18/07/2018 - Esame di geometria - 6 crediti
Ingegneria informatica - a.a. 2017-2018

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 2 ore e mezza.
- **Ti sono stati consegnati due fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti, in STAMPATELLO leggibile, il tuo cognome, nome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- Le risposte vanno **motivate** brevemente, ma in maniera adeguata e comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno corretti eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ due basi di $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$.

3	

(a) Calcolare la matrice $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ del cambio di coordinate dalla base $\mathcal{B}_1$ alla base $\mathcal{B}_2$.

Risposta:

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 7 & 5 & 2\\ -4 & -3 & -2\end{pmatrix}.$$

2	

(b) Calcolare le coordinate $C_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{v})$ di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_1$ e le coordinate $C_{\mathcal{B}_2}(\mathbf{v})$ di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}_2$.

Risposta:

$$C_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\ 3\\ -\frac{14}{3}\end{pmatrix}, \qquad C_{\mathcal{B}_2}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix}-5\\-6\\7\end{pmatrix}.$$

2	

(c) Sia $V = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{v}\}$. Determinare la dimensione e una base del sottospazio $V^\perp$.

Risposta:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V^\perp) = 2,$$
$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } V^\perp.$$

2. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo dato da:

$$A = A_{f,\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

con k parametro reale ed $\mathcal{E}_4$ base canonica di $\mathbb{R}^4$.

2	

(a) Nel caso $k = 9$, determinare lo spettro σ_f dell'endomorfismo f.

Risposta:

$$\sigma_f = \{1, 2, -3i, 3i\}.$$

2	

(b) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ lo spettro σ_f dell'endomorfismo f ha solo elementi reali.

Risposta:

$$p_f(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2 + k),$$
$$\sigma_f \subseteq \mathbb{R} \text{ per } k \leq 0.$$

2	

(c) Nel caso $k = -9$, determinare se f è diagonalizzabile.

Risposta:
Se $k = -9$ si ha che f ha 4 autovalori distinti e quindi è diagonalizzabile.

4	

(d) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ esistono una matrice D diagonale e una matrice M ortogonale tali che $D = M^{-1}AM$. Per tali k, se esistono, calcolare delle matrici D e M che soddisfino l'uguaglianza indicata.

Risposta:

$$k = -1,$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano e sia P un punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ rispetto a tale riferimento.

4	

(a) Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse x' la retta r con equazione cartesiana $3x+2y+2=0$ orientata rispetto alle y crescenti, la base $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ equiversa alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e O' il punto di coordinate $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto al riferimento RC. Determinare le coordinate di P rispetto a RC' e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$\left\{ \mathbf{i}' = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{3\sqrt{13}}{13} \end{pmatrix}, \mathbf{j}' = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{13}}{13} \\ -\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{pmatrix} \right\},$$
$$C_{RC'}(P) = \begin{pmatrix} -\frac{27\sqrt{13}}{13} \\ \frac{5\sqrt{13}}{13} \end{pmatrix}.$$

4	

(b) Sia C il punto del piano con coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto al riferimento RC. Sia P' l'immagine del punto P rispetto alla rotazione del piano in senso antiorario di centro C e angolo $\theta = \frac{5}{6}\pi$. Determinare le coordinate di P' rispetto a RC e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$
$$C_{RC}(P') = \begin{pmatrix} 4 \\ 3\sqrt{3}+1 \end{pmatrix}.$$

4. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento cartesiano dello spazio. Sia π il piano di equazioni parametriche

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

sia r la retta di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x - 2y + z + 6 = 0 \\ y - 3z - 2 = 0, \end{cases}$$

e sia P il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3	

(a) Determinare la posizione reciproca di r e π e, nel caso siano incidenti, trovare il punto di intersezione.

Risposta:

Sono incidenti e il punto di intersezione è $H \begin{pmatrix} -\frac{43}{9} \\ \frac{3}{9} \\ -\frac{5}{9} \end{pmatrix}$.

2	

(b) Calcolare l'ampiezza dell'angolo formato dalla retta r e il piano π e la distanza $d(r, \pi)$.

Risposta:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{35}}{35}\right),$$
$$d(r, \pi) = 0.$$

2	

(c) Determinare, usando i quaternioni, l'immagine P' del punto P rispetto alla rotazione di angolo $\theta = \frac{4}{3}\pi$ e asse la retta a di equazioni parametriche

$$a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

orientata rispetto alle y crescenti.

Risposta:

$$q = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k,$$
$$C_{RC}(P') = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$