Simulazione - Esame di geometria - 6 crediti
Ingegneria informatica - a.a. 2016-2017

COGNOME.........................NOME.........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 2 ore e mezza.
- **Ti sono stati consegnati due fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti il tuo cognome, nome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- Le risposte vanno **motivate** brevemente, ma in maniera adeguata e comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno ritirati eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Si consideri il sistema lineare $\Sigma : \begin{cases} (3-k)x + ky + 2kz = 6-k \\ ky + (k^2-k)z = 3. \end{cases}$

3	

(a) Determinare il numero di soluzioni del sistema lineare Σ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Risposta:
Se $k = 0$, il sistema non ha soluzioni.
Se $k = 3$, il sistema ha ∞^2 soluzioni.
Se $k \neq 0$ e $k \neq 3$, il sistema ha ∞^1 soluzioni.

2	

(b) Trovare tutte le soluzioni del sistema lineare Σ per $k = 3$.

Risposta:

$$\begin{cases} x = t_1 \\ y = 1 - 2t_2 \ , \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \\ z = t_2 \end{cases}$$

2	

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, il vettore numerico $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione del sistema lineare Σ.

Risposta:
Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è una soluzione del sistema per nessun valore reale di k.

2. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$, si considerino i sottospazi vettoriali

$$V = L_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}, \quad W = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}\right\}.$$

3	

(a) Calcolare la dimensione e determinare una base (se esiste) dei sottospazi $V \cap W$ e $V + W$. Inoltre, dire se la somma è diretta oppure no.

Risposta:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V + W) = 3,$$
$$\dim_{\mathbb{R}}(V \cap W) = 0,$$
$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base di } V + W \text{ e la somma è diretta,}$$

non esistono basi di $V \cap W$.

2	

(b) Calcolare la dimensione e determinare una base (se esiste) dei sottospazi $V^{\perp}$ e $W^{\perp}$.

Risposta:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V^{\perp}) = 2,$$
$$\dim_{\mathbb{R}}(W^{\perp}) = 3,$$
$$\left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base di } V^{\perp},$$
$$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base di } W^{\perp}.$$

2	

(c) Determinare, se possibile, una base ortonormale dei sottospazi V e $V^{\perp}$.

Risposta:

$$\left\{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\0\\\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{5\sqrt{51}}{51}\\\frac{3\sqrt{51}}{51}\\-\frac{4\sqrt{51}}{51}\\-\frac{\sqrt{51}}{51}\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortonormale di } V,$$
$$\left\{\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{11}}{11}\\\frac{3\sqrt{11}}{11}\\\frac{\sqrt{11}}{11}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{4\sqrt{187}}{187}\\\frac{\sqrt{187}}{187}\\-\frac{7\sqrt{187}}{187}\\\frac{\sqrt{187}}{187}\end{pmatrix}\right\} \text{ è una base ortonormale di } V^{\perp}.$$

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ k^2+k & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4	

(a) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$, la matrice A è diagonalizzabile.

Risposta:

Se $k = 0$ oppure $k = -1$, la matrice è diagonalizzabile.
Se $k \neq 0$ e $k \neq -1$, la matrice non è diagonalizzabile.

4	

(b) Si ponga $k = 0$. Determinare, se possibile, una matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e una matrice invertibile $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tali che $D = M^{-1}AM$. Se possibile, determinare M in modo che sia una matrice ortogonale.

Risposta:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{ è una matrice ortogonale.}$$

4. Sia $RC(O,\mathbf{i},\mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano e sia P un punto di coordinate $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ rispetto a tale riferimento. Sia $RC'(O',\mathbf{i}',\mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse y' la retta $r: x-y+1=0$ orientata rispetto alle y decrescenti, la base $\{\mathbf{i}',\mathbf{j}'\}$ equiversa alla base $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$ e O' punto di intersezione tra la retta r e l'asse y di RC.

4

(a) Determinare le coordinate di P rispetto a RC'.

Risposta:

$$O' = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$
$$\left\{\mathbf{i}' = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}, \mathbf{j}' = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\right\},$$
$$\mathcal{C}_{RC'}(P) = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

4

(b) Esiste una rotazione del piano in senso antiorario, con centro il punto C di intersezione tra la retta r e l'asse x di RC, che mandi il punto O' nel punto P? Se sì determinare l'angolo di rotazione, altrimenti spiegare perché non esiste.

Risposta:

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

5. Sia $RC(O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ un riferimento cartesiano dello spazio e sia P un punto di coordinate $\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ rispetto a tale riferimento. Sia r la retta di equazioni parametriche $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

2

(a) Determinare, usando i quaternioni, l'immagine di P rispetto alla rotazione di angolo $\theta = \frac{\pi}{2}$ e asse r orientato con l'orientazione data da $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

Risposta:

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i + \frac{\sqrt{3}}{6}j + \frac{\sqrt{3}}{3}k,$$
$$\mathcal{C}_{RC}(P') = \begin{pmatrix}-\frac{4\sqrt{6}}{3}\\ \frac{2\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}.$$