1. 求导法则

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \quad (a>0,\ a\neq 1)$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

反函数 $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$，其中 $x=\varphi(x)$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$，$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n \quad (a>0)$

$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(\frac{n\pi}{2} + kx)$

$(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(\frac{n\pi}{2} + kx)$

$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

2. Taylor 级数，公式（麦克劳林）

（在 $x_0=0$ 处展开）

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \left(+ \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right) \quad (-\infty < x < +\infty)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \left(+ \frac{(-1)^n \ln(1+\theta x)}{n+1} x^{n+1} \right) \quad (-1 < x \leq 1)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(+ \frac{(-1)^n \sin\theta x}{(2(n+1)+1)!} x^{2(n+1)+1} \right) \quad (-\infty < x < +\infty)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} \left(+ \frac{(-1)^n \cos\theta x}{2(n+1)!} x^{2(n+1)} \right) \quad (-\infty < x < +\infty)$

$\underline{(1+x)^\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \left(+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^\alpha}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right) \quad (-1 < x < 1)$

$\downarrow$

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n \left(+ (-1)^{n+1} \frac{1}{1+\theta x} \cdot x^{n+1} \right) \quad (-1 < x < 1)$

3. 积分表以及一些明显需要作的积分变换.

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & f(x)\text{为奇函数} \\ 2\int_0^a f(x)\,dx, & f(x)\text{为偶函数} \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $[-a,a]$ 连续

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$$

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, & n\text{为大于1的正奇.} \end{cases}$$

4. 广义积分的比较判别法以及 Γ 函数

① $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \begin{cases} 收敛(\lambda>1) \\ 发散(\lambda\le 1) \end{cases}$　　② $\int_0^a \frac{dx}{x^\lambda} \begin{cases} 收敛(\lambda<1) \\ 发散(\lambda\ge 1) \end{cases}$ $(a>0)$

③ $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

④比较判别法（大收小收，小发大发）

若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续，$f(x)\ge 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)\cdot x^\lambda]=l$，$l\ne\infty$，$l\ne 0$，则

当 $\lambda>1$ 时 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，当 $\lambda\le 1$ 时 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

若 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 连续，a 是瑕点，

则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot(x-a)^\lambda]=l$. $l\ne 0$，$l\ne\infty$，则.

当 $\lambda<1$ 时 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛，$\lambda\ge 1$ 时 $\int_a^b f(x)dx$ 发散

⑤ Γ 函数.

$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ （定义域为 $s>0$）

且有 $\Gamma(0^+)=+\infty$

$\Gamma(1)=1$，$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$

$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1} dx=\underline{\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}}} \xlongequal{x=t^2} 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\times 2=\sqrt{\pi}$

$\Gamma(n+1)=n!$

5. 级数，幂级数，傅里叶级数

① 正项级数

- 比较判别法（大收小收，小发大发）→ 极限形式 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$
  - $l>0\neq\infty$ 同敛散
  - $l=0$ $\begin{cases}\text{母收子收}\\ \text{子发母发}\end{cases}$
  - $l=+\infty$，$\begin{cases}\text{子收母收}\\ \text{母发子发}\end{cases}$
- 比值判别 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ $\begin{cases}\rho<1\text{ 收}\\ \rho>1\text{ 发}\\ \rho=1\text{ 不确定}\end{cases}$
- 根值判别 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$ $\begin{cases}\rho<1\text{ 收}\\ \rho>1\text{ 发}\\ \rho=1\text{ 不确定}\end{cases}$

② 交错级数

a. 取绝对值转化为正项级数判断绝对收敛

b. 莱布尼茨判别：$\lim a_n=0$，$\boxed{\text{且 } a_{n+1}\le a_n}$ 单调的判别.

c. 若 a_n 条件收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+|a_n|}{2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-|a_n|}{2}$ 发散.

③ 傅里叶级数

a、2l为周期：f(x) 以2l为周期或只定义在 $[-l,l]$ 上，且在 $[-l,l]$ 上可积.

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

傅里叶系数：$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$，$n=0,1,2\cdots$

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$，$n=1,2\cdots$

b. 奇偶函数的傅氏系数与傅氏级数

f(x) 以2l为周期或只定义在 $[-l,l]$ 上，且在 $[-l,l]$ 上可积.

若 f(x) 在 $[-l,l]$ 为奇函数，则 f(x) 的傅氏系数

$a_n=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$

$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$ $n=1,2,3$

且 $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$ （正弦级数）

若f(x)在[-l, l]上为偶函数，则f(x)的傅氏级数

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad n=0,1,2\cdots$$

$$b_n = 0, \quad n=1,2,\cdots$$

傅氏级数为余弦级数：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$$

如果T为周期或只定义在[a, a+T]上，在[a, a+T]上可积，则f(x)的傅氏级数为

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\cos\frac{2n\pi}{T}x\,dx \quad n=0,1,2\cdots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\sin\frac{2n\pi}{T}x\,dx \quad n=1,2,\cdots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{T}x + b_n\sin\frac{2n\pi}{T}x\right)$$

6. 常微分方程

① 一阶：

a. $\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(x)$ 可分离变量

b. $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ $\begin{cases} Q(x)\text{恒为}0,\ y(x)=Ce^{-\int P(x)dx} \\ Q(x)\text{不恒为}0,\ y(x)=e^{-\int P(x)dx}\left[C+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right] \end{cases}$

c. 全微分方程：

$$dF(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

$$\Leftrightarrow F(x,y)=C \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

不太懂

则变成求 $Pdx+Qdy$ 的原函数

d. 伯努利方程

$$y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}\ (\alpha\neq 0,1)$$

作变换 $z(x)=y^{1-\alpha}$ 则原式为 $y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{-\alpha+1}=Q(x)$

即 $\frac{1}{1-\alpha}\frac{dy^{1-\alpha}}{dx}+P(x)y^{1-\alpha}=Q(x)$

$$\underline{\underline{y^{1-\alpha}=z}}\quad \frac{1}{1-\alpha}\frac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx}+(1-\alpha)P(x)z=Q(x)(1-\alpha)$$

$$z(x)=e^{-\int(1-\alpha)P(x)dx}\left[C+\int(1-\alpha)Q(x)\cdot e^{\int(1-\alpha)P(x)dx}dx\right]$$

再用 y 将 z 代换即可！

② 高阶

a. 可降阶 $\begin{cases} y''=f(x)\ \text{作两次积分} \\ y''=f(x,y'),\ \text{作变换}\ z=y',\ \text{则}\ z'=\frac{dy'}{dx}=y'' \\ y''=f(y,y'),\ \text{作变换}\ z=y',\ \text{则}\ z'=\frac{dy'}{dy}=?\ 1. \end{cases}$

为什么，不太懂

b. 齐次 $y''+py'+qy'=0 \Rightarrow \lambda^2+p\lambda+q=0$

推广到 n 阶

λ_1 为单根，则 $y=e^{\lambda_1 x}$ 是一个解（基）

λ_k 为 k 重根，

则 $e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda_k x}$ 是 λ_k 的基解

常数乘基解再求和为通解（与线代相结合）

$\lambda_1\lambda_2$ 相异，实

$y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$

$\lambda_1\lambda_2$ 相同实 $(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$

λ_1,λ_2 相异共轭 $\alpha\pm\beta i$

$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

c. 非齐次

$y''+py'+qy=f(x)$ 通解 = 齐次通解 + 非齐次特解

上述方程可用待定系数求特解：

$f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$，$P_n(x), Q_m(x)$ 为 x 的 n 和 m 次的项式。

$\alpha\pm\beta i$ 不是特征方程的根

$\overset{*}{y}(x)=e^{\alpha x}[R_k(x)\cos\beta x+S_k(x)\sin\beta x]$，$k=\max(m,n)$

$\alpha\pm\beta i$ 是特征方程的根

$\overset{*}{y}(x)=xe^{\alpha x}[R_k(x)\cos\beta x+S_k(x)\sin\beta x]$，$k=\max(m,n)$

或者用常数变易法：

已知 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是齐次方程的解

令 C_1, C_2 变成关于 x 的函数，$C_1(x)$，$C_2(x)$

则非齐次通解为 $y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$

由 $\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2(x)=f(x) \end{cases}$

求 $C_1(x)$，$C_2(x)$ 再回代即可！

d.（特殊变系数方程）欧拉方程

n 次方 $x^n y^{(n)} + p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$ n 阶导

当 $x>0$ 时，作变换 $x=e^t$ 或 $t=\ln x$ 可化为常系数.

如 $x^2y''+P_1xy'+P_2y=f(x)$: $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+P_1x\frac{dy}{dx}+P_2y=f(x)$

$$\xrightarrow{x=e^t}\quad \frac{d^2y}{dt^2}+(P_1-1)\frac{dy}{dt}+P_2y=f(e^t)$$

7. 多元函数积分学：

① 二重积分就不说了.

② 三重积分

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV$$

$$\begin{cases}\underbrace{\iint\limits_{D}}_{\text{投影}}\left\{\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right\}dxdy.\\[2em] \int_a^b\left\{\iint\limits_{D(z)} f(x,y,z)\,dxdy\right\}dz.\end{cases}$$

$D(z)$ ↓ 切出来的图形一致，面积或系数与 z 有关

柱坐标的变换，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=z$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV=\iiint\limits_{\Omega'} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

球坐标的变换，$x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=\rho\cos\varphi$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV=\iiint\limits_{\Omega'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

一般变换 $x=x(u,v,w),\ y=y(u,v,w),\ z=z(u,v,w)$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV=\iiint\limits_{\Omega'} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\,\underbrace{|J|}_{\text{绝对值}}\,du\,dv\,dw$$

$$|J|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0$$

没有方向

③ 一型线积分（一般是参数方程）对曲线弧长的积分，定积分（算长度）

$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t)$

则 $\int_C f(x,y,z)\,ds=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}\,dt.$

④二型线积分(一般是某一种向量函数)对坐标的积分,具有方向.(算做功)

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{s} = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

从A到B.

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

对参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$

则 $$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy = \int_a^b [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt.$$

可推广到空间.

且有:
$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy = \int_{\overset{\frown}{AB}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds.$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ 是A到B的切线方向的方向余弦.

在此基础,如果曲线封闭,则可转化为一个二重积分.

$$\oint_C Pdx+Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

由此推广出其他情况:$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 时,有 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$,此时积分与路径无关,可以换一个好积的积.

原式变成 $\int_L Pdx+Qdy$. 并未要求封闭!

若存在 $u(x,y)$ 使得 $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$,则称 $u(x,y)$ 是 $P(x,y)dx+P(x,y)dy$ 的原函数.

求原函数 $u(x,y)$ 的方法:

(1) 特殊路径,即换一个好积的路径

(2) 不定积分法

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$$

对x作积分 $u(x,y) = \Phi(x,y) + \varphi(y)$

$\Phi(x,y)$ 为已确定的函数 $\frac{\partial(\Phi(x,y))}{\partial x} = P(x,y)$,$\varphi(x)$ 为待定.

再由 $\frac{\partial}{\partial y}[\Phi(x,y)+\varphi(y)] = Q(x,y)$ 确定 $\varphi(y)$

(3) 利用已知的全微分表.

求出原函数后 $\int_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy = u(x,y)\Big|_{A(x_1,y_1)}^{B(x_2,y_2)}$

⑤ 一型面积分(对面积的面积分)

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

Σ 在 xoy 面上的投影

二型面积分(对坐标的面积分)

$P(x(y,z),y,z)$　　$Q(x,y(x,z),z)$　　$R(x,y,z(x,y))$.

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy = \pm\iint_{D_{yz}} Pdydz \pm \iint_{D_{zx}} Qdzdx \pm \iint_{D_{xy}} Rdxdy$$

分别投影到三个坐标平面.　　在各自对应的坐标面上的投影

(曲面的前侧,右侧,上侧则取正,反之则取负)

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy = \pm\iint_{D_{xy}} \left[P(x,y,z(x,y))\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+Q(x,y,z(x,y))\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+R(x,y,z(x,y))\right]dxdy.$$

全都投影到 xoy 平面上

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy = \iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS$$

在斯托克斯公式中也有所体现,是一型和二型之间的关系

即 $\iint_{\Sigma}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$.　$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 Σ 在 (x,y,z) 的单位法向量

$\vec{F}=(P,Q,R)$

a. 高斯公式.(上述的曲面封闭形成一个空间体)

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

对某个向量场 $\vec{A}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$

则其散度定义为 $\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

则上式变成 $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\vec{A}\,d\vec{s} = \iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}\,dv$. 即求一个向量场 $\vec{A}$ 在 Σ 上的通量转化成了在 Σ 围成的空间体中对其散度 $\operatorname{div}\vec{A}$ 作三重积分.

6.斯托克斯公式(空间中的曲线封闭成一个空间曲面)

$$\oint_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix} \quad ①$$

$$或=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix} dS \quad ②$$

对向量场$\vec{F}$,

定义 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix} = \nabla\times\vec{F} = \mathrm{rot}\,\vec{F}$ 为$\vec{F}$的旋度.

则上式表明 $\oint_L \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,ds=\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$

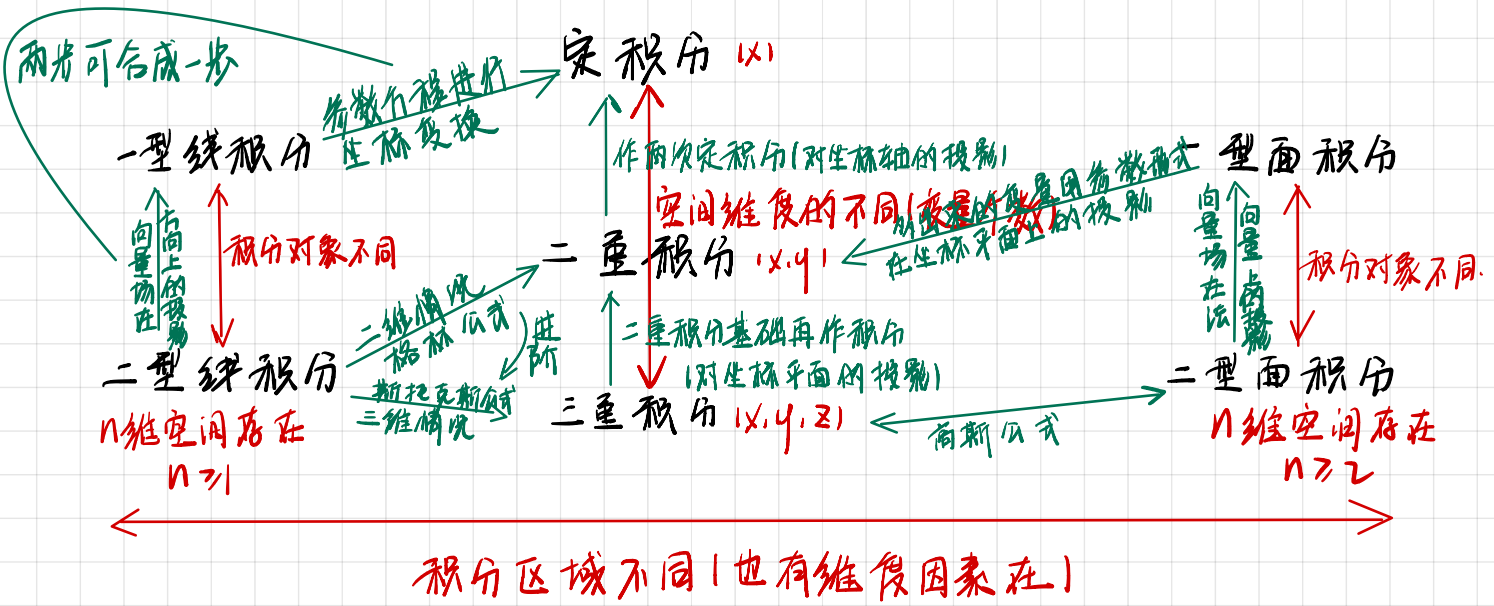
即求一个向量场$\vec{F}$的环量(环流量)可以转化成在L封闭成的曲面上的其旋度与法向量点乘的积分

与曲线积分类似,此时也存在积分与路径无关的情况

即 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=0$ 同样与曲线积分类似的方式可求其原函数 $u(x,y,z)$

则原积分 $= u(x,y,z)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)\text{起}}^{(x_1,y_1,z_1)\text{终}}$

conclusions:



8. 多元函数的极值问题

① 通过 $\begin{cases} f_x'(x,y)=0 \\ f_y'(x,y)=0 \end{cases}$ 求出可能的点 (x_0,y_0)

再在该点处求 $f''_{xx}=A, f''_{xy}=B, f''_{yy}=C$ 以及判别式 $\Delta=AC-B^2$

则 ① $\Delta>0, A>0$，$f(x_0,y_0)$ 为极小值

$\Delta>0, A<0$，$f(x_0,y_0)$ 为极大值

② $\Delta<0$，(x_0,y_0) 不是极值点

③ $\Delta=0$，不能判定 (x_0,y_0) 是否为极值点（如果遇到是否还需要继续判定）

条件极值问题：

求 $z=f(x,y)$ 在 $G(x,y)=0$ 条件下的最大，最小值需要使用拉格朗日乘数法、

构造辅助函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda G(x,y)$

再求解：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial G}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial G}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=0+G(x,y)=0 \end{cases}$$

其中满足条件的 (x,y) 就是极值点

代入原函数求出最值即可.

以上过程可推广到三维的情况：

求 $u=f(x,y,z)$ 在 $\varphi(x,y,z)=0, \psi(x,y,z)=0$ 的条件下的最值.

其辅助函数为

$$F(x,y,z,\lambda,m)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+m\psi(x,y,z)$$

7、解析几何与场论初步

① 直线方程：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

过点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 且方向向量为 $\vec{s}=(l,m,n)$

② 平面方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

过点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 且 法向量为 $(A,B,C)=\vec{n}$

结合线性代数中由一个矩阵代表的n个平面之间的关系有：

两个向量线性无关，则他们各自代表的平面不平行，具体到 $n=3$ 的矩阵 A 有：

$A=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{\text{系数阵}}$ 与 $\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)}_{\text{增广阵}}=A|B$

根 $r(A)$、$r(A|B)$ 判断解的情况，即三个平面的交点情况，再由两两之间的线性关系判断每个平面各自的方位.

③ 方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$ （是一个数）

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ = $\vec{s}$ 单位化的 x, y 坐标　$\vec{s}$ 为 l 的方向向量

④ 梯度 $\text{grad}\,\vec{z}=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$ （是一个矢量）

是方向导数最大的 l 所在的方向

⑥ 散度 $\text{div}\,\vec{A}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)$ 是一个数

$(\vec{A}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k})$

⑦ 旋度：$\text{rot}\,\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$ 是一个向量

10. A、A^{-1}、A^*、A^T、$f(A)$

① 运算关系

$AA^* = A^*A = |A|E$

$A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$

$(kA)^* = k^{n-1}A^*$

$(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$

$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

$(AB)^* = B^*A^*$

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \dfrac{1}{|A|}A$.

$C = \begin{pmatrix} A & O \\ D & B \end{pmatrix}$ 左乘同行，右乘同列，副加负号，主写副换

$C = \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ $C^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$ $C^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$

② 行列式关系

$|A^*| = |A|^{n-1}$

$|A^T| = |A|$

$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

$|(A^*)^*| = |A|^{(n-1)^2}$

③ 秩的关系

$r(A) = r(A^T) = r(AA^T) = r(A^TA)$

$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$

$r(A)+r(B)-n \le r(AB) \le \min(r(A), r(B))$

$P_{m\times m}$，$Q_{n\times n}$ 可逆

则 $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$

$r(A+B) \le r(A|B) \le r(A)+r(B)$

④ 特征值(向量)关系

	A	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$
λ	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	λ
ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	$P^{-1}\xi$

$f(A)$ 为 A 的多项式

此外 A^T 的特征值为 λ，但其对应的特征向量不同，需要另外求解.

$r(A) = 1$ 则 $A^n = (tr(A))^{n-1}A$.

11. 矩阵的正惯性指数与空间曲面的关系

3正	一正两负	两正一负	两正一零	一正一负一零
椭球	双叶双曲	单叶双曲	椭圆柱	双曲柱面

(含一正一负即双曲)

11. 常见八大分布

分布	分布律		
$B(1,P)$ 0-1分布	$P(X=0)=P$，$P(X=1)=1-P$	$E(X)=p$	$D(X)=p(1-p)$
$B(n,p)$ 二项分布	$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2\cdots$	$E(X)=np$	$D(X)=np(1-p)$
$P(\lambda)$ 泊松分布	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$E(X)=\lambda$	$D(X)=\lambda$
$G(P)$ 几何分布	$P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p$，$k=1,2\cdots$	$E(X)=\frac{1}{p}$	$D(X)=\frac{1-p}{p^2}$
$U(a,b)$ 均匀分布	$\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其他\end{cases}$ $\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$	$E(X)=\frac{a+b}{2}$	$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$
$E(\lambda)$ 指数分布	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$ $\begin{cases}1-\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$	$E(X)=\frac{1}{\lambda}$	$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

$N(\mu,\sigma^2)$ 正态分布 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $x\in R$. $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$

$\Phi(x)$ 标准正态分布 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma^{-\frac{x^2}{2}}$

前述有 $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$=\frac{1}{2}$

期望和方差的计算

$E(X)=xP(X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)dx$

$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$E(kX)=kE(X)$

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$E(aX+b)=aE(X)+b$.

独立时 $E(XY)=E(X)E(Y)$

$D(aX+b)=a^2D(X)$

独立时 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$\rho_{XY}=\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

12. 统计量的三大分布，参数估计和假设检验

χ^2分布：

$$X_i \overset{iid}{\sim} N(0,1) \Rightarrow X = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

格外注意 X_i 需要满足标准正态分布

$X_1 \sim \chi^2(n_1)$，$X_2 \sim \chi^2(n_2)$　$X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$ 即 $\sum_{i=1}^{m} X_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right)$

$E(X) = n$，$D(X) = 2n$

t分布：

$X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$ 且相互独立

$$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n) \qquad \begin{cases} E(t) = 0 \\ P\{t > t_\alpha(n)\} = P\{t > t_{1-\alpha}(n)\} \\ \text{故 } t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n) \end{cases}$$

F分布

$X \sim \chi^2(n_1)$，$Y \sim \chi^2(n_2)$，X, Y 独立

$$\text{则 } F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \qquad \begin{cases} \text{若 } F \sim F(n_1, n_2) \text{ 则 } \frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1) \\ F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)} \end{cases}$$

正态总体的常用结论

$$X_1, X_2 \cdots X_i \overset{iid}{\sim} N(u, \sigma^2)$$

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N\left(u, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\bar{X} - u}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1) \\ \dfrac{\bar{X} - u}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \end{cases}$$

σ^2 已知或未知的情况

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - u)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) \\ \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1) \end{cases}$$

为什么是 n-1

矩估计：
$$\begin{cases} ① \ \bar{X}=E(X) \\ ② \ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=E(X^2) \end{cases}$$

最大似然估计
- 最大似然函数 $L(x_1,x_2,\cdots x_n|\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$ 或 $\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$
- 再利用求导，单调判断最得最 L 的 θ 值
  (有可能需要取对数)

区间检验