Haute école d'ingénierie et d'architecture Fribourg
Hochschule für Technik und Architektur Freiburg

Modélisation et Simulation

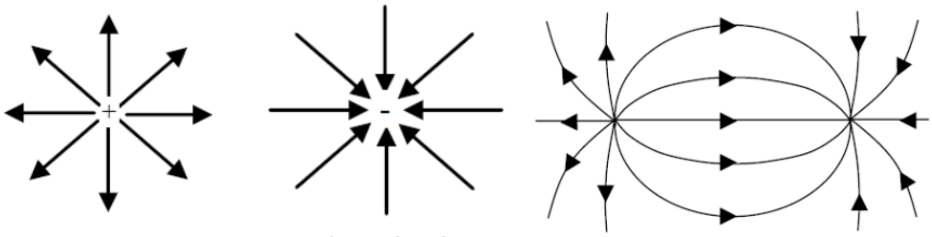
TP1 – Complément

Voici quelques rappels :

- Le champ électrique, à un endroit donné, peut être défini comme étant la force F_e (en Newton) exercée sur chaque charge q_0 (en Coulomb). Il peut également être défini comme le gradient du potentiel électrique :

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{\mathbf{F}_e}{q_0} \quad \text{(N / C = V / m)} \tag{1}$$

- Les lignes de champ électrique ont leur origine aux charges positives et terminent aux charges négatives.



Positive point charge Negative point charge Electric dipole with positive charge on left

Source de l'image : Dan Fleisch, A Student's Guide to Maxwell's Equations

- A chaque point de l'espace, le champ électrique total est la somme vectorielle de tous les champs électriques (contribution de plusieurs charges).

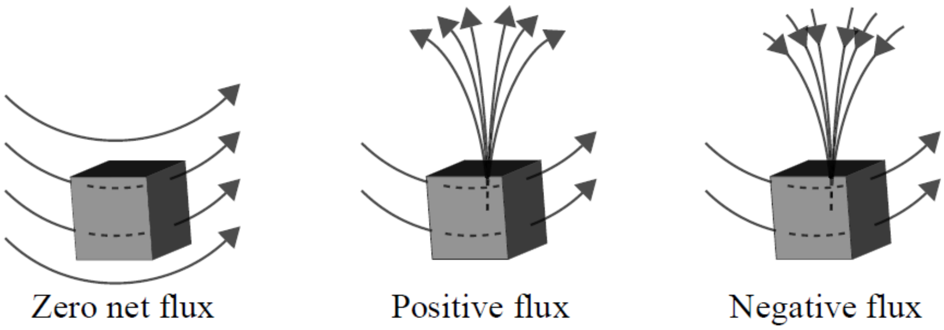
- Le champ électrique est continu dans l'espace mais les champs vectoriels sont normalement discrétisés pour des raisons visuelles.

- Le flux électrique correspond à la somme des lignes de champ électrique entrant ou sortant d'une surface fermée. Cela est mathématiquement exprimé ainsi :

$$\phi_E = \oiint_S \underbrace{\mathbf{E} \circ \mathbf{n}}_{A} da \quad \text{(V·m)} \tag{2}$$

où le terme *A* correspond à la projection de **E** en direction du vecteur normal (90°) à la surface (vecteur **n**):

$$\mathbf{E} \circ \mathbf{n} = |\mathbf{E}||\mathbf{n}|\cos(\theta) = |\mathbf{E}|\cos(\theta) \qquad (3)$$



Source de l'image : Dan Fleisch, A Student's Guide to Maxwell's Equations

- La forme intégrale de la loi de Gauss pour les champs électriques dans le vide nous dit que le flux électrique est égal à la charge totale q_{enc} (en Coulomb) enfermée dans une surface fermée, divisée par la permittivité du vide (ε_0 = ~8.85 pF/m) :

$$\oint_S \mathbf{E} \circ \mathbf{n}\, da = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \quad \textbf{(V·m)} \qquad (4)$$

La loi de Gauss existe également sous la forme différentielle :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \mathbf{(V / m^2)} \qquad (5)$$

où ρ est la densité volumique des charges libres.

- Un champ électrostatique possède un rotationnel nul (curl free) :

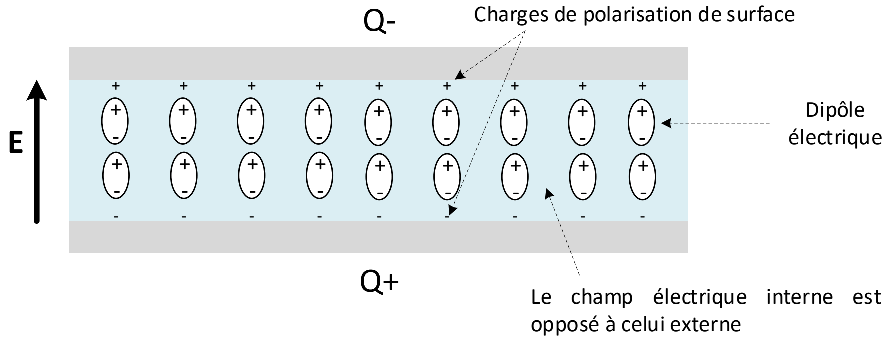
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad (6)$$

- Les matériaux diélectriques n'ont pas de charges mobiles. Toutefois, les atomes ont un noyau de charge positive et des électrons (charges négatives) qui lui tournent autour. Des moments dipolaires électrostatiques sont induits sous l'effet d'un champ électrique externe. Ils correspondent à des paires de charges négatives et positives alignées au champ électrique externe.

- La densité volumique des moments dipolaires électrostatiques est donnée par le vecteur de polarisation **P**. En considérant des matériaux isotropes, **P** est proportionnel au champ électrique externe **E** (pour autant que celui-ci ne soit pas trop intense) :

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad \mathbf{(C / m^2)} \qquad (7)$$

où χ_e est susceptibilité électrique (sans dimension), grandeur caractérisant la polarisation. Si la valeur de χ_e est grande, alors le diélectrique se polarise facilement sous l'effet d'un champ électrique externe.



- Suite à ce phénomène de polarisation, la loi de Gauss peut être réécrite :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_P}{\varepsilon_0} \quad \text{(V / m}^2\text{)} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} &= \rho + \rho_P \\ &= \rho - \nabla \cdot \mathbf{P} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\nabla \cdot \left(\underbrace{\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}}_{\mathbf{D}} \right) = \rho \tag{10}$$

où ρ_P est la densité volumique des charges de polarisation et **D** est le vecteur de déplacement :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \\ &= \varepsilon_0 \left(1 + \chi_e\right) \mathbf{E} \quad \text{(C / m}^2\text{)} \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \end{aligned} \tag{11}$$

où ε_r est la permittivité relative du milieu. Cela nous amène à :

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \right) = \rho \tag{12}$$

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \varepsilon_r \nabla V \right) = -\rho \tag{13}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{(V / m}^2\text{)} \tag{14}$$

Dans le calcul numérique, le potentiel électrique V est d'abord déterminé avec l'équation 14 et ensuite le champ électrique **E** en utilisant l'équation 1.