Soluzioni foglio 9

Pietro Mercuri

6 dicembre 2018

Esercizio 1. Date le seguenti espressioni, dire se esse rappresentano una retta o un piano in $\mathbb{R}^3$ e trovarne un'equazione cartesiana e un'equazione parametrica (individuando i vettori direttori).

1. $x + 2y - 1 = 0$;
2. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$;
3. $z - x = 0$;
4. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$;
5. $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2z + 1 = 0; \end{cases}$
6. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}$;
7. $x - 2 = 0$;
8. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$;
9. $z + 5 = 0$;
10. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}$;
11. $x + y - 3z + 1 = 0$;
12. $\begin{cases} 2x + 2y - z + 1 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0; \end{cases}$

13. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R};$

14. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R};$

15. $x + y + z = 0;$

16. $3 - 2x + 5y + z = 0;$

17. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R};$

18. $\begin{cases} z = 0 \\ x + 1 = 0; \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ z + 2y - x + 2 = 0; \end{cases}$

20. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R};$

21. $x - z + 3 = 0;$

22. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$

Soluzione esercizio 1. 1. L'equazione cartesiana

$$x + 2y - 1 = 0,$$

rappresenta un piano. Per ottenere un'equazione parametrica è sufficiente scegliere due variabili libere e porle come parametri. Scegliamo $y = t$ e $z = s$ (in questo caso la scelta di z è obbligatoria poiché non è presente nell'equazione e quindi è libera) e mettiamo a sistema con la precedente

$$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = t \\ z = s, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $t, s \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il terzo $w \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono i vettori direttori e sono i vettori dei coefficienti dei parametri t e s e il quarto è il vettore dei termini noti.

2. L'equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

rappresenta una retta il cui vettore direttore è $v \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = -t + 1, \end{cases}$$

ed eliminiamo il parametro

$$\begin{cases} t = y \\ x = 2y + 1 \\ z = -y + 1, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha l'equazione cartesiana

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

3. L'equazione cartesiana

$$z - x = 0,$$

rappresenta un piano. Per ottenere un'equazione parametrica è sufficiente scegliere due variabili libere e porle come parametri. Scegliamo $y = t$ e $z = s$ (in questo caso la scelta di y è obbligatoria poiché non è presente nell'equazione e quindi è libera) e mettiamo a sistema con la precedente

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = s, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s,$$

con $t, s \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il terzo $w \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono i vettori direttori e sono i vettori dei coefficienti dei parametri t e s.

4. L'equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

rappresenta una retta il cui vettore direttore è $v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t + 2, \end{cases}$$

ed eliminiamo il parametro

$$\begin{cases} t = x - 1 \\ y = 2(x - 1) - 1 \\ z = 3(x - 1) + 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = x - 1 \\ y = 2x - 3 \\ z = 3x - 1, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha l'equazione cartesiana

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x - z - 1 = 0. \end{cases}$$

5. L'equazione cartesiana

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2z + 1 = 0, \end{cases}$$

rappresenta una retta. Per ottenere un'equazione parametrica è sufficiente scegliere una variabile libera e porla come parametro. Scegliamo

$y = t$ (in questo caso la scelta di z non è consentita poiché non è libera, ma vincolata ad essere $z = -\frac{1}{2}$) e mettiamo a sistema con la precedente

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

con $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è il vettore direttore ed è il vettore dei coefficienti del parametro t e il terzo vettore è il vettore dei termini noti.

6. L'equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R},$$

rappresenta un piano i cui vettori direttori sono $v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha

$$\begin{cases} x = t + s + 1 \\ y = 2t - s + 1 \\ z = t + 1, \end{cases}$$

ed eliminiamo i parametri

$$\begin{cases} t = z - 1 \\ x = z - 1 + s + 1 \\ y = 2(z - 1) - s + 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = z - 1 \\ s = x - z \\ y = 2z - 1 - (x - z), \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = z - 1 \\ s = x - z \\ y = 3z - 1 - x, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha l'equazione cartesiana

$$x + y - 3z + 1 = 0.$$

7. L'equazione cartesiana

$$x - 2 = 0,$$

rappresenta un piano. Per ottenere un'equazione parametrica è sufficiente scegliere due variabili libere e porle come parametri. Scegliamo $y = t$ e $z = s$ (in questo caso la scelta di y e z è obbligatoria poiché non sono presenti nell'equazione e quindi sono libere) e mettiamo a sistema con la precedente

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = s, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $t, s \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il terzo $w \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono i vettori direttori e sono i vettori dei coefficienti dei parametri t e s e il quarto è il vettore dei termini noti.

8. L'equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

rappresenta una retta il cui vettore direttore è $v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2 \\ z = t, \end{cases}$$

ed eliminiamo il parametro

$$\begin{cases} t = z \\ y = 2 \\ x = z - 1, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha l'equazione cartesiana

$$\begin{cases} y-2=0 \\ x-z+1=0. \end{cases}$$

9. L'equazione cartesiana

$$z+5=0,$$

rappresenta un piano. Per ottenere un'equazione parametrica è sufficiente scegliere due variabili libere e porle come parametri. Scegliamo $x=t$ e $y=s$ (in questo caso la scelta di x e y è obbligatoria poiché non sono presenti nell'equazione e quindi sono libere) e mettiamo a sistema con la precedente

$$\begin{cases} x=t \\ y=s \\ z=-5, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix},$$

con $t, s \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il terzo $w \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono i vettori direttori e sono i vettori dei coefficienti dei parametri t e s e il quarto è il vettore dei termini noti.

10. L'equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R},$$

rappresenta un piano i cui vettori direttori sono $v \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $w \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha

$$\begin{cases} x=-t \\ y=0 \\ z=2t-2s+2, \end{cases}$$

ed eliminiamo i parametri

$$\begin{cases} t = -x \\ y = 0 \\ z = 2(-x) - 2s + 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -x \\ y = 0 \\ s = -x - \frac{z}{2} + 1, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha l'equazione cartesiana

$$y = 0.$$

11. L'equazione cartesiana

$$x + y - 3z + 1 = 0,$$

rappresenta un piano. Per ottenere un'equazione parametrica è sufficiente scegliere due variabili libere e porle come parametri. Scegliamo $y = t$ e $z = s$ e mettiamo a sistema con la precedente

$$\begin{cases} y = t \\ z = s \\ x = -t + 3s - 1, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $t, s \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il terzo $w \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono i vettori direttori e sono i vettori dei coefficienti dei parametri t e s e il quarto è il vettore dei termini noti.

12. L'equazione cartesiana

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + 1 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0, \end{cases}$$

rappresenta una retta. Per ottenere un'equazione parametrica è sufficiente scegliere una variabile libera e porla come parametro. Scegliamo

$x = t$ e mettiamo a sistema con la precedente

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 2 \\ z = 2t + 2(3t - 2) + 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 2 \\ z = 8t - 3, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

con $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ è il vettore direttore ed è il vettore dei coefficienti del parametro t e il terzo vettore è il vettore dei termini noti.

13. L'equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R},$$

rappresenta un piano i cui vettori direttori sono $v \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha

$$\begin{cases} x = s - 1 \\ y = -1 \\ z = t + 2, \end{cases}$$

ed eliminiamo i parametri

$$\begin{cases} s = x + 1 \\ y = -1 \\ t = z - 2, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha l'equazione cartesiana

$$y + 1 = 0.$$

14. L'equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R},$$

rappresenta un piano i cui vettori direttori sono $v \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $w \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha

$$\begin{cases} x = 3t + 2s + 1 \\ y = t + s \\ z = -t - s, \end{cases}$$

ed eliminiamo i parametri

$$\begin{cases} t = y - s \\ z = -(y - s) - s \\ x = 3(y - s) + 2s + 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = y - s \\ z = -y \\ x = 3y - s + 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = y - s \\ z = -y \\ s = 3y - x + 1, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha l'equazione cartesiana

$$y + z = 0.$$

15. L'equazione cartesiana

$$x + y + z = 0,$$

rappresenta un piano. Per ottenere un'equazione parametrica è sufficiente scegliere due variabili libere e porle come parametri. Scegliamo $y = t$ e $z = s$ e mettiamo a sistema con la precedente

$$\begin{cases} y = t \\ z = s \\ x = -t - s, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s,$$

con $t, s \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il terzo $w \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono i vettori direttori e sono i vettori dei coefficienti dei parametri t e s e il quarto è il vettore dei termini noti.

16. L'equazione cartesiana

$$3 - 2x + 5y + z = 0,$$

rappresenta un piano. Per ottenere un'equazione parametrica è sufficiente scegliere due variabili libere e porle come parametri. Scegliamo $x = t$ e $y = s$ e mettiamo a sistema con la precedente

$$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 2t - 5s - 3, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

con $t, s \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e il terzo $w \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ sono i vettori direttori e sono i vettori dei coefficienti dei parametri t e s e il quarto è il vettore dei termini noti.

17. L'equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

rappresenta una retta il cui vettore direttore è $v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

ed eliminiamo il parametro

$$\begin{cases} t = x \\ y = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha l'equazione cartesiana

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

18. L'equazione cartesiana

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + 1 = 0, \end{cases}$$

rappresenta una retta. Per ottenere un'equazione parametrica è sufficiente scegliere una variabile libera e porla come parametro. Scegliamo $y = t$ (scelta obbligata perché x e z sono fissate) e mettiamo a sistema con la precedente

$$\begin{cases} y = t \\ x = -1 \\ z = 0, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è il vettore direttore ed è il vettore dei coefficienti del parametro t e il terzo vettore è il vettore dei termini noti.

19. L'equazione cartesiana

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ z + 2y - x + 2 = 0, \end{cases}$$

rappresenta una retta. Per ottenere un'equazione parametrica è sufficiente scegliere una variabile libera e porla come parametro. Scegliamo $y = t$ (z non può essere scelta perché non è presente nella prima equazione) e mettiamo a sistema con la precedente

$$\begin{cases} x = -t + 3 \\ y = t \\ z = -2t + (-t + 3) - 2, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = -t + 3 \\ y = t \\ z = -3t + 1, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ è il vettore direttore ed è il vettore dei coefficienti del parametro t e il terzo vettore è il vettore dei termini noti.

20. L'equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R},$$

rappresenta un piano i cui vettori direttori sono $v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha

$$\begin{cases} x = t - s + 1 \\ y = t + 2s + 2 \\ z = t - 3s - 1, \end{cases}$$

ed eliminiamo i parametri

$$\begin{cases} t = x + s - 1 \\ y = x + s - 1 + 2s + 2 \\ z = x + s - 1 - 3s - 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = x + s - 1 \\ s = \frac{x}{2} - \frac{z}{2} - 1 \\ y = x + 1 + 3(\frac{x}{2} - \frac{z}{2} - 1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = x + s - 1 \\ s = \frac{x}{2} - \frac{z}{2} - 1 \\ y = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}z - 2, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha l'equazione cartesiana

$$5x - 2y - 3z - 4 = 0.$$

21. L'equazione cartesiana

$$x - z + 3 = 0,$$

rappresenta un piano. Per ottenere un'equazione parametrica è sufficiente scegliere due variabili libere e porle come parametri. Scegliamo $x = t$ e $y = s$ (in questo caso la scelta di y è obbligatoria poiché non è presente nell'equazione e quindi è libera) e mettiamo a sistema con la precedente

$$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = t + 3, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

con $t, s \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e il terzo $w \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono i vettori direttori e sono i vettori dei coefficienti dei parametri t e s e il quarto è il vettore dei termini noti.

22. L'equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

rappresenta una retta il cui vettore direttore è $v \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = -2t, \end{cases}$$

ed eliminiamo il parametro

$$\begin{cases} t = -x + 1 \\ y = -2x + 2 \\ z = 2x - 2, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha l'equazione cartesiana

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2x - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2. Trovare un'equazione parametrica delle rette di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ (a seconda dei casi) passanti per i due punti dati. Successivamente trovare anche un'equazione cartesiana di tali rette e verificare che i punti dati appartengano alla retta trovata.

1. $P_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
2. $P_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, P_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$;
3. $P_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, P_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
4. $P_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
5. $P_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$;
6. $P_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;
7. $P_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

8. $P_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, P_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;

9. $P_1\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, P_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$;

10. $P_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, P_2\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$;

11. $P_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, P_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Soluzione esercizio 2.

1. Per trovare un vettore direttore della retta è sufficiente calcolare
$$v = \overrightarrow{P_1P_2} \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$
e scrivere l'equazione parametrica
$$r : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$
Un'equazione cartesiana è
$$r : y = 1.$$

2. Per trovare un vettore direttore della retta è sufficiente calcolare
$$v = \overrightarrow{P_1P_2} \equiv \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},$$
e scrivere l'equazione parametrica
$$r : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$
Un'equazione cartesiana è
$$r : y = 3x - 4.$$

3. Per trovare un vettore direttore della retta è sufficiente calcolare
$$v = \overrightarrow{P_2P_1} \equiv \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$

e scrivere l'equazione parametrica

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana è

$$r : y = 2x + 1.$$

4. Per trovare un vettore direttore della retta è sufficiente calcolare

$$v = \overrightarrow{P_2P_1} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

e scrivere l'equazione parametrica

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana è

$$r : y = -x + 1.$$

5. Per trovare un vettore direttore della retta è sufficiente calcolare

$$v = \overrightarrow{P_1P_2} \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e scrivere l'equazione parametrica

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana è

$$r : y = \frac{x}{2}.$$

6. Per trovare un vettore direttore della retta è sufficiente calcolare

$$v = \overrightarrow{P_2P_1} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

e scrivere l'equazione parametrica

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana è

$$r : x = 0.$$

7. Per trovare un vettore direttore della retta è sufficiente calcolare
$$v = \overrightarrow{P_1P_2} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$
e scrivere l'equazione parametrica
$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$
Un'equazione cartesiana è
$$r : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0. \end{cases}$$

8. Per trovare un vettore direttore della retta è sufficiente calcolare
$$v = \overrightarrow{P_2P_1} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
e scrivere l'equazione parametrica
$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$
Un'equazione cartesiana è
$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0. \end{cases}$$

9. Per trovare un vettore direttore della retta è sufficiente calcolare
$$v = \overrightarrow{P_2P_1} \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
e scrivere l'equazione parametrica
$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$
Un'equazione cartesiana è
$$r : \begin{cases} x - 2z - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

10. Per trovare un vettore direttore della retta è sufficiente calcolare
$$v = \overrightarrow{P_1P_2} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
e scrivere l'equazione parametrica
$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$
Un'equazione cartesiana è
$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y - z = 0. \end{cases}$$

11. Per trovare un vettore direttore della retta è sufficiente calcolare
$$v = \overrightarrow{P_1P_2} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$
e scrivere l'equazione parametrica
$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$
Un'equazione cartesiana è
$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3. Trovare un'equazione parametrica del piano di $\mathbb{R}^3$ passante per tre punti, per un punto e una retta o per due rette (a seconda dei casi). Successivamente trovare anche un'equazione cartesiana di tali piani.

1. $P_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, P_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

2. $P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R};$

3. $P \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R};$

4. $P_1\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, P_2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, P_3\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$;

5. $P\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, r: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$;

6. $P\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, r: \begin{cases} x = z \\ 2x - y + 3 = 0; \end{cases}$

7. $P_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, P_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, P_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$;

8. $r_1: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, t_1 \in \mathbb{R},$
   $r_2: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, t_2 \in \mathbb{R}$;

9. $r_1: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, r_2: \begin{cases} x + 1 = y \\ 3z - 2y = 2; \end{cases}$

10. $P = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}, r: \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ x - y + z = 0; \end{cases}$

11. $P_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, P_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, P_3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$;

12. $r_1: \begin{cases} x + z - 8 = 0 \\ 2y - z + 12 = 0, \end{cases} r_2: \begin{cases} x + y - 2z - 2 = 0 \\ 2x + 3y + 2 = 0. \end{cases}$

Soluzione esercizio 3. 1. Dati tre punti non allineati, si ottengono due vettori direttori del piano nel seguente modo

$$v = \overrightarrow{P_1P_2} \equiv \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$
$$w = \overrightarrow{P_1P_3} \equiv \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Quindi un'equazione parametrica è

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana è

$$\pi : y - 1 = 0.$$

2. Data una retta e un punto esterno a essa, si ha che un vettore direttore del piano coincide con il vettore direttore della retta, cioè

$$v \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mentre un altro si ottiene da

$$w = \overrightarrow{PQ} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dove Q è un punto sulla retta. Quindi un'equazione parametrica è

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana è

$$\pi : x - 2y - 1 = 0.$$

3. Data una retta e un punto esterno a essa, si ha che un vettore direttore del piano coincide con il vettore direttore della retta, cioè

$$v \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

mentre un altro si ottiene da

$$w = \overrightarrow{QP} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

dove Q è un punto sulla retta. Quindi un'equazione parametrica è

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} s_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana è

$$\pi : 2x - 3y - 5 = 0.$$

4. Dati tre punti non allineati, si ottengono due vettori direttori del piano nel seguente modo

$$v = \overrightarrow{P_3P_1} \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w = \overrightarrow{P_3P_2} \equiv \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi un'equazione parametrica è

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana è

$$\pi : x + z - 3 = 0.$$

5. Data una retta e un punto esterno a essa, si ha che un vettore direttore del piano coincide con il vettore direttore della retta, cioè

$$v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mentre un altro si ottiene da

$$w = \overrightarrow{PQ} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

dove Q è un punto sulla retta. Quindi un'equazione parametrica è

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} s_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana è

$$\pi : x - y = 0.$$

6. Un'equazione parametrica di r è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Data una retta e un punto esterno ad essa, si ha che un vettore direttore del piano coincide con il vettore direttore della retta, cioè

$$v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mentre un altro si ottiene da

$$w = \overrightarrow{QP} \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dove Q è un punto sulla retta. Quindi un'equazione parametrica è

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} s_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana è

$$\pi : 3x + y - 5z - 3 = 0.$$

7. Dati tre punti non allineati, si ottengono due vettori direttori del piano nel seguente modo

$$v = \overrightarrow{P_3P_1} \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$w = \overrightarrow{P_3P_2} \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi un'equazione parametrica è

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana è

$$\pi : x + y + z - 1 = 0.$$

8. Date due rette incidenti (le precedenti sono incidenti nel punto di coordinate $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$), si ha che due vettori direttori del piano coincidono con

i vettori direttori delle due rette, cioè

$$v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$w \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi un'equazione parametrica è

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana è

$$\pi : x - y - z + 1 = 0.$$

9. Un'equazione parametrica di r_2 è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Date due rette incidenti (le precedenti sono incidenti nel punto di coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$), si ha che due vettori direttori del piano coincidono con i vettori direttori delle due rette, cioè

$$v \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$w \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Quindi un'equazione parametrica è

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} s_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana è

$$\pi : x - y + 1 = 0.$$

10. Un'equazione parametrica di r è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Data una retta e un punto esterno a essa, si ha che un vettore direttore del piano coincide con il vettore direttore della retta, cioè

$$v \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mentre un altro si ottiene da

$$w = \overrightarrow{PQ} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

dove Q è un punto sulla retta. Quindi un'equazione parametrica è

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} s_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana è

$$\pi : 2x + 3y + 2z - 5 = 0.$$

11. Dati tre punti non allineati, si ottengono due vettori direttori del piano nel seguente modo

$$v = \overrightarrow{P_1P_3} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w = \overrightarrow{P_1P_2} \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi un'equazione parametrica è

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana è

$$\pi : 5x + y - 3z - 1 = 0.$$

12. Un'equazione parametrica di r_1 è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, t_1 \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione parametrica di r_2 è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Date due rette incidenti (le precedenti sono incidenti nel punto di coordinate $\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$), si ha che due vettori direttori del piano coincidono con i vettori direttori delle due rette, cioè

$$v \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$w \equiv \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi un'equazione parametrica è

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} s_2 + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana è

$$\pi : 9x + 14y + 2z + 12 = 0.$$

Esercizio 4. Dire se il punto P dato appartiene alla retta r e/o al piano π assegnati.

1. $P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -z + 2y + 1 = 0 \end{cases}, \pi : x + 2y - 3 = 0;$

2. $P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, r : \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x - y + z + 1 = 0 \end{cases}, \pi : 2x + z = 0;$

3. $P\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, r: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$

   $\pi: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} s_2 + \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R};$

4. $P\begin{pmatrix}6\\-3\\2\end{pmatrix}, r: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$

   $\pi: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\4\\-2\end{pmatrix} s_1 + \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} s_2 + \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}, s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$

Soluzione esercizio 4. Per verificare se un punto appartiene ad una retta, o ad un piano, è sufficiente sostituire le componenti del vettore rappresentante il punto nelle variabili di un'equazione cartesiana della retta, o del piano, e verificare se viene un'uguaglianza vera.

1. Poiché

$$\begin{cases} 0 + 2 \cdot 0 = 0 \\ -1 + 2 \cdot 0 + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0, \end{cases}$$

   allora $P \in r$. Poiché

$$\begin{aligned} 0 + 2 \cdot 0 - 3 &= 0 \\ -3 &= 0, \end{aligned}$$

   allora $P \notin \pi$.

2. Poiché

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 2 + (-2) = 0 \\ 3 \cdot 1 - 2 + (-2) + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2 = 0 \\ 0 = 0, \end{cases}$$

   allora $P \notin r$. Poiché

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + (-2) &= 0 \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

   allora $P \in \pi$.

3. Un'equazione cartesiana della retta r è

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Poiché

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 - 2 = 0 \\ 1 - 1 + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 1 = 0, \end{cases}$$

allora $P \notin r$. Un'equazione cartesiana del piano π è

$$x + y - 3z + 8 = 0.$$

Poiché

$$\begin{aligned} 1 + 2 - 3 \cdot 1 + 8 &= 0 \\ 8 &= 0, \end{aligned}$$

allora $P \notin \pi$.

4. Un'equazione cartesiana della retta r è

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \\ y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Poiché

$$\begin{cases} 6 - 3 \cdot 2 = 0 \\ -3 + 2 \cdot 2 - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0, \end{cases}$$

allora $P \in r$. Un'equazione cartesiana del piano π è

$$x - 3y - 9z + 3 = 0.$$

Poiché

$$\begin{aligned} 6 - 3(-3) - 9 \cdot 2 + 3 &= 0 \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

allora $P \in \pi$.