18/02/2019 - Esame di geometria - 6 crediti
Ingegneria informatica - a.a. 2018-2019

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 2 ore e mezza.
- **Ti sono stati consegnati due fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti, in STAMPATELLO leggibile, il tuo cognome, nome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- Le risposte vanno **motivate** brevemente, ma in maniera adeguata e comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno corretti eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare data da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ x-y-z \\ 3y+2z \\ x+y+6z \end{pmatrix}$.

2	

(a) Determinare $f^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Risposta:

$$f^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

3	

(b) Dati gli insiemi $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, verificare che $\mathcal{B}_1$ sia una base di $\mathbb{R}^3$ e che $\mathcal{B}_2$ sia una base di $\mathbb{R}^4$. Calcolare, inoltre, la matrice $A_{f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ rappresentativa di f rispetto alle due basi date.

Risposta:

$$A_{f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{17}{3} \\ \frac{11}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{26}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{25}{3} \end{pmatrix}.$$

3 (c) Determinare la dimensione e una base (se esiste) di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$. Dire, inoltre, se f è iniettiva, suriettiva e/o biiettiva.

Risposta:

$\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 0$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f) = 3$,

$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e non esistono basi di $\ker f$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathrm{Im} f$.

Quindi la funzione f è iniettiva ma non suriettiva né biiettiva.

2. Siano U e W i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ dati da:

$$U : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5, \begin{cases} x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \right\}, \quad W = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

2 (a) Calcolare la dimensione, la codimensione e determinare una base (se esiste) dei sottospazi U e W.

Risposta:

$\dim_{\mathbb{R}}(U) = 3,\ \mathrm{codim}_{\mathbb{R}}(U) = 2$, $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 3,\ \mathrm{codim}_{\mathbb{R}}(W) = 2$,

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di U, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di W.

3 (b) Calcolare la dimensione e determinare una base (se esiste) dei sottospazi $U \cap W$ e $U + W$. Inoltre dire se la somma $U + W$ è diretta.

Risposta:

$\dim_{\mathbb{R}}(U + W) = 5$, $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 1$,

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $U + W$, $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $U \cap W$.

La somma non è diretta, poiché l'intersezione non è banale.

2 (c) Determinare una base ortonormale (se esiste) del sottospazio W.

Risposta:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{322}} \begin{pmatrix} -6 \\ 13 \\ -4 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base ortonormale di } W.$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo con matrice rappresentativa, rispetto alla base canonica sia nel dominio che nel codominio, data da $A = \begin{pmatrix} -20 & -25 & -22 \\ 6 & 11 & 12 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

4	

(a) Determinare se f è diagonalizzabile e, in tal caso, trovare una matrice D diagonale e una matrice $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, tali che $D = M^{-1}AM$. Se possibile trovare M ortogonale.

Risposta:
L'endomorfismo f è diagonalizzabile e si ha

$$D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$
$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano e siano A, B e P punti di coordinate $A\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a tale riferimento.

4	

(a) Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse y' la retta r passante per A e B orientata da B verso A, la base $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ equiversa alla base $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ e $O' = A$. Determinare le coordinate di P rispetto a RC' e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$\mathbf{i}' \equiv \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{13}}{13} \\ -\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{pmatrix}, \ \mathbf{j}' \equiv \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ -\frac{3\sqrt{13}}{13} \end{pmatrix},$$
$$C_{RC'}(P) = \begin{pmatrix} \frac{6\sqrt{13}}{13} \\ -\frac{17\sqrt{13}}{13} \end{pmatrix}.$$

4	

(b) Sia C il punto del piano con coordinate $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ rispetto a RC. Sia P' l'immagine del punto P rispetto alla rotazione del piano in senso antiorario di centro C e angolo $\theta = \frac{5}{6}\pi$. Determinare le coordinate di P' rispetto a RC e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix},$$
$$C_{RC}(P') = \begin{pmatrix}2\sqrt{3}+5\\ 2\sqrt{3}+3\end{pmatrix}.$$

5. Sia $RC(O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ un riferimento cartesiano dello spazio. Siano P_0, P_1, P_2, P_3 punti di coordinate $P_0\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, P_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, P_2\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, P_3\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.

3	

(a) Determinare se i quattro punti dati sono complanari. Inoltre, sia T il tetraedro con vertici i quattro punti dati, calcolare il volume $\mathrm{Vol}(T)$ del tetraedro.

Risposta:

$$P_0P_1 \equiv \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}, P_0P_2 \equiv \begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}, P_0P_3 \equiv \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Poiché $\det\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & -3 & 1\end{pmatrix} = 8 \neq 0$, i punti non sono complanari e si ha

$$\mathrm{Vol}(T) = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & -3 & 1\end{pmatrix}\right| = \frac{4}{3}.$$

2	

(b) Determinare, usando i quaternioni, l'immagine P' del punto $P = P_2$ rispetto alla rotazione di angolo $\theta = \frac{2}{3}\pi$ e asse la retta a passante per l'origine O e per il punto P_0 orientata rispetto alle z crescenti.

Risposta:

$$q = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4}i + \frac{\sqrt{6}}{4}k,$$
$$C_{RC}(P') = \begin{pmatrix}\frac{-6-\sqrt{6}}{4}\\ \frac{-1+\sqrt{6}}{2}\\ \frac{-2+\sqrt{6}}{4}\end{pmatrix}.$$