Soluzioni foglio 5

Pietro Mercuri

8 novembre 2018

Esercizio 1. Determinare se le seguenti funzioni sono lineari.

1.
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = 3x;$$

2.
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = 2x + 1;$$

3.
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = x^2;$$

4.
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = e^x;$$

5.
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$f(x, y) = 3x - y;$$

6.
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$f(x, y) = xy;$$

7.
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$f(x, y) = 2x + y + 1;$$

8.
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$f(x, y) = y;$$

9.
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(x) = (-x, x + 1);$$

10.
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(x) = (3x, -2x);$$

11.
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(x, y) = (x - y, 2x);$$

12.
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$
$$f(x, y) = (x - y, x + y, 0);$$

13.
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$
$$f(x, y) = (1, x, 2x + 5y).$$

Soluzione esercizio 1. Per verificare se una funzione $f\colon V \to W$ è lineare (con V e W spazi vettoriali sul campo K) si devono controllare le due condizioni
$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2),$$
per ogni $v_1, v_2 \in V$ e
$$f(\alpha v) = \alpha f(v),$$
per ogni $\alpha \in K$ e $v \in V$ e devono essere vere entrambe. Per completezza discuteremo entrambe le condizioni anche se f non è lineare.

1. La funzione
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = 3x,$$
è lineare. Infatti
$$f(x_1 + x_2) = 3(x_1 + x_2) = 3x_1 + 3x_2 = f(x_1) + f(x_2),$$
per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e
$$f(\alpha x) = 3\alpha x = \alpha 3x = \alpha f(x),$$
per ogni $\alpha, x \in \mathbb{R}$.

2. La funzione
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = 2x + 1,$$
non è lineare. Infatti
$$f(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2) + 1 = 2x_1 + 2x_2 + 1,$$
e
$$f(x_1) + f(x_2) = 2x_1 + 1 + 2x_2 + 1 = 2x_1 + 2x_2 + 2,$$
che sono diversi per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e
$$f(\alpha x) = 2\alpha x + 1,$$
e
$$\alpha f(x) = \alpha(2x + 1) = 2\alpha x + \alpha,$$
che sono diversi per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3. La funzione
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = x^2,$$
non è lineare. Infatti
$$f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2,$$
e
$$f(x_1) + f(x_2) = x_1^2 + x_2^2,$$
che sono diversi per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e
$$f(\alpha x) = (\alpha x)^2 = \alpha^2 x^2,$$
e
$$\alpha f(x) = \alpha x^2,$$
che sono diversi per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ e per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4. La funzione

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = e^x,$$

non è lineare. Infatti

$$f(x_1 + x_2) = e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2},$$

e

$$f(x_1) + f(x_2) = e^{x_1} + e^{x_2},$$

che sono diversi per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e

$$f(\alpha x) = e^{\alpha x} = e^{\alpha}e^x,$$

e

$$\alpha f(x) = \alpha e^x,$$

che sono diversi per quasi ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$.

5. La funzione

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$f(x, y) = 3x - y,$$

è lineare. Infatti

$$f(x_1+x_2, y_1+y_2) = 3(x_1+x_2)-(y_1+y_2) = 3x_1-y_1+3x_2-y_2 = f(x_1, y_1)+f(x_2, y_2),$$

per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e

$$f(\alpha x, \alpha y) = 3\alpha x - \alpha y = \alpha(3x - y) = \alpha f(x, y),$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

6. La funzione

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$f(x, y) = xy,$$

non è lineare. Infatti

$$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2,$$

e

$$f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = x_1y_1 + x_2y_2,$$

che sono diversi per quasi ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha x \alpha y = \alpha^2 xy,$$

e

$$\alpha f(x, y) = \alpha xy,$$

che sono diversi per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ e per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

7. La funzione

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$f(x, y) = 2x + y + 1,$$

non è lineare. Infatti

$$f(x_1+x_2, y_1+y_2) = 2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+1 = 2x_1+2x_2+y_1+y_2+1,$$

e

$$f(x_1, y_1)+f(x_2, y_2) = 2x_1+y_1+1+2x_2+y_2+1 = 2x_1+y_1+2x_2+y_2+2,$$

che sono diversi per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e

$$f(\alpha x, \alpha y) = 2\alpha x + \alpha y + 1,$$

e

$$\alpha f(x, y) = \alpha(2x + y + 1) = 2\alpha x + \alpha y + \alpha,$$

che sono diversi per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

8. La funzione

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$f(x, y) = y,$$

è lineare. Infatti

$$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = y_1 + y_2 = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2),$$

per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha y = \alpha f(x, y),$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

9. La funzione

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2, \\ f(x) &= (-x, x+1), \end{aligned}$$

non è lineare. Infatti

$$f(x_1 + x_2) = (-x_1 - x_2, x_1 + x_2 + 1),$$

e

$$f(x_1) + f(x_2) = (-x_1, x_1 + 1) + (-x_2, x_2 + 1) = (-x_1 - x_2, x_1 + x_2 + 2),$$

che sono diversi per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e

$$f(\alpha x) = (-\alpha x, \alpha x + 1),$$

e

$$\alpha f(x) = \alpha(-x, x+1) = (-\alpha x, \alpha x + \alpha),$$

che sono diversi per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$.

10. La funzione

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2, \\ f(x) &= (3x, -2x), \end{aligned}$$

è lineare. Infatti

$$f(x_1+x_2) = (3x_1+3x_2, -2x_1-2x_2) = (3x_1, -2x_1)+(3x_2, -2x_2) = f(x_1)+f(x_2),$$

per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e

$$f(\alpha x) = (3\alpha x, -2\alpha x) = \alpha(3x, -2x) = \alpha f(x),$$

per ogni $\alpha, x \in \mathbb{R}$.

11. La funzione

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2, \\ f(x, y) &= (x - y, 2x), \end{aligned}$$

è lineare. Infatti

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) &= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, 2x_1 + 2x_2) = \\ &= (x_1 - y_1, 2x_1) + (x_2 - y_2, 2x_2) = \\ &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2), \end{aligned}$$

per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e

$$f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x - \alpha y, 2\alpha x) = \alpha(x - y, 2x) = \alpha f(x, y),$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

12. La funzione

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$
$$f(x, y) = (x - y, x + y, 0),$$

è lineare. Infatti

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) &= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 0) = \\ &= (x_1 - y_1, x_1 + y_1, 0) + (x_2 - y_2, x_2 + y_2, 0) = \\ &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2), \end{aligned}$$

per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e

$$f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x - \alpha y, \alpha x + \alpha y, 0) = \alpha(x - y, x + y, 0) = \alpha f(x, y),$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

13. La funzione

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$
$$f(x, y) = (1, x, 2x + 5y),$$

non è lineare. Infatti

$$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (1, x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2 + 5y_1 + 5y_2),$$

e

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) &= (1, x_1, 2x_1 + 5y_1) + (1, x_2, 2x_2 + 5y_2) = \\ &= (2, x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2 + 5y_1 + 5y_2), \end{aligned}$$

che sono diversi per ogni $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e

$$f(\alpha x, \alpha y) = (1, \alpha x, 2\alpha x + 5\alpha y),$$

e

$$\alpha f(x, y) = \alpha(1, x, 2x + 5y) = (\alpha, \alpha x, 2\alpha x + 5\alpha y),$$

che sono diversi per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 2. Per ognuna delle seguenti funzioni lineari trovare la matrice associata o viceversa data una matrice trovare l'espressione analitica della funzione lineare associata esplicitando il dominio e il codominio.

1.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = 5x;$$

2.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$f(x) = -3x;$$

3.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(x) = (2x, -3x);$$

4.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(x, y) = (2x - 5y, 7x);$$

5.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(x, y) = (0, x + y);$$

6.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$
$$f(x, y) = (x, x + y, x - y);$$

7.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$
$$f(x, y) = (y - x, 2y, 3x + 3y);$$

8.

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
$$f(x, y, z) = (x + 2z, y - z, x - 3y + z);$$

9.

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
$$f(x, y, z) = (2x - y, 3x + 4y - z, x - y + 3z);$$

10. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$

11. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

13. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

14. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

16. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

17. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

19. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione esercizio 2. Per scrivere una funzione lineare come una matrice si devono riempire le colonne della matrice con i coefficienti delle variabili. Data una matrice A con n righe e m colonne si scrive l'espressione analitica della funzione moltiplicando la matrice a destra per il vettore colonna delle variabili, cioè il prodotto matriciale Av con $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$. Il dominio ha dimensione uguale al numero di colonne della matrice m e il codominio ha dimensione uguale al numero di righe della matrice n.

1. $A = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

10.

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3, \\ f(x) &= (x, x, 2x). \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3, \\ f(x,y,z) &= (y, 2x+2y+z, x+3y-z). \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2, \\ f(x,y,z) &= (x-y+2z, x+y-3z). \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2, \\ f(x,y) &= (2x, 3y). \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}, \\ f(x,y,z) &= -x-y+2z. \end{aligned}$$

15.
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(x,y) = (x,y).$$

16.
$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$
$$f(x,y,z) = 2x + y + 2z.$$

17.
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$
$$f(x,y) = (-y, 2x, y).$$

18.
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(x,y) = (x+y, x+2y).$$

19.
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(x,y) = (y,x).$$

Esercizio 3. Per ognuna delle seguenti funzioni lineari trovare la matrice associata, o viceversa data la matrice trovare l'espressione analitica esplicitando il dominio e il codominio. Calcolare l'immagine degli elementi della base canonica e dei punti P_1, P_2, P_3 dati. Trovare il nucleo (cioè la controimmagine dell'origine) e le controimmagini dei punti Q_1, Q_2 dati. Infine trovare l'immagine della funzione e dire se la funzione è iniettiva e/o suriettiva.

1.
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$
$$f(x,y) = (3x - y, x - 2y, y - 2x),$$
$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix};$$

2.
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(x,y) = (x-5y, 3x+2y),$$
$$P_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix};$$

3.
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$f(x,y) = y-3x,$$
$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$Q_1 = -5, Q_2 = 2;$$

4.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione esercizio 3. Si ricordi che una funzione lineare è iniettiva se la dimensione del nucleo è 0 ed è suriettiva se la dimensione dell'immagine è uguale alla dimensione del codominio.

1. La matrice è
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Le immagini della base canonica sono le colonne della matrice, quindi
$$f(e_1) = f(1,0) = (3,1,-2)$$
$$f(e_2) = f(0,1) = (-1,-2,1).$$
Le immagini dei punti sono
$$f(P_1) = f(1,1) = (2,-1,-1)$$
$$f(P_2) = f(0,3) = (-3,-6,3)$$
$$f(P_3) = f(-2,1) = (-7,-4,5).$$

Trovare il nucleo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0, \end{cases}$$

quindi il sistema è determinato e si ha

$$\ker(f) = f^{-1}(0,0,0) = \{(0,0)\}.$$

Trovare $f^{-1}(Q_1)$ equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \\ y - 2x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{5} \\ x = \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} = 2, \end{cases}$$

quindi il sistema è impossibile e si ha

$$f^{-1}(Q_1) = f^{-1}(1,0,2) = \emptyset.$$

Trovare $f^{-1}(Q_2)$ equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x - 2y = -1 \\ y - 2x = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \\ -4 = -4, \end{cases}$$

quindi il sistema è determinato e si ha

$$f^{-1}(Q_2) = f^{-1}(7,-1,-4) = \{(3,2)\}.$$

L'immagine della funzione è generata dalle colonne della matrice (cioè dalle immagini degli elementi della base canonica) e poiché essi sono linearmente indipendenti si ha

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} s; t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Poiché $\ker(f) = \{(0,0)\}$ allora $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(f)) = 0$ e la funzione è iniettiva, poiché $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ allora $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(f)) = 2$ e la funzione non è suriettiva.

2. La matrice è
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$
Le immagini della base canonica sono le colonne della matrice, quindi
$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0) = (1,3) \\ f(e_2) &= f(0,1) = (-5,2). \end{aligned}$$
Le immagini dei punti sono
$$\begin{aligned} f(P_1) &= f(5,1) = (0,17) \\ f(P_2) &= f(2,3) = (-13,12) \\ f(P_3) &= f(1,-1) = (6,1). \end{aligned}$$
Trovare il nucleo equivale a risolvere il sistema
$$\begin{cases} x - 5y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases}$$
quindi il sistema è determinato e si ha
$$\ker(f) = f^{-1}(0,0) = \{(0,0)\}.$$
Trovare $f^{-1}(Q_1)$ equivale a risolvere il sistema
$$\begin{cases} x - 5y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = \frac{7}{17} \\ y = -\frac{2}{17}, \end{cases}$$
quindi il sistema è determinato e si ha
$$f^{-1}(Q_1) = f^{-1}(1,1) = \left\{ \left(\frac{7}{17}, -\frac{2}{17} \right) \right\}.$$
Trovare $f^{-1}(Q_2)$ equivale a risolvere il sistema
$$\begin{cases} x - 5y = 6 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1, \end{cases}$$

quindi il sistema è determinato e si ha

$$f^{-1}(Q_2) = f^{-1}(6,1) = \{(1,-1)\}.$$

L'immagine della funzione è generata dalle colonne della matrice (cioè dalle immagini degli elementi della base canonica) e poiché essi sono linearmente indipendenti si ha

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} s; t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Poiché $\ker(f) = \{(0,0)\}$ allora $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(f)) = 0$ e la funzione è iniettiva, poiché $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ allora $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(f)) = 2$ e la funzione è suriettiva.

3. La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le immagini della base canonica sono le colonne della matrice, quindi

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0) = -3 \\ f(e_2) &= f(0,1) = 1. \end{aligned}$$

Le immagini dei punti sono

$$\begin{aligned} f(P_1) &= f(2,1) = -5 \\ f(P_2) &= f(0,2) = 2 \\ f(P_3) &= f(-1,-1) = 2. \end{aligned}$$

Trovare il nucleo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} y - 3x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t, \end{cases}$$

quindi il sistema è indeterminato e dipende da un parametro e si ha

$$\ker(f) = f^{-1}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t; t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Trovare $f^{-1}(Q_1)$ equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} y - 3x = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 5, \end{cases}$$

quindi il sistema è indeterminato e dipende da un parametro e si ha

$$f^{-1}(Q_1) = f^{-1}(-5) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Trovare $f^{-1}(Q_2)$ equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} y - 3x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t + 2, \end{cases}$$

quindi il sistema è indeterminato e dipende da un parametro e si ha

$$f^{-1}(Q_2) = f^{-1}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'immagine della funzione è generata dalle colonne della matrice (cioè dalle immagini degli elementi della base canonica) e poiché essi sono linearmente dipendenti (-3 è multiplo di 1) si ha

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \right\} = \{t; t \in \mathbb{R}\}.$$

Poiché $\ker(f) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ allora $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(f)) = 1$ e la funzione non è iniettiva, poiché $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \right\}$ allora $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im}(f)) = 1$ e la funzione è suriettiva.

4. La funzione è

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(x, y) = (x - 2y, -2x + 4y).$$

Le immagini della base canonica sono le colonne della matrice, quindi

$$f(e_1) = f(1, 0) = (1, -2)$$
$$f(e_2) = f(0, 1) = (-2, 4).$$

Le immagini dei punti sono

$$f(P_1) = f(0, 0) = (0, 0)$$
$$f(P_2) = f(3, 1) = (1, -2)$$
$$f(P_3) = f(1, 2) = (-3, 6).$$

Trovare il nucleo equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t, \end{cases}$$

quindi il sistema è indeterminato e dipende da un parametro e si ha

$$\ker(f) = f^{-1}(0,0) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t; t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Trovare $f^{-1}(Q_1)$ equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t, \end{cases}$$

quindi il sistema è indeterminato e dipende da un parametro e si ha

$$f^{-1}(Q_1) = f^{-1}(1,-2) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Trovare $f^{-1}(Q_2)$ equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 2y + 1 \\ -2 = 2, \end{cases}$$

quindi il sistema è impossibile e si ha

$$f^{-1}(Q_2) = f^{-1}(1,2) = \emptyset.$$

L'immagine della funzione è generata dalle colonne della matrice (cioè dalle immagini degli elementi della base canonica) e poiché essi sono linearmente dipendenti (uno è multiplo dell'altro) si ha

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Poiché $\ker(f) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ allora $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(f)) = 1$ e la funzione non è iniettiva, poiché $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ allora $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im}(f)) = 1$ e la funzione non è suriettiva.

Esercizio 4. Date le due funzioni lineari f e g calcolare, quando possibile, $f \circ f, g \circ g, f \circ g$ e $g \circ f$ e dire se $f, g, f \circ f, g \circ g, f \circ g$ e $g \circ f$ sono iniettive e/o suriettive (quando esistono).

1.

$$\begin{aligned} f &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \\ f(x) &= (2x, 3x), \\ g &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \\ g(x,y) &= 3x + y; \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ f(x,y) &= (5x - 3y, y - 2x), \\ g &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ g(x,y) &= (x + y, -x - y); \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ f(x,y) &= (x - 6y, y), \\ g &\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \\ g(x,y,z) &= (x + y - 2z, 3x + z). \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 4. Si ricordi che calcolare la composizione tra funzioni lineari è equivalente a calcolare il prodotto matriciale tra le matrici associate.

1. Si ha
$$A_f = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$
e
$$A_g = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
Quindi $f \circ f$ e $g \circ g$ non esistono (dominio e codominio non coincidono).
Si ha
$$A_{f \circ g} = A_f A_g = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix},$$
e quindi
$$\begin{aligned} f \circ g &\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ (f \circ g)(x,y) &= f(g(x,y)) = (6x + 2y, 9x + 3y). \end{aligned}$$
Si ha
$$A_{g \circ f} = A_g A_f = \begin{pmatrix} 9 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\begin{gathered} g\circ f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\\ (g\circ f)(x)=g(f(x))=9x. \end{gathered}$$

I nuclei sono

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{0\}\,,\\ \ker(g) &= \left\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}t; t\in\mathbb{R}\right\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\right\},\\ \ker(f\circ g) &= \left\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}t; t\in\mathbb{R}\right\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\right\},\\ \ker(g\circ f) &= \{0\}\,, \end{aligned}$$

e quindi f e $g\circ f$ sono iniettive, mentre g e $f\circ g$ non sono iniettive. Le immagini sono

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}t; t\in\mathbb{R}\right\},\\ \operatorname{Im}(g) &= \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}\right\} = \{t; t\in\mathbb{R}\}\,,\\ \operatorname{Im}(f\circ g) &= \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}t; t\in\mathbb{R}\right\},\\ \operatorname{Im}(g\circ f) &= \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}9\end{pmatrix}\right\} = \{9t; t\in\mathbb{R}\}\,, \end{aligned}$$

e quindi g e $g\circ f$ sono suriettive, mentre f e $f\circ g$ non sono suriettive.

2. Si ha

$$A_f = \begin{pmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix},$$

e

$$A_g = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Si ha

$$A_{f\circ f} = A_f A_f = \begin{pmatrix}31 & -18\\ -12 & 7\end{pmatrix},$$

e quindi

$$\begin{gathered} f\circ f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\\ (f\circ f)(x,y)=f(f(x,y))=(31x-18y,-12x+7y). \end{gathered}$$

Si ha

$$A_{g\circ g} = A_g A_g = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

e quindi

$$\begin{gathered} g\circ g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, \\ (g\circ g)(x,y)=g(g(x,y))=(0,0). \end{gathered}$$

Si ha

$$A_{f\circ g}=A_fA_g=\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -3 & -3 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\begin{gathered} f\circ g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, \\ (f\circ g)(x,y)=f(g(x,y))=(8x+8y,-3x-3y). \end{gathered}$$

Si ha

$$A_{g\circ f}=A_gA_f=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$\begin{gathered} g\circ f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \\ (g\circ f)(x)=g(f(x))=(3x-2y,-3x+2y). \end{gathered}$$

I nuclei sono

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \{(0,0)\}, \\ \ker(g) &= \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t; t\in\mathbb{R}\right\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \\ \ker(f\circ f) &= \{(0,0)\}, \\ \ker(g\circ g) &= \mathbb{R}^2, \\ \ker(f\circ g) &= \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t; t\in\mathbb{R}\right\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \\ \ker(g\circ f) &= \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} t; t\in\mathbb{R}\right\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right\}, \end{aligned}$$

e quindi f e $f\circ f$ sono iniettive, mentre $g, g\circ g, f\circ g$ e $g\circ f$ non sono iniettive. Le immagini sono

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}s; t, s \in \mathbb{R}\right\}, \\
\mathrm{Im}(g) &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}t; t \in \mathbb{R}\right\}, \\
\mathrm{Im}(f\circ f) &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}31\\-12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-18\\7\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}31\\-12\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}-18\\7\end{pmatrix}s; t, s \in \mathbb{R}\right\}, \\
\mathrm{Im}(g\circ g) &= \{(0,0)\}, \\
\mathrm{Im}(f\circ g) &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}t; t \in \mathbb{R}\right\}, \\
\mathrm{Im}(g\circ f) &= \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}t; t \in \mathbb{R}\right\},
\end{aligned}$$

e quindi f e $f\circ f$ sono suriettive, mentre $g, g\circ g, f\circ g$ e $g\circ f$ non sono suriettive.

3. Si ha

$$A_f = \begin{pmatrix}1 & -6\\0 & 1\end{pmatrix},$$

e

$$A_g = \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\3 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Quindi $g\circ f$ e $g\circ g$ non esistono (dominio e codominio non coincidono). Si ha

$$A_{f\circ f} = A_f A_f = \begin{pmatrix}1 & -12\\0 & 1\end{pmatrix},$$

e quindi

$$\begin{gathered}
f\circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\
(f\circ f)(x,y) = f(f(x,y)) = (x-12y, y).
\end{gathered}$$

Si ha

$$A_{f\circ g} = A_f A_g = \begin{pmatrix}-17 & 1 & -8\\3 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

e quindi

$$\begin{gathered}
f\circ g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \\
(f\circ g)(x,y,z) = f(g(x,y,z)) = (-17x+y-8z, 3x+z).
\end{gathered}$$

I nuclei sono

$$
\begin{aligned}
\ker(f) &= \{(0,0)\}\,, \\
\ker(g) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} t; t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \\
\ker(f \circ f) &= \{(0,0)\}\,, \\
\ker(f \circ g) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} t; t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} \right\},
\end{aligned}
$$

e quindi f e $f \circ f$ sono iniettive, mentre g e $f \circ g$ non sono iniettive. Le immagini sono

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f) &= \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} s; t, s \in \mathbb{R} \right\}, \\
\operatorname{Im}(g) &= \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} s; t, s \in \mathbb{R} \right\}, \\
\operatorname{Im}(f \circ f) &= \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \end{pmatrix} s; t, s \in \mathbb{R} \right\}, \\
\operatorname{Im}(f \circ g) &= \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -17 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix} s; t, s \in \mathbb{R} \right\},
\end{aligned}
$$

e quindi $f, g, f \circ f$ e $g \circ f$ sono suriettive.