Soluzioni foglio 10

Pietro Mercuri

13 dicembre 2018

Esercizio 1. Determinare la posizione reciproca delle seguenti coppie di figure in $\mathbb{R}^3$. Nel caso di una coppia di rette dire se esse sono incidenti, parallele, coincidenti o sghembe, inoltre se sono incidenti trovare il punto di intersezione e se sono parallele o incidenti trovare il piano che le contiene. Nel caso di una coppia di piani dire se essi sono incidenti, paralleli o coincidenti e, se sono incidenti, trovare un'equazione parametrica della retta intersezione. Nel caso di una coppia formata da una retta e da un piano dire se essi sono incidenti, paralleli o se la retta appartiene al piano e, se sono incidenti, trovare il punto di intersezione.

1. $r_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t_1 \in \mathbb{R},$
   $r_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t_2 \in \mathbb{R};$

2. $r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$
   $\pi : 3x + y + z - 2 = 0;$

3. $\pi_1 : x + y - 3z - 2 = 0,$
   $\pi_2 : 3x + 3y - 9z - 9 = 0;$

4. $r_1 : \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 2 = 0, \end{cases}$
   $r_2 : \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y + z - 2 = 0; \end{cases}$

5. $r_1 : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + z - 3 = 0, \end{cases}$
   $r_2 : \begin{cases} 2x + 2y - 3 = 0 \\ x + z - 2 = 0; \end{cases}$

6. $r_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$

   $r_2 : \begin{cases} x - z + 4 = 0 \\ 2x - y - z + 7 = 0; \end{cases}$

7. $r_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t_1 \in \mathbb{R},$

   $r_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, t_2 \in \mathbb{R};$

8. $r_1 : \begin{cases} 3x - y + z - 1 = 0 \\ 2y - 3z + 2 = 0, \end{cases}$

   $r_2 : \begin{cases} 6x - z = 0 \\ 9x - y - 1 = 0; \end{cases}$

9. $r_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t_1 \in \mathbb{R},$

   $r_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, t_2 \in \mathbb{R};$

10. $\pi_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R},$

    $\pi_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} s_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R};$

11. $\pi_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R},$

    $\pi_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R};$

12. $r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$

    $\pi : x - 2y - z + 6 = 0;$

13. $\pi_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R},$

    $\pi_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} s_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R};$

14. $r_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t_1 \in \mathbb{R},$

    $r_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, t_2 \in \mathbb{R};$

15. $r : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + z - 2 = 0, \end{cases}$

    $\pi : 7x + z - 4 = 0;$

16. $r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$

    $\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$

Soluzione esercizio 1. 1. Il vettore direttore di r_1 è

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

il vettore direttore di r_2 è

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

poiché uno è multiplo dell'altro, infatti $v_2 = 3v_1$, le due rette sono parallele. Delle equazioni cartesiane sono

$$r_1 : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0, \end{cases}$$

e

$$r_2 : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z - 1 = 0, \end{cases}$$

da cui si osserva, ad esempio, che $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \in r_1$ ma $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \notin r_2$ e quindi $r_1 \neq r_2$.

2. Il vettore direttore di r è

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},$$

il vettore di giacitura di π è

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix},$$

poiché sono ortogonali, infatti $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, il piano e la retta sono paralleli. Poiché $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \in r$ ma $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \notin \pi$ si ha che $r \not\subseteq \pi$ e $r \cap \pi = \varnothing$.

3. Il vettore di giacitura di π_1 è

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix},$$

il vettore di giacitura di π_2 è

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix}3\\3\\-9\end{pmatrix},$$

poiché uno è multiplo dell'altro, infatti $v_2 = 3v_1$, i due piani sono paralleli. Poiché $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in \pi_1$ ma $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \notin \pi_2$ si ha che $\pi_1 \neq \pi_2$.

4. Delle equazioni parametriche sono

$$r_1 : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, t_1 \in \mathbb{R},$$

e

$$r_2 : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Quindi il vettore direttore di r_1 è

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e il vettore direttore di r_2 è

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

poiché uno è multiplo dell'altro, infatti $v_2 = -v_1$, le due rette sono parallele. Poiché $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in r_1$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in r_2$ si ha che $r_1 = r_2$.

5. Delle equazioni parametriche sono

$$r_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, t_1 \in \mathbb{R},$$

e

$$r_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Quindi il vettore direttore di r_1 è

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

e il vettore direttore di r_2 è

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

poiché uno è multiplo dell'altro, infatti $v_2 = v_1$, le due rette sono parallele. Poiché $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in r_1$ ma $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \notin r_2$ si ha che $r_1 \neq r_2$.

6. Un'equazione parametrica per r_2 è

$$r_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

Quindi il vettore direttore di r_1 è

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

e il vettore direttore di r_2 è

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

poiché non sono uno multiplo dell'altro, le due rette non sono parallele (né quindi coincidenti). Un'equazione cartesiana per r_1 è

$$r_1 : \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

Cerchiamo l'eventuale intersezione

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \\ x - z + 4 = 0 \\ 2x - y - z + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ z = -x \\ x = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2. \end{cases}$$

Poiché $r_1 \cap r_2 = \{P\}$ con $P \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, le due rette sono incidenti.

7. Il vettore direttore di r_1 è

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

il vettore direttore di r_2 è

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

poiché non sono uno multiplo dell'altro, le due rette non sono parallele (né quindi coincidenti). Delle equazioni cartesiane sono

$$r_1 : \begin{cases} 2x + z - 6 = 0 \\ y - z - 1 = 0, \end{cases}$$

e

$$r_2 : \begin{cases} 2x - z - 2 = 0 \\ y - z - 3 = 0. \end{cases}$$

Cerchiamo l'eventuale intersezione

$$\begin{cases} 2x + z - 6 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{z}{2} \\ y = z + 1 \\ z = 1 \\ -2 = 0. \end{cases}$$

Poiché $r_1 \cap r_2 = \varnothing$, le due rette sono sghembe.

8. Delle equazioni parametriche sono

$$r_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t_1 \in \mathbb{R},$$

e

$$r_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Quindi il vettore direttore di r_1 è

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix},$$

e il vettore direttore di r_2 è

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix},$$

poiché uno è multiplo dell'altro, infatti $v_2 = v_1$, le due rette sono parallele. Poiché $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in r_1$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in r_2$ si ha che $r_1 = r_2$.

9. Il vettore direttore di r_1 è

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e il vettore direttore di r_2 è

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

poiché non sono uno multiplo dell'altro, le due rette non sono parallele (né quindi coincidenti). Delle equazioni cartesiane sono

$$r_1 : \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ z - 2 = 0, \end{cases}$$

e

$$r_2 : \begin{cases} x - 4 = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Cerchiamo l'eventuale intersezione

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ z - 2 = 0 \\ x - 4 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = z \\ z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 2. \end{cases}$$

Poiché $r_1 \cap r_2 = \{P\}$ con $P \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, le due rette sono incidenti.

10. Delle equazioni cartesiane sono

$$\pi_1 : x + y - 3z + 7 = 0,$$

e

$$\pi_2 : x + 7y - 12z - 37 = 0.$$

Il vettore di giacitura di π_1 è

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

il vettore di giacitura di π_2 è

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix},$$

poiché non sono uno multiplo dell'altro, i due piani non sono paralleli (né quindi coincidenti). I due piani sono quindi incidenti la cui intersezione è la retta di equazione cartesiana

$$\pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x + y - 3z + 7 = 0 \\ x + 7y - 12z - 37 = 0. \end{cases}$$

11. Delle equazioni cartesiane sono

$$\pi_1 : 2x - y - z + 5 = 0,$$

e

$$\pi_2 : 2x - y - z + 5 = 0.$$

Il vettore di giacitura di π_1 è

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

il vettore di giacitura di π_2 è

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

poiché uno è multiplo dell'altro, infatti $v_2 = v_1$, i due piani sono paralleli. Poiché $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \pi_1$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \pi_2$ si ha che $\pi_1 = \pi_2$.

12. Il vettore direttore di r è

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

il vettore di giacitura di π è

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

poiché sono ortogonali, infatti $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, il piano e la retta sono paralleli. Poiché $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in r$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \pi$ si ha che $r \subsetneq \pi$.

13. Delle equazioni cartesiane sono

$$\pi_1 : x + z - 3 = 0,$$

e

$$\pi_2 : x + z - 4 = 0.$$

Il vettore di giacitura di π_1 è

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

il vettore di giacitura di π_2 è

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

poiché uno è multiplo dell'altro, infatti $v_2 = v_1$, i due piani sono paralleli. Poiché $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \pi_1$ ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \pi_2$ si ha che $\pi_1 \neq \pi_2$.

14. Il vettore direttore di r_1 è

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

il vettore direttore di r_2 è

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

poiché uno è multiplo dell'altro, infatti $v_2 = -2v_1$, le due rette sono parallele. Delle equazioni cartesiane sono

$$r_1 : \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - z = 0, \end{cases}$$

e

$$r_2 : \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - z = 0, \end{cases}$$

da cui si osserva, ad esempio, che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in r_1$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in r_2$ e quindi $r_1 = r_2$.

15. Un'equazione parametrica per r è

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Quindi il vettore direttore di r è

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix},$$

il vettore di giacitura di π è

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

poiché sono ortogonali, infatti $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, il piano e la retta sono paralleli. Poiché $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in r$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \pi$ si ha che $r \subsetneq \pi$.

16. Un'equazione cartesiana per π è

$$\pi : y - z = 0.$$

Quindi il vettore direttore di r è

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

e il vettore di giacitura di π è

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

poiché non sono ortogonali, infatti $\langle v_1, v_2 \rangle = 5$, il piano e la retta non sono paralleli (né quindi la retta giace sul piano). Essi sono quindi incidenti. Un'equazione cartesiana per r è

$$r : \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 3x + z - 1 = 0, \end{cases}$$

e l'intersezione è

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \\ 3x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = z \\ y = 2x + 1 \\ 3x + 2x + 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1, \end{cases}$$

cioè $r \cap \pi = \{P\}$ con $P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2. Per ogni coppia del precedente esercizio determinare la distanza e l'angolo formato delle due figure date.

Soluzione esercizio 2. 1. Poiché r_1 e r_2 sono parallele e distinte gli angoli formati sono $\alpha = 0$ e $\beta = \pi$. Per calcolare la distanza $d(r_1, r_2)$ si considera un punto di una delle due rette, ad esempio $P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in r_2$, si trova il piano π passante per il punto P e perpendicolare alle rette, cioè $P \in \pi$ e $\pi \perp r_1$. Poi si trova l'intersezione $\{Q\} = \pi \cap r_1$ e si ha che $d(r_1, r_2) = d(P, Q)$ che è l'usuale distanza euclidea tra punti. L'equazione cartesiana generica di un piano è

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Dalla condizione $\pi \perp r_1$ segue che il vettore di giacitura del piano π ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, e quindi un'equazione cartesiana è

$$\pi : x + y + 2z + d = 0.$$

Sostituendo le coordinate del punto P nella precedente equazione si trova che $d = -4$, da cui

$$\pi : x + y + 2z - 4 = 0.$$

Il punto d'intersezione Q ha coordinate

$$\begin{cases} x+y+2z-4=0 \\ x-y+1=0 \\ 2x-z+2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+2z-4=0 \\ y=x+1 \\ z=2x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{6} \\ y=\frac{5}{6} \\ z=\frac{5}{3}, \end{cases}$$

da cui

$$d(r_1,r_2)=d(P,Q)=\sqrt{\left(1+\frac{1}{6}\right)^2+\left(1-\frac{5}{6}\right)^2+\left(1-\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{66}}{6}.$$

2. Poiché r e π sono paralleli l'angolo formato è $\alpha=0$. Per calcolare la distanza $d(r,\pi)$ si considera un punto della retta, ad esempio $P\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, e si calcola $d(r,\pi)=d(P,\pi)$ che è l'usuale distanza punto-piano. Quindi

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|3\cdot 1+2+1-2|}{\sqrt{3^2+1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{11}}=\frac{4\sqrt{11}}{11}.$$

3. Poiché π_1 e π_2 sono paralleli gli angoli formati sono $\alpha=0$ e $\beta=\pi$. Per calcolare la distanza $d(\pi_1,\pi_2)$ si considera un punto di uno dei due piani, ad esempio $P\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\in\pi_1$, e si calcola $d(\pi_1,\pi_2)=d(P,\pi_2)$ che è l'usuale distanza punto-piano. Quindi

$$d(\pi_1,\pi_2)=d(P,\pi_2)=\frac{|3\cdot 1+3\cdot 1-9\cdot 0-9|}{\sqrt{3^2+3^2+(-9)^2}}=\frac{3}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{11}}{11}.$$

4. Poiché $r_1=r_2$ si ha che la distanza è

$$d(r_1,r_2)=0,$$

e gli angoli formati sono $\alpha=0$ e $\beta=\pi$.

5. Poiché r_1 e r_2 sono parallele gli angoli formati sono $\alpha=0$ e $\beta=\pi$. Per calcolare la distanza $d(r_1,r_2)$ si considera un punto di una delle

due rette, ad esempio $P\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} \in r_1$, si trova il piano π passante per il punto P e perpendicolare alle rette, cioè $P \in \pi$ e $\pi \perp r_1$. Poi si trova l'intersezione $\{Q\} = \pi \cap r_1$ e si ha che $d(r_1, r_2) = d(P, Q)$ che è l'usuale distanza euclidea tra punti. L'equazione cartesiana generica di un piano è

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Dalla condizione $\pi \perp r_1$ segue che il vettore di giacitura del piano π ha coordinate $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, e quindi un'equazione cartesiana è

$$\pi : x - y - z + d = 0.$$

Sostituendo le coordinate del punto P nella precedente equazione si trova che $d = 5$, da cui

$$\pi : x - y - z + 5 = 0.$$

Il punto d'intersezione Q ha coordinate

$$\begin{cases} 2x + 2y - 3 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \\ x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = \frac{3}{2} - x \\ z = 2 - x \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 2 \\ z = \frac{5}{2}, \end{cases}$$

da cui

$$d(r_1, r_2) = d(P, Q) = \sqrt{\left(0 + \frac{1}{2}\right)^2 + (2 - 2)^2 + \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. Poiché r_1 e r_2 sono incidenti la distanza è

$$d(r_1, r_2) = 0.$$

Gli angoli formati si trovano calcolando il coseno dell'angolo formato dai vettori direttori

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

e

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

delle rette, quindi

$$\cos\alpha = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\|\|v_2\|} = \frac{1+1-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3},$$

da cui $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$ e $\beta = \pi - \arccos\frac{1}{3} = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

7. Poiché r_1 e r_2 sono sghembe per calcolare la distanza $d(r_1, r_2)$ si trova la retta t (che esiste ed è unica) che è perpendicolare ad entrambe le rette date, si trovano i punti di intersezione $\{Q_1\} = t \cap r_1$ e $\{Q_2\} = t \cap r_2$ e si ha che $d(r_1, r_2) = d(Q_1, Q_2)$ che è l'usuale distanza euclidea tra punti.

   Per trovare un'equazione di t consideriamo i piani perpendicolari alle rette date. I piani perpendicolari a r_1, che ha vettore direttore

   $$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

   hanno equazione cartesiana

   $$x - 2y - 2z + d_1 = 0,$$

   i piani perpendicolari a r_2, che ha vettore direttore

   $$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

   hanno equazione cartesiana

   $$2x + 4y + 4z + d_2 = 0.$$

   La retta t avrà equazione

   $$t : \begin{cases} x - 2y - 2z + d_1 = 0 \\ 2x + 4y + 4z + d_2 = 0, \end{cases}$$

per opportuni (unici) valori di d_1 e d_2. Troviamo tali valori intersecando t prima con r_1 e poi con r_2. Da $t \cap r_1$ si ha il sistema

$$\begin{cases} 2x + z - 6 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \\ x - 2y - 2z + d_1 = 0 \\ 2x + 4y + 4z + d_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - \frac{z}{2} \\ y = z + 1 \\ z = \frac{2}{9}d_1 + \frac{2}{9} \\ z = -\frac{1}{7}d_2 - \frac{10}{7}, \end{cases}$$

che per essere compatibile deve valere

$$\frac{2}{9}d_1 + \frac{2}{9} = -\frac{1}{7}d_2 - \frac{10}{7}.$$

Da $t \cap r_2$ si ha il sistema

$$\begin{cases} 2x - z - 2 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \\ x - 2y - 2z + d_1 = 0 \\ 2x + 4y + 4z + d_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{z}{2} \\ y = z + 3 \\ z = \frac{2}{7}d_1 - \frac{10}{7} \\ z = -\frac{1}{9}d_2 - \frac{14}{9}, \end{cases}$$

che per essere compatibile deve valere

$$\frac{2}{7}d_1 - \frac{10}{7} = -\frac{1}{9}d_2 - \frac{14}{9}.$$

Quindi risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{2}{9}d_1 + \frac{2}{9} = -\frac{1}{7}d_2 - \frac{10}{7} \\ \frac{2}{7}d_1 - \frac{10}{7} = -\frac{1}{9}d_2 - \frac{14}{9}, \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} d_1 = \frac{41}{4} \\ d_2 = -\frac{55}{2}. \end{cases}$$

Sostituendo questi valori nei precedenti sistemi si trovano

$$Q_1 \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix},$$

e

$$Q_2 \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

da cui

$$d(r_1, r_2) = d(Q_1, Q_2) = \sqrt{\left(\frac{7}{4} - \frac{7}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

Gli angoli formati si trovano calcolando il coseno dell'angolo formato dai vettori direttori

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

e

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

delle rette, quindi

$$\cos \alpha = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \|v_2\|} = \frac{2 - 8 - 8}{\sqrt{9}\sqrt{36}} = \frac{-14}{18} = -\frac{7}{9},$$

da cui $\alpha = \arccos\left(-\frac{7}{9}\right)$ e $\beta = \pi - \arccos\left(-\frac{7}{9}\right) = \arccos\left(\frac{7}{9}\right)$.

8. Poiché $r_1 = r_2$ si ha che la distanza è

$$d(r_1, r_2) = 0,$$

e gli angoli formati sono $\alpha = 0$ e $\beta = \pi$.

9. Poiché r_1 e r_2 sono incidenti la distanza è

$$d(r_1, r_2) = 0.$$

Gli angoli formati si trovano calcolando il coseno dell'angolo formato dai vettori direttori

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

delle rette, quindi

$$\cos \alpha = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \|v_2\|} = \frac{0 + 1 + 0}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

da cui $\alpha = \frac{\pi}{3}$ e $\beta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$.

10. Poiché π_1 e π_2 sono incidenti la distanza è

$$d(\pi_1, \pi_2) = 0.$$

Gli angoli formati si trovano calcolando il coseno dell'angolo formato dai vettori di giacitura (cioè i vettori dei coefficienti delle variabili di un'equazione cartesiana)

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

e

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix},$$

delle rette, quindi

$$\cos\alpha = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\|\|v_2\|} = \frac{1+7+36}{\sqrt{11}\sqrt{194}} = \frac{44}{\sqrt{2134}} = \frac{2\sqrt{2134}}{97},$$

da cui $\alpha = \arccos\left(\frac{2\sqrt{2134}}{97}\right)$ e $\beta = \pi - \arccos\left(\frac{2\sqrt{2134}}{97}\right) = \arccos\left(-\frac{2\sqrt{2134}}{97}\right)$.

11. Poiché $\pi_1 = \pi_2$ si ha che la distanza è

$$d(\pi_1, \pi_2) = 0,$$

e gli angoli formati sono $\alpha = 0$ e $\beta = \pi$.

12. Poiché $r \subsetneq \pi$ si ha che la distanza è

$$d(r, \pi) = 0,$$

e l'angolo formato è $\alpha = 0$.

13. Poiché π_1 e π_2 sono paralleli gli angoli formati sono $\alpha = 0$ e $\beta = \pi$. Per calcolare la distanza $d(\pi_1, \pi_2)$ si considera un punto di uno dei due piani, ad esempio $P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \pi_1$, e si calcola $d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2)$ che è l'usuale distanza punto-piano. Quindi

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \frac{|1 + 0 \cdot 2 + 2 - 4|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

14. Poiché $r_1 = r_2$ si ha che la distanza è

$$d(r_1, r_2) = 0,$$

e gli angoli formati sono $\alpha = 0$ e $\beta = \pi$.

15. Poiché $r \subsetneq \pi$ si ha che la distanza è

$$d(r, \pi) = 0,$$

e l'angolo formato è $\alpha = 0$.

16. Poiché r e π sono incidenti la distanza è

$$d(r, \pi) = 0.$$

L'angolo formato si trova calcolando il valore assoluto del seno dell'angolo formato dal vettore di giacitura del piano (cioè il vettore dei coefficienti delle variabili di un'equazione cartesiana)

$$v_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

col vettore direttore della retta

$$v_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

quindi

$$\sin\theta = \frac{|\langle v_1, v_2\rangle|}{\|v_1\|\|v_2\|} = \frac{|0+2+3|}{\sqrt{2}\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{28}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$