Soluzioni foglio 7

Pietro Mercuri

26 novembre 2018

Esercizio 1. Calcolare la norma (cioè il modulo) dei seguenti vettori e scrivere il vettore normalizzato (cioè il vettore multiplo di quello dato ma di norma 1).

1. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
2. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
3. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
4. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;
5. $v = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$;
6. $v = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;
7. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
8. $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$;
9. $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;

10. $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$;

11. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

12. $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

13. $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

14. $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}$;

15. $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Soluzione esercizio 1. Si ricordi che dato un vettore $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ il modulo è definito come

$$|v| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2},$$

e il vettore normalizzato $\hat{v}$ (talvolta detto anche versore) si ottiene

$$\hat{v} := \frac{1}{|v|} v = \frac{v}{|v|}.$$

Si ricordi anche che il modulo di un vettore è un numero reale non negativo, ed è uguale a 0 se e solo se v è il vettore nullo.

1. $|v| = \left|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+0^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1,$

   $\hat{v} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = v;$

2. $|v| = \left|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$

   $\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix};$

3. $|v| = \left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5},$

   $\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{5}\\\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix};$

4. $|v| = \left|\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10},$

   $\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{10}}{10}\\\frac{3\sqrt{10}}{10}\end{pmatrix};$

5. $|v| = \left|\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1,$

   $\hat{v} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = v;$

6. $|v| = \left|\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1,$

   $\hat{v} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = v;$

7. $|v| = \left|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2},$

   $\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix};$

8. $|v| = \left|\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+3^2+0^2} = \sqrt{4+9+0} = \sqrt{13},$

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{13}}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{3\sqrt{13}}{13} \\ 0 \end{pmatrix};$$

9. $$|v| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 0 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10},$$

$$\hat{v} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{10}}{20} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6\sqrt{10}}{20} \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{10}}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix};$$

10. $$|v| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 36 + 4} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19},$$

$$\hat{v} = \frac{1}{2\sqrt{19}} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{19}}{38} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6\sqrt{19}}{38} \\ \frac{6\sqrt{19}}{38} \\ \frac{2\sqrt{19}}{38} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{19}}{19} \\ \frac{3\sqrt{19}}{19} \\ \frac{\sqrt{19}}{19} \end{pmatrix};$$

11. $$|v| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 1 + 0 + 0} = \sqrt{2},$$

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

12. $$|v| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 0 + 0 + 0} = 2,$$

$$\hat{v} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

13. $$|v| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + \pi^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{\pi^2} = \pi,$$

$$\hat{v} = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix}0\\ \pi\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix};$$

14. $$|v| = \left|\begin{pmatrix}0\\ \pi\\ \pi\\ 0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+\pi^2+\pi^2+0^2} = \sqrt{2\pi^2} = \pi\sqrt{2},$$

$$\hat{v} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ \pi\\ \pi\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\begin{pmatrix}0\\ \pi\\ \pi\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{pmatrix};$$

15. $$|v| = \left|\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+1^2+2^2+3^2} = \sqrt{0+1+4+9} = \sqrt{14},$$

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{14}}{14}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{\sqrt{14}}{14}\\ \frac{\sqrt{14}}{7}\\ \frac{3\sqrt{14}}{14}\end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Calcolare il prodotto scalare $\langle v_1, v_2\rangle$ delle seguenti coppie di vettori e individuare le coppie ortogonali.

1. $v_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$;
2. $v_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$;
3. $v_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$;
4. $v_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$;
5. $v_1 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$;
6. $v_1 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$;

7. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$;

8. $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$;

9. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

10. $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

11. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$;

12. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;

13. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$;

14. $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;

15. $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$;

16. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

17. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

18. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

19. $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$;

20. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

21. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

22. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}$;

23. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt[3]{3} \end{pmatrix}$;

24. $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

25. $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}$;

26. $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt[3]{3} \end{pmatrix}$;

27. $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}$;

28. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

29. $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt[3]{3} \end{pmatrix}$;

30. $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt[3]{3} \end{pmatrix}$.

Soluzione esercizio 2. Si ricordi che dati due vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

il prodotto scalare è definito come

$$\langle v_1, v_2 \rangle := \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

1. $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 1 + 0 = 1;$

2. $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1 + 0 = 1;$

3. $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2};$

4. $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$

5. $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 1 + 1(-1) = 1 - 1 = 0;$

6. $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 1 + 2 = 3;$

7. $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2};$

8. $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0;$

9. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\rangle = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2};$

10. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4};$

11. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\rangle = 1\cdot 2 + 0\cdot 3 + 1\cdot 0 = 2 + 0 + 0 = 2;$

12. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}\rangle = 1\cdot 6 + 0\cdot 0 + 1\cdot 2 = 6 + 0 + 2 = 8;$

13. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\6\\2\end{pmatrix}\rangle = 1\cdot 6 + 0\cdot 6 + 1\cdot 2 = 6 + 0 + 2 = 8;$

14. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}\rangle = 2\cdot 6 + 3\cdot 0 + 0\cdot 2 = 12 + 0 + 0 = 12;$

15. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\6\\2\end{pmatrix}\rangle = 2\cdot 6 + 3\cdot 6 + 0\cdot 2 = 12 + 18 + 0 = 30;$

16. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\rangle = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1(-2) = 1 + 1 - 2 = 0;$

17. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\rangle = 1\cdot 1 + 1(-1) + 1\cdot 0 = 1 - 1 + 0 = 0;$

18. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\rangle = 1\cdot 1 + 1(-1) + 0(-2) = 1 - 1 + 0 = 0;$

19. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\6\\2\end{pmatrix}\rangle = 6\cdot 6 + 0\cdot 6 + 2\cdot 2 = 36 + 0 + 4 = 40;$

20. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}\rangle = 1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 2 + 0 + 0 + 0 = 2;$

21. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\pi\\0\\0\end{pmatrix}\rangle = 1\cdot 0 + 1\cdot\pi + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0+\pi+0+0 = \pi;$

22. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\pi\\\pi\\0\end{pmatrix}\rangle = 1\cdot 0 + 1\cdot\pi + 0\cdot\pi + 0\cdot 0 = 0+\pi+0+0 = \pi;$

23. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\sqrt{2}\\\sqrt[3]{3}\end{pmatrix}\rangle = 1\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot\sqrt{2}+0\cdot\sqrt[3]{3} = 0+1+0+0 = 1;$

24. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\pi\\0\\0\end{pmatrix}\rangle = 2\cdot 0 + 0\cdot\pi + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0+0+0+0 = 0;$

25. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\pi\\\pi\\0\end{pmatrix}\rangle = 2\cdot 0 + 0\cdot\pi + 0\cdot\pi + 0\cdot 0 = 0+0+0+0 = 0;$

26. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\sqrt{2}\\\sqrt[3]{3}\end{pmatrix}\rangle = 2\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot\sqrt{2}+0\cdot\sqrt[3]{3} = 0+0+0+0 = 0;$

27. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}0\\\pi\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\pi\\\pi\\0\end{pmatrix}\rangle = 0\cdot 0+\pi\cdot\pi+0\cdot\pi+0\cdot 0 = 0+\pi^2+0+0 = \pi^2;$

28. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}\rangle = 1\cdot 1+2\cdot 2+1(-1)+2(-2) = 1+4-1-4 = 0;$

29. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix}0\\\pi\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\sqrt{2}\\\sqrt[3]{3}\end{pmatrix}\rangle = 0\cdot 0+\pi\cdot 1+0\cdot\sqrt{2}+0\cdot\sqrt[3]{3} = 0+\pi+0+0 = \pi;$

30. $\langle v_1, v_2\rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt[3]{3} \end{pmatrix} \rangle = 0{\cdot}0+\pi{\cdot}1+\pi{\cdot}\sqrt{2}+0{\cdot}\sqrt[3]{3} = 0+\pi+\pi\sqrt{2}+0 =$

$= \pi(1+\sqrt{2})$.

Esercizio 3. Considerare i sottospazi vettoriali U e W dell'esercizio 1 del foglio 6. Trovare una base ortonormale dei sottospazi U, W.

Soluzione esercizio 3. Per trovare una base ortonormale di un sottospazio, si può prima trovare una base ortogonale usando l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt a una base data e poi normalizzare i vettori della base ortogonale trovata.

1.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } U,$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base ortogonale di } U,$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{22}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{22}}{22} \\ \frac{3\sqrt{22}}{22} \\ \frac{\sqrt{22}}{11} \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base ortonormale di } U,$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base ortogonale di } W,$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{30}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} \\ -\frac{\sqrt{30}}{30} \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base ortonormale di } W.$$

2.

$$\left\{\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base di } U,$$

$$\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{9}{10}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{10}\\-\frac{9}{10}\\1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-9\\10\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortogonale di } U,$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{190}}\begin{pmatrix}-3\\-9\\10\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}-\frac{3\sqrt{10}}{10}\\\frac{\sqrt{10}}{10}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{3\sqrt{190}}{190}\\-\frac{9\sqrt{190}}{190}\\\frac{\sqrt{190}}{19}\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortonormale di } U,$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortogonale di } W,$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-\frac{5\sqrt{26}}{26}\\\frac{\sqrt{26}}{26}\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortonormale di } W.$$

3.

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base di } U,$$

$$\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\-\frac{5}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\-5\\2\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortogonale di } U,$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{93}}\begin{pmatrix}8\\-5\\2\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{8\sqrt{93}}{93}\\-\frac{5\sqrt{93}}{93}\\\frac{2\sqrt{93}}{93}\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortonormale di } U,$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortogonale di } W,$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortonormale di } W.$$

4.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } U,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base ortogonale di } U,$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{15} \\ \frac{\sqrt{15}}{15} \\ -\frac{2\sqrt{15}}{15} \\ \frac{\sqrt{15}}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{35}}{35} \\ -\frac{4\sqrt{35}}{35} \\ \frac{3\sqrt{35}}{35} \\ \frac{3\sqrt{35}}{35} \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base ortonormale di } U,$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } W,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base ortogonale di } W,$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{5} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base ortonormale di } W.$$

5.

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\0\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortogonale di } U,$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{11}}{11}\\-\frac{\sqrt{11}}{11}\\\frac{3\sqrt{11}}{11}\\0\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortonormale di } U,$$

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\\7\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base di } W,$$

$$\begin{pmatrix}4\\5\\6\\7\end{pmatrix} - \frac{38}{14}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\\frac{16}{7}\\\frac{4}{7}\\-\frac{8}{7}\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\4\\1\\-2\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortogonale di } W,$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}7\\4\\1\\-2\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{14}}{14}\\\frac{\sqrt{14}}{7}\\\frac{3\sqrt{14}}{14}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{70}}{10}\\\frac{2\sqrt{70}}{35}\\\frac{\sqrt{70}}{70}\\-\frac{\sqrt{70}}{35}\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortonormale di } W.$$

6.

$$\left\{\begin{pmatrix}-8\\13\\-6\\2\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortogonale di } U,$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{273}}\begin{pmatrix}-8\\13\\-6\\2\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}-\frac{8\sqrt{273}}{273}\\\frac{\sqrt{273}}{21}\\-\frac{2\sqrt{273}}{91}\\\frac{2\sqrt{273}}{273}\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortonormale di } U,$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base di } W,$$

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\2\end{pmatrix}-\frac{-4}{6}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\2\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\\6\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortogonale di } W,$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{57}}\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\\6\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{6}}{6}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{4\sqrt{57}}{57}\\-\frac{\sqrt{57}}{57}\\\frac{2\sqrt{57}}{57}\\\frac{2\sqrt{57}}{19}\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortonormale di } W.$$

Esercizio 4. Per ognuno degli endomorfismi associati alle seguenti matrici, trovare lo spettro, trovare una base per gli autospazi e dire se l'endomorfismo è diagonalizzabile. Se lo è, trovare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M che lo diagonalizzano. Quando possibile trovare M ortogonale.

1. $A_{f,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2}=\begin{pmatrix}-7&10\\-5&8\end{pmatrix}$;

2. $A_{f,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$;

3. $A_{f,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2}=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$;

4. $A_{f,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2}=\begin{pmatrix}6&-2\\2&1\end{pmatrix}$;

5. $A_{f,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2}=\begin{pmatrix}-3&3\\0&-2\end{pmatrix}$;

6. $A_{f,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2}=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}$;

7. $A_{f,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2}=\begin{pmatrix}-1&9\\-4&11\end{pmatrix}$;

8. $A_{f,\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

9. $A_{f,\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

10. $A_{f,\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -4 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;

11. $A_{f,\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

12. $A_{f,\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} -11 & -15 & 14 \\ 0 & 3 & 0 \\ -7 & -8 & 10 \end{pmatrix}$;

13. $A_{f,\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Soluzione esercizio 4. Sia A la matrice quadrata considerata associata all'endomorfismo f. Calcolare il polinomio caratteristico

$$p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

con I la matrice identità. Lo spettro di f è l'insieme σ_f degli autovalori di f, cioè degli zeri del polinomio caratteristico, cioè delle soluzioni dell'equazione caratteristica

$$p_f(\lambda) = 0.$$

La molteplicità algebrica $m_a(\lambda)$ di un autovalore è la molteplicità come zero del polinomio caratteristico $p_f(\lambda)$. Fissato un autovalore $\lambda \in \sigma_f$, poniamo $A_\lambda := A - \lambda I$, allora l'autospazio relativo a λ è

$$E(\lambda) := \ker(A_\lambda).$$

La molteplicità geometrica $m_a(\lambda)$ di un autovalore λ è la dimensione di $E(\lambda)$ come spazio vettoriale. L'endomorfismo f è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche è uguale al numero di colonne della matrice A e per ogni autovalore la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica. Se f è diagonalizzabile allora esiste una matrice diagonale D, con gli autovalori sulla diagonale principale, e una matrice invertibile M tale che $D = M^{-1}AM$. Le colonne di M formano una base di autovettori, cioè si possono ottenere prendendo l'unione delle basi degli autospazi. L'ordine delle colonne deve essere coerente con quello scelto per gli autovalori nelle colonne della matrice diagonale D. Se la matrice iniziale A è simmetrica rispetto a una base ortonormale (ad esempio la base canonica), allora è possibile ottenere una base ortonormale di autovettori, cioè è possibile trovare la matrice M ortogonale, cioè tale che $M^{-1} = M^T$.

1.

$$\begin{aligned}
p_f(\lambda) &= \lambda^2 - \lambda - 6, \\
\sigma_f &= \{-2, 3\}, \\
m_a(-2) = 1, &\quad m_g(-2) = 1, \\
m_a(3) = 1, &\quad m_g(3) = 1, \\
\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(-2), \\
\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(3), \\
D &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \\
M &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
p_f(\lambda) &= \lambda^2 - 1, \\
\sigma_f &= \{-1, 1\}, \\
m_a(-1) = 1, &\quad m_g(-1) = 1, \\
m_a(1) = 1, &\quad m_g(1) = 1, \\
\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(-1), \\
\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(1), \\
D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
M &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
p_f(\lambda) &= \lambda^2 - 3\lambda + 2, \\
\sigma_f &= \{1, 2\}, \\
m_a(1) = 1, &\quad m_g(1) = 1, \\
m_a(2) = 1, &\quad m_g(2) = 1, \\
\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(1), \\
\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(2), \\
D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\
M &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
p_f(\lambda) &= \lambda^2 - 7\lambda + 10, \\
\sigma_f &= \{2, 5\}, \\
m_a(2) = 1, &\quad m_g(2) = 1, \\
m_a(5) = 1, &\quad m_g(5) = 1, \\
\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(5), \\
\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(2), \\
D &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\
M &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) &= \lambda^2 + 5\lambda + 6, \\ \sigma_f &= \{-3, -2\}, \\ m_a(-3) = 1, &\quad m_g(-3) = 1, \\ m_a(-2) = 1, &\quad m_g(-2) = 1, \\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(-3), \\ \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(-2), \\ D &= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \\ M &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) &= \lambda^2 - 6\lambda + 8, \\ \sigma_f &= \{2, 4\}, \\ m_a(2) = 1, &\quad m_g(2) = 1, \\ m_a(4) = 1, &\quad m_g(4) = 1, \\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(2), \\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(4), \\ D &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ M &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) &= \lambda^2 - 10\lambda + 25, \\ \sigma_f &= \{5\}, \\ m_a(5) = 2, &\quad m_g(5) = 1, \\ \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(5), \text{ la matrice non è diagonalizzabile.} \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
p_f(\lambda) &= -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 31\lambda + 30, \\
\sigma_f &= \{2, 3, 5\}, \\
m_a(2) &= 1, \quad m_g(2) = 1, \\
m_a(3) &= 1, \quad m_g(3) = 1, \\
m_a(5) &= 1, \quad m_g(5) = 1, \\
&\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ base di } E(2), \\
&\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base di } E(3), \\
&\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base di } E(5), \\
D &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \\
M &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
p_f(\lambda) &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8, \\
\sigma_f &= \{-2, 2\}, \\
m_a(2) &= 2, \quad m_g(2) = 2, \\
m_a(-2) &= 1, \quad m_g(-2) = 1, \\
&\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ base di } E(2), \\
&\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ base di } E(-2), \\
D &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \\
M &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

10.

$$
\begin{aligned}
p_f(\lambda) &= -\lambda^3 - \lambda^2 + 5\lambda - 3, \\
\sigma_f &= \{-3, 1\}, \\
m_a(1) = 2, &\quad m_g(1) = 2, \\
m_a(-3) = 1, &\quad m_g(-3) = 1, \\
\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(1), \\
\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(-3), \\
D &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
M &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

11.

$$
\begin{aligned}
p_f(\lambda) &= -\lambda^3 + 12\lambda + 16, \\
\sigma_f &= \{-2, 4\}, \\
m_a(-2) = 2, &\quad m_g(-2) = 2, \\
m_a(4) = 1, &\quad m_g(4) = 1, \\
\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(-2), \\
\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} &\text{ base ortogonale di } E(-2), \\
\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(4), \\
D &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \\
M &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

12.

$$
\begin{aligned}
p_f(\lambda) &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 15\lambda - 36, \\
\sigma_f &= \{-4, 3\}, \\
m_a(3) = 2, &\quad m_g(3) = 1, \\
m_a(-4) = 1, &\quad m_g(-4) = 1, \\
\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(-4), \\
\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(3), \text{ la matrice non è diagonalizzabile.}
\end{aligned}
$$

13.

$$
\begin{aligned}
p_f(\lambda) &= -\lambda^3 + 13\lambda + 12, \\
\sigma_f &= \{-3, -1, 4\}, \\
m_a(-3) = 1, &\quad m_g(-3) = 1, \\
m_a(-1) = 1, &\quad m_g(-1) = 1, \\
m_a(4) = 1, &\quad m_g(4) = 1, \\
\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(-3), \\
\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(-1), \\
\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} &\text{ base di } E(4), \\
D &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \\
M &= \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$