Soluzioni foglio 1

Pietro Mercuri

4 ottobre 2018

Esercizio 1. Data la matrice A, stabilirne le dimensioni (cioè il numero di righe e il numero di colonne), calcolare la trasposta A^T e dire se A è quadrata, diagonale, triangolare (specificare se superiore o inferiore) e simmetrica.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
5. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;
7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
8. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

10. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

11. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

12. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

13. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

14. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$;

15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

16. $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione esercizio 1. Si ricordi che:

- una matrice è quadrata se il numero di righe è uguale al numero di colonne;
- una matrice è diagonale se è quadrata e tutti gli elementi che non sono sulla diagonale principale (cioè la diagonale di elementi che parte da in alto a sinistra e finisce in basso a destra) sono uguali a 0 (in particolare una matrice diagonale è una matrice che è sia triangolare superiore che triangolare inferiore);

- una matrice è triangolare superiore se è quadrata e tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli;
- una matrice è triangolare inferiore se è quadrata e tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale sono nulli;
- una matrice è simmetrica se è quadrata ed è uguale alla sua trasposta, cioè se $A^T = A$.

1. Si ha che A è una matrice 2×3 e ha trasposta
$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
La matrice A inoltre non è quadrata, quindi né diagonale, né triangolare, né simmetrica;

2. Si ha che A è una matrice 3×3 e ha trasposta
$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
La matrice A inoltre è quadrata e triangolare inferiore, ma non diagonale e non è simmetrica;

3. Si ha che A è una matrice 3×3 e ha trasposta
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
La matrice A inoltre è quadrata e simmetrica, ma non è diagonale né triangolare;

4. Si ha che A è una matrice 2×2 e ha trasposta
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
La matrice A inoltre è quadrata e diagonale e quindi anche simmetrica, triangolare inferiore e triangolare superiore;

5. Si ha che A è una matrice 4×1 (cioè è un vettore colonna) e ha trasposta
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A inoltre non è quadrata, quindi né diagonale, né triangolare, né simmetrica;

6. Si ha che A è una matrice 4×3 e ha trasposta
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
La matrice A inoltre non è quadrata, quindi né diagonale, né triangolare, né simmetrica;

7. Si ha che A è una matrice 3×3 e ha trasposta
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
La matrice A inoltre è quadrata e triangolare superiore, ma non simmetrica né diagonale;

8. Si ha che A è una matrice 1×3 (cioè è un vettore riga) e ha trasposta
$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
La matrice A inoltre non è quadrata, quindi né diagonale, né triangolare, né simmetrica;

9. Si ha che A è una matrice 4×4 e ha trasposta
$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
La matrice A inoltre è quadrata, ma non è diagonale, né triangolare, né simmetrica;

10. Si ha che A è una matrice 4×4 e ha trasposta
$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
La matrice A inoltre è quadrata e diagonale e quindi anche simmetrica, triangolare inferiore e triangolare superiore;

11. Si ha che A è una matrice 2×2 e ha trasposta

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A inoltre è quadrata, ma non è diagonale, né triangolare, né simmetrica;

12. Si ha che A è una matrice 4×4 e ha trasposta

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A inoltre è quadrata e simmetrica, ma non è diagonale, né triangolare;

13. Si ha che A è una matrice 4×4 e ha trasposta

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A inoltre è quadrata e triangolare superiore, ma non è diagonale, né simmetrica;

14. Si ha che A è una matrice 2×2 e ha trasposta

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

La matrice A inoltre è quadrata e diagonale e quindi anche simmetrica, triangolare inferiore e triangolare superiore;

15. Si ha che A è una matrice 4×5 e ha trasposta

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice A inoltre non è quadrata, quindi né diagonale, né triangolare, né simmetrica;

16. Si ha che A è una matrice 5×5 e ha trasposta

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A inoltre è quadrata, ma non è diagonale, né triangolare, né simmetrica.

Esercizio 2. Date le matrici A e B calcolare, quando possibile, il prodotto matriciale AB e il prodotto matriciale BA.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$;
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
4. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$;
6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 7 & 15 & -3 \end{pmatrix}$.

Soluzione esercizio 2. 1. Si ha

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2(-1) & 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3(-1) & 3 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 + 1 - 2 & 5 + 0 + 6 \\ 0 + 1 - 3 & 15 + 0 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ -2 & 24 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 5 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & -1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & -1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 + 15 & 0 + 5 & 0 + 15 \\ 1 + 0 & 1 + 0 & 2 + 0 \\ -1 + 9 & -1 + 3 & -2 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 15 \\ 1 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 7 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

2. Si ha

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1(-2) + 2 \cdot \frac{3}{2} & 1 \cdot 1 + 2(-\frac{1}{2}) \\ 3(-2) + 4 \cdot \frac{3}{2} & 3 \cdot 1 + 4(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -2 + 3 & 1 - 1 \\ -6 + 6 & 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & -2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 & \frac{3}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -2 + 3 & -4 + 4 \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2} & 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

3. Si ha

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 5 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 5 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 3 + 0 + 0 & 6 + 0 + 0 & 15 + 0 + 0 & 3 + 0 + 0 \\ 0 + 15 + 0 & 0 + 9 + 0 & 0 + 15 + 0 & 0 + 6 + 0 \\ 0 + 0 + 3 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 3 & 0 + 0 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 & 3 \\ 15 & 9 & 15 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Si ha che BA non è calcolabile.

4. Si ha

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & -1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & -1 \cdot 5 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 5 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + 0 + 0 & -2 + 0 + 0 & -5 + 0 + 0 & -1 + 0 + 0 \\ 0 + 10 + 0 & 0 + 6 + 0 & 0 + 10 + 0 & 0 + 4 + 0 \\ 0 + 0 + 3 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 3 & 0 + 0 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -5 & -1 \\ 10 & 6 & 10 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si ha che BA non è calcolabile.

5. Si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 + 3 + 0 + 2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 & 0 \cdot 3 & 0 \cdot 5 & 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 & 0 \cdot 3 & 0 \cdot 5 & 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 10 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 10 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 7 & 15 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0+3-4+0 & 0+3+2+0 & 0+9-6+0 & 0+3+0+0 \\ 0+1-2+0 & 0+1+1+0 & 0+3-3+0 & 0+1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha che BA non è calcolabile.

Esercizio 3. Calcolare i determinanti delle seguenti matrici 2×2.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;
3. $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;
4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;
5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$;
7. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$;
8. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{6} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$;
9. $A = \begin{pmatrix} 1 & \pi \sqrt[3]{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Soluzione esercizio 3. Si ricordi che, data una matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

il suo determinante è

$$\det A = ad - bc.$$

1. $\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 0 \cdot 6 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = 0;$

2. $\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 6 - 5 = 1;$

3. $\det A = \det \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -3 \cdot 2 - 5(-1) = -6 + 5 = -1;$

4. $\det A = \det \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 5 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 10 - 0 = 10;$

5. $\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 - 5 \cdot 2 = 0 - 10 = -10;$

6. $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 6 - 6 \cdot 1 = 6 - 6 = 0;$

7. $\det A = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 1 - 3 = -2;$

8. $\det A = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{6} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{7}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6} - \frac{7}{6} = -1;$

9. $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & \pi\sqrt[3]{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - \pi\sqrt[3]{2} \cdot 0 = 2 - 0 = 2.$

Esercizio 4. Data la matrice A, calcolare il suo determinante $\det A$.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$

5. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 5 & -5 \\ 0 & \frac{2}{3} & 5 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix};$

6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

8. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

9. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione esercizio 4.

1. Poiché la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
è triangolare inferiore, il determinante è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale principale. Quindi $\det A = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$.

2. Poiché la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
ha la prima e la terza riga uguali si ha che $\det A = 0$.

3. Poiché la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
è triangolare superiore, il determinante è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale principale. Quindi $\det A = 1 \cdot 5 \cdot (-1) = -5$.

4. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$
sviluppiamo lungo la seconda riga. Si ha
$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{2+1} \cdot 2 \det \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \\ &+ (-1)^{2+3} \cdot 2 \det \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -2(-4(-1) - 3(-1)) + \\ &+ 5(1(-1) - 3(-1)) - 2(1(-1) - (-4)(-1)) = \\ &= -2(4+3) + 5(-1+3) - 2(-1-4) = -14 + 10 + 10 = 6. \end{aligned}$$

5. Poiché la matrice
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 5 & -5 \\ 0 & \frac{2}{3} & 5 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$
è triangolare superiore, il determinante è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale principale. Quindi $\det A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

6. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
sviluppiamo lungo la terza riga. Si ha
$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{3+1} \cdot 0 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ (-1)^{3+3} \cdot 0 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot 1 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= -\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Calcoliamo il determinante di questa matrice 3×3 sviluppando lungo la seconda riga
$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 0 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ (-1)^{2+3} \cdot 1 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = -(3 \cdot 0 - 1 \cdot 8) = 8.$$

Quindi si ha che

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -8.$$

7. Poiché la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è diagonale, il determinante è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale principale. Quindi $\det A = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -6$.

8. Sia

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sviluppando lungo la quarta colonna si ha

$$\det A = (-1)^{1+4} \cdot 0 \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 0 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+4} \cdot 0 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il determinante di questa matrice 3×3 sviluppando lungo la seconda riga

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 0 \det \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+3} \cdot 0 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = -(-1(-1) - 6 \cdot 6) = 35.$$

Quindi si ha che

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -35.$$

9. Poiché la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
ha la prima e la quarta riga uguali si ha che $\det A = 0$.

10. Poiché la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
ha la prima e la quinta colonna uguali si ha che $\det A = 0$.

Esercizio 5. Data la matrice A, calcolare (se esiste) la matrice inversa A^{-1} e verificare che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, dove I è la matrice identità (cioè la matrice quadrata diagonale con tutti 1 sulla diagonale principale).

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

2. $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$;

4. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$;

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$;

9. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione esercizio 5. Si ricordi che una matrice quadrata è invertibile (cioè esiste l'inversa) se e solo se ha determinante non zero. In questo caso si dice anche che la matrice è non singolare.

Si ricordi anche che se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è una matrice 2×2 con determinante non nullo, l'inversa è $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

In generale l'inversa di una matrice A è $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{adj}$, dove A^{adj} è la matrice aggiunta di A. Si ricordi che $A^{adj} = (A^{alg})^T$, dove A^{alg} è la matrice dei complementi algebrici di A (detta anche matrice dei cofattori di A).

1. Si ha che $\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3-12 = -9 \neq 0$, quindi A è invertibile. L'inversa è
$$A^{-1} = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. Si ha che $\det A = \det \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -3 + 12 = 9 \neq 0$, quindi A è invertibile. L'inversa è
$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

3. Si ha che $\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$, quindi A non è invertibile.

4. Si ha che $\det A = \det \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, quindi A è invertibile. L'inversa è
$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Si ha che $\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = -30 \neq 0$, quindi A è invertibile.

La matrice dei complementi algebrici è

$$A^{alg} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix} & (-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix} & (-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \\ (-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix} & (-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix} & (-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \\ (-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix} & (-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & (-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{-30}\begin{pmatrix} -10 & 0 & 0\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

6. Si ha che $\det A = \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix} = 6+0+0-6-0-1 = -1 \neq 0$,
quindi A è invertibile. La matrice dei complementi algebrici è

$$A^{alg} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} & (-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix} & (-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix} \\ (-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} & (-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix} & (-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix} \\ (-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} & (-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} & (-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2\\ 3 & 0 & -1\\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2\\ -3 & 0 & 1\\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Si ha che $\det A = \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} = -6 \neq 0$, quindi A è invertibile.

La matrice dei complementi algebrici è

$$A^{alg} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix} & (-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix} & (-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ (-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix} & (-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix} & (-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ (-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix} & (-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix} & (-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -6 & 4 & 1\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

8. Si ha che $\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} = 45+60+48-75-72-42 = 0,$

   quindi A non è invertibile.

9. Si ha che $\det A = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0+0+2-0-0-0 = 2 \neq 0,$

   quindi A è invertibile. La matrice dei complementi algebrici è

$$A^{alg} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix} & (-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & (-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\\ (-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} & (-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} & (-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\\ (-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} & (-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} & (-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Quindi la matrice inversa è

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Calcolare il rango delle seguenti matrici utilizzando l'algoritmo di Gauss.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$;

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

7. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

8. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

9. $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione esercizio 6. Si ricordi che il rango è il numero di righe (o colonne) linearmente indipendenti e corrisponde al numero di pivot ottenuti con l'algoritmo di Gauss.

1. Applichiamo l'algoritmo di Gauss
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\underset{R_2\leftrightarrow R_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\underset{\substack{R_2\mapsto R_2-R_1\\R_3\mapsto R_3-R_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$
quindi la matrice ha rango 2.

2. Applichiamo l'algoritmo dii Gauss
$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\underset{R_3\mapsto R_3-R_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
quindi la matrice ha rango 2.

3. La matrice è già a gradini e ha rango 3.

4. Applichiamo l'algoritmo di Gauss
$$A=\begin{pmatrix}1&-2&-\sqrt{2}\\0&0&0\\-1&2&\sqrt{2}\end{pmatrix}\underset{R_2\leftrightarrow R_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&-\sqrt{2}\\-1&2&\sqrt{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\underset{R_2\mapsto R_2+R_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&-2&-\sqrt{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
quindi la matrice ha rango 1.

5. Applichiamo l'algoritmo di Gauss
$$A=\begin{pmatrix}3&1&0&1\\2&0&-1&0\\1&1&1&1\\4&2&1&2\end{pmatrix}\underset{R_1\leftrightarrow R_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&0&-1&0\\3&1&0&1\\4&2&1&2\end{pmatrix}\underset{\substack{R_2\mapsto R_2-2R_1\\R_3\mapsto R_3-3R_1\\R_4\mapsto R_4-4R_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-2&-3&-2\\0&-2&-3&-2\\0&-2&-3&-2\end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{R_2\mapsto -\frac{1}{2}R_2\\R_3\mapsto R_3-R_2\\R_4\mapsto R_4-R_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&\frac{3}{2}&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$
quindi la matrice ha rango 2.

6. Applichiamo l'algoritmo di Gauss
$$A=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\6&2&0&0\\0&0&1&2\\0&0&2&-1\end{pmatrix}\underset{\substack{R_1\mapsto\frac{1}{3}R_1\\R_2\mapsto R_2-2R_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&2\\0&0&2&-1\end{pmatrix}\underset{R_2\leftrightarrow R_4}{\sim}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&2&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\underset{R_3\mapsto R_3-\frac{1}{2}R_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&2&-1\\0&0&0&\frac{5}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$
quindi la matrice ha rango 3.

7. Applichiamo l'algoritmo di Gauss

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{R_3 \mapsto R_3 + 6R_1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

quindi la matrice ha rango 4.

8. Applichiamo l'algoritmo di Gauss

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_4 \mapsto R_4 - R_1}}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi la matrice ha rango 3.

9. Applichiamo l'algoritmo di Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_1 \leftrightarrow R_4 \\ R_2 \leftrightarrow R_5}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_4 \mapsto R_4 - 7R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{R_4 \mapsto R_4 + \frac{7}{2}R_3 \\ R_5 \mapsto R_5 - \frac{1}{2}R_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi la matrice ha rango 3.

Esercizio 7. Calcolare il rango delle seguenti matrici utilizzando il metodo dei minori.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$;

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

7. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

8. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

9. $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione esercizio 7. 1. Poiché la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è 3×3 e non è la matrice nulla (cioè con tutti gli elementi uguali a 0) sappiamo che $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 3$. Dall'esercizio 1 sappiamo che $\det A = 0$ quindi $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 2$. Quindi se troviamo un minore 2×2 con determinante non nullo avremo che $\operatorname{rg} A = 2$, se invece tutti i minori 2×2 hanno determinante nullo, allora $\operatorname{rg} A = 1$. Ma si osserva immediatamente che prendendo il minore che si ottiene scegliendo la seconda e la terza riga e la prima e la seconda colonna si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

Dunque $\operatorname{rg} A = 2$.

2. Poiché la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
è 3×3 e non è la matrice nulla (cioè con tutti gli elementi uguali a 0) sappiamo che $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 3$. Dall'esercizio 1 sappiamo che $\det A = 0$ quindi $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 2$. Quindi se troviamo un minore 2×2 con determinante non nullo avremo che $\operatorname{rg} A = 2$, se invece tutti i minori 2×2 hanno determinante nullo, allora $\operatorname{rg} A = 1$. Ma si osserva immediatamente che prendendo il minore che si ottiene scegliendo la prima e la seconda riga e la prima e la seconda colonna si ha
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0.$$
Dunque $\operatorname{rg} A = 2$.

3. Poiché la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
è 3×3 e non è la matrice nulla (cioè con tutti gli elementi uguali a 0) sappiamo che $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 3$. Dall'esercizio 1 sappiamo che $\det A \neq 0$ quindi $\operatorname{rg} A = 3$.

4. Poiché la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$
è 3×3 e non è la matrice nulla (cioè con tutti gli elementi uguali a 0) sappiamo che $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 3$. Poiché la seconda riga è nulla sappiamo che $\det A = 0$ quindi $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 2$. Quindi se troviamo un minore 2×2 con determinante non nullo avremo che $\operatorname{rg} A = 2$, se invece tutti i minori 2×2 hanno determinante nullo, allora $\operatorname{rg} A = 1$. Prendendo il minore 1×1 ottenuto scegliendo la prima riga e la prima colonna si ha che $\det \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$. Per il teorema dell'orlando è sufficiente controllare se i minori 2×2 che contengono il minore 1×1 scelto hanno determinante

nullo. Quindi si ha

$$\det\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix} = 1\cdot 2 - (-2)(-1) = 2 - 2 = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2}\\ -1 & \sqrt{2}\end{pmatrix} = 1\cdot\sqrt{2} - (-\sqrt{2})(-1) = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0.$$

Quindi per il teorema dell'orlando tutti i minori 2×2 hanno determinante nullo e dunque $\operatorname{rg} A = 1$.

5. Poiché la matrice

$$A = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

è 4×4 e non è la matrice nulla (cioè con tutti gli elementi uguali a 0) sappiamo che $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 4$. Poiché la seconda e la quarta colonna sono uguali, sappiamo che $\det A = 0$ e quindi che $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 3$. Si osserva immediatamente che prendendo il minore che si ottiene scegliendo la prima e la seconda riga e la prima e la seconda colonna si ha

$$\det\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} = 3\cdot 0 - 1\cdot 2 = -2 \neq 0.$$

Dunque $2 \leq \operatorname{rg} A \leq 3$. Per il teorema dell'orlando è sufficiente controllare se i minori 3×3 che contengono il minore 2×2 scelto hanno determinante nullo. Quindi, utilizzando la regola di Sarrus, si ha che

$$\det\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = 0 - 1 + 0 - 0 - 2 + 3 = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = 0 + 0 + 2 - 0 - 2 - 0 = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix} = 0 - 4 + 0 - 0 - 2 + 6 = 0,$$

$$\det\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 2\end{pmatrix} = 0 + 0 + 4 - 0 - 4 - 0 = 0.$$

Quindi per il teorema dell'orlando tutti i minori 3×3 hanno determinante nullo e dunque $\operatorname{rg} A = 2$.

6. Poiché la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
è 4×4 e non è la matrice nulla (cioè con tutti gli elementi uguali a 0) sappiamo che $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 4$. Calcolando il determinante di A si ottiene che $\det A = 0$, quindi $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 3$. Si osserva immediatamente che prendendo il minore che si ottiene scegliendo la terza e la quarta riga e la terza e la quarta colonna si ha
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1(-1) - 2 \cdot 2 = -5 \neq 0.$$
Dunque $2 \leq \operatorname{rg} A \leq 3$. Per il teorema dell'orlando è sufficiente controllare se i minori 3×3 che contengono il minore 2×2 scelto hanno determinante nullo. Quindi, utilizzando la regola di Sarrus, si ha che
$$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -3 + 0 + 0 - 0 - 0 - 12 = -16 \neq 0.$$
Quindi, poiché abbiamo trovato un minore 3×3 con determinante non nullo si ha che $\operatorname{rg} A = 3$.

7. Poiché la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
è 4×4 e non è la matrice nulla (cioè con tutti gli elementi uguali a 0) sappiamo che $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 4$. Dall'esercizio 1 sappiamo che $\det A \neq 0$ quindi $\operatorname{rg} A = 4$.

8. Poiché la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
è 4×4 e non è la matrice nulla (cioè con tutti gli elementi uguali a 0) sappiamo che $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 4$. Dall'esercizio 1 sappiamo che $\det A = 0$

quindi $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 3$. Si osserva immediatamente che prendendo il minore che si ottiene scegliendo la terza e la quarta riga e la prima e la seconda colonna si ha

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 - 1(-2) = 2 \neq 0.$$

Dunque $2 \leq \operatorname{rg} A \leq 3$. Per il teorema dell'orlando è sufficiente controllare se i minori 3×3 che contengono il minore 2×2 scelto hanno determinante nullo. Quindi si ha, utilizzando la regola di Sarrus, che

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 4 + 0 + 0 - 4 - 0 - 0 = 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 + 2 - 0 - 0 = 2 \neq 0.$$

Quindi, poiché abbiamo trovato un minore 3×3 con determinante non nullo si ha che $\operatorname{rg} A = 3$.

9. Poiché la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è 5×5 e non è la matrice nulla (cioè con tutti gli elementi uguali a 0) sappiamo che $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 5$. Dall'esercizio 1 sappiamo che $\det A = 0$ quindi $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 4$. Si osserva immediatamente che prendendo il minore che si ottiene scegliendo la quarta e la quinta riga e la prima e la seconda colonna si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

Dunque $2 \leq \operatorname{rg} A \leq 4$. Per il teorema dell'orlando è sufficiente controllare se i minori 3×3 che contengono il minore 2×2 scelto hanno determinante nullo e che quelli 4×4, che contengono quelli 3×3 ottenuti, hanno determinante nullo. Quindi, utilizzando la regola di Sarrus, si ha che

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 7 - 0 = -7 \neq 0.$$

Quindi, poiché abbiamo trovato un minore 3×3 con determinante non nullo, si ha che $3 \leq \operatorname{rg} A \leq 4$ e per il teorema dell'orlando è sufficiente controllare se i minori 4×4 che contengono il minore 3×3 scelto hanno determinante nullo. Quindi, poiché ci sono sempre due colonne uguali, si ha che

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Quindi per il teorema dell'orlando tutti i minori 4×4 hanno determinante nullo e dunque $\operatorname{rg} A = 3$.

Esercizio 8. Discutere, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il rango delle seguenti matrici.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & k \end{pmatrix}$;

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2k & k-1 \end{pmatrix}$;

3. $A = \begin{pmatrix} (k-1)k & (k-1)(k+1) \\ (k-1)^2 & (k-1)(k-2) \end{pmatrix}$;

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ k & k & k \end{pmatrix}$;

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 2 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$;

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ k & k-1 & k+1 \end{pmatrix}$;

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & k & k \\ k+2 & k & k(k-1) \end{pmatrix}$;

8. $A = \begin{pmatrix} k-1 & k-1 & 2 \\ 1 & k & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione esercizio 8.

1. Si ha che $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & k \end{pmatrix} = k - 2k = -k$. Studiamo dunque l'equazione

$$-k = 0.$$

Essa ha come unica soluzione

$$k = 0,$$

da questo, e dal fatto che la matrice A ha un elemento $1 \neq 0$, si deduce che se $k \neq 0$ allora $\operatorname{rg} A = 2$, altrimenti, se $k = 0$, si ha che $\operatorname{rg} A = 1$ (non è zero poiché esiste almeno un minore di ordine uno il cui determinante è non nullo).

2. Si ha che $\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2k & k-1 \end{pmatrix} = k - 1 - 6k = -5k - 1$. Studiamo dunque l'equazione

$$-5k - 1 = 0.$$

Essa ha come unica soluzione

$$k = -\frac{1}{5},$$

da questo, e dal fatto che la matrice A ha un elemento $1 \neq 0$, si deduce che se $k \neq -\frac{1}{5}$ allora $\operatorname{rg} A = 2$, altrimenti, se $k = -\frac{1}{5}$, si ha che $\operatorname{rg} A = 1$ (non è zero poiché esiste almeno un minore di ordine uno il cui determinante è non nullo).

3. Si ha che

$$\begin{aligned} \det A = \det \begin{pmatrix} (k-1)k & (k-1)(k+1) \\ (k-1)^2 & (k-1)(k-2) \end{pmatrix} &= \\ = k(k-1)^2(k-2) - (k-1)^3(k+1) &= \\ = (k-1)^2(k^2 - 2k - k^2 + 1) = (k-1)^2(1-2k).& \end{aligned}$$

Studiamo dunque l'equazione

$$(k-1)^2(1-2k) = 0.$$

Essa ha soluzioni

$$k = 1$$
$$k = \frac{1}{2}.$$

Da questo si deduce che se $k \neq \frac{1}{2} \wedge k \neq 1$ allora $\operatorname{rg} A = 2$. Se $k = \frac{1}{2}$, si ha che

$$A = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2}-1)\frac{1}{2} & (\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}+1) \\ (\frac{1}{2}-1)^2 & (\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

e quindi si deduce che $\operatorname{rg} A = 1$ (non è zero poiché esiste almeno un minore di ordine uno il cui determinante è non nullo e non è due perché per $k = \frac{1}{2}$ si ha che $\det A = 0$). Infine se $k = 1$ si ha che

$$A = \begin{pmatrix} (1-1)1 & (1-1)(1+1) \\ (1-1)^2 & (1-1)(1-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi si deduce che $\operatorname{rg} A = 0$.

4. Si ha che

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ k & k & k \end{pmatrix} =$$
$$= 2k + 2k + 2k - 2k - 2k - 2k = 0.$$

Da questo si deduce che $1 \leq \operatorname{rg} A < 3$ per ogni $k \in \mathbb{R}$ (non è zero poiché esiste almeno un minore di ordine uno il cui determinante è non nullo, per esmepio l'elemento in alto a sinistra $1 \neq 0$). Calcolando i determinanti dei minori 2×2 che contengono il minore di ordine uno precedentemente scelto (essi saranno tutti zero) e applicando il teorema dell'orlando si conclude che $\operatorname{rg} A = 1$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

5. Si ha che

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 2 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= 2 + 0 + k^2 - 0 - k^2 - k^2 = 2 - k^2.$$

Studiamo dunque l'equazione

$$2 - k^2 = 0.$$

Essa ha soluzioni

$$k = -\sqrt{2}$$
$$k = \sqrt{2}.$$

da questo si deduce che se $k \neq -\sqrt{2} \wedge k \neq \sqrt{2}$ allora $\operatorname{rg} A = 3$. Se $k = -\sqrt{2}$, si ha che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

e si osserva facilmente che $\det \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, quindi si deduce che $\operatorname{rg} A = 2$ (non è tre perché per $k = -\sqrt{2}$ si ha che $\det A = 0$). Infine se $k = \sqrt{2}$ si ha che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

e si osserva facilmente che $\det \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, quindi si deduce che $\operatorname{rg} A = 2$ anche in questo caso (non è tre perché per $k = \sqrt{2}$ si ha che $\det A = 0$).

6. Si ha che

$$\begin{aligned} \det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ k & k-1 & k+1 \end{pmatrix} &= \\ = k+1+k+k-1-k-k-1-k+1 = 0. \end{aligned}$$

Da questo si deduce che $1 \leq \operatorname{rg} A < 3$ per ogni $k \in \mathbb{R}$ (non è zero poiché esiste almeno un minore di ordine uno il cui determinante è non nullo, per esmepio l'elemento in alto a sinistra $1 \neq 0$). Calcolando $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & k-1 \end{pmatrix} = k-1-k = -1 \neq 0$, per ogni $k \in \mathbb{R}$, si può concludere che $\operatorname{rg} A = 2$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

7. Si ha che

$$\begin{aligned} \det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & k & k \\ k+2 & k & k(k-1) \end{pmatrix} &= \\ = k^2(k-1)+0+0-0-0-k^2 = k^2(k-1-1) = k^2(k-2). \end{aligned}$$

Studiamo dunque l'equazione

$$k^2(k-2) = 0.$$

Essa ha soluzioni

$$k = 0$$
$$k = 2.$$

Da questo si deduce che se $k \neq 0 \wedge k \neq 2$ allora $\operatorname{rg} A = 3$. Se $k = 0$, si ha che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e quindi si deduce che $\operatorname{rg} A = 1$ (non è zero poiché esiste almeno un minore di ordine uno il cui determinante è non nullo e non è due perché ogni minore 2×2 ha determinante nullo in quanto ha almeno una colonna di tutti zeri). Infine se $k = 2$ si ha che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

e quindi, poiché $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, si deduce che $\operatorname{rg} A = 2$ (non è 3 perché per $k = 2$ si ha che $\det A = 0$).

8. Si ha che

$$\begin{aligned} \det A = \det \begin{pmatrix} k-1 & k-1 & 2 \\ 1 & k & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = k(k-1) + 0 + 0 - 0 - k + 1 - 0 = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2. \end{aligned}$$

Studiamo dunque l'equazione

$$(k-1)^2 = 0.$$

Essa ha come unica soluzione

$$k = 1.$$

Da questo si deduce che se $k \neq 1$ allora $\operatorname{rg} A = 3$. Se $k = 1$, si ha che

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e quindi, poiché $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, si deduce che $\operatorname{rg} A = 2$ (non è 3 perché per $k = 1$ si ha che $\det A = 0$).