15/02/2017 - Esame di geometria - 6 crediti
Ingegneria informatica - a.a. 2016-2017

COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 2 ore e mezza.
- **Ti sono stati consegnati due fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti, in stampatello leggibile, il tuo cognome, nome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- Le risposte vanno **motivate** brevemente, ma in maniera adeguata e comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno corretti eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia $A = \begin{pmatrix} k & -1 \\ k^2+k & 0 \\ -3k & 3 \end{pmatrix}$ la matrice associata alla funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_2$ nel dominio e alla base canonica $\mathcal{E}_3$ nel codominio.

3	

(a) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biiettiva.

Risposta:
Poiché $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{dom}(f)) = 2 < 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{codom}(f))$, la funzione f non è mai suriettiva, né quindi biiettiva.
Se $k = -1 \vee k = 0$, allora $\mathrm{rk}(A) = 1$ quindi $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(f)) = 2 - 1 = 1$ e quindi f non è iniettiva.
Se $k \neq -1 \wedge k \neq 0$, allora $\mathrm{rk}(A) = 2$ quindi $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(f)) = 2 - 2 = 0$ e quindi f è iniettiva.

3	

(b) Calcolare la dimensione e una base di $\mathrm{Im}(f)$ e $\ker(f)$ per $k = -1$.

Risposta:

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(f)) = 1,$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } \mathrm{Im}(f),$$
$$\dim_{\mathbb{R}}(\ker(f)) = 1,$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } \ker(f).$$

3	

(c) Calcolare la matrice rappresentativa $A_{f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ di f, quando $k=-1$, rispetto alle basi $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ nel dominio e $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ nel codominio.

Risposta:

$$A_{f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1-k & 0 \\ 1-k & 2 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice associata all'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$ nel dominio e nel codominio.

2	

(a) Calcolare il polinomio caratteristico e lo spettro σ_A della matrice A per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Risposta:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + (k^2 - 2k - 3)\lambda,$$
$$\sigma_A = \{0, k+1, 3-k\}.$$

2	

(b) Calcolare la molteplicità algebrica di $\lambda = 0$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Risposta:
Se $k=-1 \vee k=3$, allora $m_a(0)=2$.
Se $k \neq -1 \wedge k \neq 3$, allora $m_a(0)=1$.

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

4	

(c) Dire, per $k = 0$, se la matrice A è diagonalizzabile e, nel caso lo sia, determinare una matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ e una matrice invertibile $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tali che $D = M^{-1}AM$. Se possibile, determinare M in modo che sia una matrice ortogonale.

Risposta:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ è una matrice ortogonale.}$$

2	

(d) Dire, per $k = -1$, se la matrice A è diagonalizzabile e, nel caso lo sia, determinare una matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ e una matrice invertibile $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tali che $D = M^{-1}AM$. Se possibile, determinare M in modo che sia una matrice ortogonale.

Risposta:
Poiché $m_a(0) = 2 > 1 = m_g(0)$, la matrice A non è diagonalizzabile per $k = -1$.

3. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano. Sia P un punto di coordinate $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ rispetto a tale riferimento e sia r_1 la retta di equazione cartesiana $2x - y + 3 = 0$ sempre rispetto a tale riferimento.

4	

(a) Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come origine O', di coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ rispetto al riferimento RC, avente come asse y' la retta parallela a r_1 passante per O' orientata rispetto alle x decrescenti e avente la base $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ equiversa alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. Determinare le coordinate di P rispetto a RC'.

Risposta:

$$\left\{ \mathbf{i}' \equiv \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \mathbf{j}' \equiv \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{C}_{RC'}(P) = \begin{pmatrix} -\frac{9\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

4	

(b) Sia C il punto del piano con coordinate $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ rispetto a RC. Sia P' l'immagine del punto P rispetto alla rotazione del piano in senso antiorario di centro C e angolo $\theta = \frac{7}{6}\pi$. Determinare le coordinate di P' rispetto a RC.

Risposta:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{C}_{RC}(P') = \begin{pmatrix} -3\sqrt{3}-1 \\ 2\sqrt{3}-1 \end{pmatrix}.$$

4. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento cartesiano dello spazio. Sia r_1 la retta di equazioni cartesiane

$$r_1 : \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z - 5 = 0, \end{cases}$$

e r_2 la retta di equazioni parametriche

$$r_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

3	

(a) Determinare la posizione reciproca delle due rette r_1 e r_2 e la distanza $d(r_1, r_2)$ tra esse.

Risposta:
Le due rette sono sghembe e $d(r_1, r_2) = 2$.

2	

(b) Sia P un punto di coordinate $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ rispetto al riferimento RC. Determinare, usando i quaternioni, l'immagine P' di P rispetto alla rotazione di angolo $\theta = \frac{3}{2}\pi$ e asse la retta parallela a r_1 passante per l'origine e orientata rispetto alle x decrescenti.

Risposta:

$$q = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i}{2} - \frac{j}{2},$$
$$\mathcal{C}_{RC}(P') = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$