$ allora $\operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg}(A|B)$ e quindi il sistema è determinato (cioè ammette un'unica soluzione), se invece $k = -6$ allora $\operatorname{rg} A = 2 < 3 = \operatorname{rg}(A|B)$ e quindi il sistema è incompatibile (cioè non ammette soluzioni).

Se $k \neq -6$ l'unica soluzione si può ottenere, ad esempio, utilizzando il metodo di Cramer ed è

$$\begin{cases} x_1 = \frac{k}{k+6} \\ x_2 = \frac{k^2-6}{k+6} \\ x_3 = -\frac{3}{k+6}. \end{cases}$$

3. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 2k & -1 & -1 \\ -2 & -k & 0 \end{pmatrix},$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & k-1 \\ 2k & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -k & 0 & k+1 \end{pmatrix},$$

la matrice incompleta e completa rispettivamente.

Calcoliamo il rango di A

$$\det A = 0 + 2k + 0 - 0 - 0 - k = k.$$

Studiamo dunque l'equazione

$$k = 0.$$

Essa ha come unica soluzione

$$k = 0.$$

Da questo si deduce che se $k \neq 0$ allora $\operatorname{rg} A = 3$. Se $k = 0$, si ha che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi, poiché $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$, si deduce che $\operatorname{rg} A = 2$ (non è 3 perché per $k = 0$ si ha che $\det A = 0$).

Calcoliamo il rango di $A|B$. Se $k \neq 0$ si ha che $3 = \operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}(A|B) \leq \min\{3, 4\} = 3$, dunque $\operatorname{rg}(A|B) = 3$. Se $k = 0$, si ha che

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1+0+0+2-0-0 = 1 \neq 0$, si deduce che $\operatorname{rg}(A|B) = 3$.

Applicando il teorema di Rouché-Capelli si ottiene che se $k \neq 0$ allora $\operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg}(A|B)$ e quindi il sistema è determinato (cioè ammette un'unica soluzione), se invece $k = 0$ allora $\operatorname{rg} A = 2 < 3 = \operatorname{rg}(A|B)$ e quindi il sistema è incompatibile (cioè non ammette soluzioni).

Se $k \neq 0$ l'unica soluzione si può ottenere, ad esempio, utilizzando il metodo di Cramer ed è

$$\begin{cases} x_1 = -2k \\ x_2 = \frac{3k-1}{k} \\ x_3 = \frac{-4k^3-4k+1}{k}. \end{cases}$$

4. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 2 \\ k & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & k-2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 2 & 1 \\ k & 0 & -1 & k-2 \end{pmatrix},$$

la matrice incompleta e completa rispettivamente.

Calcoliamo il rango di A. Si ha che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 0 - k^2 - 0 - 0 = -k^2 - 1.$$

Studiamo l'equazione

$$-k^2 - 1 = 0.$$

Essa non ha soluzioni reali. Quindi $\operatorname{rg} A = 3$ per ogni $k \in \mathbb{R}$ (perché esiste sempre un minore di ordine 3 non nullo).

Calcoliamo il rango di $A|B$. Sviluppiamo il determinante lungo la seconda colonna

$$\det(A|B) = 1 \det \begin{pmatrix} 1 & k & k-2 \\ k-1 & 2 & 1 \\ k & -1 & k-2 \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 1 & k & k-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & -1 & k-2 \end{pmatrix} =$$
$$= -k^3 + k^2 + 4k - 4 = -k^2(k-1) + 4(k-1) = (k-1)(4-k^2) =$$
$$= (k-1)(2-k)(2+k).$$

Studiamo dunque l'equazione

$$(k-1)(2-k)(2+k) = 0.$$

Essa ha soluzioni

$$k = 1$$
$$k = -2$$
$$k = 2.$$

Da questo si deduce che se $k \neq 1 \wedge k \neq -2 \wedge k \neq 2$ allora $\operatorname{rg}(A|B) = 4$. Se $k = 1 \vee k = -2 \vee k = 2$, si ha che $\operatorname{rg}(A|B) = 3$ (perché si può sempre trovare un minore di ordine 3 non nullo in quanto A ha rango 3 per ogni $k \in \mathbb{R}$ e quindi basta prendere un opportuno minore di ordine 3 di A).

Applicando il teorema di Rouché-Capelli si ottiene che se $k = 1 \vee k = -2 \vee k = 2$ allora $\operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg}(A|B)$ e quindi il sistema è determinato (cioè ammette un'unica soluzione), se invece $k \neq 1 \wedge k \neq -2 \wedge k \neq 2$ allora $\operatorname{rg} A = 3 < 4 = \operatorname{rg}(A|B)$ e quindi il sistema è incompatibile (cioè non ammette soluzioni).

Se $k = 1$ l'unica soluzione si può ottenere, ad esempio, utilizzando il metodo di Cramer al sistema ottenuto scartando la prima equazione ed è

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Se $k = 2$ l'unica soluzione si può ottenere, ad esempio, utilizzando il metodo di Cramer al sistema ottenuto scartando la prima equazione ed è

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Se $k = -2$ l'unica soluzione si può ottenere, ad esempio, utilizzando il metodo di Cramer al sistema ottenuto scartando la prima equazione ed è

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{5} \\ x_2 = -\frac{9}{5} \\ x_3 = \frac{12}{5}. \end{cases}$$

5. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 0 & k+1 \\ -k & k & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 & k+1 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \\ -k & k & 2 & k+1 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

la matrice incompleta e completa rispettivamente.

Calcoliamo il rango di A. Si ha che i minori di ordine 3 di A sono

$$\det\begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 0 & k+1 \\ -k & k & 2 \end{pmatrix} = -k^3 - 2k^2 - k = -k(k^2+2k+1) = -k(k+1)^2,$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 0 & k+1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2k^2 + 4k + 2 = 2(k^2+2k+1) = 2(k+1)^2,$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ -k & k & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = -2k^2 + 2k + 4 = -2(k^2 - k - 2) = -2(k+1)(k-2),$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & k+1 \\ -k & k & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 0.$$

Studiamo il sistema

$$\begin{cases} -k(k+1)^2 = 0 \\ 2(k+1)^2 = 0 \\ -2(k+1)(k-2) = 0 \\ 0 = 0, \end{cases}$$

dove ai membri di sinistra ci sono i minori appena calcolati. Tale sistema ammette come unica soluzione $k = -1$, cioè $k = -1$ è l'unico valore di k che annulla contemporaneamente tutti i minori di ordine 3 di A. Quindi per $k \neq -1$ si ha che $\operatorname{rg} A = 3$. Poiché $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -2 - 4 = -6 \neq 0$, si deduce che per $k = -1$ si ha $\operatorname{rg} A = 2$.

Calcoliamo il rango di $A|B$. Sviluppiamo il determinante lungo la seconda riga

$$\begin{aligned} \det B = -(k+1)\det\begin{pmatrix} 1 & k & k+1 \\ -k & k & k+1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \\ = (-k-1)(2k^2+4k+2) = -2(k+1)^3. \end{aligned}$$

Poiché anche in questo caso il determinante si annulla sono per $k = -1$, si deduce che se $k \neq -1$ allora $\operatorname{rg}(A|B) = 4$. Se invece $k = -1$ si ha che

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

e si osserva facilmente che $\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix} = -6 \neq 0$. Inoltre si verifica facilmente che tutti i minori di ordine 3, che contengono il minore di ordine 2 scelto, sono nulli (perché tutti o hanno una colonna di tutti zeri o hanno una riga di tutti zeri o hanno due righe uguali), quindi per il teorema degli orlati si ha che $\operatorname{rg}(A|B) = 2$ per $k = -1$.

Applicando il teorema di Rouché-Capelli si ottiene che se $k = -1$ allora $\operatorname{rg} A = 2 = \operatorname{rg}(A|B)$ e quindi il sistema ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, se invece $k \neq -1$ allora $\operatorname{rg} A = 3 < 4 = \operatorname{rg}(A|B)$ e quindi il sistema è incompatibile (cioè non ammette soluzioni).

Se $k = -1$ le soluzioni, ponendo ad esempio $x_2 = t \in \mathbb{R}$ come parametro e scartando la seconda e la terza equazione, sono della forma

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

6. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ k & 1 & 2 \\ k & -k & 0 \\ 0 & 3-k & 3 \end{pmatrix},$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 & k \\ k & -k & 0 & 1 \\ 0 & 3-k & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice incompleta e completa rispettivamente.

Calcoliamo il rango di A. Si ha che i minori di ordine 3 di A sono

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ k & 1 & 2 \\ k & -k & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 3-k & 3 \end{pmatrix} = 5k - 3,$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ k & -k & 0 \\ 0 & 3-k & 3 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ k & -k & 0 \\ 0 & 3-k & 3 \end{pmatrix} = -5k^2 + 3k = -k(5k - 3),$$

Studiamo il sistema

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 5k - 3 = 0 \\ 0 = 0 \\ -k(5k-3) = 0, \end{cases}$$

dove ai membri di sinistra ci sono i determinanti appena calcolati. Tale sistema ammette come unica soluzione $k = \frac{3}{5}$, cioè $k = \frac{3}{5}$ è l'unico valore di k che annulla contemporaneamente tutti i minori di ordine 3 di A. Quindi per $k \neq \frac{3}{5}$ si ha che $\operatorname{rg} A = 3$. Poiché $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$, si deduce che per $k = \frac{3}{5}$ si ha $\operatorname{rg} A = 2$.

Calcoliamo il rango di $A|B$. Sviluppiamo il determinante lungo la terza colonna

$$\det(A|B) = -2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ k & -k & 1 \\ 0 & 3-k & 1 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ k & 1 & k \\ k & -k & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= 5k^2 - 8k + 3 = (k-1)(5k-3).$$

Studiamo dunque l'equazione

$$(k-1)(5k-3) = 0.$$

Essa ha soluzioni

$$k = 1$$
$$k = \frac{3}{5}.$$

Da questo si deduce che se $k \neq 1 \wedge k \neq \frac{3}{5}$ allora $\operatorname{rg}(A|B) = 4$. Se $k = 1$, si ha che $\operatorname{rg}(A|B) = 3$ (perché si può sempre trovare un minore di ordine 3 non nullo in quanto A ha rango 3 per $k = 1$ e quindi basta prendere un opportuno minore di ordine 3 di A). Se $k = \frac{3}{5}$ si ha che

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & 1 & 2 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{12}{5} & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0 + 0 + \frac{9}{5} - 0 - 0 - 3 = -\frac{6}{5} \neq 0$ e quindi $\operatorname{rg}(A|B) = 3$.

Applicando il teorema di Rouché-Capelli si ottiene che se $k = 1$ allora $\operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg}(A|B)$ e quindi il sistema è determinato (cioè ammette un'unica soluzione), se invece $k \neq 1 \wedge k \neq \frac{3}{5}$ allora $\operatorname{rg} A = 3 < 4 = \operatorname{rg}(A|B)$ e quindi il sistema è incompatibile (cioè non ammette soluzioni) e se $k = \frac{3}{5}$ allora $\operatorname{rg} A = 2 < 3 = \operatorname{rg}(A|B)$ e quindi il sistema è incompatibile.

Se $k = 1$ l'unica soluzione si può ottenere, ad esempio, utilizzando il metodo di Cramer al sistema ottenuto scartando la prima equazione ed è

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

7. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k & 0 \\ 2k & 3 & 2 \\ 2 & 1 & k+1 \end{pmatrix},$$

$$A|B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & k-1 \\ 0 & k & 0 & k-1 \\ 2k & 3 & 2 & k-1 \\ 2 & 1 & k+1 & k-1 \end{pmatrix},$$

la matrice incompleta e completa rispettivamente.

Calcoliamo il rango di A. Si ha che i minori di ordine 3 di A sono

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k & 0 \\ 2k & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2k - 2k^3 = -2k(k^2-1) = -2k(k-1)(k+1),$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k & 0 \\ 2 & 1 & k+1 \end{pmatrix} = -k^2 + k = -k(k-1),$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2k & 3 & 2 \\ 2 & 1 & k+1 \end{pmatrix} = 4k^2 - k - 3 = (k-1)(4k+3),$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 2k & 3 & 2 \\ 2 & 1 & k+1 \end{pmatrix} = 4k - 2k^3 - 2k^2 = -2k(k^2+k-2) = -2k(k-1)(k+2),$$

Studiamo il sistema

$$\begin{cases} -2k(k-1)(k+1) = 0 \\ -k(k-1) = 0 \\ (k-1)(4k+3) = 0 \\ -2k(k-1)(k+2) = 0, \end{cases}$$

dove ai membri di sinistra ci sono i determinanti appena calcolati. Tale sistema ammette come unica soluzione $k = 1$, cioè $k = 1$ è l'unico valore di k che annulla contemporaneamente tutti i minori di ordine 3 di A. Quindi per $k \neq 1$ si ha che $\operatorname{rg} A = 3$. Poiché $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$, si deduce che per $k = 1$ si ha $\operatorname{rg} A = 2$.

Calcoliamo il rango di $A|B$. Sviluppiamo il determinante lungo la seconda riga

$$
\begin{aligned}
\det(A|B) = k \det \begin{pmatrix} 1 & k & k-1 \\ 2k & 2 & k-1 \\ 2 & k+1 & k-1 \end{pmatrix} + (k-1) \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2k & 3 & 2 \\ 2 & 1 & k+1 \end{pmatrix} = \\
= k(3k^2 - 6k + 3) + (k-1)(4k^2 - k - 3) = \\
= 3k(k-1)^2 + (k-1)(4k^2 - k - 3) = \\
= (k-1)(3k^2 - 3k + 4k^2 - k - 3) = \\
= (k-1)(7k^2 - 4k - 3) = (k-1)^2(7k+3).
\end{aligned}
$$

Studiamo dunque l'equazione

$$
(k-1)^2(7k+3) = 0.
$$

Essa ha soluzioni

$$
\begin{aligned}
k &= 1 \\
k &= -\frac{3}{7}.
\end{aligned}
$$

Da questo si deduce che se $k \neq 1 \wedge k \neq -\frac{3}{7}$ allora $\operatorname{rg}(A|B) = 4$. Se $k = -\frac{3}{7}$, si ha che $\operatorname{rg}(A|B) = 3$ (perché si può sempre trovare un minore di ordine 3 non nullo in quanto A ha rango 3 per $k = -\frac{3}{7}$ e quindi basta prendere un opportuno minore di ordine 3 di A). Se $k = 1$ si ha che

$$
A|B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},
$$

da cui $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ e quindi $2 \leq \operatorname{rg}(A|B) \leq 3$. Poiché $\operatorname{rg} A = 2$ per $k = 1$ tutti i minori di ordine 3 di A sono nulli. Consideriamo quindi i minori di ordine 3 di $A|B$ che non sono anche minori di A e che contengono il minore 2×2 considerato. Essi sono sempre nullo poiché possiedono una colonna di tutti elementi uguali a zero. Quindi, per il teroema degli orlati, $\operatorname{rg}(A|B) = 2$ per $k = 1$.

Applicando il teorema di Rouché-Capelli si ottiene che se $k = -\frac{3}{7}$ allora $\operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg}(A|B)$ e quindi il sistema è determinato (cioè ammette un'unica soluzione), se invece $k \neq 1 \wedge k \neq -\frac{3}{7}$ allora $\operatorname{rg} A = 3 < 4 = \operatorname{rg}(A|B)$ e quindi il sistema è incompatibile (cioè non ammette soluzioni) e se $k = 1$ allora $\operatorname{rg} A = 2 = \operatorname{rg}(A|B)$ e quindi il sistema ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

Se $k = -\frac{3}{7}$ l'unica soluzione si può ottenere, ad esempio, utilizzando il metodo di Cramer al sistema ottenuto scartando la quarta equazione ed è

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{10}{3} \\ x_3 = -6. \end{cases}$$

Se $k = 1$ le soluzioni, ponendo ad esempio $x_3 = t \in \mathbb{R}$ come parametro e scartando le ultime due equazioni, sono della forma

$$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t. \end{cases}$$

Esercizio 4. Risolvere le seguenti coppie di equazioni, verificare i risultati sostituendo i valori trovati nell'equazione e controllando che l'uguaglianza ottenuta sia vera. Poi si scriva, con la notazione opportuna del linguaggio degli insiemi, gli insiemi delle soluzioni S_1 e S_2 delle due equazioni di ogni coppia e si calcoli $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$, $S_1 \setminus S_2$ (differenza di insiemi), $S_2 \setminus S_1$, $S^c_{1,\mathbb{R}}$ (il complementare di S_1 rispetto a $\mathbb{R}$) e $S^c_{2,\mathbb{R}}$.

1. $13x - 21 = 0$, $15x + 5 = 0$;
2. $x^2 - 9x + 20 = 0$, $5x^2 - 23x + 12 = 0$;
3. $x^2 = 17x + 38$, $2x^2 + 5x + 2 = 0$.

Soluzione esercizio 4. 1. La prima equazione si risolve nel seguente modo

$$\begin{aligned} 13x - 21 &= 0 \\ 13x &= 21 \\ x &= \frac{21}{13}. \end{aligned}$$

Quindi l'insieme S_1 delle soluzioni della prima equazione è $S_1 = \left\{\frac{21}{13}\right\}$. La seconda equazione si risolve nel seguente modo

$$\begin{aligned} 15x + 5 &= 0 \\ 15x &= -5 \\ x &= -\frac{5}{15} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Quindi l'insieme S_2 delle soluzioni della seconda equazione è $S_2 = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$. Quindi si ha

$$\begin{aligned}
S_1 \cup S_2 &= \left\{-\frac{1}{3}, \frac{21}{13}\right\};\\
S_1 \cap S_2 &= \varnothing;\\
S_1 \setminus S_2 &= \left\{\frac{21}{13}\right\} (= S_1);\\
S_2 \setminus S_1 &= \left\{-\frac{1}{3}\right\} (= S_2);\\
S^c_{1,\mathbb{R}} &= \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{21}{13}\right\} = \left(-\infty, \frac{21}{13}\right) \cup \left(\frac{21}{13}, +\infty\right);\\
S^c_{2,\mathbb{R}} &= \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\} = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right).
\end{aligned}$$

2. La prima equazione si risolve utilizzando la formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado

$$\begin{aligned}
&x^2 - 9x + 20 = 0\\
&x = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}.
\end{aligned}$$

Quindi l'insieme S_1 delle soluzioni della prima equazione è $S_1 = \{4, 5\}$. La seconda equazione si risolve utilizzando la formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado

$$5x^2 - 23x + 12 = 0$$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{23 \pm \sqrt{(-23)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12}}{2 \cdot 5} = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 240}}{10} = \frac{23 \pm \sqrt{289}}{10} =\\
&= \frac{23 \pm 17}{10}.
\end{aligned}$$

Quindi l'insieme S_2 delle soluzioni della seconda equazione è $S_2 = \left\{\frac{3}{5}, 4\right\}$. Quindi si ha

$$\begin{aligned}
S_1 \cup S_2 &= \left\{\frac{3}{5}, 4, 5\right\};\\
S_1 \cap S_2 &= \{4\};\\
S_1 \setminus S_2 &= \{5\};\\
S_2 \setminus S_1 &= \left\{\frac{3}{5}\right\};\\
S^c_{1,\mathbb{R}} &= \mathbb{R} \setminus \{4, 5\} = (-\infty, 4) \cup (4, 5) \cup (5, +\infty);\\
S^c_{2,\mathbb{R}} &= \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{5}, 4\right\} = \left(-\infty, \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}, 4\right) \cup (4, +\infty).
\end{aligned}$$

3. La prima equazione si risolve utilizzando la formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado

$$x^2 = 17x + 38$$
$$x^2 - 17x - 38 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-38)}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm \sqrt{289 + 152}}{2} = \\ &= \frac{17 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{17 \pm 21}{2}. \end{aligned}$$

Quindi l'insieme S_1 delle soluzioni della prima equazione è $S_1 = \{-2, 19\}$. La seconda equazione si risolve utilizzando la formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \\ &= \frac{-5 \pm 3}{4}. \end{aligned}$$

Quindi l'insieme S_2 delle soluzioni della seconda equazione è $S_2 = \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$. Quindi si ha

$$\begin{aligned} S_1 \cup S_2 &= \left\{-2, -\frac{1}{2}, 19\right\}; \\ S_1 \cap S_2 &= \{-2\}; \\ S_1 \setminus S_2 &= \{19\}; \\ S_2 \setminus S_1 &= \left\{-\frac{1}{2}\right\}; \\ S^c_{1,\mathbb{R}} &= \mathbb{R} \setminus \{-2, 19\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 19) \cup (19, +\infty); \\ S^c_{2,\mathbb{R}} &= \mathbb{R} \setminus \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\} = (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right). \end{aligned}$$

Esercizio 5. Risolvere le seguenti coppie di disequazioni, scegliere alcuni valori nell'insieme delle soluzioni e verificare che sostituendo tali valori nella disequazione la disuguaglianza ottenuta sia vera. Poi si scriva, con la notazione opportuna del linguaggio degli insiemi, gli insiemi delle soluzioni S_1 e S_2 delle due disequazioni di ogni coppia e si calcoli $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$, $S_1 \setminus S_2$ (differenza di insiemi), $S_2 \setminus S_1$, $S^c_{1,\mathbb{R}}$ (il complementare di S_1 rispetto a $\mathbb{R}$) e $S^c_{2,\mathbb{R}}$.

1. $4x + 1 > 0$, $-2x + 6 \geq 0$;

2. $x^2 - 4 > 0$, $x^2 + x - 6 < 0$;

3. $2x^2 + 4x + 5 \geq 0$, $x^2 + 4 \leq 4x$.

Soluzione esercizio 5. 1. La prima disequazione si risolve nel seguente modo

$$\begin{aligned} 4x + 1 &> 0 \\ 4x &> -1 \\ x &> -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Quindi l'insieme S_1 delle soluzioni della prima disequazione è $S_1 = \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$. La seconda disequazione si risolve nel seguente modo

$$\begin{aligned} -2x + 6 &\geq 0 \\ -2x &\geq -6 \\ x &\leq \frac{-6}{-2} = 3 \\ x &\leq 3. \end{aligned}$$

Quindi l'insieme S_2 delle soluzioni della seconda equazione è $S_2 = (-\infty, 3]$. Quindi si ha

$$\begin{aligned} S_1 \cup S_2 &= (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}; \\ S_1 \cap S_2 &= \left(-\frac{1}{4}, 3\right]; \\ S_1 \setminus S_2 &= (3, +\infty); \\ S_2 \setminus S_1 &= \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]; \\ S^c_{1,\mathbb{R}} &= \mathbb{R} \setminus \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right) = \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]; \\ S^c_{2,\mathbb{R}} &= \mathbb{R} \setminus (-\infty, 3] = (3, +\infty). \end{aligned}$$

2. La prima disequazione si risolve trovando le soluzioni dell'equazione associata

$$\begin{aligned} &x^2 - 4 > 0 \\ &x^2 - 4 = 0 \\ &x^2 = 4 \\ &x = \pm\sqrt{4} = \pm 2. \end{aligned}$$

Ora poiché le soluzioni dell'equazione associata sono reali e distinte e poiché il segno di x^2 e il verso della disequazione sono concordi, in quanto entrambi positivi, la soluzione della disequazione coincide con l'insieme dei valori esterni all'intervallo costituito dalle soluzioni dell'equazione associata: $x < -2 \vee x > 2$. Quindi l'insieme S_1 delle soluzioni della prima disequazione è $S_1 = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. La seconda disequazione si risolve trovando le soluzioni dell'equazione associata

$$x^2 + x - 6 < 0$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$
$$x = -3, 2.$$

Ora poiché le soluzioni dell'equazione associata sono reali e distinte e poiché il segno di x^2 e il verso della disequazione sono discordi, in quanto uno positivo e l'altro negativo, la soluzione della disequazione coincide con l'insieme dei valori interni all'intervallo costituito dalle soluzioni dell'equazione associata: $-3 < x < 2$. Quindi l'insieme S_2 delle soluzioni della seconda disequazione è $S_2 = (-3, 2)$. Quindi si ha

$$\begin{aligned}
S_1 \cup S_2 &= (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{2\};\\
S_1 \cap S_2 &= (-3, -2);\\
S_1 \setminus S_2 &= (-\infty, -3] \cup (2, +\infty);\\
S_2 \setminus S_1 &= [-2, 2);\\
S^c_{1,\mathbb{R}} &= [-2, 2];\\
S^c_{2,\mathbb{R}} &= (-\infty, -3] \cup [2, +\infty).
\end{aligned}$$

3. La prima disequazione si risolve trovando le soluzioni dell'equazione associata (per risolvere quest'ultima useremo la formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado ridotta)

$$2x^2 + 4x + 5 \geq 0$$
$$2x^2 + 4x + 5 = 0$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 2 \cdot 5}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 10}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-6}}{2}.$$

Ora poiché il discriminante dell'equazione associata è negativo e poiché il segno di $2x^2$ e il verso della disequazione sono concordi, in quanto entrambi positivi, la soluzione della disequazione coincide con l'insieme numeri reali. Quindi l'insieme S_1 delle soluzioni della prima disequazione è $S_1 = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. La seconda disequazione si risolve trovando le soluzioni dell'equazione associata (per risolvere quest'ultima useremo la formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado ridotta)

$$\begin{aligned}
&x^2 + 4 \leq 4x\\
&x^2 - 4x + 4 \leq 0\\
&x^2 - 4x + 4 = 0\\
&x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 4}}{1} = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2 \pm \sqrt{0} = 2 \pm 0\\
&x = 2.
\end{aligned}$$

Ora poiché le soluzioni dell'equazione associata sono reali e coincidenti, si ha che $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ è un quadrato. Ricordando che un quadrato in $\mathbb{R}$ è sempre non negativo (quindi positivo o nullo) e che è nullo se e solo se la base è nulla, si ha che l'insieme S_2 delle soluzioni della seconda disequazione è $S_2 = \{2\}$. Quindi si ha

$$\begin{aligned}
S_1 \cup S_2 &= \mathbb{R};\\
S_1 \cap S_2 &= \{2\}(= S_2);\\
S_1 \setminus S_2 &= \mathbb{R} \setminus \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty);\\
S_2 \setminus S_1 &= \varnothing;\\
S^c_{1,\mathbb{R}} &= \varnothing;\\
S^c_{2,\mathbb{R}} &= \mathbb{R} \setminus \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty).
\end{aligned}$$

Esercizio 6. Eseguire la divisione tra il polinomio $a(x)$ e il polinomio $b(x)$, controllare il risultato verificando che $q(x)b(x) + r(x)$ sia uguale ad $a(x)$ e scrivere il rapporto $\frac{a(x)}{b(x)}$ come $q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}$. Poi calcolare il valore dei polinomi $a(x)$ e $b(x)$ in $x = 0, 1, -1$ e, infine, trovare le radici (cioè gli zeri) di $b(x)$.

1. $a(x) = 7x^4 + 5x^3 + x - 2$, $b(x) = x - 5$;
2. $a(x) = x^3 + 7x^2 + 3x - 1$, $b(x) = 2x + 1$;
3. $a(x) = \frac{3}{2}x^3 + \frac{5}{6}x^2 + x - \frac{1}{2}$, $b(x) = 3x^2 - \frac{1}{4}$;
4. $a(x) = x^5 + 5x^3 + 7x^2 + 5$, $b(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

Soluzione esercizio 6. 1. Eseguendo la divisione in colonna tra polinomi $a(x)$ e $b(x)$ si ottiene

$$\begin{aligned}
q(x) &= 7x^3 + 40x^2 + 200x + 1001,\\
r(x) &= 5003.
\end{aligned}$$

Sostituendo i valori dati nei due polinomi si ottiene

$$\begin{aligned}
a(0) &= 7 \cdot 0^4 + 5 \cdot 0^3 + 0 - 2 = -2, \\
a(1) &= 7 \cdot 1^4 + 5 \cdot 1^3 + 1 - 2 = 7 + 5 + 1 - 2 = 11, \\
a(-1) &= 7(-1)^4 + 5(-1)^3 + (-1) - 2 = 7 - 5 - 1 - 2 = -1, \\
b(0) &= 0 - 5 = -5, \\
b(1) &= 1 - 5 = -4, \\
b(-1) &= -1 - 5 = -6.
\end{aligned}$$

La radice di $b(x)$ si ottiene nel seguente modo

$$\begin{aligned}
b(x) &= 0 \\
x - 5 &= 0 \\
x &= 5.
\end{aligned}$$

Quindi la radice di $b(x)$ è $x = 5$.

2. Eseguendo la divisione in colonna tra polinomi $a(x)$ e $b(x)$ si ottiene

$$\begin{aligned}
q(x) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{4}x - \frac{1}{8}, \\
r(x) &= -\frac{7}{8}.
\end{aligned}$$

Sostituendo i valori dati nei due polinomi si ottiene

$$\begin{aligned}
a(0) &= 0^3 + 7 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 1 = -1, \\
a(1) &= 1^3 + 7 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 1 + 7 + 3 - 1 = 10, \\
a(-1) &= (-1)^3 + 7(-1)^2 + 3(-1) - 1 = -1 + 7 - 3 - 1 = 2, \\
b(0) &= 2 \cdot 0 + 1 = 1, \\
b(1) &= 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3, \\
b(-1) &= 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1.
\end{aligned}$$

La radice di $b(x)$ si ottiene nel seguente modo

$$\begin{aligned}
b(x) &= 0 \\
2x + 1 &= 0 \\
2x &= -1 \\
x &= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Quindi la radice di $b(x)$ è $x = -\frac{1}{2}$.

3. Eseguendo la divisione in colonna tra polinomi $a(x)$ e $b(x)$ si ottiene

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{x}{2} + \frac{5}{18}, \\ r(x) &= \frac{9}{8}x - \frac{31}{72}. \end{aligned}$$

Sostituendo i valori dati nei due polinomi si ottiene

$$\begin{aligned} a(0) &= \frac{3}{2}0^3 + \frac{5}{6}0^2 + 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \\ a(1) &= \frac{3}{2}1^3 + \frac{5}{6}1^2 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{5}{6} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{9+5+6-3}{6} = \frac{17}{6}, \\ a(-1) &= \frac{3}{2}(-1)^3 + \frac{5}{6}(-1)^2 + (-1) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{6} - 1 - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{-9+5-6-3}{6} = -\frac{13}{6}, \\ b(0) &= 3 \cdot 0^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}, \\ b(1) &= 3 \cdot 1^2 - \frac{1}{4} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{12-1}{4} = \frac{11}{4}, \\ b(-1) &= 3(-1)^2 - \frac{1}{4} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{12-1}{4} = \frac{11}{4}. \end{aligned}$$

Le radici di $b(x)$ si ottengono nel seguente modo

$$\begin{aligned} b(x) &= 0 \\ 3x^2 - \frac{1}{4} &= 0 \\ 3x^2 &= \frac{1}{4} \\ x^2 &= \frac{1}{12} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{1}{12}} = \pm\frac{1}{\sqrt{12}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}} = \\ &= \pm\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

Quindi le radici di $b(x)$ sono $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$ e $x = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

4. Eseguendo la divisione in colonna tra polinomi $a(x)$ e $b(x)$ si ottiene

$$\begin{aligned} q(x) &= x^2 - 2x + 9, \\ r(x) &= -10x^2 - 2x + 14. \end{aligned}$$

Sostituendo i valori dati nei due polinomi si ottiene

$$\begin{aligned}
a(0) &= 0^5 + 5 \cdot 0^3 + 7 \cdot 0^2 + 5 = 5, \\
a(1) &= 1^5 + 5 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1^2 + 5 = 1 + 5 + 7 + 5 = 18, \\
a(-1) &= (-1)^5 + 5(-1)^3 + 7(-1)^2 + 5 = -1 - 5 + 7 + 5 = 6, \\
b(0) &= 0^3 + 2 \cdot 0^2 - 1 = -1, \\
b(1) &= 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 = 1 + 2 - 1 = 2, \\
b(-1) &= (-1)^3 + 2(-1)^2 - 1 = -1 + 2 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Le radici di $b(x)$ si ottengono nel seguente modo: poiché sappiamo che $x = -1$ è una radice di $b(x)$ possiamo dividere $b(x)$ per il polinomio $x-(-1) = x+1$ ottenendo come quoziente il polinomio x^2+x-1 e come resto il polinomio costantemente nullo. Quindi si ha che $x^3+2x^2-1 = (x+1)(x^2+x-1)+0$ (alternativamente si può usare la regola di Ruffini insegnata alle scuole superiori per ottenere tale fattorizzazione), da cui

$$\begin{aligned}
b(x) &= 0 \\
x^3 + 2x^2 - 1 &= 0 \\
(x+1)(x^2+x-1) &= 0,
\end{aligned}$$

da cui si ottengono le due equazioni

$$\begin{aligned}
&x + 1 = 0 \\
&x^2 + x - 1 = 0.
\end{aligned}$$

La prima ha soluzione $x = -1$. Per la seconda usiamo la formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado ottenendo

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Quindi le radici di $b(x)$ sono $x = -1$, $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Esercizio 7. Dati i numeri complessi z e w, calcolare $z + w$, zw, $\overline{z}$, $\overline{w}$, $|z|$, $|w|$, $\frac{z}{w}$, $\frac{w}{z}$, z^2, z^3, w^2 e w^3.

1. $z = 1 + i$, $w = -2 - 3i$;

2. $z = -7 + 2i$, $w = -1 + 6i$;

3. $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{5}i$, $w = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}i$;

4. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Soluzione esercizio 7. 1. $z+w=(1+i)+(-2-3i)=(1-2)+(1-3)i=-1-2i$,

$zw=(1+i)(-2-3i)=-2-3i-2i-3i^2=(-2+3)+(-3-2)i=1-5i$,

$\overline{z}=\overline{1+i}=1-i$,

$\overline{w}=\overline{-2-3i}=-2+3i$,

$|z|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$,

$|w|=|-2-3i|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$,

$\frac{z}{w}=\frac{1+i}{-2-3i}=\frac{(1+i)(-2+3i)}{(-2-3i)(-2+3i)}=\frac{-2+3i-2i+3i^2}{(-2)^2-(3i)^2}=\frac{(-2-3)+(3-2)i}{13}=$

$=-\frac{5}{13}+\frac{i}{13}$,

$\frac{w}{z}=\frac{-2-3i}{1+i}=\frac{(-2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2+2i-3i+3i^2}{1^2-i^2}=\frac{(-2-3)+(2-3)i}{2}=-\frac{5}{2}-\frac{i}{2}$,

$z^2=(1+i)^2=1^2+2\cdot1\cdot i+i^2=1+2i-1=2i$,

$z^3=(1+i)^3=1^3+3\cdot1^2\cdot i+3\cdot1\cdot i^2+i^3=1+3i-3-i=-2+2i$,

$w^2=(-2-3i)^2=(-2)^2+2(-2)(-3i)+(-3i)^2=4+12i-9=-5+12i$,

$w^3=(-2-3i)^3=(-2)^3+3(-2)^2(-3i)+3(-2)(-3i)^2+(-3i)^3=$

$=-8-36i+54+27i=46-9i$;

2. $z+w=(-7+2i)+(-1+6i)=(-7-1)+(2+6)i=-8+8i$,

$zw=(-7+2i)(-1+6i)=7-42i-2i-12=-5-44i$,

$\overline{z}=\overline{-7+2i}=-7-2i$,

$\overline{w}=\overline{-1+6i}=-1-6i$,

$|z|=|-7+2i|=\sqrt{49+4}=\sqrt{53}$,

$|w|=|-1+6i|=\sqrt{1+36}=\sqrt{37}$,

$\frac{z}{w}=\frac{-7+2i}{-1+6i}=\frac{(-7+2i)(-1-6i)}{(-1+6i)(-1-6i)}=\frac{7+42i-2i+12}{1+36}=\frac{19+40i}{37}=\frac{19}{37}+\frac{40}{37}i$,

$\frac{w}{z}=\frac{-1+6i}{-7+2i}=\frac{(-1+6i)(-7-2i)}{(-7+2i)(-7-2i)}=\frac{7+2i-42i+12}{49+4}=\frac{19-40i}{53}=\frac{19}{53}-\frac{40}{53}i$,

$z^2=(-7+2i)^2=49-28i-4=45-28i$,

$z^3=(-7+2i)^3=-343+294i+84-8i=-259+286i$,

$w^2=(-1+6i)^2=1-12i-36=-35-12i$,

$w^3=(-1+6i)^3=-1+18i+108-216i=107-198i$;

3. $z+w=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}i\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{3}i\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{5}{3}\right)i=\frac{7}{6}-\frac{16}{15}i$,

$zw=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}i\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{3}i\right)=\frac{1}{3}-\frac{5}{6}i+\frac{2}{5}i+1=\frac{4}{3}-\frac{13}{30}i$,

$\overline{z}=\overline{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}i}=\frac{1}{2}-\frac{3}{5}i$,

$\overline{w}=\overline{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}i}=\frac{2}{3}+\frac{5}{3}i$,

$$|z| = \left|\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{5}i\right| = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{25}} = \sqrt{\tfrac{61}{100}} = \tfrac{\sqrt{61}}{10},$$

$$|w| = \left|\tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{3}i\right| = \sqrt{\tfrac{4}{9} + \tfrac{25}{9}} = \sqrt{\tfrac{29}{9}} = \tfrac{\sqrt{29}}{3},$$

$$\tfrac{z}{w} = \tfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}i}{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}i} = \tfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}i\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{3}i\right)}{\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{3}i\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{3}i\right)} = \tfrac{\frac{1}{3}+\frac{5}{6}i+\frac{2}{5}i-1}{\frac{4}{9}+\frac{25}{9}} = \tfrac{-\frac{2}{3}+\frac{37}{30}i}{\frac{29}{9}} = \left(-\tfrac{2}{3} + \tfrac{37}{30}i\right)\tfrac{9}{29} =$$

$$= -\tfrac{6}{29} + \tfrac{111}{290}i,$$

$$\tfrac{w}{z} = \tfrac{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}i}{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}i} = \tfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{3}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}i\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}i\right)} = \tfrac{\frac{1}{3}-\frac{2}{5}i-\frac{5}{6}i-1}{\frac{1}{4}+\frac{9}{25}} = \tfrac{-\frac{2}{3}-\frac{37}{30}i}{\frac{61}{100}} = \left(-\tfrac{2}{3} - \tfrac{37}{30}i\right)\tfrac{100}{61} =$$

$$= -\tfrac{200}{183} - \tfrac{370}{183}i,$$

$$z^2 = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{5}i\right)^2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{5}i - \tfrac{9}{25} = -\tfrac{11}{100} + \tfrac{3}{5}i,$$

$$z^3 = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{5}i\right)^3 = \tfrac{1}{8} + \tfrac{9}{20}i - \tfrac{27}{50} - \tfrac{27}{125}i = -\tfrac{83}{200} + \tfrac{117}{500}i,$$

$$w^2 = \left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{3}i\right)^2 = \tfrac{4}{9} - \tfrac{20}{9}i - \tfrac{25}{9} = -\tfrac{21}{9} - \tfrac{20}{9}i = -\tfrac{7}{3} - \tfrac{20}{9}i,$$

$$w^3 = \left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{3}i\right)^3 = \tfrac{8}{27} - \tfrac{20}{9}i - \tfrac{50}{9} + \tfrac{125}{27}i = -\tfrac{142}{27} + \tfrac{65}{27}i;$$

4. $z + w = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i =$

$$= \tfrac{\sqrt{2}-1}{2} + \tfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}i,$$

$$zw = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\tfrac{\sqrt{2}}{4} + \tfrac{\sqrt{6}}{4}i - \tfrac{\sqrt{2}}{4}i - \tfrac{\sqrt{6}}{4} =$$

$$= \tfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i = -\tfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} + \tfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}i,$$

$$\overline{z} = \overline{\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\overline{w} = \overline{-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$|z| = \left|\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right| = \sqrt{\tfrac{2}{4} + \tfrac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1,$$

$$|w| = \left|-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1,$$

$$\tfrac{z}{w} = \tfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \tfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = \tfrac{-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}i-\frac{\sqrt{2}}{4}i+\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} =$$

$$= \tfrac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i}{1} = \tfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} - \tfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}i,$$

$$\tfrac{w}{z} = \tfrac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} = \tfrac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)} = \tfrac{-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i+\frac{\sqrt{6}}{4}i+\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} =$$

$$= \tfrac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i}{1} = \tfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} + \tfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}i,$$

$$z^2 = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 = \tfrac{2}{4} + i - \tfrac{2}{4} = i,$$

$$z^3 = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^3 = \tfrac{2\sqrt{2}}{8} + \tfrac{6\sqrt{2}}{8}i - \tfrac{6\sqrt{2}}{8} - \tfrac{2\sqrt{2}}{8}i = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$w^2 = \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i - \tfrac{3}{4} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i,$$
$$w^3 = \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)^3 = -\tfrac{1}{8} + \tfrac{3\sqrt{3}}{8} i + \tfrac{9}{8} - \tfrac{3\sqrt{3}}{8} i = 1.$$

Esercizio 8. Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbb{C}$ e verificare la soluzione sostituendo il risultato trovato nell'equazione data.

1. $x^2 + 2x + 10 = 0$;
2. $x^2 + x + 1 = 0$;
3. $3x^2 - 2x + 10 = 0$;
4. $x + 2 - 3i = 1 - 8i$;
5. $(1 + 5i)x - 7 + i = 0$;
6. $(2 - i)x + 3 - i = -2 + 6i$.

Soluzione esercizio 8.

1. Applicando la formula ridotta per la risoluzione delle equazioni di secondo grado si ottiene

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot 10}}{1} = -1 \pm \sqrt{1 - 10} = -1 \pm \sqrt{-9} = -1 \pm 3i.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono $x = -1 - 3i$ e $x = -1 + 3i$.

2. Applicando la formula per la risoluzione delle equazioni di secondo grado si ottiene

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3} i}{2}.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ e $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

3. Applicando la formula ridotta per la risoluzione delle equazioni di secondo grado si ottiene

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 3 \cdot 10}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 30}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{-29}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{29} i}{3}.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono $x = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{29}}{3} i$ e $x = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{29}}{3} i$.

4. L'equazione si risolve col seguente procedimento

$$\begin{aligned} x + 2 - 3i &= 1 - 8i \\ x &= 1 - 8i - (2 - 3i) \\ x &= 1 - 8i - 2 + 3i \\ x &= -1 - 5i. \end{aligned}$$

5. L'equazione si risolve col seguente procedimento

$$\begin{aligned}
(1+5i)x-7+i&=0\\
(1+5i)x&=7-i\\
x&=\frac{7-i}{1+5i}=\frac{(7-i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)}\\
x&=\frac{7-35i-i-5}{1^2+5^2}\\
x&=\frac{2}{26}-\frac{36}{26}i\\
x&=\frac{1}{13}-\frac{18}{13}i.
\end{aligned}$$

6. L'equazione si risolve col seguente procedimento

$$\begin{aligned}
(2-i)x+3-i&=-2+6i\\
(2-i)x&=-2+6i-3+i\\
x&=\frac{-5+7i}{2-i}=\frac{(-5+7i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\\
x&=\frac{-10-5i+14i-7}{2^2+1^2}\\
x&=-\frac{17}{5}+\frac{9}{5}i.
\end{aligned}$$