Soluzioni foglio 4

Pietro Mercuri

5 novembre 2018

Esercizio 1. Dato lo spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ e il sottoinsieme W di V, verificare se W è anche un sottospazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di V oppure è solo un suo sottoinsieme.

1. $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}; a_3 = a_1 + a_2 \right\}$;

2. $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}; a_3 = a_1^2 a_2^2 \right\}$;

3. $V = \mathbb{R}^4$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}; a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}; a_3 = a_1; a_4 = 0 \right\}$;

4. $V = \mathbb{R}^4$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}; a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}; a_3 = 1; a_4 = 0 \right\}$;

5. $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}; 3a_1 - 2a_2 + 5a_3 = 0 \right\}$;

6. $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}; 3a_1 - 2a_2 + 5a_3 = 1 \right\}$;

7. $V = \mathbb{R}^2$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}; a_1, a_2 \in \mathbb{R}; a_1^2 - a_2^2 = 0 \right\}$;

8. $V = \mathbb{R}^2$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}; a_1, a_2 \in \mathbb{R}; a_1^2 - a_2^2 \leq 0 \right\}$;

9. $V = \mathbb{R}^2$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} ; a_1, a_2 \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{Z}^2$.
10. $V = \mathbb{R}[x]_{<3}$, $W = \mathbb{R}[x]_{<2}$.
11. $V = \mathbb{R}[x]_{<3}$, $W = \{p(t) \in \mathbb{R}[x]_{<3}; p(0) = 0\}$.
12. $V = \mathbb{R}[x]_{<3}$, $W = \{p(t) \in \mathbb{R}[x]_{<3}; p(0) = 1\}$.
13. $V = \mathbb{R}[x]_{<3}$, $W = \{p(t) \in \mathbb{R}[x]_{<3}; p(1) = 0\}$.
14. $V = \mathbb{R}[x]_{<2}$, $W = \{p(t) \in \mathbb{R}[x]_{<2}; p(t) \geq 0 \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}\}$.
15. $V = \mathbb{R}[x]_{<3}$, $W = \{p(t) \in \mathbb{R}[x]_{<3}; p(t) > 0 \text{ per ogni } t \in \mathbb{R}\}$.

Soluzione esercizio 1. Per verificare che un sottoinsieme W dello spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ sia un sottospazio vettoriale su $\mathbb{R}$, bisogna controllare che sia non vuoto e che siano verificate le due seguenti condizioni:

1) per ogni $u, v \in W$ si ha che $u + v \in W$;

2) per ogni $v \in W$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\alpha v \in W$.

Per completezza di analisi nel seguito si controllerà per ogni punto se 0 appartiene a W e se valgono entrambe le proprietà. Tuttavia per affermare che W non è un sottospazio vettoriale è sufficiente dimostrare che 0 non appartiene a W oppure che non si verifichi almeno una delle due proprietà. Quindi se si osserva che W non soddisfa, ad esempio, la prima proprietà, non è necessario controllare se soddisfa o meno la seconda per poter affermare che W non è un sottospazio vettoriale.

1. Si osserva facilmente che $0 \in W \neq \varnothing$ e che possiamo riscrivere W nel seguente modo

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} ; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Verifichiamo se W soddisfa la prima proprietà. Siano

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

elementi generici di W. Si ha che

$$u + v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \end{pmatrix}.$$

Quindi $u + v \in W$, infatti

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 = a_1 + a_2 + b_1 + b_2,$$

che mostra che $u + v$ soddisfa la condizione richiesta per appartenere a W, cioè la somma delle prime due componenti di ogni elemento di W è uguale alla terza componente.

Verifichiamo se W soddisfa la seconda proprietà. Siano

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

un elemento generico di W e α un generico elemento di $\mathbb{R}$. Si ha che

$$\alpha v = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha(a_1 + a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_1 + \alpha a_2 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\alpha v \in W$, infatti

$$(\alpha a_1) + (\alpha a_2) = \alpha a_1 + \alpha a_2,$$

che mostra che αv soddisfa la condizione richiesta per appartenere a W.

Quindi W è un sottospazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di V.

2. Si osserva facilmente che $0 \in W \neq \varnothing$ e che possiamo riscrivere W nel seguente modo

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1^2 a_2^2 \end{pmatrix}; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Verifichiamo se W soddisfa la prima proprietà. Siano

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1^2 a_2^2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1^2 b_2^2 \end{pmatrix}$$

elementi generici di W. Si ha che

$$u + v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1^2 a_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1^2 b_2^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 \end{pmatrix}.$$

Quindi $u+v \notin W$, infatti

$$
\begin{aligned}
&(a_1+b_1)^2(a_2+b_2)^2 = (a_1^2+2a_1b_1+b_1^2)(a_2^2+2a_2b_2+b_2^2) = \\
&= a_1^2a_2^2+2a_1^2a_2b_2+a_1^2b_2^2+2a_1b_1a_2^2+4a_1b_1a_2b_2+2a_1b_1b_2^2+ \\
&+ b_1^2a_2^2+2b_1^2a_2b_2+b_1^2b_2^2 \neq a_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2,
\end{aligned}
$$

che mostra che $u+v$ non soddisfa la condizione richiesta per appartenere a W, cioè la terza componente non è uguale al prodotto delle prime due componenti al quadrato. Si osservi che le espressioni $(a_1+b_1)^2(a_2+b_2)^2$ e $a_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2$ potrebbero essere uguali per particolari valori di a_1, a_2, b_1, b_2, ma per soddisfare la proprietà richiesta l'uguaglianza delle due espressioni deve essere vera per ogni $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Verifichiamo se W soddisfa la seconda proprietà. Siano

$$
v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1^2a_2^2 \end{pmatrix}
$$

un elemento generico di W e α un generico elemento di $\mathbb{R}$. Si ha che

$$
\alpha v = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1^2a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha(a_1^2a_2^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_1^2a_2^2 \end{pmatrix}.
$$

Quindi $\alpha v \notin W$, infatti

$$
(\alpha a_1)^2(\alpha a_2)^2 = \alpha^2a_1^2\alpha^2a_2^2 = \alpha^4a_1^2a_2^2 \neq \alpha a_1^2a_2^2,
$$

che mostra che αv non soddisfa la condizione richiesta per appartenere a W, per $\alpha \neq 0, 1$.

Quindi W non è un sottospazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di V, ma solamente un sottoinsieme, poiché non soddisfa nessuna delle due proprietà richieste.

3. Si osserva facilmente che $0 \in W \neq \varnothing$ e che possiamo riscrivere W nel seguente modo

$$
W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix}; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.
$$

Verifichiamo se W soddisfa la prima proprietà. Siano

$$
u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

elementi generici di W. Si ha che

$$u + v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_1 + b_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $u + v \in W$, infatti $u + v$ soddisfa la condizione richiesta per appartenere a W, cioè che la terza componente di ogni elemento di W sia uguale alla prima componente e che la quarta componente sia uguale a 0.

Verifichiamo se W soddisfa la seconda proprietà. Siano

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

un elemento generico di W e α un generico elemento di $\mathbb{R}$. Si ha che

$$\alpha v = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_1 \\ \alpha 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\alpha v \in W$, infatti αv soddisfa la condizione richiesta per appartenere a W.

Quindi W è un sottospazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di V.

4. Si osserva facilmente che $0 \notin W$ e che possiamo riscrivere W nel seguente modo

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Verifichiamo se W soddisfa la prima proprietà. Siano

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elementi generici di W. Si ha che

$$u + v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $u+v \notin W$, poiché $u+v$ ha la terza componente uguale a 2 che è diverso da 1.

Verifichiamo se W soddisfa la seconda proprietà. Siano

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

un elemento generico di W e α un generico elemento di $\mathbb{R}$. Si ha che

$$\alpha v = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha 1 \\ \alpha 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\alpha v \notin W$, poiché αv, per $\alpha \neq 1$, ha la terza componente uguale a α che è diverso da 1 .

Quindi W non è un sottospazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di V, ma solamente un sottoinsieme, poiché non contiene 0 e non soddisfa nessuna delle due proprietà richieste.

5. Si osserva facilmente che $0 \in W$. Verifichiamo se W soddisfa la prima proprietà. Siano

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

elementi generici di W. Si ha che

$$u + v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Ora verifichiamo la condizione di appartenenza a W:

$$\begin{aligned} & 3(a_1 + b_1) - 2(a_2 + b_2) + 5(a_3 + b_3) = \\ & = 3a_1 + 3b_1 - 2a_2 - 2b_2 + 5a_3 + 5b_3 = \\ & = 3a_1 - 2a_2 + 5a_3 + 3b_1 - 2b_2 + 5b_3 = \\ & = (3a_1 - 2a_2 + 5a_3) + (3b_1 - 2b_2 + 5b_3) = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

dove la quarta uguaglianza è vera poiché $u, v \in W$ e quindi entrambe le espressioni nelle parentesi sono uguali a 0. Quindi $u + v \in W$.

Verifichiamo se W soddisfa la seconda proprietà. Siano

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

un elemento generico di W e α un generico elemento di $\mathbb{R}$. Si ha che

$$\alpha v = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix}.$$

Ora verifichiamo la condizione di appartenenza a W:

$$\begin{aligned} &3(\alpha a_1) - 2(\alpha a_2) + 5(\alpha a_3) = 3\alpha a_1 - 2\alpha a_2 + 5\alpha a_3 = \\ &= \alpha(3a_1 - 2a_2 + 5a_3) = \alpha 0 = 0, \end{aligned}$$

dove la terza uguaglianza è vera poiché $v \in W$ e quindi l'espressione nella parentesi è uguale a 0. Quindi $\alpha v \in W$.

Quindi W è un sottospazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di V.

6. Si osserva facilmente che $0 \notin W$. Verifichiamo se W soddisfa la prima proprietà. Siano

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

elementi generici di W. Si ha che

$$u + v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Ora verifichiamo la condizione di appartenenza a W:

$$\begin{aligned} &3(a_1 + b_1) - 2(a_2 + b_2) + 5(a_3 + b_3) = \\ &= 3a_1 + 3b_1 - 2a_2 - 2b_2 + 5a_3 + 5b_3 = \\ &= 3a_1 - 2a_2 + 5a_3 + 3b_1 - 2b_2 + 5b_3 = \\ &= (3a_1 - 2a_2 + 5a_3) + (3b_1 - 2b_2 + 5b_3) = 1 + 1 = 2 \neq 1, \end{aligned}$$

dove la quarta uguaglianza è vera poiché $u, v \in W$ e quindi entrambe le espressioni nelle parentesi sono uguali a 1. Quindi $u + v \notin W$.

Verifichiamo se W soddisfa la seconda proprietà. Siano

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

un elemento generico di W e α un generico elemento di $\mathbb{R}$. Si ha che

$$\alpha v = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix}.$$

Ora verifichiamo la condizione di appartenenza a W:

$$\begin{aligned}&3(\alpha a_1) - 2(\alpha a_2) + 5(\alpha a_3) = 3\alpha a_1 - 2\alpha a_2 + 5\alpha a_3 = \\ &= \alpha(3a_1 - 2a_2 + 5a_3) = \alpha 1 = \alpha,\end{aligned}$$

dove la terza uguaglianza è vera poiché $v \in W$ e quindi l'espressione nella parentesi è uguale a 1. Quindi $\alpha v \notin W$ se $\alpha \neq 1$.

Quindi W non è un sottospazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di V, ma solamente un sottoinsieme, poiché non contiene 0 e non soddisfa nessuna delle due proprietà richieste.

7. Si osserva facilmente che $0 \in W$. Verifichiamo se W soddisfa la prima proprietà. Siano

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

elementi generici di W. Si ha che

$$u + v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$

Ora verifichiamo la condizione di appartenenza a W:

$$\begin{aligned}&(a_1 + b_1)^2 - (a_2 + b_2)^2 = a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 - a_2^2 - 2a_2b_2 - b_2^2 = \\ &= a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2 + 2a_1b_1 - 2a_2b_2 = \\ &= (a_1^2 - a_2^2) + (b_1^2 - b_2^2) + 2(a_1b_1 - a_2b_2) = \\ &= 0 + 0 + 2(a_1b_1 - a_2b_2) = 2(a_1b_1 - a_2b_2),\end{aligned}$$

dove la quarta uguaglianza è vera poiché $u, v \in W$ e quindi entrambe le espressioni nelle prime due parentesi sono uguali a 0. Quindi $u+v \notin W$, poiché (per generici valori di a_1, a_2, b_1, b_2) si ha che $2(a_1b_1 - a_2b_2) \neq 0$. Ad esempio per $a_1 = 1, a_2 = -1, b_1 = 1, b_2 = 1$.

Verifichiamo se W soddisfa la seconda proprietà. Siano

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

un elemento generico di W e α un generico elemento di $\mathbb{R}$. Si ha che

$$\alpha v = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \end{pmatrix}.$$

Ora verifichiamo la condizione di appartenenza a W:

$$\begin{aligned}&(\alpha a_1)^2 - (\alpha a_2)^2 = \alpha^2 a_1^2 - \alpha^2 a_2^2 = \\ &= \alpha^2(a_1^2 - a_2^2) = \alpha^2 0 = 0,\end{aligned}$$

dove la terza uguaglianza è vera poiché $v \in W$ e quindi l'espressione nella parentesi è uguale a 0. Quindi $\alpha v \in W$.

Quindi W non è un sottospazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di V, ma solamente un sottoinsieme, poiché, anche se contiene 0 e soddisfa la seconda proprietà, non soddisfa la prima.

8. Si osserva facilmente che $0 \in W$. Verifichiamo se W soddisfa la prima proprietà. Siano
$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$
elementi generici di W. Si ha che
$$u + v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$
Ora verifichiamo la condizione di appartenenza a W:
$$\begin{aligned} &(a_1 + b_1)^2 - (a_2 + b_2)^2 = a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 - a_2^2 - 2a_2b_2 - b_2^2 = \\ &= a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2 + 2a_1b_1 - 2a_2b_2 = \\ &= (a_1^2 - a_2^2) + (b_1^2 - b_2^2) + 2(a_1b_1 - a_2b_2) \leq \\ &\leq 0 + 0 + 2(a_1b_1 - a_2b_2) = 2(a_1b_1 - a_2b_2), \end{aligned}$$
dove la disuguaglianza è vera poiché $u, v \in W$ e quindi entrambe le espressioni nelle prime due parentesi sono minori o uguali a 0. Quindi $u+v \notin W$, poiché (per generici valori di a_1, a_2, b_1, b_2) si potrebbe avere che $2(a_1b_1 - a_2b_2) > 0$. Ad esempio per $a_1 = 0, a_2 = -2, b_1 = 1, b_2 = 1$.

Verifichiamo se W soddisfa la seconda proprietà. Siano
$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$
un elemento generico di W e α un generico elemento di $\mathbb{R}$. Si ha che
$$\alpha v = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \end{pmatrix}.$$
Ora verifichiamo la condizione di appartenenza a W:
$$\begin{aligned} &(\alpha a_1)^2 - (\alpha a_2)^2 = \alpha^2 a_1^2 - \alpha^2 a_2^2 = \\ &= \alpha^2(a_1^2 - a_2^2) \leq \alpha^2 0 = 0, \end{aligned}$$
dove la disuguaglianza è vera poiché $v \in W$ e quindi l'espressione nella parentesi è minore o uguale a 0. Quindi $\alpha v \in W$.

Quindi W non è un sottospazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di V, ma solamente un sottoinsieme, poiché, anche se contiene 0 e soddisfa la seconda proprietà, non soddisfa la prima.

9. Si osserva facilmente che $0 \in W$. Verifichiamo se W soddisfa la prima proprietà. Siano

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

elementi generici di W. Si ha che

$$u + v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$

quindi $u+v \in W$, poiché la somma di numeri interi è ancora un numero intero (l'insieme $\mathbb{Z}$ è chiuso rispetto alla somma).

Verifichiamo se W soddisfa la seconda proprietà. Siano

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

un elemento generico di W e α un generico elemento di $\mathbb{R}$. Si ha che

$$\alpha v = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \end{pmatrix}.$$

quindi $\alpha v \notin W$ per generici valori di α. Basta scegliere α uguale ad un numero irrazionale (per esempio $\alpha = \sqrt{2}$).

Quindi W non è un sottospazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di V, ma solamente un sottoinsieme, poiché, anche se contiene 0 e soddisfa la prima proprietà, non soddisfa la seconda.

10. Un generico elemento di $\mathbb{R}[x]_{<3}$ è $ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Un generico elemento di $\mathbb{R}[x]_{<2}$ è $sx + t$ con $s, t \in \mathbb{R}$. Ovviamente $0 \in \mathbb{R}[x]_{<2}$, poiché si è posto $\deg(0) = -1$.

Verifichiamo se $\mathbb{R}[x]_{<2}$ soddisfa la prima proprietà. Siano

$$\begin{aligned} p(x) &= s_1 x + t_1, \\ q(x) &= s_2 x + t_2, \end{aligned}$$

due generici elementi di $\mathbb{R}[x]_{<2}$. Si ha che

$$\begin{aligned} &p(x) + q(x) = s_1 x + t_1 + s_2 x + t_2 = \\ &= s_1 x + s_2 x + t_1 + t_2 = (s_1 + s_2)x + (t_1 + t_2), \end{aligned}$$

quindi $p(x)+q(x)$ è ancora un polinomio di grado minore di 2 e quindi $p(x) + q(x) \in \mathbb{R}[x]_{<2}$.

Verifichiamo se $\mathbb{R}[x]_{<2}$ soddisfa la seconda proprietà. Siano

$$p(x) = sx + t,$$

un generico elemento di $\mathbb{R}[x]_{<2}$ e α un generico elemento di $\mathbb{R}$. Si ha che

$$\alpha p(x) = \alpha(sx + t) = \alpha sx + \alpha t,$$

quindi $\alpha p(x)$ è ancora un polinomio di grado minore di 2 e quindi $\alpha p(x) \in \mathbb{R}[x]_{<2}$.

Quindi $\mathbb{R}[x]_{<2}$ è un sottospazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di $\mathbb{R}[x]_{<3}$.

11. W è un sottospazio di V su $\mathbb{R}$.
12. W non è un sottospazio di V, poiché $0 \notin W$.
13. W è un sottospazio di V su $\mathbb{R}$.
14. W non è un sottospazio di V su $\mathbb{R}$ perché, anche se contiene 0 e soddisfa la prima proprietà, non soddisfa la seconda proprietà.
15. W non è un sottospazio di V, poiché $0 \notin W$.

Esercizio 2. Calcolare le combinazioni lineari dei seguenti vettori con i coefficienti scalari assegnati.

1. $v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$,

   $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = \sqrt{2}$, $\alpha_3 = \sqrt{2}$;
2. $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,

   $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = \sqrt{3}$;
3. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

   $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = -\frac{1}{3}$.

Soluzione esercizio 2. 1. Il vettore combinazione lineare v si ottiene nel seguente modo

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = -3\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2\end{pmatrix} + \sqrt{2}\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\1+\sqrt{3}\end{pmatrix} + \sqrt{2}\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{3}{2}}\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-3\sqrt{2}\\-3\cdot 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sqrt{2}\sqrt{6}\\\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\\sqrt{2}\cdot 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-3\sqrt{2}\\-6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\\sqrt{2}+\sqrt{6}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}\\-6+\sqrt{2}+\sqrt{6}+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}\\-6+\sqrt{2}+\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

2. Il vettore combinazione lineare v si ottiene nel seguente modo

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 2\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} + \sqrt{3}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\sqrt{3}\\\frac{\sqrt{2}}{3}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\frac{1}{6}\\2\cdot 1\\2\frac{1}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sqrt{3}\frac{3}{5}\sqrt{3}\\\sqrt{3}\frac{\sqrt{2}}{3}\\\sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{9}{5}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{9}{5}\\2+\frac{\sqrt{6}}{3}\\1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{32}{15}\\\frac{6+\sqrt{6}}{3}\\2\end{pmatrix}.$$

3. Il vettore combinazione lineare v si ottiene nel seguente modo

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = -1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-1\cdot 1\\-1\cdot 1\\-1\cdot 1\\-1\cdot 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\cdot 1\\2\cdot 0\\2\cdot 1\\2\cdot 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{3}1\\\frac{1}{3}2\\\frac{1}{3}3\\\frac{1}{3}4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\1\\\frac{4}{3}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-1+2-\frac{1}{3}\\-1+0-\frac{2}{3}\\-1+2-1\\0+0-\frac{4}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{5}{3}\\0\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Dire se i seguenti insiemi di vettori di V sono linearmente indipendenti oppure no.

1. $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$;

2. $V=\mathbb{R}^2$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$;

3. $V=\mathbb{R}^2$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $v_4=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$;

4. $V=\mathbb{R}^3$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}$;

5. $V=\mathbb{R}^3$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}6\\6\\2\end{pmatrix}$;

6. $V=\mathbb{R}^4$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}0\\\pi\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_4=\begin{pmatrix}0\\1\\\sqrt{2}\\\sqrt[3]{3}\end{pmatrix}$;

7. $V=\mathbb{R}^4$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}0\\\pi\\\pi\\0\end{pmatrix}$, $v_4=\begin{pmatrix}0\\1\\\sqrt{2}\\\sqrt[3]{3}\end{pmatrix}$.

Soluzione esercizio 3. Si ricordi che m vettori $v_1,\dots,v_m\in V$ sono linearmente indipendenti se non esistono m scalari $\alpha_1,\dots,\alpha_m\in\mathbb{R}$, non tutti nulli, tali che

$$\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_m v_m=\underline{0},$$

dove $\underline{0}$ è il vettore con tutte le componenti uguali a 0.

1. Cerchiamo tutti gli scalari che verificano la condizione

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2=\underline{0}.$$

Quindi si deve avere

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\2\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\2\alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Tale condizione è equivalente al sistema

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\2\alpha_1=0.\end{cases}$$

Risolvendo per sostituzione si ha

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0. \end{cases}$$

Quindi l'unica soluzione del sistema è

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0, \end{cases}$$

da cui si deduce che i vettori dati sono linearmente indipendenti (poiché la sola combinazione lineare di tali vettori che è uguale al vettore nullo si ha prendendo entrambi i coefficienti α_1 e α_2 uguali a 0, cioè considerando la combinazione lineare banale).

2. Cerchiamo tutti gli scalari che verificano la condizione

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \underline{0}.$$

Quindi si deve avere

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \alpha_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\alpha_3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha_3 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\alpha_3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tale condizione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha_3 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\alpha_3}{2} = 0. \end{cases}$$

Risolvendo per sostituzione si ha

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha_3\frac{\sqrt{3}}{2} \\ (-\alpha_2\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha_3\frac{\sqrt{3}}{2}) + \alpha_2\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\alpha_3}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha_3\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_3\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Quindi il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un solo parametro. Per esibirne una non banale (cioè diversa da quella con $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ che è detta soluzione banale) è sufficiente porre α_2 uguale ad un numero reale non nullo. Ad esempio ponendo $\alpha_2 = -2$ si ha

$$\begin{cases} \alpha_1 = \sqrt{2} \\ \alpha_2 = -2 \\ \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

da cui si deduce che i vettori dati sono linearmente dipendenti. Infatti la combinazione lineare non banale data, ad esempio, da $\sqrt{2}v_1 - 2v_2 + 0v_3$ è il vettore nullo.

3. Cerchiamo tutti gli scalari che verificano la condizione

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = \underline{0}.$$

Quindi si deve avere

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_2\\\alpha_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_3\\2\alpha_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_4\\3\alpha_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4\\ \alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Tale condizione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo per sostituzione si ha

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 \\ (-\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4) + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 \\ \alpha_3 = \alpha_1 - 2\alpha_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_1 - (\alpha_1 - 2\alpha_4) - \alpha_4 \\ \alpha_3 = \alpha_1 - 2\alpha_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -2\alpha_1 + \alpha_4 \\ \alpha_3 = \alpha_1 - 2\alpha_4. \end{cases}$$

Quindi il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da due parametri. Per esibirne una non banale (cioè diversa da quella con $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ che è detta soluzione banale) è sufficiente porre α_1 e α_4 uguale a dei numeri reali non entrambi nulli. Ad esempio ponendo $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_4 = 0$ (si noti che l'importante è non porre entrambi uguali a 0) si ha

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -2 \cdot 1 + 0 = -2 \\ \alpha_3 = 1 - 2 \cdot 0 = 1 \\ \alpha_4 = 0, \end{cases}$$

da cui si deduce che i vettori dati sono linearmente dipendenti. Infatti la combinazione lineare non banale data, ad esempio, da $1v_1 - 2v_2 + 1v_3 + 0v_4$ è il vettore nullo.

4. Cerchiamo tutti gli scalari che verificano la condizione

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \underline{0}.$$

Quindi si deve avere

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_2 \\ 3\alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\alpha_3 \\ 0 \\ 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 \\ 3\alpha_2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tale condizione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo per sostituzione si ha

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2 \cdot 0 + 6\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = -2\alpha_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\alpha_3 + 6\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = -2\alpha_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = -2\alpha_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = -2 \cdot 0 = 0. \end{cases}$$

Quindi l'unica soluzione del sistema è

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

da cui si deduce che i vettori dati sono linearmente indipendenti (poiché la sola combinazione lineare di tali vettori che è uguale al vettore nullo si ha prendendo tutti i coefficienti α_1, α_2 e α_3 uguali a 0, cioè considerando la combinazione lineare banale).

5. Cerchiamo tutti gli scalari che verificano la condizione

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \underline{0}.$$

Quindi si deve avere

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_2 \\ 3\alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\alpha_3 \\ 6\alpha_3 \\ 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 \\ 3\alpha_2 + 6\alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tale condizione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo per sostituzione si ha

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = -\frac{6}{3}\alpha_3 \\ \alpha_1 = -2\alpha_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\alpha_3 + 2(-2\alpha_3) + 6\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = -2\alpha_3 \\ \alpha_1 = -2\alpha_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \alpha_2 = -2\alpha_3 \\ \alpha_1 = -2\alpha_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -2\alpha_3 \\ \alpha_1 = -2\alpha_3. \end{cases}$$

Quindi il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un solo parametro. Per esibirne una non banale (cioè diversa da quella con $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ che è detta soluzione banale) è sufficiente porre α_3 uguale ad un numero reale non nullo. Ad esempio ponendo $\alpha_3 = -1$ si ha

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2(-1) = 2 \\ \alpha_2 = -2(-1) = 2 \\ \alpha_3 = -1, \end{cases}$$

da cui si deduce che i vettori dati sono linearmente dipendenti. Infatti la combinazione lineare non banale data, ad esempio, da $2v_1 + 2v_2 - 1v_3$ è il vettore nullo.

6. Cerchiamo tutti gli scalari che verificano la condizione

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = \underline{0}.$$

Quindi si deve avere

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt[3]{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \pi\alpha_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_4 \\ \sqrt{2}\alpha_4 \\ \sqrt[3]{3}\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_1 + \pi\alpha_3 + \alpha_4 \\ \sqrt{2}\alpha_4 \\ \sqrt[3]{3}\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tale condizione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \pi\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \sqrt{2}\alpha_4 = 0 \\ \sqrt[3]{3}\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo per sostituzione si ha

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{2}\alpha_1 \\ \alpha_1 + \pi\alpha_3 + 0 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{2}\alpha_1 \\ \alpha_3 = -\frac{1}{\pi}\alpha_1 \\ \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Quindi il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un solo parametro. Per esibirne una non banale (cioè diversa da quella con $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ che è detta soluzione banale) è sufficiente porre α_1 uguale ad un numero reale non nullo. Ad esempio ponendo $\alpha_1 = -2\pi$ si ha

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{2}(-2\pi) = \pi \\ \alpha_2 = -\frac{1}{\pi}(-2\pi) = 2 \\ \alpha_3 = -2\pi \\ \alpha_4 = 0, \end{cases}$$

da cui si deduce che i vettori dati sono linearmente dipendenti. Infatti la combinazione lineare non banale data, ad esempio, da $\pi v_1 + 2v_2 - 2\pi v_3 + 0v_4$ è il vettore nullo.

7. Cerchiamo tutti gli scalari che verificano la condizione

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = \underline{0}.$$

Quindi si deve avere

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt[3]{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \pi\alpha_3 \\ \pi\alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_4 \\ \sqrt{2}\alpha_4 \\ \sqrt[3]{3}\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_1 + \pi\alpha_3 + \alpha_4 \\ \pi\alpha_3 + \sqrt{2}\alpha_4 \\ \sqrt[3]{3}\alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tale condizione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \pi\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \pi\alpha_3 + \sqrt{2}\alpha_4 = 0 \\ \sqrt[3]{3}\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo per sostituzione si ha

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{2}\alpha_1 \\ \alpha_1 + \pi\alpha_3 + 0 = 0 \\ \pi\alpha_3 + \sqrt{2} \cdot 0 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{2}\alpha_1 \\ \alpha_1 = -\pi\alpha_3 \\ \pi\alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{2}\alpha_1 \\ \alpha_1 = -\pi 0 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\frac{1}{2}0 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Quindi l'unica soluzione del sistema è

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0, \end{cases}$$

da cui si deduce che i vettori dati sono linearmente indipendenti (poiché la sola combinazione lineare di tali vettori che è uguale al vettore nullo si ha prendendo tutti i coefficienti α_1, α_2, α_3 e α_4 uguali a 0, cioè considerando la combinazione lineare banale).

Esercizio 4. Siano dati uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ e un insieme di vettori $I = \{v_1, \ldots, v_n \in V\}$ che è un sistema di generatori di V. Dire se I è una base (cioè è un insieme di generatori linearmente indipendenti) per V oppure no. Per verificare l'indipendenza lineare si calcoli il rango della matrice che ha come colonne i vettori dati.

1. $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

2. $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

3. $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

4. $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;

5. $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

6. $V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt[3]{3} \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}$;

7. $V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt[3]{3} \end{pmatrix}$.

Soluzione esercizio 4. Nel seguito si indicherà con A la matrice che ha come colonne i vettori dati (non necessariamente nell'ordine dato, saranno messi in un altro ordine se questo semplifica i calcoli).

1. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Poiché
$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0,$$
si ha che $\operatorname{rg} A = 2$, quindi i 2 vettori dati sono linearmente indipendenti e dunque tale sistema di generatori è una base per $\mathbb{R}^2$.

2. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
Poiché
$$\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \neq 0,$$
si ha che $\operatorname{rg} A = 2$, quindi i 3 vettori dati sono linearmente dipendenti e dunque tale sistema di generatori non è una base per $\mathbb{R}^2$.

3. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Poiché
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0,$$
si ha che $\operatorname{rg} A = 2$, quindi i 4 vettori dati sono linearmente dipendenti e dunque tale sistema di generatori non è una base per $\mathbb{R}^2$.

4. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Poiché
$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6 + 0 + 0 - 18 - 0 - 0 = -12 \neq 0,$$
si ha che $\operatorname{rg} A = 3$, quindi i 3 vettori dati sono linearmente indipendenti e dunque tale sistema di generatori è una base per $\mathbb{R}^3$.

5. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Poiché
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 9 + 4 + 0 - 0 - 0 - 0 = 13 \neq 0,$$
si ha che $\operatorname{rg} A = 3$, quindi i 4 vettori dati sono linearmente dipendenti e dunque tale sistema di generatori non è una base per $\mathbb{R}^3$.

6. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \pi & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pi & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt[3]{3} \end{pmatrix}.$$
Poiché
$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \pi & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt[3]{3} \end{pmatrix} = 2\pi^2 \sqrt[3]{3} \neq 0,$$
si ha che $\operatorname{rg} A = 4$, quindi i 5 vettori dati sono linearmente dipendenti e dunque tale sistema di generatori non è una base per $\mathbb{R}^4$.

7. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt[3]{3} \end{pmatrix}.$$
Poiché
$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt[3]{3} \end{pmatrix} = 2\pi\sqrt[3]{3} \neq 0,$$
si ha che $\operatorname{rg} A = 4$, quindi i 4 vettori dati sono linearmente indipendenti e dunque tale sistema di generatori è una base per $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 5. Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ e un insieme di vettori $I = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dire se I è una base (cioè è un insieme di generatori linearmente indipendenti) per V su $\mathbb{R}$. Nel caso non lo sia, trovare prima quali vettori di I sono linearmente indipendenti e poi individuare quale spazio essi generano (tutto V o un suo sottospazio). Nel caso generino un sottospazio W di V, descriverlo esplicitamente. Concludere calcolando $\dim_{\mathbb{R}} V$ (o $\dim_{\mathbb{R}} W$), cioè la dimensione di V (o di W) su $\mathbb{R}$.

1. $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$;
2. $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;
3. $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$;
4. $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$;
5. $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
6. $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
7. $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione esercizio 5. Per verificare che i vettori dati siano una base, si deve controllare che siano generatori linearmente indipendenti.

1. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$
si ha che $\det A = 15 - 12 = 3 \neq 0$, quindi $\operatorname{rg} A = 2$ e quindi v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti (poiché per definizione il rango di una matrice è uguale al numero di colonne o di righe linearmente indipendenti). Per controllare che siano generatori si deve verificare che per ogni $v \in V$ esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1 v_1 + x_2 v_2 = v$. Se $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ questo equivale a dire che per ogni $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ il sistema
$$S : \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = a_1 \\ 3x_1 + 5x_2 = a_2, \end{cases}$$
è compatibile. Poiché $\operatorname{rg} A = 2$ si ha che
$$\operatorname{rg} A = 2 \leq \operatorname{rg} B \leq \min\{2, 3\} = 2,$$
dove B è la matrice completa del sistema S. Da questo si deduce che $\operatorname{rg} B = 2$. Quindi, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile e ammette $\infty^{2-2} = \infty^0 = 1$ soluzione. Quindi i vettori dati sono una base per $\mathbb{R}^2$. Utilizzando il metodo di Cramer si possono anche ottenere che le coordinate dei vettori di $\mathbb{R}^2$ rispetto a questa base
$$\begin{cases} x_1 = \frac{5a_1 - 4a_2}{3} \\ x_2 = a_2 - a_1. \end{cases}$$
Poiché la base è composta da due elementi, si può concludere che $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$.

2. Sia
$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \end{pmatrix},$$
si ha che $\det A = \det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1 \neq 0$, quindi $\operatorname{rg} A = 2$ e quindi v_1, v_2 e v_3 sono linearmente dipendenti, ma, ad esempio, v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti (poiché esiste un minore A di M che li contiene il cui determinante è non nullo). Quindi escludiamo v_3 e continuiamo con l'analisi. Per controllare che v_1 e v_2 siano generatori si deve verificare che per ogni $v \in V$ esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$x_1v_1 + x_2v_2 = v$. Se $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ questo equivale a dire che per ogni $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ il sistema

$$S: \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 = a_1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 = a_2, \end{cases}$$

è compatibile. Poiché $\operatorname{rg} A = 2$ si ha che

$$\operatorname{rg} A = 2 \leq \operatorname{rg} B \leq \min\{2, 3\} = 2,$$

dove B è la matrice completa del sistema S. Da questo si deduce che $\operatorname{rg} B = 2$. Quindi, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile e ammette $\infty^{2-2} = \infty^0 = 1$ soluzione. Quindi i vettori considerati sono una base per $\mathbb{R}^2$. Utilizzando il metodo di Cramer si possono anche ottenere che le coordinate dei vettori di $\mathbb{R}^2$ rispetto a questa base

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(a_1 + a_2) \\ x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(a_2 - a_1). \end{cases}$$

Poiché la base è composta da due elementi, si può concludere che $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$.

3. Sia

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -3 & 6 & \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

si ha che l'elemento in alto a sinistra è $1 \neq 0$, quindi $1 \leq \operatorname{rg} M \leq 2$. Calcoliamo i determinanti dei minori di ordine 2 che contengono il minore di ordine 1 scelto

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = 6 - 6 = 0$$
$$\det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -3 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0,$$

quindi, per il teorema dell'orlando, si ha che tutti i minori di ordine 2 hanno determinante nullo e quindi $\operatorname{rg} M = 1$. Da questo concludiamo che v_1, v_2 e v_3 sono linearmente dipendenti, anche se presi a due a due. Scegliamo v_1 che è linearmente indipendente (poiché esiste un minore di M che lo contiene il cui determinante è non nullo), escludiamo v_2 e v_3 e continuiamo con l'analisi. Per controllare v_1 che sia generatore si deve verificare che per ogni $v \in V$ esiste $x_1 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1v_1 = v$. Se $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ questo equivale a dire che per ogni $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ il sistema

$$S: \begin{cases} x_1 = a_1 \\ -3x_1 = a_2, \end{cases}$$

è compatibile. Si osserva facilmente che $\operatorname{rg} A = 1$, dove A è la matrice 2×1 dei coefficienti del sistema S, e quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, che il sistema S è compatibile se e solo se $\operatorname{rg} B = 1$, dove B è la matrice completa del sistema. Poiché si ha $\det B = a_2 + 3a_1$, si deduce che $\operatorname{rg} B = 1$ se e solo se $a_2 + 3a_1 = 0$, cioè se e solo se $a_2 = -3a_1$. Ma questo vuol dire che v_1 non genera tutto $\mathbb{R}^2$ ma solo un suo sottospazio W (poiché il sistema S non è compatibile per ogni valore di $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, ma solo per quelli che verificano l'equazione $a_2 + 3a_1 = 0$). Tale sottospazio sarà definito nel seguente modo

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, a_2 + 3a_1 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ -3a_1 \end{pmatrix}, a_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Poiché la base di W è composta da un elemento, si può concludere che $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$.

4. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \\ 1 & 9 \end{pmatrix},$$

si ha che $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = -2 + 6 = 4 \neq 0$, quindi $\operatorname{rg} A = 2$. Quindi v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti. Per controllare che siano generatori si deve verificare che per ogni $v \in V$ esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1 v_1 + x_2 v_2 = v$. Se $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ questo equivale a dire che per ogni $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ il sistema

$$S : \begin{cases} x_1 - 2x_2 = a_1 \\ 3x_1 - 2x_2 = a_2 \\ x_1 + 9x_2 = a_3, \end{cases}$$

è compatibile. Poiché $\operatorname{rg} A = 2$, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema S è compatibile se e solo se $\operatorname{rg} B = 2$, dove B è la matrice completa del sistema. Poiché si ha

$$\det B = -2a_3 - 2a_2 + 27a_1 + 2a_1 + 6a_3 - 9a_2 = 29a_1 - 11a_2 + 4a_3,$$

si deduce che $\operatorname{rg} B = 2$ se e solo se $29a_1 - 11a_2 + 4a_3 = 0$, cioè se e solo se $a_3 = \frac{11}{4} a_2 - \frac{29}{4} a_1$. Ma questo vuol dire che v_1 e v_2 non generano tutto $\mathbb{R}^3$ ma solo un suo sottospazio W (poiché il sistema S non è compatibile per ogni valore di $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, ma solo per quelli che verificano l'equazione $29a_1 - 11a_2 + 4a_3 = 0$). Tale sottospazio sarà definito nel seguente modo

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, 29a_1 - 11a_2 + 4a_3 = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \frac{11}{4}a_2 - \frac{29}{4}a_1 \end{pmatrix}, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Poiché la base di W è composta da due elementi, si può concludere che $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$.

5. Sia
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
si ha che $\det M = 0-2+0+4-2-0 = 0$, ma $\det N = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 0-2 = -2 \neq 0$. Quindi $\operatorname{rg} M = 2$. Quindi v_1, v_2 e v_3 sono linearmente dipendenti, ma v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti (poiché esiste un minore N di M che li contiene il cui determinante è non nullo). Quindi escludiamo v_3 e continuiamo con l'analisi. Per controllare che v_1 e v_2 siano generatori si deve verificare che per ogni $v \in V$ esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1v_1 + x_2v_2 = v$. Se $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ questo equivale a dire che per ogni $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ il sistema
$$S : \begin{cases} 2x_2 = a_1 \\ x_1 - 2x_2 = a_2 \\ x_1 = a_3, \end{cases}$$
è compatibile. Sappiamo che $\operatorname{rg} A = 2$, dove A è la matrice 3×2 dei coefficienti del sistema S, e quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema S è compatibile se e solo se $\operatorname{rg} B = 2$, dove B è la matrice completa del sistema. Poiché si ha
$$\det B = 0 + 2a_2 + 0 + 2a_1 - 2a_3 - 0 = 2a_1 + 2a_2 - 2a_3,$$
si deduce che $\operatorname{rg} B = 2$ se e solo se $2a_1 + 2a_2 - 2a_3 = 0$, cioè se e solo se $a_3 = a_1 + a_2$. Ma questo vuol dire che v_1 e v_2 non generano tutto $\mathbb{R}^3$ ma solo un suo sottospazio W (poiché il sistema S non è compatibile per ogni valore di $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, ma solo per quelli che verificano l'equazione $2a_1 + 2a_2 - 2a_3 = 0$). Tale sottospazio sarà definito nel

seguente modo

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, 2a_1 + 2a_2 - 2a_3 = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix}, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Poiché la base di W è composta da due elementi, si può concludere che $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$.

6. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 10 & \frac{1}{2} & 0 \\ 100 & 0 & -1 \\ 1000 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

si ha che $\det A = 0 - 500 + 0 - 0 - 50 + \frac{10}{3} = -\frac{1640}{3} \neq 0$, quindi $\operatorname{rg} A = 3$ e quindi v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Per controllare che siano generatori si deve verificare che per ogni $v \in V$ esistono $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = v$. Se $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ questo equivale a dire che per ogni $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ il sistema

$$S : \begin{cases} 10x_1 + \frac{1}{2}x_2 = a_1 \\ 100x_1 - x_3 = a_2 \\ 1000x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 = a_3, \end{cases}$$

è compatibile. Poiché $\operatorname{rg} A = 3$ si ha che

$$\operatorname{rg} A = 3 \leq \operatorname{rg} B \leq \min\{3, 4\} = 3,$$

dove B è la matrice completa del sistema S. Da questo si deduce che $\operatorname{rg} B = 3$. Quindi, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile e ammette $\infty^{3-3} = \infty^0 = 1$ soluzione. Quindi i vettori considerati sono una base per $\mathbb{R}^3$. Utilizzando il metodo di Cramer si possono anche ottenere che le coordinate dei vettori di $\mathbb{R}^3$ rispetto a questa base

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{3280}a_2 + \frac{3}{3280}a_3 - \frac{a_1}{1640} \\ x_2 = \frac{150}{41}a_1 - \frac{3}{164}a_2 - \frac{3}{164}a_3 \\ x_3 = \frac{15}{164}a_3 - \frac{149}{164}a_2 - \frac{5}{82}a_1. \end{cases}$$

Poiché la base è composta da tre elementi, si può concludere che $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$.

7. Sia
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
si ha che $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0-2-1-2-0-1 = -6 \neq 0$, quindi $\operatorname{rg} M = 3$ e quindi v_1, v_2, v_3 e v_4 sono linearmente dipendenti, ma, ad esempio, v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti (poiché esiste un minore A di M che li contiene il cui determinante è non nullo). Quindi escludiamo v_4 e continuiamo con l'analisi. Per controllare che v_1, v_2 e v_3 siano generatori si deve verificare che per ogni $v \in V$ esistono $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = v$. Se $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ questo equivale a dire che per ogni $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ il sistema
$$S : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = a_2 \\ 2x_1 - x_2 = a_3, \end{cases}$$
è compatibile. Poiché $\operatorname{rg} A = 3$ si ha che
$$\operatorname{rg} A = 3 \leq \operatorname{rg} B \leq \min\{3, 4\} = 3,$$
dove B è la matrice completa del sistema S. Da questo si deduce che $\operatorname{rg} B = 3$. Quindi, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è compatibile e ammette $\infty^{3-3} = \infty^0 = 1$ soluzione. Quindi i vettori considerati sono una base per $\mathbb{R}^3$. Utilizzando il metodo di Cramer si possono anche ottenere che le coordinate dei vettori di $\mathbb{R}^3$ rispetto a questa base
$$\begin{cases} x_1 = \frac{a_1+a_2+2a_3}{6} \\ x_2 = \frac{a_1+a_2-a_3}{3} \\ x_3 = \frac{a_1-a_2}{2}. \end{cases}$$
Poiché la base è composta da tre elementi, si può concludere che $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$.

Esercizio 6. Dato un spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$, delle basi $B_1, \ldots, B_r$ per tale spazio e un vettore $v \in V$, determinare le coordinate del vettore dato rispetto a ogni base data di V.

1. $V = \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B_4 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

2. $V = \mathbb{R}^2$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$,

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B_4 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

3. $V = \mathbb{R}^3$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \right\},$$

$$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. $V = \mathbb{R}^3$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \right\},$$

$$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soluzione esercizio 6. 1. Per trovare le coordinate di $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a B_1 bisogna calcolare gli scalari $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ che rendono vera la combinazione lineare

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + x_2 = 1 \\ x_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Quindi le coordinate di v rispetto a B_1 sono

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Per trovare le coordinate di $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a B_2 bisogna calcolare gli scalari $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ che rendono vera la combinazione lineare

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ 1 - x_2 - x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Quindi le coordinate di v rispetto a B_2 sono

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Per trovare le coordinate di $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a B_3 bisogna calcolare gli scalari $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ che rendono vera la combinazione lineare

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -3x_1 - 5x_2 = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 - 1 \\ -3x_1 - 10x_1 + 5 = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_2 = -\frac{5}{13} \\ x_1 = \frac{4}{13}. \end{cases}$$

Quindi le coordinate di v rispetto a B_3 sono

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{13} \\ x_2 = -\frac{5}{13}. \end{cases}$$

Per trovare le coordinate di $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a B_4 bisogna calcolare gli scalari $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ che rendono vera la combinazione lineare

$$x_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ \sqrt{3}x_2 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}x_2 = 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ x_2 = \frac{2-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-3}{3} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}+3}{3} \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}-3}{3}. \end{cases}$$

Quindi le coordinate di v rispetto a B_4 sono

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{3}+3}{3} \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}-3}{3}. \end{cases}$$

2. Per trovare le coordinate di $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ rispetto a B_1 bisogna calcolare gli scalari $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ che rendono vera la combinazione lineare

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Questo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 = -7 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_2 = 7 \\ x_1 = -\frac{7}{2}. \end{cases}$$

Quindi le coordinate di v rispetto a B_1 sono

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{2} \\ x_2 = 7. \end{cases}$$

Per trovare le coordinate di $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ rispetto a B_2 bisogna calcolare gli scalari $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ che rendono vera la combinazione lineare

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Questo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = -7 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = \frac{7}{2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{2} \\ x_2 = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

Quindi le coordinate di v rispetto a B_2 sono

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{2} \\ x_2 = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

Per trovare le coordinate di $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ rispetto a B_3 bisogna calcolare gli scalari $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ che rendono vera la combinazione lineare

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Questo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -3x_1 - 5x_2 = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ -3x_1 - 10x_1 = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{14}{13} \\ x_1 = \frac{7}{13}. \end{cases}$$

Quindi le coordinate di v rispetto a B_3 sono

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{13} \\ x_2 = \frac{14}{13}. \end{cases}$$

Per trovare le coordinate di $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ rispetto a B_4 bisogna calcolare gli scalari $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ che rendono vera la combinazione lineare

$$x_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Questo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ \sqrt{3}x_1 + \sqrt{3}x_1 = -14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{7\sqrt{3}}{3} \\ x_1 = -\frac{7\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Quindi le coordinate di v rispetto a B_4 sono

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = -\frac{7\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

3. Per trovare le coordinate di $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a B_1 bisogna calcolare gli scalari $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ che rendono vera la combinazione lineare

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} + x_3 \\ \frac{8}{3} + x_3 - \frac{1}{3} + x_3 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_3 = -\frac{7}{6} \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Quindi le coordinate di v rispetto a B_1 sono

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{7}{6}. \end{cases}$$

Per trovare le coordinate di $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a B_2 bisogna calcolare gli scalari $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ che rendono vera la combinazione lineare

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} x_3 = 3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} x_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} x_3 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -\sqrt{2} \\ x_3 = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Quindi le coordinate di v rispetto a B_2 sono

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -\sqrt{2} \\ x_3 = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Per trovare le coordinate di $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a B_3 bisogna calcolare gli scalari $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ che rendono vera la combinazione lineare

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 \\ 6 - 2x_3 - \frac{8}{3}x_3 + x_3 = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = \frac{18}{11} \\ x_2 = -\frac{10}{11} \\ x_3 = \frac{15}{11}. \end{cases}$$

Quindi le coordinate di v rispetto a B_3 sono

$$\begin{cases} x_1 = \frac{18}{11} \\ x_2 = -\frac{10}{11} \\ x_3 = \frac{15}{11}. \end{cases}$$

4. Per trovare le coordinate di $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a B_1 bisogna calcolare gli scalari $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ che rendono vera la combinazione lineare

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Questo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_3 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Quindi le coordinate di v rispetto a B_1 sono

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Per trovare le coordinate di $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a B_2 bisogna calcolare gli scalari $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ che rendono vera la combinazione lineare

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Questo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_3 = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x_3 = 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \sqrt{2} \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Quindi le coordinate di v rispetto a B_2 sono

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \sqrt{2} \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Per trovare le coordinate di $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a B_3 bisogna calcolare gli scalari $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ che rendono vera la combinazione lineare

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Questo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = \frac{1-2x_3}{3} \\ -2x_3 + \frac{4-8x_3}{3} + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{11} \\ x_2 = \frac{1}{11} \\ x_3 = \frac{4}{11}. \end{cases}$$

Quindi le coordinate di v rispetto a B_3 sono

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{11} \\ x_2 = \frac{1}{11} \\ x_3 = \frac{4}{11}. \end{cases}$$

Esercizio 7. Dati i seguenti sistemi lineari omogenei, dire a quale spazio vettoriale V appartengono le soluzioni, trovare una base per lo spazio vettoriale W definito da tale sistema (cioè il sottospazio vettoriale W di V generato dalle soluzioni del sistema) e dire quanto vale la dimensione di W.

1. $S : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0; \end{cases}$

2. $S : \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

3. $S : \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_3 - 6x_4 = 0; \end{cases}$

4. $S : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

5. $S : \begin{cases} 3x_1 - x_7 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_6 - 2x_7 = 0. \end{cases}$

Soluzione esercizio 7. Si ricordi che lo spazio vettoriale contenente le soluzioni di un sistema lineare omogeneo è $\mathbb{R}^n$, dove n è il numero di variabili del sistema. Inoltre si ricordi che un sistema lineare omogeneo è sempre compatibile (poiché ammette sempre la soluzione banale, cioè la soluzione in cui tutte le variabili sono uguali a zero), ma non è detto che sia determinato (cioè potrebbe non avere la soluzione banale come unica soluzione). Infatti, poiché i termini noti sono tutti uguali a zero la matrice completa B del sistema ha rango sempre uguale al rango della matrice incompleta A. Quindi, per sapere se il sistema lineare omogeneo ha una o infinite soluzioni (e in quest'ultimo caso per sapere da quanti parametri dipendono) è sufficiente calcolare il rango di A. Infine si ricordi che la dimensione su $\mathbb{R}$ del sottospazio vettoriale W definito dal sistema lineare omogeneo è uguale al numero di parametri da cui dipendono le soluzioni del sistema (quindi se il sistema è determinato si ha che $\dim_{\mathbb{R}} W = 0$ poiché W è lo spazio vettoriale banale composto solo da zero).

1. Poiché S ha 3 variabili si ha che $W \subseteq \mathbb{R}^3$. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

poiché $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -5 \neq 0$, si ha che $\operatorname{rg} A = 2$, quindi S ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Da questo si deduce che $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$. Per determinare W risolviamo il sistema scegliendo x_3 come parametro.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_2 \\ 2x_3 - 2x_2 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5}x_3 \\ x_2 = \frac{2}{5}x_3, \end{cases}$$

e ponendo $x_3 = t$ si ha

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5}t \\ x_2 = \frac{2}{5}t \\ x_3 = t. \end{cases}$$

Quindi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{5}t \\ \frac{2}{5}t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\},$$

e ponendo, ad esempio, $t = 5$ si ottiene $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, e quindi $\{v_1\}$ è una base per W su $\mathbb{R}$ (sappiamo che è sufficiente un solo vettore non nullo poiché la dimensione di W è 1).

2. Poiché S ha 4 variabili si ha che $W \subseteq \mathbb{R}^4$. Sia

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

poiché $\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0$, si ha che $\operatorname{rg} A = 3$, quindi S ha $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. Da questo si deduce che $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$. Per determinare W risolviamo il sistema scegliendo x_2 come parametro.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_2 \\ x_4 = -x_2 + x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_2 \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

e ponendo $x_2 = t$ si ha

$$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = -t \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Quindi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\},$$

e ponendo, ad esempio, $t = -1$ si ottiene $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e quindi $\{v_1\}$ è una base per W su $\mathbb{R}$ (sappiamo che è sufficiente un solo vettore non nullo poiché la dimensione di W è 1).

3. Poiché S ha 4 variabili si ha che $W \subseteq \mathbb{R}^4$. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix},$$

poiché $\det \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, si ha che $\operatorname{rg} A = 2$, quindi S ha $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni. Da questo si deduce che $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$. Per determinare W risolviamo il sistema scegliendo x_1 e x_4 come parametri.

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{5}{2}x_1 \\ x_3 = \frac{6x_4 - x_1}{3} \end{cases},$$

e ponendo $x_1 = t$ e $x_4 = s$ si ha

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \frac{5}{2}t \\ x_3 = \frac{6s-t}{3} \\ x_4 = s. \end{cases}$$

Quindi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{5}{2}t \\ \frac{6s-t}{3} \\ s \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ponendo, ad esempio, $t = 6$ e $s = 0$ si ottiene $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, ponendo invece $t = 0$ e $s = 1$ si ottiene $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per tali scelte di t e s si ha che v_1, v_2 sono linearmente indipendenti e quindi $\{v_1, v_2\}$ è una base per W su $\mathbb{R}$ (sappiamo che sono sufficienti due vettori linearmente indipendenti poiché la dimensione di W è 2).

4. Poiché S ha 5 variabili si ha che $W \subseteq \mathbb{R}^5$. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

poiché $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, si ha che $\operatorname{rg} A = 2$, quindi S ha $\infty^{5-2} = \infty^3$ soluzioni. Da questo si deduce che $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$. Per determinare W risolviamo il sistema scegliendo x_2, x_4 e x_5 come parametri.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_5 - 2x_2 \\ x_3 = -x_4, \end{cases}$$

e ponendo $x_2 = t$, $x_4 = s$ e $x_5 = r$ si ha

$$\begin{cases} x_1 = r - 2t \\ x_2 = t \\ x_3 = -s \\ x_4 = s \\ x_5 = r. \end{cases}$$

Quindi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} r - 2t \\ t \\ -s \\ s \\ r \end{pmatrix}, t, s, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ponendo, ad esempio, $t = 1$, $s = 0$ e $r = 0$ si ottiene $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ponendo invece $t = 0$, $s = 1$ e $r = 0$ si ottiene $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ponendo invece $t = 0$, $s = 0$ e $r = 1$ si ottiene $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per tali scelte di t, s e r si ha che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti e quindi $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base per W su $\mathbb{R}$ (sappiamo che sono sufficienti tre vettori linearmente indipendenti poiché la dimensione di W è 3).

5. Poiché S ha 5 variabili (non importa come vengono denominate) si ha che $W \subseteq \mathbb{R}^5$. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

poiché $\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 6 \neq 0$, si ha che $\operatorname{rg} A = 3$, quindi S ha $\infty^{5-3} = \infty^2$ soluzioni. Da questo si deduce che $\dim_{\mathbb{R}} W = 4$. Per determinare W risolviamo il sistema scegliendo x_1 e x_3 come parametri.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_7 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_6 - 2x_7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_7 = 3x_1 \\ x_2 = -\frac{3}{2}x_3 \\ x_6 = 6x_1 - x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_7 = 3x_1 \\ x_2 = -\frac{3}{2}x_3 \\ x_6 = 5x_1, \end{cases}$$

e ponendo $x_1 = t$ e $x_3 = s$ si ha

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -\frac{3}{2}s \\ x_3 = s \\ x_6 = 5t \\ x_7 = 3t. \end{cases}$$

Quindi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -\frac{3}{2}s \\ s \\ 5t \\ 3t \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ponendo, ad esempio, $t = 1$ e $s = 0$ si ottiene $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, ponendo invece $t=0$ e $s=2$ si ottiene $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per tali scelte di t e s si ha che v_1, v_2 sono linearmente indipendenti e quindi $\{v_1, v_2\}$ è una base per W su $\mathbb{R}$ (sappiamo che sono sufficienti due vettori linearmente indipendenti poiché la dimensione di W è 2).

Esercizio 8. Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ e un suo sottospazio vettoriale W. Trovare il sistema lineare omogeneo che definisce W, trovare una base per W e dire quanto vale $\dim_{\mathbb{R}} W$.

1. $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}, a_1, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$;

2. $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix}, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$;

3. $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ 3a_1 \end{pmatrix}, a_1 \in \mathbb{R} \right\}$;

4. $V = \mathbb{R}^4$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$;

5. $V = \mathbb{R}^4$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 2a_1 - 3a_2 + a_3 \end{pmatrix}, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Soluzione esercizio 8. 1. Poiché $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \\ a_3 \end{pmatrix}, a_1, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$ dipende da due parametri si ha che $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$. Per trovare una base è sufficiente porre $a_1 = 1$ e $a_3 = 0$ ottenendo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e porre $a_1 = 0$ e $a_3 = 1$ ottenendo $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per tali scelte dei parametri si ha che v_1, v_2 sono linearmente indipendenti e poiché W ha dimensione due, esse sono anche una base. Per trovare il sistema lineare omogeneo S che definisce W si pone

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \\ x_2 = a_1 \\ x_3 = a_3, \end{cases}$$

e si tolgono i parametri, sostituendo opportunamente le variabili se possibile. Si ricordi che le equazioni da ottenere sono $\dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} W = 3 - 2 = 1$, Quindi si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \ , \end{cases}$$

cioè il sistema lineare omogeneo che definisce W è

$$S : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \ . \end{cases}$$

2. Poiché $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix}, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$ dipende da due parametri si ha che $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$. Per trovare una base è sufficiente porre $a_1 = 1$ e $a_2 = 0$ ottenendo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e porre $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$ ottenendo $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per tali scelte dei parametri si ha che v_1, v_2 sono linearmente indipendenti e poiché W ha dimensione due, esse sono anche una base. Per trovare il sistema lineare omogeneo S che definisce W si pone

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \\ x_2 = a_2 \\ x_3 = a_1 + a_2, \end{cases}$$

e si tolgono i parametri, sostituendo opportunamente le variabili se possibile. Si ricordi che le equazioni da ottenere sono $\dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} W = 3 - 2 = 1$, Quindi si ottiene

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + x_2, \end{cases}$$

cioè il sistema lineare omogeneo che definisce W è

$$S : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Poiché $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ 3a_1 \end{pmatrix}, a_1 \in \mathbb{R} \right\}$ dipende da un parametro si ha che $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$. Per trovare una base è sufficiente porre $a_1 = 1$ ottenendo

$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Poiché v_1 è non nullo e poiché W ha dimensione uno, v_1 è una base. Per trovare il sistema lineare omogeneo S che definisce W si pone

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = a_1 \\ x_3 = 3a_1, \end{cases}$$

e si tolgono i parametri, sostituendo opportunamente le variabili se possibile. Si ricordi che le equazioni da ottenere sono $\dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} W = 3 - 1 = 2$, Quindi si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 3x_2, \end{cases}$$

cioè il sistema lineare omogeneo che definisce W è

$$S : \begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

4. Poiché $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$ dipende da due parametri si ha che $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$. Per trovare una base è sufficiente porre $a_1 = 1$ e $a_2 = 0$ ottenendo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e porre $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$ ottenendo $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per tali scelte dei parametri si ha che v_1, v_2 sono linearmente indipendenti e poiché W ha dimensione due, esse sono anche una base. Per trovare il sistema lineare omogeneo S che definisce W si pone

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \\ x_2 = a_2 \\ x_3 = a_1 \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

e si tolgono i parametri, sostituendo opportunamente le variabili se possibile. Si ricordi che le equazioni da ottenere sono $\dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} W = 4 - 2 = 2$, Quindi si ottiene

$$\begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_4 = 0 \end{cases},$$

cioè il sistema lineare omogeneo che definisce W è

$$S : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Poiché $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 2a_1 - 3a_2 + a_3 \end{pmatrix}, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$ dipende da tre parametri si ha che $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$. Per trovare una base è sufficiente porre $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ e $a_3 = 0$ ottenendo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, porre $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ e $a_3 = 0$ ottenendo $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ e porre $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ e $a_3 = 1$ ottenendo $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per tali scelte dei parametri si ha che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti e poiché W ha dimensione tre, esse sono anche una base. Per trovare il sistema lineare omogeneo S che definisce W si pone

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \\ x_2 = a_2 \\ x_3 = a_3 \\ x_4 = 2a_1 - 3a_2 + a_3, \end{cases}$$

e si tolgono i parametri, sostituendo opportunamente le variabili se possibile. Si ricordi che le equazioni da ottenere sono $\dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} W = 4 - 3 = 1$, Quindi si ottiene

$$\left\{ x_4 = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \right. ,$$

cioè il sistema lineare omogeneo che definisce W è

$$S : \left\{ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0. \right.$$

Esercizio 9. Dati gli scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}$ e le matrici $A_1, \ldots, A_s \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (cioè matrici con m righe e n colonne), calcolare le combinazioni lineari $\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_s A_s$.

1. $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 5$,
   $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;

2. $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 2$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 10 & 100 & 1000 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

3. $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 4$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 & 4 & -\frac{1}{4} & -4 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 9. 1. Si ha

$$\begin{aligned} &\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \\ &= -3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -6 & -3 & -3 \\ -3 & -18 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 2 & 9 \\ -5 & -10 & -10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Si ha

$$\begin{aligned} &\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \\ &= 1\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 10 & 100 & 1000 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 12 & 14 & 4 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 16 & 18 & 8 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Si ha

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = \\
&= -1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 & 4 & -\frac{1}{4} & -4 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 20 & 0 & -8 & 4 \\ 4 & -4 & 8 & -8 & 0 \\ 12 & 12 & 12 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 16 & -1 & -16 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -4 & 19 & -2 & -11 & 0 \\ 3 & -5 & 7 & -9 & -1 \\ 12 & 11 & 12 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 18 & 2 & -16 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 10. Sia $\mathbb{R}[x]_{<3}$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi a coefficienti reali di grado minore di 3. Trovare una base per tale spazio e calcolarne la dimensione. Infine generalizzare al caso $\mathbb{R}[x]_{<n}$ con $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Soluzione esercizio 10. Una base per $\mathbb{R}[x]_{<3}$ è composta dai polinomi $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ e $p_3(x) = x^2$. Essi sono linearmente indipendenti, infatti

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) = 0 \\
&\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0,
\end{aligned}
$$

per ogni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ se e solo se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Ed è evidente che $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ generano tutto $\mathbb{R}[x]_{<3}$. Infatti dato un polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{<3}$, esso ha la forma $p(x) = ax^2 + bx + c$ per degli unici $a, b, c \in \mathbb{R}$, ma allora basta porre

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= c \\
\alpha_2 &= b \\
\alpha_3 &= a
\end{aligned}
$$

per avere i coefficienti cercati. Quindi $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x]_{<3} = 3$.

In generale, per avere una base per $\mathbb{R}[x]_{<n}$, basta prendere n polinomi della forma $p_k(x) = x^{k-1}$, con $k = 1, \ldots, n$. Essi sono sempre generatori linearmente indipendenti e quindi $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x]_{<n} = n$.