22/01/2020 - Esame di geometria - 6 crediti
Ingegneria informatica - a.a. 2019-2020

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

ISTRUZIONI

- La prova dura 2 ore e mezza.
  Se si volesse effettuare la seconda prova di esonero, barrare questa casella: ☐
  In tal caso si hanno a disposizione 90 minuti e gli esercizi da risolvere sono il 3, il 4 e il 5.
- **Ti sono stati consegnati due fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti, in STAMPATELLO leggibile, il tuo cognome, nome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- Le risposte vanno **motivate** brevemente, ma in maniera adeguata e comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno corretti eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia $\Sigma : A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ il sistema lineare dato da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & k & k \\ 1 & 2 & k-1 & k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ k^2 - k - 1 \end{pmatrix},$$

con k parametro reale e sia Σ_0 il sistema lineare omogeneo associato a Σ.

3	

(a) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni del sistema lineare Σ.

Risposta:
Se $k = \pm\sqrt{2}$, allora Σ ha ∞^2 soluzioni.
Se $k \neq \pm\sqrt{2}$, allora Σ non ha soluzioni.

3	

(b) Nel caso $k = \sqrt{2}$, determinare esplicitamente tutte le soluzioni di Σ_0.

Risposta:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 \\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}t_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \quad \text{con } t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

2	

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si ha $\dim_{\mathbb{R}}(\Sigma_0) > 2$.

Risposta:
Per nessun $k \in \mathbb{R}$.

2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx + 2y + 3z \\ x + y + 2kz \\ y + z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

3	

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la funzione f è invertibile e nel caso $k = 0$ calcolare esplicitamente l'inversa (se possibile).

Risposta:
Se $k \neq 1$ e $k \neq -\frac{1}{2}$, la funzione f è invertibile e se $k = 0$ l'inversa è

$$f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - 3z \\ -x + 3kz \\ x - 2z \end{pmatrix}.$$

3	

(b) Nel caso $k = 1$, determinare $f^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Risposta:

$$f^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfismo con matrice rappresentativa, rispetto alla base canonica sia nel dominio che nel codominio, data da $A = \begin{pmatrix} 2 & 1-k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^3-k+4 \\ 0 & 0 & 5-k^2 & -6 \end{pmatrix}$.

2	

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di f.

Risposta:
Per $k = \pm 1$.

4	

(b) Nel caso $k = 1$, determinare se f è diagonalizzabile e, in tal caso, trovare una matrice D diagonale e una matrice $M \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, tali che $D = M^{-1}AM$. Se possibile trovare M ortogonale.

Risposta:
L'endomorfismo f è diagonalizzabile e si ha

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

4. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano e siano O', C e P punti di coordinate $O'\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $P\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a tale riferimento.

4	

(a) Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse y' la retta $r\colon 2x + y - 1 = 0$ orientata rispetto alle x crescenti e la base $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ equiversa alla base $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. Determinare le coordinate di P rispetto a RC' e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$\mathbf{i}' \equiv \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \ \mathbf{j}' \equiv \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},$$

$$C_{RC'}(P) = \begin{pmatrix} \frac{6\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{13\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

4	

(b) Sia P' l'immagine del punto P rispetto alla rotazione del piano in senso antiorario di centro C e angolo $\theta = \frac{5}{4}\pi$. Determinare le coordinate di P' rispetto a RC e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{2} \\ -\frac{2}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$
$$C_{RC}(P') = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}-12}{2} \\ \frac{-5\sqrt{2}-2}{2} \end{pmatrix}.$$

5. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento cartesiano dello spazio. Siano P un punto di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, a una retta e π un piano di equazioni

$$a: \begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad \pi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

2	

(a) Calcolare la distanza $d(P, \pi)$ del punto P dal piano π.

Risposta:

$$d(P, \pi) = \frac{7\sqrt{14}}{14}.$$

2	

(b) Determinare, usando i quaternioni, l'immagine P' del punto P rispetto alla rotazione di angolo $\theta = \frac{2}{3}\pi$ e asse la retta a orientata rispetto alle y crescenti.

Risposta:

$$q = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} + \frac{j}{2} + \frac{k}{2},$$
$$C_{RC}(P') = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$