Soluzioni foglio 6

Pietro Mercuri

17 novembre 2018

Esercizio 1. Dati i sottospazi vettoriali U e W di uno spazio vettoriale V sul campo K, determinare la dimensione e una base di $U, W, U \cap W, U + W$. Dire inoltre se la somma è diretta.

1.
$$\begin{aligned} &V = \mathbb{R}^3, \quad K = \mathbb{R}, \\ &U : \begin{cases} x - y + 3z = 0, \end{cases} \\ &W : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + 2z = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} &V = \mathbb{R}^3, \quad K = \mathbb{R}, \\ &U : \begin{cases} x + 3y + 3z = 0, \end{cases} \\ &W : \begin{cases} y + 5z = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} &V = \mathbb{R}^3, \quad K = \mathbb{R}, \\ &U = L_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \\ &W : \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ x + z = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} &V = \mathbb{R}^4, \quad K = \mathbb{R}, \\ &U = L_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ &W : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

5.

$$
\begin{aligned}
&V = \mathbb{R}^4, \quad K = \mathbb{R}, \\
&U : \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases} \\
&W = L_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
&V = \mathbb{R}^4, \quad K = \mathbb{R}, \\
&U : \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_4 = 0, \end{cases} \\
&W : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Soluzione esercizio 1. 1. Risolvendo il sistema lineare omogeneo dato dalle equazioni cartesiane di U, si ottiene che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di U e, quindi $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 2$. Risolvendo il sistema lineare omogeneo dato dalle equazioni cartesiane di W, si ottiene che $\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di W e, quindi $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 1$. Sappiamo che il sottospazio somma $U + W$ è generato dall'unione dei generatori dei due sottospazi U e W, quindi $U + W = L_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Ma questa non è necessariamente una base. Sia A la matrice le cui colonne sono tali generatori, si ha che $\det(A) = -10 \neq 0$, quindi $\operatorname{rg}(A) = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(U + W)$ e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $U + W$. Quindi, usando la formula di Grassmann, si ottiene che $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(W) - \dim_{\mathbb{R}}(U + W) = 2 + 1 - 3 = 0$ e quindi $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ e non ammette basi. Inoltre la somma è diretta e $U \oplus W = \mathbb{R}^3$, poiché $\dim_{\mathbb{R}}(U + W) = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$.

2. Risolvendo il sistema lineare omogeneo dato dalle equazioni cartesiane di U, si ottiene che $\left\{\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ è una base di U e, quindi $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 2$. Risolvendo il sistema lineare omogeneo dato dalle equazioni cartesiane di W, si ottiene che $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}\right\}$ è una base di W e, quindi $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$. Sappiamo che il sottospazio somma $U+W$ è generato dall'unione dei generatori dei due sottospazi U e W, quindi $U+W = L_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}\right\}$. Ma questa non è necessariamente una base. Sia A la matrice le cui colonne sono tali generatori, si ha che $A \sim \begin{pmatrix}1&0&0&-5\\0&1&0&2\\0&0&1&-12\end{pmatrix}$ e quindi $\mathrm{rg}(A) = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(U+W)$. Quindi una base di $U+W$ è formata dalle prime tre colonne di A (quelle che corrispondono ai pivot della matrice a scalini equivalente), cioè: $\left\{\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$. Usando la formula di Grassmann, si ottiene che $\dim_{\mathbb{R}}(U\cap W) = \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(W) - \dim_{\mathbb{R}}(U+W) = 2+2-3 = 1$ e quindi la somma non è diretta. Una base di $U\cap W$ si trova considerando il sistema lineare omogeneo delle equazioni cartesiane di U e di Wconsiderate tutte contemporaneamente, cioè $\begin{cases}x+3y+3z=0\\y+5z=0\end{cases}$. Risolvendolo si ottiene che una base di $U\cap W$ è $\left\{\begin{pmatrix}12\\-5\\1\end{pmatrix}\right\}$. Inoltre $U+W=\mathbb{R}^3$, poiché $\dim_{\mathbb{R}}(U+W) = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$.

3. Sia A la matrice le cui colonne sono i generatori dati di U, allora $A \sim \begin{pmatrix}1&3&1\\0&-7&7\\0&0&0\end{pmatrix}$ e quindi una base di U è formata dalle prime due colonne di A (quelle che corrispondono ai pivot della matrice a scalini equivalente), cioè: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$. Quindi $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 2$. Risolvendo il sistema lineare omogeneo dato dalle equazioni cartesiane di W, si ottiene che $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ è una base di W e, quindi

$\dim_{\mathbb{R}}(W) = 1$. Sappiamo che il sottospazio somma $U + W$ è generato dall'unione dei generatori dei due sottospazi U e W, quindi $U + W = L_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Ma questa non è necessariamente una base. Sia B la matrice le cui colonne sono tali generatori, si ha che $\det(B) = 11 \neq 0$, quindi $\mathrm{rg}(B) = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(U + W)$ e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $U + W$. Quindi, usando la formula di Grassmann, si ottiene che $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(W) - \dim_{\mathbb{R}}(U + W) = 2 + 1 - 3 = 0$ e quindi $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ e non ammette basi. Inoltre la somma è diretta e $U \oplus W = \mathbb{R}^3$, poiché $\dim_{\mathbb{R}}(U + W) = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$.

4. Sia A la matrice le cui colonne sono i generatori dati di U, allora $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi una base di U è formata dalle prime tre colonne di A (quelle che corrispondono ai pivot della matrice a scalini equivalente), cioè: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Quindi $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 3$. Risolvendo il sistema lineare omogeneo dato dalle equazioni cartesiane di W, si ottiene che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di W e, quindi $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$. Sappiamo che il sottospazio somma $U + W$ è generato dall'unione dei generatori dei due sottospazi U e W, quindi $U + W = L_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Ma questa non è necessariamente una base. Sia B la matrice le cui colonne sono tali generatori, si ha che $B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, quindi $\mathrm{rg}(B) = 4 = \dim_{\mathbb{R}}(U + W)$. Quindi una base di $U + W$ è formata dalle prime quattro colonne di B (quelle che corrispondono ai pivot della ma-

trice a scalini equivalente), cioè: $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$. Quindi, usando la formula di Grassmann, si ottiene che $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(W) - \dim_{\mathbb{R}}(U + W) = 3 + 2 - 4 = 1$ e quindi la somma non è diretta. Una base di $U \cap W$ si trova uguagliando le equazioni parametriche dei due sottospazi $\begin{pmatrix} t_1 + t_2 + t_3 \\ t_1 + t_2 \\ t_1 + t_3 \\ t_2 + t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 + s_2 \\ -s_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$.

Da questo segue che $\begin{cases} t_1 = -2h \\ t_2 = h \\ t_3 = 0 \\ s_1 = -2h \\ s_2 = h \end{cases}$ con $h \in \mathbb{R}$ e sostituendo t_1, t_2, t_3 nelle equazioni parametriche di U (oppure sostituendo s_1, s_2 nelle equazioni parametriche di W) si ottiene che $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\1\\2\\-1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $U \cap W$. Inoltre $U + W = \mathbb{R}^4$, poiché $\dim_{\mathbb{R}}(U + W) = 4 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$.

5. Risolvendo il sistema lineare omogeneo dato dalle equazioni cartesiane di U, si ottiene che $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\-1\\3\\0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di U e, quindi $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 1$. Sia A la matrice le cui colonne sono i generatori dati di W, allora $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi una base di W è formata dalle prime due colonne di A (quelle che corrispondono ai pivot della matrice a scalini equivalente), cioè: $\left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\\7\end{pmatrix} \right\}$. Quindi $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$. Sappiamo che il sottospazio somma $U + W$ è generato dall'unione dei generatori dei due sottospazi U e W, quindi $U + W = L_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\\7\end{pmatrix} \right\}$. Ma questa non è necessariamente una base. Sia B la matrice le cui

colonne sono tali generatori, si ha che $B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi $\mathrm{rg}(B) = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(U+W)$. Quindi una base di $U+W$ è formata dalle prime tre colonne di B (quelle che corrispondono ai pivot della matrice a scalini equivalente), cioè: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$. Quindi, usando la formula di Grassmann, si ottiene che $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(W) - \dim_{\mathbb{R}}(U+W) = 1 + 2 - 3 = 0$ e quindi $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ e non ammette basi. Inoltre la somma è diretta ma $U \oplus W \subsetneq \mathbb{R}^4$, poiché $\dim_{\mathbb{R}}(U+W) = 3 < 4 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$.

6. Risolvendo il sistema lineare omogeneo dato dalle equazioni cartesiane di U, si ottiene $\left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ che è una base di U e, quindi $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 1$. Risolvendo il sistema lineare omogeneo dato dalle equazioni cartesiane di W, si ottiene $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ che è una base di W e, quindi $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$. Sappiamo che il sottospazio somma $U+W$ è generato dall'unione dei generatori dei due sottospazi U e W, quindi $U+W = L_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Ma questa non è necessariamente una base. Sia A la matrice le cui colonne sono tali generatori, si ha che $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ quindi $\mathrm{rg}(A) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(U+W)$. Quindi una base di $U+W$ è formata dalle prime due colonne di A (quelle che corrispondono ai pivot della matrice a scalini equivalente), cioè: $\left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Quindi, usando la formula di Grassmann, si ottiene che $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(W) - \dim_{\mathbb{R}}(U+W) = 1 + 2 - 2 = 1$ e quindi la somma non è diretta. Una base di $U \cap W$ si trova uguagliando le equazioni

parametriche dei due sottospazi $\begin{pmatrix} -8t_1 \\ 13t_1 \\ -6t_1 \\ 2t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 - 2s_2 \\ -2s_1 + s_2 \\ s_1 \\ 2s_2 \end{pmatrix}$. Da questo segue che $\begin{cases} t_1 = h \\ s_1 = -6h \\ s_2 = h \end{cases}$ con $h \in \mathbb{R}$ e sostituendo t_1 nelle equazioni parametriche di U (oppure sostituendo s_1, s_2 nelle equazioni parametriche di W) si ottiene che $\left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $U \cap W$. Inoltre $U + W \subsetneq \mathbb{R}^4$, poiché $\dim_{\mathbb{R}}(U + W) = 3 < 4 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$. In effetti si osserva che $U \subsetneq W$ e quindi $U \cap W = U$ e $U + W = W$.

Esercizio 2. Determinare le funzioni lineari soddisfacenti le condizioni date.

1.
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ f(1,1) &= 2, \\ f(1,2) &= -2; \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ f(-1,0) &= 5, \\ f(1,1) &= 5; \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2, \\ f(1,2) &= (1,1), \\ f(2,4) &= (1,1); \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2, \\ f(2,2) &= (1,0), \\ f(5,-1) &= (3,2); \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2, \\ f(1,-1) &= (2,3), \\ f(-2,2) &= (-4,-6); \end{aligned}$$

6.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(\sqrt{2}, 1) = (2, 1),$$
$$f\left(-2, \frac{1}{5}\right) = (2, 1);$$

7.

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(1, 2) = (1, 1),$$
$$f(1, 1) = (1, 2);$$

8.

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(1, 1, 1) = (1, 1),$$
$$f(0, 2, 1) = (2, -1).$$

Soluzione esercizio 2. 1. La matrice corrispondente alla funzione richiesta deve avere la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}.$$

Quindi si deve avere che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2,$$

e quindi è sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} = 2 \\ a_{11} + 2a_{12} = -2, \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{11} = 6 \\ a_{12} = -4. \end{cases}$$

Quindi la funzione esiste ed è unica ed è

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \end{pmatrix},$$

cioè

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$f(x, y) = 6x - 4y.$$

2. La matrice corrispondente alla funzione richiesta deve avere la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}.$$

Quindi si deve avere che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5,$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5,$$

e quindi è sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} -a_{11} = 5 \\ a_{11} + a_{12} = 5, \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{11} = -5 \\ a_{12} = 10. \end{cases}$$

Quindi la funzione esiste ed è unica ed è

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 10 \end{pmatrix},$$

cioè

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$f(x, y) = -5x + 10y.$$

3. La matrice corrispondente alla funzione richiesta deve avere la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Quindi si deve avere che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e quindi è sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{12} = 1 \\ 2a_{11} + 4a_{12} = 1 \\ a_{21} + 2a_{22} = 1 \\ 2a_{21} + 4a_{22} = 1. \end{cases}$$

Ma questo sistema è impossibile, quindi non esistono funzioni lineari soddisfacenti le condizioni richieste.

4. La matrice corrispondente alla funzione richiesta deve avere la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Quindi si deve avere che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

e quindi è sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2a_{11} + 2a_{12} = 1 \\ 5a_{11} - a_{12} = 3 \\ 2a_{21} + 2a_{22} = 0 \\ 5a_{21} - a_{22} = 2, \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{11} = \frac{7}{12} \\ a_{12} = -\frac{1}{12} \\ a_{21} = \frac{1}{3} \\ a_{22} = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Quindi la funzione esiste ed è unica ed è

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

cioè

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(x, y) = \left(\frac{7}{12}x - \frac{1}{12}y, \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y\right).$$

5. La matrice corrispondente alla funzione richiesta deve avere la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Quindi si deve avere che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix},$$

e quindi è sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} a_{11} - a_{12} = 2 \\ -2a_{11} + 2a_{12} = -4 \\ a_{21} - a_{22} = 3 \\ -2a_{21} + 2a_{22} = -6, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = 2 + t \\ a_{12} = t \\ a_{21} = 3 + s \\ a_{22} = s, \end{cases}$$

con $t, s \in \mathbb{R}$. Il sistema è indeterminato e ammette ∞^2 soluzioni, quindi esistono infinite funzioni lineari che soddisfano le condizioni richieste che dipendono dalla scelta di due parametri secondo la relazione

$$A = \begin{pmatrix} 2+t & t \\ 3+s & s \end{pmatrix},$$

con $t, s \in \mathbb{R}$, cioè

$$\begin{aligned} &f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ &f(x, y) = ((2+t)x + ty, (3+s)x + sy), \end{aligned}$$

con $t, s \in \mathbb{R}$.

6. La matrice corrispondente alla funzione richiesta deve avere la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Quindi si deve avere che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e quindi è sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{2}a_{11} + a_{12} = 2 \\ -2a_{11} + \frac{1}{5}a_{12} = 2 \\ \sqrt{2}a_{21} + a_{22} = 1 \\ -2a_{21} + \frac{1}{5}a_{22} = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{4(\sqrt{2}-10)}{49} \\ a_{12} = \frac{10(4\sqrt{2}+9)}{49} \\ a_{21} = \frac{2(\sqrt{2}-10)}{49} \\ a_{22} = \frac{5(4\sqrt{2}+9)}{49}. \end{cases}$$

Quindi la funzione esiste ed è unica ed è

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4(\sqrt{2}-10)}{49} & \frac{10(4\sqrt{2}+9)}{49} \\ \frac{2(\sqrt{2}-10)}{49} & \frac{5(4\sqrt{2}+9)}{49} \end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{aligned} &f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ &f(x,y) = \left(\frac{4(\sqrt{2}-10)}{49}x + \frac{10(4\sqrt{2}+9)}{49}y, \frac{2(\sqrt{2}-10)}{49}x + \frac{5(4\sqrt{2}+9)}{49}y \right). \end{aligned}$$

7. La matrice corrispondente alla funzione richiesta deve avere la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Quindi si deve avere che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

e quindi è sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{12} = 1 \\ a_{11} + a_{12} = 1 \\ a_{21} + 2a_{22} = 1 \\ a_{21} + a_{22} = 2, \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{12} = 0 \\ a_{21} = 3 \\ a_{22} = -1. \end{cases}$$

Quindi la funzione esiste ed è unica ed è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{aligned} &f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ &f(x,y) = (x, 3x - y). \end{aligned}$$

8. La matrice corrispondente alla funzione richiesta deve avere la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Quindi si deve avere che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

e quindi è sufficiente risolvere il sistema

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 1 \\ 2a_{12} + a_{13} = 2 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = 1 \\ 2a_{22} + a_{23} = -1, \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{11} = -1 + t \\ a_{12} = t \\ a_{13} = 2 - 2t \\ a_{21} = 2 + s \\ a_{22} = s \\ a_{23} = -1 - 2s, \end{cases}$$

con $t, s \in \mathbb{R}$. Il sistema è indeterminato e ammette ∞^2 soluzioni, quindi esistono infinite funzioni lineari che soddisfano le condizioni richieste che dipendono dalla scelta di due parametri secondo la relazione

$$A = \begin{pmatrix} -1 + t & t & 2 - 2t \\ 2 + s & s & -1 - 2s \end{pmatrix},$$

con $t, s \in \mathbb{R}$, cioè

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(x, y, z) = ((-1 + t)x + ty + (2 - 2t)z, (2 + s)x + sy + (-1 - 2s)z),$$

con $t, s \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Considerare le seguenti matrici come applicazioni lineari. Scriverne l'espressione analitica esplicitando il dominio e il codominio. Calcolare la dimensione dell'immagine e individuarne una base. Infine calcolare la dimensione del nucleo e individuarne una base.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$;

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

6. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

7. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

8. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

9. $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione esercizio 3. Sia $f\colon V \to W$ una funzione lineare, nell'esercizio verrà usata la formula

$$\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\ker f) = \dim V,$$

e il fatto che

$$\dim(\mathrm{Im} f) = \mathrm{rg}\, A,$$

dove A è la matrice associata a f.

1. La funzione associata è

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3, \\ f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_1, x_1 + x_2 + x_3)\,. \end{aligned}$$

   Poiché $\mathrm{rg}\, A = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f)$ (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1) e $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$, allora $\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 1$. Poiché l'immagine di f è generata dalle colonne della matrice A e poiché le prime due colonne sono linearmente indipendenti (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1), si ha

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

   e quindi una base di $\mathrm{Im} f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Inoltre si ha

$$\ker f = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

   e quindi una base di $\ker f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

2. La funzione associata è

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3, \\ f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_3, x_2, x_1 + x_3)\,. \end{aligned}$$

   Poiché $\mathrm{rg}\, A = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f)$ (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1) e $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$, allora $\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 1$. Poiché l'immagine di f è generata dalle colonne della matrice A e poiché le prime due colonne sono linearmente indipendenti (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1), si ha

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

e quindi una base di $\mathrm{Im} f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Inoltre si ha

$$\ker f = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

e quindi una base di $\ker f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3. La funzione associata è

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3, \\ f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + 5x_2 + 5x_3, 5x_2, -x_3) \,. \end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rg}\, A = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f)$ (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1) e $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$, allora $\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 0$. Poiché l'immagine di f è generata dalle colonne della matrice A e poiché le tre colonne sono linearmente indipendenti (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1), si ha

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

e quindi una base di $\mathrm{Im} f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Inoltre si ha

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

e quindi non esiste una base di $\ker f$ su $\mathbb{R}$.

4. La funzione associata è

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3, \\ f(x_1, x_2, x_3) &= \left(x_1 - 2x_2 - \sqrt{2} x_3, 0, -x_1 + 2x_2 + \sqrt{2} x_3 \right) . \end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rg}\, A = 1 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f)$ (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1) e $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$, allora $\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 2$. Poiché l'immagine di f è generata dalle colonne della matrice A e poiché la prima colonna è linearmente indipendente (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1), si ha

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

e quindi una base di $\mathrm{Im} f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$. Inoltre si ha

$$\ker f = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$

e quindi una base di $\ker f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

5. La funzione associata è

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^4, \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (3x_1 + x_2 + x_4, 2x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4)\,. \end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{rg}\, A = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f)$ (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1) e $\dim_{\mathbb{R}} V = 4$, allora $\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 2$. Poiché l'immagine di f è generata dalle colonne della matrice A e poiché le prime due colonne sono linearmente indipendenti (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1), si ha

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right\},$$

e quindi una base di $\mathrm{Im} f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$. Inoltre si ha

$$\ker f = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$

e quindi una base di $\ker f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

6. La funzione associata è

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^4, \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (3x_1 + x_2, 6x_1 + 2x_2, x_3 + 2x_4, 2x_3 - x_4)\,. \end{aligned}$$

Poiché $\operatorname{rg} A = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f)$ (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1) e $\dim_{\mathbb{R}} V = 4$, allora $\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 1$. Poiché l'immagine di f è generata dalle colonne della matrice A e poiché la prima, la terza e la quarta colonna sono linearmente indipendenti (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1), si ha

$$\mathrm{Im} f = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

e quindi una base di $\mathrm{Im} f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Inoltre si ha

$$\ker f = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

e quindi una base di $\ker f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

7. La funzione associata è

$$\begin{gathered} f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 + 6x_3, -x_2, 6x_1 - x_3, -x_4)\,. \end{gathered}$$

Poiché $\operatorname{rg} A = 4 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f)$ (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1) e $\dim_{\mathbb{R}} V = 4$, allora $\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 0$. Poiché l'immagine di f è generata dalle colonne della matrice A e poiché le quattro colonne sono linearmente indipendenti (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1), si ha

$$\mathrm{Im} f = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

e quindi una base di $\mathrm{Im} f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Inoltre si ha

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

e quindi non esiste una base di $\ker f$ su $\mathbb{R}$.

8. La funzione associata è

$$f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,$$
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_1 - 2x_4, x_3, x_2, -2x_1 - 2x_4) .$$

Poiché $\mathrm{rg}\, A = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f)$ (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1) e $\dim_{\mathbb{R}} V = 4$, allora $\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 1$. Poiché l'immagine di f è generata dalle colonne della matrice A e poiché le prime tre colonne sono linearmente indipendenti (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1), si ha

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

e quindi una base di $\mathrm{Im} f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Inoltre si ha

$$\ker f = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

e quindi una base di $\ker f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

9. La funzione associata è

$$f \colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5,$$
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (7x_2 + 7x_4, x_3, 2x_3, x_1 + x_5, x_2 + x_3 + x_4) .$$

Poiché $\operatorname{rg} A = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f)$ (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1) e $\dim_{\mathbb{R}} V = 5$, allora $\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) = 2$. Poiché l'immagine di f è generata dalle colonne della matrice A e poiché le prime tre colonne sono linearmente indipendenti (vedi soluzione esercizio 6 del foglio 1), si ha

$$\mathrm{Im} f = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

e quindi una base di $\mathrm{Im} f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Inoltre si ha

$$\ker f = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

e quindi una base di $\ker f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 4. Considerare gli spazi W delle soluzioni dei sistemi lineari seguenti come nuclei di applicazioni lineari. Scrivere l'espressione analitica di tali funzioni esplicitando il dominio e il codominio e la matrice associata delle funzioni lineari che hanno W come nucleo. Calcolare la dimensione del nucleo e individuarne una base. Infine calcolare la dimensione dell'immagine e individuarne una base.

1. $S : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0; \end{cases}$

2. $S : \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

3. $S : \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_3 - 6x_4 = 0; \end{cases}$

4. $S: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

5. $S: \begin{cases} 3x_1 - x_7 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_6 - 2x_7 = 0. \end{cases}$

Soluzione esercizio 4. Sia $f\colon V \to U$ una funzione lineare, nell'esercizio verrà usata la formula

$$\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\ker f) = \dim V,$$

e il fatto che

$$\dim(\mathrm{Im} f) = \mathrm{rg}\, A,$$

dove A è la matrice associata a f. Si pone inoltre $W = \ker f$.

1. La funzione associata è

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2)\,.$$

   La matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Poiché $\dim_{\mathbb{R}} W = 1 = \dim_{\mathbb{R}}(\ker f)$ (vedi soluzione esercizio 7 del foglio 4) e $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$, allora $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f) = 2 = \mathrm{rg}\, A$. Una base su $\mathbb{R}$ del nucleo di f è una base di W su $\mathbb{R}$ (vedi soluzione esercizio 7 del foglio 4). Poiché l'immagine di f è generata dalle colonne della matrice A e poiché le prime due colonne sono linearmente indipendenti una base di $\mathrm{Im} f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$.

2. La funzione associata è

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,$$
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_3 - x_4)\,.$$

   La matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Poiché $\dim_{\mathbb{R}} W = 1 = \dim_{\mathbb{R}}(\ker f)$ (vedi soluzione esercizio 7 del foglio 4) e $\dim_{\mathbb{R}} V = 4$, allora $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f) = 3 = \mathrm{rg}\, A$. Una base su $\mathbb{R}$ del nucleo di f è una base di W su $\mathbb{R}$ (vedi soluzione esercizio 7 del foglio 4). Poiché l'immagine di f è generata dalle colonne della matrice A e poiché le prime tre colonne sono linearmente indipendenti una base di $\mathrm{Im} f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

3. La funzione associata è

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5x_1 - 2x_2, x_1 + 3x_3 - 6x_4)\,.$$

La matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\dim_{\mathbb{R}} W = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\ker f)$ (vedi soluzione esercizio 7 del foglio 4) e $\dim_{\mathbb{R}} V = 4$, allora $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f) = 2 = \mathrm{rg}\, A$. Una base su $\mathbb{R}$ del nucleo di f è una base di W su $\mathbb{R}$ (vedi soluzione esercizio 7 del foglio 4). Poiché l'immagine di f è generata dalle colonne della matrice A e poiché le prime due colonne sono linearmente indipendenti una base di $\mathrm{Im} f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

4. La funzione associata è

$$f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2,$$
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 + 2x_2 - x_5, x_3 + x_4)\,.$$

La matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\dim_{\mathbb{R}} W = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\ker f)$ (vedi soluzione esercizio 7 del foglio 4) e $\dim_{\mathbb{R}} V = 5$, allora $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f) = 2 = \mathrm{rg}\, A$. Una base su $\mathbb{R}$ del nucleo di f è una base di W su $\mathbb{R}$ (vedi soluzione esercizio 7 del foglio 4). Poiché l'immagine di f è generata dalle colonne della matrice A e poiché la prima e la terza colonna sono linearmente indipendenti una base di $\mathrm{Im} f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

5. La funzione associata è

$$f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3,$$
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3x_1 - x_5, 2x_2 + 3x_3, x_1 + x_4 - 2x_5)\,.$$

La matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\dim_{\mathbb{R}} W = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\ker f)$ (vedi soluzione esercizio 7 del foglio 4) e $\dim_{\mathbb{R}} V = 5$, allora $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im} f) = 3 = \mathrm{rg}\, A$. Una base su $\mathbb{R}$ del nucleo di f è una base di W su $\mathbb{R}$ (vedi soluzione esercizio 7 del foglio 4). Poiché l'immagine di f è generata dalle colonne della matrice A e poiché la prima, la terza e la quarta colonna sono linearmente indipendenti una base di $\mathrm{Im} f$ su $\mathbb{R}$ è $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.