12/06/2017 - ESAME DI GEOMETRIA - 6 CREDITI
INGEGNERIA INFORMATICA - A.A. 2016-2017

COGNOME..........................NOME..........................N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 2 ore e mezza.
- **Ti sono stati consegnati due fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti, in stampatello leggibile, il tuo cognome, nome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- Le risposte vanno **motivate** brevemente, ma in maniera adeguata e comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno corretti eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Si consideri il sistema lineare $\Sigma : \begin{cases} x + (1-k)y + z = 2 \\ k(x+z) - 1 = k \\ 2x + 2z = 4. \end{cases}$

3	

(a) Determinare il numero di soluzioni del sistema lineare Σ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Risposta:
Se $k \neq 1$, il sistema non ha soluzioni.
Se $k = 1$, il sistema ha ∞^2 soluzioni.

2	

(b) Trovare, se presenti, tutte le soluzioni del sistema lineare Σ per $k = 1$.

Risposta:

$$\begin{cases} x = -t_2 + 2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

2	

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, il vettore numerico $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione del sistema lineare Σ.

Risposta:
Per $k = 1$.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice associata alla funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$ nel dominio e nel codominio.

2	

(a) Determinare se la funzione f è iniettiva, se è suriettiva e se è biiettiva.

Risposta:
Poiché $\det(A) = -4 \neq 0$, la funzione f è sia iniettiva, che suriettiva, che biiettiva.

2	

(b) Calcolare , se esistono, la matrice rappresentativa B di f^{-1} e la matrice rappresentativa C di $g = f^2 = f \circ f$, rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_3$ nel dominio e nel codominio.

Risposta:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3	

(c) Calcolare la matrice rappresentativa $A_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ nel dominio e nel codominio.

Risposta:

$$A_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2	

(d) Calcolare il polinomio caratteristico e lo spettro σ_A della matrice A.

Risposta:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4,$$
$$\sigma_A = \{-2, 1, 2\}.$$

3	

(e) Calcolare la dimensione e determinare una base degli autospazi di f.

Risposta:

$$\dim_{\mathbb{R}}(E(-2)) = 1,$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E(-2),$$
$$\dim_{\mathbb{R}}(E(1)) = 1,$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E(1),$$
$$\dim_{\mathbb{R}}(E(2)) = 1,$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } E(2).$$

12/06/2017 - Esame di geometria - 6 crediti
Ingegneria informatica - a.a. 2016-2017

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano e sia P un punto di coordinate $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ rispetto a tale riferimento.

4

(a) Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse x' la retta r_1 con equazione cartesiana $x + 3y - 5 = 0$ orientata rispetto alle y decrescenti, la base $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ equiversa alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e O' con coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto al riferimento RC. Determinare le coordinate di P rispetto a RC'.

Risposta:

$$\left\{ \mathbf{i}' = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}, \mathbf{j}' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{C}_{RC'}(P) = \begin{pmatrix} -\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4

(b) Sia C il punto del piano con coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto a RC. Sia P' l'immagine del punto P rispetto alla rotazione del piano in senso antiorario di centro C e angolo $\theta = -\frac{\pi}{3}$. Determinare le coordinate di P' rispetto a RC.

Risposta:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_{RC}(P') = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5+2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

4. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento cartesiano dello spazio. Sia π il piano di equazioni parametriche

$$\pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

e r la retta di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + z = -3. \end{cases}$$

3

(a) Determinare la posizione reciproca tra il piano π e la retta r e determinare l'angolo θ formato dalla retta con il piano.

Risposta:
La retta e il piano sono incidenti. L'angolo formato è $\theta = \frac{\pi}{2}$.

2

(b) Sia P un punto di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto al riferimento RC. Determinare, usando i quaternioni, l'immagine P' di P rispetto alla rotazione di angolo $\theta = \frac{2}{3}\pi$ e asse al retta r orientata rispetto alle z decrescenti.

Risposta:

$$q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k,$$

$$\mathcal{C}_{RC}(P') = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$