Soluzioni foglio 11

Pietro Mercuri

20 dicembre 2018

Esercizio 1.

1. Siano $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano e P il punto con coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto a RC. Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse x' la retta r con equazione cartesiana $x - y + 2 = 0$ orientata rispetto alle y crescenti, la base $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ equiversa alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e O' il punto di intersezione della retta r con l'asse x. Determinare le coordinate di P rispetto a RC' e fare il grafico che rappresenti il punto P, i vecchi e i nuovi assi.

2. Siano $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano e P il punto con coordinate $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ rispetto a RC. Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse y' la retta r con equazione cartesiana $2x + y - 1 = 0$ orientata rispetto alle x crescenti, la base $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ contraversa alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e O' il punto della retta di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a RC. Determinare le coordinate di P rispetto a RC' e fare il grafico che rappresenti il punto P, i vecchi e i nuovi assi.

3. Siano $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano e P il punto con coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ rispetto a RC. Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse x' la retta r con equazione cartesiana $x + 3y + 1 = 0$ orientata rispetto alle x decrescenti, la base $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ equiversa alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e O' il punto della retta di coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ rispetto a RC. Determinare le coordinate di P rispetto a RC' e fare il grafico che rappresenti il punto P, i vecchi e i nuovi assi.

4. Siano $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano e P il punto con coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a RC. Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse y' la retta r con equazione cartesiana $5x - 7y - 3 = 0$ orientata rispetto alle y decrescenti, la base $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ equiversa alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e O' il punto di intersezione della retta

r con l'asse y. Determinare le coordinate di P rispetto a RC' e fare il grafico che rappresenti il punto P, i vecchi e i nuovi assi.

5. Siano $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano e P il punto con coordinate $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ rispetto a RC. Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse x' la retta r con equazione cartesiana $x + y - 6 = 0$ orientata rispetto alle x decrescenti, la base $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ contraversa alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e O' il punto della retta di coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto a RC. Determinare le coordinate di P rispetto a RC' e fare il grafico che rappresenti il punto P, i vecchi e i nuovi assi.

Soluzione esercizio 1. 1. Un vettore direttore della retta r orientata con le y crescenti (cioè la coordinata relativa a y di tale vettore è positiva) è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi il versore corrispondente è $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Poiché questa retta è l'asse x' si ha $\mathbf{i}' \equiv \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Poiché il versore $\mathbf{j}'$ deve essere ortogonale a $\mathbf{i}'$, può essere o $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Poiché le due basi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ devono essere equiverse, la matrice M del cambio di coordinate dalla prima base alla seconda (le cui colonne sono formate dagli elementi della prima base) deve avere determinante positivo (poiché le basi sono ortonormali il determinante deve essere uguale a 1). Quindi necessariamente $M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{j}' \equiv \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Il punto O' ha coordinate $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a RC, quindi

$$C_{RC'}(P) = M^T \Big(C_{RC}(P) - C_{RC}(O') \Big) = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Un vettore direttore della retta r orientata con le x crescenti (cioè la coordinata relativa a x di tale vettore è positiva) è $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Quindi il versore corrispondente è $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$. Poiché questa retta è l'asse y' si ha $\mathbf{j}' \equiv \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$. Poiché il versore $\mathbf{i}'$ deve essere ortogonale a $\mathbf{j}'$, può essere o $\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$. Poiché le due basi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$

devono essere contraverse, la matrice M del cambio di coordinate dalla prima base alla seconda (le cui colonne sono formate dagli elementi della prima base) deve avere determinante negativo (poiché le basi sono ortonormali il determinante deve essere uguale a -1). Quindi necessariamente $M = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{i}' \equiv \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$. Il punto O' ha coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a RC, quindi

$$C_{RC'}(P) = M^T \Big(C_{RC}(P) - C_{RC}(O') \Big) = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{9\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

3. Un vettore direttore della retta r orientata con le x decrescenti (cioè la coordinata relativa a x di tale vettore è negativa) è $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi il versore corrispondente è $\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}$. Poiché questa retta è l'asse x' si ha $\mathbf{i}' \equiv \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}$. Poiché il versore $\mathbf{j}'$ deve essere ortogonale a $\mathbf{i}'$, può essere o $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}$. Poiché le due basi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ devono essere equiverse, la matrice M del cambio di coordinate dalla prima base alla seconda (le cui colonne sono formate dagli elementi della prima base) deve avere determinante positivo (poiché le basi sono ortonormali il determinante deve essere uguale a 1). Quindi necessariamente $M = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{10}}{10} & -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} & -\frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{j}' \equiv \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}$. Il punto O' ha coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ rispetto a RC, quindi

$$C_{RC'}(P) = M^T \Big(C_{RC}(P) - C_{RC}(O') \Big) = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}.$$

4. Un vettore direttore della retta r orientata con le y decrescenti (cioè la coordinata relativa a y di tale vettore è negativa) è $\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}$. Quindi il versore corrispondente è $\frac{1}{\sqrt{74}} \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7\sqrt{74}}{74} \\ -\frac{5\sqrt{74}}{74} \end{pmatrix}$. Poiché questa retta è l'asse y' si ha $\mathbf{j}' \equiv \begin{pmatrix} -\frac{7\sqrt{74}}{74} \\ -\frac{5\sqrt{74}}{74} \end{pmatrix}$. Poiché il versore $\mathbf{i}'$ deve essere ortogo-

nale a $\mathbf{j}'$, può essere o $\begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{74}}{74} \\ \frac{7\sqrt{74}}{74} \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{74}}{74} \\ -\frac{7\sqrt{74}}{74} \end{pmatrix}$. Poiché le due basi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ devono essere equiverse, la matrice M del cambio di coordinate dalla prima base alla seconda (le cui colonne sono formate dagli elementi della prima base) deve avere determinante positivo (poiché le basi sono ortonormali il determinante deve essere uguale a 1). Quindi necessariamente $M = \begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{74}}{74} & -\frac{7\sqrt{74}}{74} \\ \frac{7\sqrt{74}}{74} & -\frac{5\sqrt{74}}{74} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{i}' \equiv \begin{pmatrix} -\frac{5\sqrt{74}}{74} \\ \frac{7\sqrt{74}}{74} \end{pmatrix}$. Il punto O' ha coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$ rispetto a RC, quindi

$$C_{RC'}(P) = M^T \Big(C_{RC}(P) - C_{RC}(O') \Big) = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{74}}{74} \\ \frac{99\sqrt{74}}{518} \end{pmatrix}.$$

5. Un vettore direttore della retta r orientata con le x decrescenti (cioè la coordinata relativa a x di tale vettore è negativa) è $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi il versore corrispondente è $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Poiché questa retta è l'asse x' si ha $\mathbf{i}' \equiv \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Poiché il versore $\mathbf{j}'$ deve essere ortogonale a $\mathbf{i}'$, può essere o $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Poiché le due basi $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ devono essere contraverse, la matrice M del cambio di coordinate dalla prima base alla seconda (le cui colonne sono formate dagli elementi della prima base) deve avere determinante negativo (poiché le basi sono ortonormali il determinante deve essere uguale a -1). Quindi necessariamente $M = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{j}' \equiv \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Il punto O' ha coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto a RC, quindi

$$C_{RC'}(P) = M^T \Big(C_{RC}(P) - C_{RC}(O') \Big) = \begin{pmatrix} -\frac{9\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Trovare l'immagine del punto P dato ruotato rispetto al punto C di angolo θ in senso antiorario.

1. $P \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{\pi}{6};$

2. $P \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{\pi}{2};$

3. $P\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\quad C\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{4}$;

4. $P\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $\quad C\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{3}$;

5. $P\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\quad C\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\quad \theta = -\frac{\pi}{4}$;

6. $P\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\quad C\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\quad \theta = -\frac{\pi}{2}$;

7. $P\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, $\quad C\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\quad \theta = \frac{2}{3}\pi$;

8. $P\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\quad C\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{6}$;

9. $P\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, $\quad C\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{2}$;

10. $P\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $\quad C\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{4}$;

11. $P\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $\quad C\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{3}$;

12. $P\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\quad C\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\quad \theta = -\frac{\pi}{4}$;

13. $P\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\quad C\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $\quad \theta = -\frac{\pi}{2}$;

14. $P\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, $\quad C\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $\quad \theta = \frac{2}{3}\pi$.

Soluzione esercizio 2. Sia $P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. La matrice di rotazione con centro O è

$$R(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Le coordinate dell'immagine P' di P sono

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = R(\theta)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Se la rotazione ha centro

$$C\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix},$$

allora le coordinate dell'immagine P' di P sono

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

1.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

2.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

4.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

5.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

6.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

7.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} - 2 \end{pmatrix}.$$

8.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

9.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

10.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} + 3 \\ -4\sqrt{2} + 4 \end{pmatrix}.$$

11.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}.$$

12.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}-1 \\ -\sqrt{2}+2 \end{pmatrix}.$$

13.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

14.
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{3}}{2}-2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Dati i quaternioni q_1 e q_2, calcolare q_1+q_2, q_1q_2, q_2q_1, q_1^*, q_2^*, $|q_1|$, $|q_2|$, q_1^{-1}, q_2^{-1}.

1. $q_1 = 1+i-k$, $q_2 = -2-3j$;
2. $q_1 = -i+2j$, $q_2 = -1+i+j+k$;
3. $q_1 = 2i-j+2k$, $q_2 = j-k$;
4. $q_1 = 3-i+2j$, $q_2 = 3-i$;
5. $q_1 = 4+2i-j+3k$, $q_2 = 1-i-3j+2k$.

Soluzione esercizio 3. Si ricordi che, dati due quaternioni $q_1 = a_1+b_1i+c_1j+d_1k$ e $q_2 = a_2+b_2i+c_2j+d_2k$, la somma è

$$q_1+q_2 = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i+(c_1+c_2)j+(d_1+d_2)k,$$

e il prodotto

$$\begin{aligned} q_1q_2 = {} & (a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)+(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)i+ \\ & +(a_1c_2+c_1a_2+d_1b_2-b_1d_2)j+(a_1d_2+d_1a_2+b_1c_2-c_1b_2)k, \end{aligned}$$

cioè si fa come un prodotto di polinomi ricordando le seguenti relazioni

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

che implicano

$$\begin{aligned} ij &= k, \quad ji = -k, \\ jk &= i, \quad kj = -i, \\ ki &= j, \quad ik = -j. \end{aligned}$$

Inoltre si ricordi che il coniugato cambia segno alla parte immaginaria

$$q_1^* = a_1-b_1i-c_1j-d_1k,$$

il modulo è

$$|q_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2} = \sqrt{q_1 q_1^*} = \sqrt{q_1^* q_1},$$

e l'inverso è

$$q_1^{-1} = \frac{q_1^*}{|q_1|^2}.$$

1.

$$\begin{aligned}
q_1 + q_2 &= -1 + i - 3j - k, \\
q_1 q_2 &= -2 - 5i - 3j - k, \\
q_2 q_1 &= -2 + i - 3j + 5k, \\
q_1^* &= 1 - i + k, \\
q_2^* &= -2 + 3j, \\
|q_1| &= \sqrt{3}, \\
|q_2| &= \sqrt{13}, \\
q_1^{-1} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i + \frac{1}{3}k, \\
q_2^{-1} &= -\frac{2}{13} + \frac{3}{13}j.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
q_1 + q_2 &= -1 + 3j + k, \\
q_1 q_2 &= -1 + 3i - j - 3k, \\
q_2 q_1 &= -1 - i - 3j + 3k, \\
q_1^* &= i - 2j, \\
q_2^* &= -1 - i - j - k, \\
|q_1| &= \sqrt{5}, \\
|q_2| &= 2, \\
q_1^{-1} &= \frac{1}{5}i - \frac{2}{5}j, \\
q_2^{-1} &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i - \frac{1}{4}j - \frac{1}{4}k.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
q_1 + q_2 &= 2i + k,\\
q_1 q_2 &= 3 - i + 2j + 2k,\\
q_2 q_1 &= 3 + i - 2j - 2k,\\
q_1^* &= -2i + j - 2k,\\
q_2^* &= -j + k,\\
|q_1| &= 3,\\
|q_2| &= \sqrt{2},\\
q_1^{-1} &= -\frac{2}{9}i + \frac{1}{9}j - \frac{2}{9}k,\\
q_2^{-1} &= -\frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
q_1 + q_2 &= 6 - 2i + 2j\\
q_1 q_2 &= 8 - 6i + 6j + 2k,\\
q_2 q_1 &= 8 - 6i + 6j - 2k,\\
q_1^* &= 3 + i - 2j,\\
q_2^* &= 3 + i,\\
|q_1| &= \sqrt{14},\\
|q_2| &= \sqrt{10},\\
q_1^{-1} &= \frac{3}{14} + \frac{1}{14}i - \frac{2}{7}j,\\
q_2^{-1} &= \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
q_1 + q_2 &= 5 + i - 4j + 5k,\\
q_1 q_2 &= -3 + 5i - 20j + 4k,\\
q_2 q_1 &= -3 - 9i - 6j + 18k,\\
q_1^* &= 4 - 2i + j - 3k,\\
q_2^* &= 1 + i + 3j - 2k,\\
|q_1| &= \sqrt{30},\\
|q_2| &= \sqrt{15},\\
q_1^{-1} &= \frac{2}{15} - \frac{1}{15}i + \frac{1}{30}j - \frac{1}{10}k,\\
q_2^{-1} &= \frac{1}{15} + \frac{1}{15}i + \frac{1}{5}j - \frac{2}{15}k.
\end{aligned}$$

Esercizio 4. Trovare l'immagine del punto P dato ruotato rispetto all'asse a passante per l'origine O di angolo θ in senso antiorario sia usando la matrice di rotazione, sia usando i quaternioni.

1. $P\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\quad a:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}, \quad \theta=\frac{\pi}{2};$

2. $P\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\quad a:\begin{cases}x=t\\y=t\\z=0\end{cases}, t\in\mathbb{R}, \quad \theta=\frac{\pi}{2};$

3. $P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\quad a:\begin{cases}x=0\\y=-t\\z=t\end{cases}, t\in\mathbb{R}, \quad \theta=-\frac{\pi}{2};$

4. $P\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\quad a:\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}, \quad \theta=\frac{\pi}{3};$

Soluzione esercizio 4. Sia $P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Sia $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}$ il versore dell'asse di rotazione normalizzato, cioè $\|\mathbf{u}\|=1$. La matrice di rotazione è

$$R(\theta,\mathbf{u})=\begin{pmatrix}l^2+(1-l^2)\cos\theta & lm(1-\cos\theta)-n\sin\theta & ln(1-\cos\theta)+m\sin\theta\\ lm(1-\cos\theta)+n\sin\theta & m^2+(1-m^2)\cos\theta & mn(1-\cos\theta)-l\sin\theta\\ ln(1-\cos\theta)-m\sin\theta & mn(1-\cos\theta)+l\sin\theta & n^2+(1-n^2)\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Le coordinate dell'immagine P' di P sono

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=R(\theta,\mathbf{u})\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Il quaternione associato a P è

$$p=xi+yj+zk,$$

e il quaternione associato a θ è

$$q=\cos\frac{\theta}{2}+(li+mj+nk)\sin\frac{\theta}{2}.$$

L'immagine P' di P è associata al quaternione

$$p'=qpq^{-1}.$$

1. Un vettore direttore dell'asse è $\mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, quindi

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice di rotazione è

$$R(\theta, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Il quaternione associato a P è

$$p = 2i + j,$$

e quello associato alla rotazione è

$$q = \cos\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}k\right)\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}k.$$

Quindi

$$p' = qpq^{-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}k\right)(2i + j)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}k\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i - \sqrt{2}j + \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)k,$$

e

$$P' \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} \\ -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

2. Un vettore direttore dell'asse è $\mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice di rotazione è

$$R(\theta, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Il quaternione associato a P è

$$p = j - k,$$

e quello associato alla rotazione è

$$q = \cos\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j.$$

Quindi

$$\begin{aligned} p' = qpq^{-1} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j\right)(j-k)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)j + \frac{\sqrt{2}}{2}k, \end{aligned}$$

e

$$P'\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

3. Un vettore direttore dell'asse è $\mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice di rotazione è

$$R(\theta, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Il quaternione associato a P è

$$p = i + j + k,$$

e quello associato alla rotazione è

$$q = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}j + \frac{\sqrt{2}}{2}k\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k.$$

Quindi

$$p' = qpq^{-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k\right)(i+j+k)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k\right) =$$

$$= \sqrt{2}i + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)j + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)k,$$

e

$$P' \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

4. Un vettore direttore dell'asse è $\mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, quindi

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

La matrice di rotazione è

$$R(\theta, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Il quaternione associato a P è

$$p = i + 2k,$$

e quello associato alla rotazione è

$$q = \cos\frac{\pi}{6} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}i - \frac{\sqrt{3}}{3}j - \frac{\sqrt{3}}{3}k\right)\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i - \frac{\sqrt{3}}{6}j - \frac{\sqrt{3}}{6}k.$$

Quindi

$$p' = qpq^{-1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i - \frac{\sqrt{3}}{6}j - \frac{\sqrt{3}}{6}k\right)(i+2k)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i + \frac{\sqrt{3}}{6}j + \frac{\sqrt{3}}{6}k\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}i - \frac{4}{3}j + \frac{5}{3}k,$$

e

$$P' \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$