24/01/2019 - Esame di geometria - 6 crediti
Ingegneria informatica - a.a. 2018-2019

COGNOME..........................NOME..........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 2 ore e mezza.
- **Ti sono stati consegnati due fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti, in STAMPATELLO leggibile, il tuo cognome, nome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- Le risposte vanno **motivate** brevemente, ma in maniera adeguata e comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno corretti eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia $\Sigma : A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ il sistema lineare dato da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 2 & -1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \\ -1 \end{pmatrix},$$

con k parametro reale.

3	

(a) Determinare il numero di soluzioni di Σ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Risposta:
Se $k = 0$, il sistema non ha soluzioni.
Se $k \neq 0$, il sistema ha 1 soluzione.

2	

(b) Nel caso $k = 2$, determinare se la matrice A è invertibile. Se A è invertibile calcolare la matrice inversa A^{-1} e (se possibile) il prodotto $A^{-1}\mathbf{b}$.

Risposta:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 3 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3	

(c) Sia Σ_0 il sistema lineare omogeneo associato a Σ e sia $S = \mathrm{Sol}(\Sigma_0)$ lo spazio delle soluzioni di Σ_0. Determinare i valori di k tali che $\dim_{\mathbb{R}}(S) = 1$ e, in tali casi, trovare una base per S.

Risposta:

Solo per $k = 0$ e una base di S è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

2. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare data da:

$$A = A_{f,\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & k+2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & k-1 & 3 \end{pmatrix},$$

con k parametro reale e $\mathcal{E}_4$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

2	

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f ha autovalori complessi.

Risposta:
Il polinomio caratteristico di f è

$$p_f(\lambda) = (1-\lambda)^2(\lambda^2 - 6\lambda + 6 + 3k),$$

quindi f ha autovalori complessi per $k > 1$.

4	

(b) Nel caso $k = -2$, determinare se l'endomorfismo f è diagonalizzabile. Se lo è, trovare una matrice D diagonale e una matrice M invertibile tali che $D = M^{-1}AM$. Se possibile, trovare M ortogonale.

Risposta:
Se $k = -2$, l'endomorfismo f è diagonalizzabile e si ha

$$\sigma_f = \{0, 1, 6\}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

COGNOME......................NOME......................N. MATRICOLA...........

2	

(c) Nel caso $k = -26$, determinare se l'endomorfismo f è diagonalizzabile.

Risposta:
Se $k = -26$, l'endomorfismo f non è diagonalizzabile poiché $m_a(1) = 2 > 1 = m_g(1)$. Lo spettro è $\sigma_f = \{-6, 1, 12\}$.

3	

(d) Nel caso $k = -2$, calcolare la dimensione e trovare una base dell'immagine e del nucleo di f. Inoltre, dire se f è inietiiva, suriettiva e/o biiettiva.

Risposta:
Se $k = -2$, allora $\det(A) = 0$, quindi l'endomorfismo f non è né iniettivo, né suriettivo, né biiettivo. Si ha che $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f) = \mathrm{rk}\, A = 3$ e una base di $\mathrm{Im} f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$.

Si ha che $\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 4 - 3 = 1$ e una base di $\ker f = E(0)$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano e sia P un punto di coordinate $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto a tale riferimento. Sia r la retta di equazioni parametriche $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

4	

(a) Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse y' la retta r orientata rispetto alle y crescenti, la base $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ equiversa alla base $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ e O' il punto di intersezione di r con la retta s perpendicolare a r e passante per O. Determinare le coordinate di P rispetto a RC' e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$\left(\mathbf{i}' \equiv \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \mathbf{j}' \equiv \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \right),$$

$$C_{RC'}(P) = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

4 (b) Sia C il punto del piano con coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ rispetto a RC. Sia P' l'immagine del punto P rispetto alla rotazione del piano in senso antiorario di centro C e angolo $\theta = \frac{4}{3}\pi$. Determinare le coordinate di P' rispetto a RC e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$
$$C_{RC}(P') = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{3}+7}{2} \\ \frac{5\sqrt{3}-8}{2} \end{pmatrix}.$$

4. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento cartesiano dello spazio. Sia r la retta di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3y - z = -1, \end{cases}$$

e sia P il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3 (a) Calcolare la distanza $d(P, r)$.

Risposta:

$$\pi \colon 2x - y - 3z - 9 = 0,$$
$$H \begin{pmatrix} \frac{17}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{pmatrix}, \text{ con } \{H\} = r \cap \pi,$$
$$d(P, r) = d(P, H) = \frac{\sqrt{630}}{7}.$$

2 (b) Determinare, usando i quaternioni, l'immagine P' del punto P rispetto alla rotazione di angolo $\theta = \frac{3}{2}\pi$ e asse la retta a passante per l'origine O con l'orientazione data dal vettore direttore $\mathbf{v}_a \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Risposta:

$$q = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j,$$
$$C_{RC}(P') = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(1+\sqrt{2}) \\ \frac{3}{2}(1-\sqrt{2}) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$