24/01/2018 - Esame di geometria - 6 crediti
Ingegneria informatica - a.a. 2017-2018

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 2 ore e mezza.
- **Ti sono stati consegnati due fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti, in STAMPATELLO leggibile, il tuo cognome, nome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- Le risposte vanno **motivate** brevemente, ma in maniera adeguata e comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno corretti eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Siano U e W i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ dati da:

$$U : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}, \quad W = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

3	

(a) Calcolare la dimensione e determinare una base (se esiste) dei sottospazi $U \cap W$ e $U + W$. Inoltre dire se la somma $U + W$ è diretta.

Risposta:

$\dim_{\mathbb{R}}(U + W) = 3,$ $\qquad$ $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 1,$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } U + W, \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } U \cap W.$$

3	

(b) Determinare una base ortonormale (se esiste) del sottospazio W.

Risposta:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base ortonormale di } W.$$

2	

(c) Determinare una base ortogonale (se esiste) del sottospazio $U^\perp$.

Risposta:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base ortogonale di } U^\perp.$$

2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo con matrice rappresentativa, rispetto alla base canonica sia nel dominio che nel codominio, data da $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ k^2+k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

2	

(a) Determinare lo spettro σ_f dell'endomorfismo f al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Risposta:

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda), \\ \sigma_f &= \{0, 2\}. \end{aligned}$$

2	

(b) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo f è diagonalizzabile.

Risposta:
Se $k = -1$ o $k = 0$, allora f è diagonalizzabile.
Se $k \neq -1$ e $k \neq 0$, allora f non è diagonalizzabile.

4	

(c) Calcolare, per $k = 0$, una matrice $D \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ e una matrice $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, tali che $D = M^{-1}AM$. Se possibile trovare M ortogonale.

Risposta:

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ M &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $RC(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano e sia P un punto di coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ rispetto a tale riferimento.

4	

(a) Sia $RC'(O',\mathbf{i}',\mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse x' la retta r con equazione cartesiana $3x-y+2=0$ orientata rispetto alle y decrescenti, la base $\{\mathbf{i}',\mathbf{j}'\}$ equiversa alla base $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ e O' il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ rispetto a RC. Determinare le coordinate di P rispetto a RC' e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$\left\{\mathbf{i}' = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}, \mathbf{j}' = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}\right\},$$
$$\mathcal{C}_{RC'}(P) = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{10}}{2} \\ \frac{3\sqrt{10}}{2} \end{pmatrix}.$$

4	

(b) Sia C il punto del piano con coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto a RC. Sia P' l'immagine del punto P rispetto alla rotazione del piano in senso antiorario di centro C e angolo $\theta = \frac{\pi}{6}$. Determinare le coordinate di P' rispetto a RC e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{C}_{RC}(P') = \begin{pmatrix} \frac{9+2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{8-7\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

4. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento cartesiano dello spazio. Sia r_1 la retta di quazioni parametriche

$$r_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

sia r_2 la retta data dall'intersezione dei piani π_1 e π_2 di equazioni cartesiane

$$\pi_1 : x + y - 2z + 5 = 0,$$
$$\pi_2 : y - z + 4 = 0,$$

e sia P il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nel riferimento RC.

3	

(a) Determinare la posizione reciproca delle rette r_1 e r_2 e calcolare la distanza tra esse.

Risposta:
Le rette sono incidenti e $d(r_1, r_2) = 0$.

3	

(b) Calcolare l'ampiezza degli angoli θ_1 e θ_2 formati dalla retta r_1 con i piani π_1 e π_2 rispettivamente.

Risposta:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2},$$
$$\theta_2 = \frac{\pi}{3}.$$

2	

(c) Determinare, usando i quaternioni, l'immagine P' del punto P rispetto alla rotazione di angolo $\theta = \frac{2}{3}\pi$ e asse la retta passante per l'origine e parallela alla retta r_2, orientata rispetto alle y crescenti.

Risposta:

$$q = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} + \frac{j}{2} + \frac{k}{2},$$
$$\mathcal{C}_{RC}(P') = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$