12/09/2019 - Esame di geometria - 6 crediti
Ingegneria informatica - a.a. 2018-2019

COGNOME.......................... NOME.......................... N. MATRICOLA.............

ISTRUZIONI

- La prova dura 2 ore e mezza.
- **Ti sono stati consegnati due fogli, stampati fronte e retro. Come prima cosa scrivi su ciascuno di essi negli spazi predisposti, in STAMPATELLO leggibile, il tuo cognome, nome e numero di matricola.**
- A fianco di ciascuna domanda è presente un doppio riquadro: in quello di sinistra è indicato il punteggio corrispondente alla domanda in caso di risposta completamente corretta; quello di destra è a disposizione della commissione per la correzione.
- Le risposte vanno **motivate** brevemente, ma in maniera adeguata e comprensibile.
- Se devi cambiare qualche risposta che hai già scritto sul foglio, fai in modo che sia chiaro per chi correggerà il tuo compito quale sia la risposta definitiva. Se la risposta risultasse poco leggibile, chiedi al docente un nuovo foglio e ritrascrivi su questo foglio tutte le risposte che hai dato.
- **Al termine della prova devi consegnare unicamente i fogli che ti sono stati consegnati dal docente. Non saranno corretti eventuali fogli di brutta copia, integrazioni e simili.**

1. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare data da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2kx_2 \\ 2x_2 \\ 2x_3 + 2x_4 \\ x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}$, con k parametro reale, e sia $g\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare data da $g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \end{pmatrix}$.

2

(a) Determinare le matrici rappresentative $A_{f,\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_4}$ e $A_{g,\mathcal{E}_5,\mathcal{E}_4}$ di f e g rispetto alle basi canoniche.

Risposta:

$$A_{f,\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_{g,\mathcal{E}_5,\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3

(b) Siano $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ una base di $\mathbb{R}^5$ e una base di $\mathbb{R}^4$ rispettivamente. Calcolare la matrice rappresentativa $A_{g,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ di g rispetto alle basi date.

Risposta:

$$A_{g,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3	

(c) Calcolare esplicitamente (se possibile) le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

Risposta:
Poiché il codominio di f è diverso dal dominio di g, non è possibile ottenere $g \circ f$.

$$(f \circ g)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+4k)x_1 + (1-2k)x_2 + 2kx_3 + x_4 + x_5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ 8x_1 - 4x_2 + 4x_3 \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 2x_5 \end{pmatrix}.$$

3	

(d) Calcolare $g^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Risposta:

$$g^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2	

(e) Determinare la dimensione e una base dell'immagine di g.

Risposta:

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}\ g) = 2, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di Im } g.$$

COGNOME.......................NOME.......................N. MATRICOLA...........

3	

(f) Determinare per quali valori di k l'endomorfismo f è diagonalizzabile.

Risposta:
L'endomorfismo f è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R}$.

3	

(g) Nel caso $k = 0$, dire se f è diagonalizzabile e, in tal caso, trovare una matrice D diagonale e una matrice $M \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, tali che $D = M^{-1} A_{f,\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_4} M$. Se possibile trovare M ortogonale.

Risposta:
L'endomorfismo f è diagonalizzabile e si ha

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un riferimento cartesiano del piano, siano O', C e P punti di coordinate $O' \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $P \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto a tale riferimento.

4	

(a) Sia $RC'(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ un altro riferimento cartesiano del piano avente come asse y' la retta r di equazione $2x - y - 8 = 0$ orientata rispetto alle x decrescenti e la base $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ equiversa alla base $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. Determinare le coordinate di P rispetto a RC' e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$\mathbf{i}' \equiv \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \ \mathbf{j}' \equiv \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix},$$

$$C_{RC'}(P) = \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

4	

(b) Sia P' l'immagine del punto P rispetto alla rotazione del piano in senso antiorario di centro C e angolo $\theta = \frac{5}{4}\pi$. Determinare le coordinate di P' rispetto a RC e rappresentare graficamente il tutto.

Risposta:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$
$$C_{RC}(P') = \begin{pmatrix} \frac{-4-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2-5\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Sia $RC(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento cartesiano dello spazio. Sia P il punto di coordinate $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e siano π il piano e r la retta di equazioni rispettivamente

$$\pi : x - 2y + 3z + 4 = 0, \quad r : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

3	

(a) Determinare l'angolo tra r e π.

Risposta:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{42}}{7}\right).$$

2	

(b) Determinare, usando i quaternioni, l'immagine P' del punto P rispetto alla rotazione di angolo $\theta = \frac{4}{3}\pi$ e asse la retta r orientata rispetto alle y decrescenti.

Risposta:

$$q = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k,$$
$$C_{RC}(P') = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$