

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

ISTRUZIONI

- La prova dura 2 ore e mezza.
- **Ti sono stati consegnati due fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti, in STAMPATELLO leggibile, il tuo cognome, nome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- Le risposte vanno **motivate** brevemente, ma in maniera adeguata e comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno corretti eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & k \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -k & k-2 \end{pmatrix}$, con k parametro reale.

3	
---	--

(a) Determinare il rango di A al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Risposta:

Se $k = 1$, allora $\text{rk}(A) = 2$.

Se $k \neq 1$, allora $\text{rk}(A) = 4$.

3	
---	--

(b) Determinare per quali valori di k la matrice A è invertibile e calcolare esplicitamente l'inversa quando possibile.

Risposta:

Se $k \neq 1$ la matrice A è invertibile e l'inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{k-1} \begin{pmatrix} 2-k & 3 & -2 & -1 \\ 4k-6 & -8 & 6-k & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Siano U e W i sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^5 dati da:

$$U : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5, \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \end{cases} \right\}, \quad W = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

3	
---	--

(a) Calcolare la dimensione e determinare una base (se esiste) dei sottospazi U e W .

Risposta:

$$\dim_{\mathbb{R}}(U) = 3, \quad \dim_{\mathbb{R}}(W) = 3,$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } U, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } W.$$

3	
---	--

(b) Calcolare la dimensione e determinare una base (se esiste) dei sottospazi $U \cap W$ e $U + W$. Inoltre dire se la somma $U + W$ è diretta.

Risposta:

$$\dim_{\mathbb{R}}(U + W) = 5, \quad \dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 1,$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } U + W, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 27 \\ -22 \\ -47 \\ -12 \\ 22 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } U \cap W.$$

La somma non è diretta.

3. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo con matrice rappresentativa, rispetto alla base canonica sia nel dominio che nel codominio, data da $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, con k parametro reale.

3	
---	--

(a) Determinare per quali valori di k l'endomorfismo f è diagonalizzabile.

Risposta:

L'endomorfismo f è diagonalizzabile solo se $k = 0$.

COGNOME.....NOME.....N. MATRICOLA.....

3	
---	--

- (b) Nel caso $k = 0$, dire se f è diagonalizzabile e, in tal caso, trovare una matrice D diagonale e una matrice $M \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$, tali che $D = M^{-1}AM$. Se possibile trovare M ortogonale.

Risposta:

L'endomorfismo f è diagonalizzabile e si ha

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano, siano O', C e P punti di coordinate $O' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $P \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ rispetto a tale riferimento.

4	
---	--

- (a) Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse y' la retta r passante per O' e C orientata da O' verso C e la base $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ equiversa alla base (\mathbf{i}, \mathbf{j}) . Determinare le coordinate di P rispetto a RC' e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$\mathbf{i}' \equiv \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}' \equiv \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

$$C_{RC'}(P) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

4	
---	--

- (b) Sia P' l'immagine del punto P rispetto alla rotazione del piano in senso antiorario di centro C e angolo $\theta = -\frac{2}{3}\pi$. Determinare le coordinate di P' rispetto a RC e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$C_{RC}(P') = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} + 6 \\ 3\sqrt{3} - 2 \end{pmatrix}.$$

5. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento cartesiano dello spazio. Sia P il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e siano π il piano e r la retta di equazioni rispettivamente

$$\pi : x - 2y = 5, \quad r : \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 3x + y + z = -3. \end{cases}$$

2	
---	--

- (a) Determinare l'angolo tra r e π .

Risposta:

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{\sqrt{30}}{6} \right).$$

2	
---	--

- (b) Calcolare la distanza $d(P, r)$.

Risposta:

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{1163729}}{228}.$$

2	
---	--

- (c) Determinare, usando i quaternioni, l'immagine P' del punto P rispetto alla rotazione di angolo $\theta = \frac{2}{3}\pi$ e asse la retta a passante per l'origine O e vettore direttore $\mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, orientata rispetto alle y decrescenti.

Risposta:

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}k,$$

$$C_{RC}(P') = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$