Soluzioni foglio 8

Pietro Mercuri

1 dicembre 2018

Esercizio 1. Date le seguenti rette in $\mathbb{R}^2$, trovare un'equazione cartesiana (in forma implicita e in forma esplicita quando possibile, individuando il coefficiente angolare e l'intercetta) e un'equazione parametrica (individuando il vettore direttore). Dire, inoltre, se la retta è orizzontale o verticale.

1. $y = 3x + 2$;
2. $3y - 2x - 5 = 0$;
3. $y + 2 = 0$;
4. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$;
5. $x - 6 = 0$;
6. $x - y + 1 = 0$;
7. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$;
8. $3x - 6y - 3 = 0$;
9. $y = \frac{2}{3}x - 3$;
10. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$;
11. $4x + 2 = 0$;
12. $y = -x + 5$;
13. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

Soluzione esercizio 1. Si ricordi che una stessa retta del piano ha infinite equazioni cartesiane in forma implicita e infinite equazioni parametriche, ma un'unica equazione cartesiana in forma esplicita.

1. Per avere un'equazione cartesiana in forma implicita è sufficiente portare tutto dalla stessa parte dell'uguale ottenendo

$$3x - y + 2 = 0.$$

Per avere l'equazione cartesiana in forma esplicita è sufficiente considerare quella data

$$y = 3x + 2,$$

dove il coefficiente angolare (cioè il coefficiente della x) è $m = 3$ e l'intercetta (cioè il termine noto) è $q = 2$. Per ottenere un'equazione parametrica poniamo la x uguale al parametro, cioè $x = t$, e mettendo a sistema con l'equazione in forma esplicita otteniamo

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t + 2, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

con $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ è il vettore direttore ed è il vettore dei coefficienti del parametro t e il terzo è il vettore dei termini noti.

2. Per avere un'equazione cartesiana in forma implicita è sufficiente considerare quella data

$$3y - 2x - 5 = 0.$$

Per avere l'equazione cartesiana in forma esplicita è sufficiente portare tutto, tranne la y, dall'altra parte dell'uguale ottenendo

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3},$$

dove il coefficiente angolare (cioè il coefficiente della x) è $m = \frac{2}{3}$ e l'intercetta (cioè il termine noto) è $q = \frac{5}{3}$. Per ottenere un'equazione parametrica poniamo la x uguale al parametro, cioè $x = t$, e mettendo a sistema con l'equazione in forma esplicita otteniamo

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{2}{3}t + \frac{5}{3}, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix},$$

con $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ è il vettore direttore ed è il vettore dei coefficienti del parametro t e il terzo è il vettore dei termini noti.

3. Per avere un'equazione cartesiana in forma implicita è sufficiente considerare quella data
$$y + 2 = 0.$$
Per avere l'equazione cartesiana in forma esplicita è sufficiente portare tutto, tranne la y, dall'altra parte dell'uguale ottenendo
$$y = -2,$$
dove il coefficiente angolare (cioè il coefficiente della x) è $m = 0$ (quindi la retta è orizzontale) e l'intercetta (cioè il termine noto) è $q = -2$. Per ottenere un'equazione parametrica poniamo la x uguale al parametro, cioè $x = t$, e mettendo a sistema con l'equazione in forma esplicita otteniamo
$$\begin{cases} x = t \\ y = -2, \end{cases}$$
da cui, in forma vettoriale, si ha
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$
con $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è il vettore direttore ed è il vettore dei coefficienti del parametro t e il terzo è il vettore dei termini noti.

4. Per avere un'equazione parametrica è sufficiente considerare quella data
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$
Il vettore direttore è $v \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha
$$\begin{cases} x = 3t \\ y = t + 2, \end{cases}$$

ed eliminiamo il parametro

$$\begin{cases} x = 3t \\ t = y - 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3(y - 2) \\ t = y - 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - 6 \\ t = y - 2, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha un'equazione cartesiana in forma implicita

$$x - 3y + 6 = 0.$$

Per avere l'equazione cartesiana in forma esplicita è sufficiente portare tutto, tranne la y, dall'altra parte dell'uguale ottenendo

$$y = \frac{x}{3} + 2,$$

dove il coefficiente angolare (cioè il coefficiente della x) è $m = \frac{1}{3}$ e l'intercetta (cioè il termine noto) è $q = 2$.

5. Per avere un'equazione cartesiana in forma implicita è sufficiente considerare quella data

$$x - 6 = 0.$$

Poiché la y non è presente (cioè il coefficiente della y è 0) non è possibile esprimere la retta con un'equazione in forma esplicita. Il coefficiente angolare non esiste (a volte si dice che è infinito) e quindi la retta è verticale e l'intercetta non esiste. Per ottenere un'equazione parametrica poniamo la y uguale al parametro, cioè $y = t$ (non è possibile uguagliare la x al parametro perché in questo caso la x non è libera di variare ma è vincolata ad essere uguale a 6, mentre la y in questo caso è libera), e mettendo a sistema con l'equazione in forma implicita data otteniamo

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = t, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è il vettore direttore ed è il vettore dei coefficienti del parametro t e il terzo è il vettore dei termini noti.

6. Per avere un'equazione cartesiana in forma implicita è sufficiente considerare quella data
$$x - y + 1 = 0.$$
Per avere l'equazione cartesiana in forma esplicita è sufficiente portare tutto, tranne la y, dall'altra parte dell'uguale ottenendo
$$y = x + 1,$$
dove il coefficiente angolare (cioè il coefficiente della x) è $m = 1$ e l'intercetta (cioè il termine noto) è $q = 1$. Per ottenere un'equazione parametrica poniamo la x uguale al parametro, cioè $x = t$, e mettendo a sistema con l'equazione in forma esplicita otteniamo
$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 1, \end{cases}$$
da cui, in forma vettoriale, si ha
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
con $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è il vettore direttore ed è il vettore dei coefficienti del parametro t e il terzo è il vettore dei termini noti.

7. Per avere un'equazione parametrica è sufficiente considerare quella data
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$
Il vettore direttore è $v \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2t + 3, \end{cases}$$
ed eliminiamo il parametro
$$\begin{cases} x = -1 \\ t = \frac{y}{2} - \frac{3}{2}, \end{cases}$$
escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha un'equazione cartesiana in forma implicita
$$x + 1 = 0.$$

Poiché la y non è presente (cioè il coefficiente della y è 0) non è possibile esprimere la retta con un'equazione in forma esplicita. Il coefficiente angolare non esiste (a volte si dice che è infinito) e quindi la retta è verticale e l'intercetta non esiste.

8. Per avere un'equazione cartesiana in forma implicita è sufficiente considerare quella data
$$3x - 6y - 3 = 0.$$
Per avere l'equazione cartesiana in forma esplicita è sufficiente portare tutto, tranne la y, dall'altra parte dell'uguale ottenendo
$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2},$$
dove il coefficiente angolare (cioè il coefficiente della x) è $m = \frac{1}{2}$ e l'intercetta (cioè il termine noto) è $q = -\frac{1}{2}$. Per ottenere un'equazione parametrica poniamo la x uguale al parametro, cioè $x = t$, e mettendo a sistema con l'equazione in forma esplicita otteniamo
$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}, \end{cases}$$
da cui, in forma vettoriale, si ha
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$
con $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ è il vettore direttore ed è il vettore dei coefficienti del parametro t e il terzo è il vettore dei termini noti.

9. Per avere un'equazione cartesiana in forma implicita è sufficiente portare tutto dalla stessa parte dell'uguale ottenendo
$$\frac{2}{3}x - y - 3 = 0.$$
Per avere l'equazione cartesiana in forma esplicita è sufficiente considerare quella data
$$y = \frac{2}{3}x - 3,$$
dove il coefficiente angolare (cioè il coefficiente della x) è $m = \frac{2}{3}$ e l'intercetta (cioè il termine noto) è $q = -3$. Per ottenere un'equazione parametrica poniamo la x uguale al parametro, cioè $x = t$, e mettendo a sistema con l'equazione in forma esplicita otteniamo
$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{2}{3}t - 3, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

con $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ è il vettore direttore ed è il vettore dei coefficienti del parametro t e il terzo è il vettore dei termini noti.

10. Per avere un'equazione parametrica è sufficiente considerare quella data

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Il vettore direttore è $v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 1, \end{cases}$$

ed eliminiamo il parametro

$$\begin{cases} t = x - 1 \\ y = x - 1 - 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = x - 1 \\ y = x - 2, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha un'equazione cartesiana in forma implicita

$$x - y - 2 = 0.$$

Per avere l'equazione cartesiana in forma esplicita è sufficiente portare tutto, tranne la y, dall'altra parte dell'uguale ottenendo

$$y = x - 2,$$

dove il coefficiente angolare (cioè il coefficiente della x) è $m = 1$ e l'intercetta (cioè il termine noto) è $q = -2$.

11. Per avere un'equazione cartesiana in forma implicita è sufficiente considerare quella data

$$4x + 2 = 0.$$

Poiché la y non è presente (cioè il coefficiente della y è 0) non è possibile esprimere la retta con un'equazione in forma esplicita. Il coefficiente angolare non esiste (a volte si dice che è infinito) e quindi la retta è verticale e l'intercetta non esiste. Per ottenere un'equazione parametrica poniamo la y uguale al parametro, cioè $y = t$ (non è possibile uguagliare la x al parametro perché in questo caso la x non è libera di variare ma è vincolata ad essere uguale a $-\frac{1}{2}$, mentre la y in questo caso è libera), e mettendo a sistema con l'equazione in forma implicita data otteniamo

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = t, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è il vettore direttore ed è il vettore dei coefficienti del parametro t e il terzo è il vettore dei termini noti.

12. Per avere un'equazione cartesiana in forma implicita è sufficiente portare tutto dalla stessa parte dell'uguale ottenendo

$$x + y - 5 = 0.$$

Per avere l'equazione cartesiana in forma esplicita è sufficiente considerare quella data

$$y = -x + 5,$$

dove il coefficiente angolare (cioè il coefficiente della x) è $m = -1$ e l'intercetta (cioè il termine noto) è $q = 5$. Per ottenere un'equazione parametrica poniamo la x uguale al parametro, cioè $x = t$, e mettendo a sistema con l'equazione in forma esplicita otteniamo

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t + 5, \end{cases}$$

da cui, in forma vettoriale, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

con $t \in \mathbb{R}$. Si osservi che il primo vettore è il vettore delle variabili, il secondo $v \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è il vettore direttore ed è il vettore dei coefficienti del parametro t e il terzo è il vettore dei termini noti.

13. Per avere un'equazione parametrica è sufficiente considerare quella data
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$
Il vettore direttore è $v \equiv \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha
$$\begin{cases} x = 7t + 1 \\ y = 1, \end{cases}$$
ed eliminiamo il parametro
$$\begin{cases} t = \frac{x}{7} - \frac{1}{7} \\ y = 1, \end{cases}$$
escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha un'equazione cartesiana in forma implicita
$$y - 1 = 0.$$
Per avere l'equazione cartesiana in forma esplicita è sufficiente portare tutto, tranne la y, dall'altra parte dell'uguale ottenendo
$$y = 1,$$
dove il coefficiente angolare (cioè il coefficiente della x) è $m = 0$ (quindi la retta è orizzontale) e l'intercetta (cioè il termine noto) è $q = 1$.

Esercizio 2. Dire quali delle seguenti espressioni rappresentano la stessa retta calcolandone un'equazione cartesiana in forma esplicita. Data una coppia di retta, verificare il risultato ottenuto trovando esplicitamente due punti qualsiasi di una retta e verificando se appartengono all'altra oppure no.

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R};$
2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R};$
3. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R};$
4. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R};$

5. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R};$

6. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$

Soluzione esercizio 2. 1. Consideriamo la retta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t, \end{cases}$$

ed eliminiamo il parametro

$$\begin{cases} t = x - 1 \\ y = 2(x - 1), \end{cases}$$
$$\begin{cases} t = x - 1 \\ y = 2x - 2, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha l'equazione cartesiana in forma esplicita

$$y = 2x - 2.$$

2. Consideriamo la retta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha

$$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = -4t, \end{cases}$$

ed eliminiamo il parametro

$$\begin{cases} t = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ y = -2(-x + 1), \end{cases}$$
$$\begin{cases} t = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ y = 2x - 2, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha l'equazione cartesiana in forma esplicita

$$y = 2x - 2.$$

3. Consideriamo la retta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha

$$\begin{cases} x = -t \\ y = -2t + 1, \end{cases}$$

ed eliminiamo il parametro

$$\begin{cases} t = -x \\ y = -2(-x) + 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -x \\ y = 2x + 1, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha l'equazione cartesiana in forma esplicita

$$y = 2x + 1.$$

4. Consideriamo la retta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha

$$\begin{cases} x = t + 4 \\ y = 2t + 6, \end{cases}$$

ed eliminiamo il parametro

$$\begin{cases} t = x - 4 \\ y = 2(x - 4) + 6, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = x - 4 \\ y = 2x - 2, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha l'equazione cartesiana in forma esplicita

$$y = 2x - 2.$$

5. Consideriamo la retta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha

$$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = -4t + 3, \end{cases}$$

ed eliminiamo il parametro

$$\begin{cases} t = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ y = -2(-x + 1) + 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \\ y = 2x + 1, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha l'equazione cartesiana in forma esplicita

$$y = 2x + 1.$$

6. Consideriamo la retta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Per ottenere un'equazione cartesiana scriviamo la precedente equazione vettoriale come un sistema, uguagliando componente per componente si ha

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t, \end{cases}$$

ed eliminiamo il parametro

$$\begin{cases} x = 2y + 1 \\ y = t, \end{cases}$$

escludendo l'equazione in cui si esplicita il parametro si ha l'equazione cartesiana in forma esplicita

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}.$$

Quindi le equazioni 1,2 e 4 rappresentano la stessa retta $y = 2x - 2$, le equazioni 3 e 5 rappresentano la stessa retta $y = 2x + 1$ e l'equazione 6 rappresenta la retta $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ distinta da tutte le altre.

Per la verifica dei punti è sufficiente scegliere due valori per t (ad esempio $t = 0$ e $t = 1$) per trovare due punti della retta nell'equazione parametrica data e sostituirli nell'equazione cartesiana trovata per verificare che l'equazione sia soddisfatta per essi. Ad esempio per la prima retta sostituendo $t = 0$ nell'equazione parametrica si ottiene il punto $(x, y) = (1, 0)$ che soddisfa $y = 2x-2$, infatti $0 = 2\cdot 1-2$; e sostituendo $t = 1$ si ottiene il punto $(x, y) = (2, 2)$ che soddisfa $y = 2x - 2$, infatti $2 = 2 \cdot 2 - 2$.