26/01/2017 - Esame di geometria - 6 crediti
Ingegneria informatica - a.a. 2016-2017

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 2 ore e mezza.
- **Ti sono stati consegnati due fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti, in stampatello leggibile, il tuo cognome, nome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- Le risposte vanno **motivate** brevemente, ma in maniera adeguata e comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno corretti eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Si consideri il sistema lineare $\Sigma : \begin{cases} x + 2y - z = k \\ (k+1)(x+z) + 1 = 0. \end{cases}$

3	

(a) Determinare il numero di soluzioni del sistema lineare Σ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Risposta:
Se $k = -1$, il sistema non ha soluzioni.
Se $k \neq -1$, il sistema ha ∞^1 soluzioni.

2	

(b) Trovare, se presenti, tutte le soluzioni del sistema lineare Σ per $k = 0$.

Risposta:

$$\begin{cases} x = -t - 1 \\ y = t + \frac{1}{2} \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2	

(c) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, il vettore numerico $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione del sistema lineare Σ.

Risposta:
Per nessun valore di k.

2. Nello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$, si considerino i sottospazi vettoriali

$$V = L_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \right\}.$$

2	

(a) Calcolare la dimensione e determinare una base (se esiste) del sottospazio W.

Risposta:

$$\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2,$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } W.$$

2	

(b) Calcolare la dimensione e determinare una base ortogonale (se esiste) del sottospazio $W^\perp$.

Risposta:

$$\dim_{\mathbb{R}}(W^\perp) = 2,$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base ortogonale di } W^\perp.$$

3	

(c) Calcolare la dimensione e determinare una base (se esiste) dei sottospazi $V \cap W$ e $V + W$. Inoltre, dire se la somma $V + W$ è diretta oppure no.

Risposta:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V + W) = 3,$$
$$\dim_{\mathbb{R}}(V \cap W) = 1,$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } V + W \text{ e la somma non è diretta,}$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } V \cap W.$$

COGNOME........................NOME........................N. MATRICOLA............

3. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2	

(a) Determinare lo spettro σ_A della matrice A e la molteplicità algebrica di ogni autovalore λ di A.

Risposta:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \{0, 2\}, \\ m_a(0) &= 1, \\ m_a(2) &= 2. \end{aligned}$$

4	

(b) Dire se la matrice A è diagonalizzabile e, nel caso lo sia, determinare una matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ e una matrice invertibile $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tali che $D = M^{-1}AM$. Se possibile, determinare M in modo che sia una matrice ortogonale.

Risposta:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ è una matrice ortogonale.}$$

4. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano e sia P un punto di coordinate $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto a tale riferimento.

4	

(a) Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse x' la retta r_1 con equazione cartesiana $3x + y - 1 = 0$ orientata rispetto alle x crescenti, la base $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ equiversa alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e O' punto di intersezione tra la retta r_1 e la retta r_2 di equazioni parametriche

$$r_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Determinare le coordinate di P rispetto a RC'.

Risposta:

$$\mathcal{C}_{RC}(O') = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix},$$

$$\left\{ \mathbf{i}' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}, \mathbf{j}' = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{C}_{RC'}(P) = \begin{pmatrix} -\frac{7\sqrt{10}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}.$$

4	

(b) Sia C il punto del piano con coordinate $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ rispetto a RC. Sia P' l'immagine del punto P rispetto alla rotazione del piano in senso antiorario di centro C e angolo $\theta = \frac{5}{6}\pi$. Determinare le coordinate di P' rispetto a RC.

Risposta:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C}_{RC}(P') = \begin{pmatrix} \frac{7+5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

5. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento cartesiano dello spazio. Sia r_1 la retta di equazioni parametriche

$$r_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R},$$

e r_2 la retta di equazioni cartesiane

$$r_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 3. \end{cases}$$

2	

(a) Determinare la posizione reciproca delle due rette r_1 e r_2. Inoltre, se esse sono complanari, trovare delle equazioni parametriche per il piano che le continene entrambe. Se invece le due rette non sono complanari ma sono sghembe, allora determinare gli angoli θ_1 e θ_2 formati da esse.

Risposta:
Le due rette sono sghembe.

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{33}}{33}\right),$$

$$\theta_2 = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{33}}{33}\right).$$

2	

(b) Sia P un punto di coordinate $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ rispetto al riferimento RC. Determinare, usando i quaternioni, l'immagine P' di P rispetto alla rotazione di angolo $\theta = \frac{\pi}{3}$ e asse a, con a retta parallela alla retta r_2 e passante per O orientata rispetto alle y crescenti.

Risposta:

$$q = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i + \frac{\sqrt{3}}{6}j - \frac{\sqrt{3}}{6}k,$$

$$\mathcal{C}_{RC}(P') = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$