CUPT 水螺旋中期报告

张浩阳 张玮喆

2022 年 3 月 23 日

目录

1 **题目概要** 1

2 **理论推导** 2

2.1 椭圆周长 2

2.2 表面能 2

2.3 动能 3

2.4 小震动分析 4

3 **实验验证** 4

4 **实验分析与数据分析** 5

1 题目概要

If a stream of liquid is launched through a small hole, then under certain conditions it twists into a spiral. Explain this phenomenon and investigate the conditions under which the spiral will twist.

在预实验中，我们发现当塑料水管的出水口被压迫变形为椭圆形时，射流将出现在两个相互垂直的轴的椭圆形之间来回震荡的现象。

简单分析之后，我们发现，在震荡区域，水柱的外表面较为光滑，而水柱的螺旋性的破碎往往发生在水柱的表面受到破坏之后。

因此我们猜想，椭圆射流的震荡可能与水柱外表面的表面张力作用有关。

同时，在预实验中我们也发现，水柱的速度在一定范围以内时，水柱的特征长度大致与水柱的速度成正相关，因而在以下的理论推导的过程中，我们假设水柱按它射流的方向可以被切分为互不影响的小片，于是便可以对每一小片进行力学分析。

2 理论推导

我们对射流中的小片进行力学分析，分别通过微元位移速度和表面能的方式计算它的能量，并通过分析力学方法尝试得到特征参量的微分方程。

2.1 椭圆周长

对一个半长轴为 a，半断轴为 b 的椭圆，尝试计算其周长。

用参数 θ 来定位椭圆上的点 A，则 A 的位置可以写为 $(x,y)=(a\sin\theta, b\cos\theta)$，其中 $\theta\in[0,2\pi]$

椭圆周长可以用第一类曲线积分写为:

$$l=4\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

用参量 θ 改写之为:（其中 $e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$）

$$l=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

我们知道:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2k}\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\mathrm{C}_{2k}^{k}\cdot 4^{-k}$$

对 l 进行泰勒展开后利用上式进行计算，可以得到

$$l=2\pi a\left[1-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2\cdot\frac{e^{2k}}{2k-1}\right]$$

对于近似，也可以采用椭圆周长的近似公式

$$l=\pi\left[\frac{3}{2}(a+b)-\sqrt{ab}\right]$$

2.2 表面能

假设水的表面张力系数 σ 已知 (查表可知在 19.7 ℃ 下纯水的表面张力系数的标准值为 $7.280\times10^{-2}\mathrm{N/m}$)。考虑一个非常薄的液片，由于后计算动能时也将有此参数，因而我们将其厚度直接记为 1，注意，此处的厚度为 1 不代表它的厚度是有限长的，我们需要保证它的

厚度接近于 0，才能保证在液片的表面可以近似为椭圆（柱），则易知水的表面能为：

$$V = \sigma \cdot l \cdot 1 = 2\pi a\sigma \left[1 - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2 \cdot \frac{e^{2k}}{2k-1}\right]$$

以下改用近似式：

$$V = \sigma\pi \left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right]$$

并且改用 a 作为特征变量，改写为

$$V = \sigma\pi \left[\frac{3}{2}\left(a + \frac{r^2}{a}\right) - r\right]$$

其中，我们假设水在我们研究的问题中是不可压缩流体，同时按照我们的假设，水在液片之间没有交流，因而研究的液片的表面积不变，记 $r = \sqrt{ab}$，椭圆面积 $l = \pi r^2$，液片体积 $V = l \cdot 1 = \pi r^2$。

2.3 动能

我们考虑液片的变形是以拉伸变换的方式进行的，考虑圆（平衡位置时）上原本处于 (x_0, y_0) 的面积微元，在圆被拉伸为椭圆后，平移到了 (x, y) 的位置，按假设，(x, y) 满足：

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{r} x_0 \\ y = \dfrac{b}{r} y_0 \end{cases}$$

取 a 为参量，由 $S = \pi \cdot a \cdot b = \text{Const}$，知微分之间关系 $a\dot{b} + \dot{a}b = 0$，则 (x, y) 处速度：

$$\begin{aligned} v(x_0, y_0)^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \frac{\dot{a}^2}{r^2} x_0^2 + \frac{\dot{b}^2}{r^2} y_0^2 \\ &= \frac{\dot{a}^2}{r^2} x_0^2 + \frac{\dot{a}^2 \cdot r^2}{a^4} y_0^2 \end{aligned}$$

则运动动能：记 ρ_0 为水的密度，$\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$

$$\begin{aligned} T &= \iint_S \frac{1}{2}\rho_0 \, \mathrm{d}x_0 \, \mathrm{d}y_0 \, v(x_0, y_0)^2 \\ &= \iint_S \frac{1}{2}\rho_0 \, \mathrm{d}x_0 \, \mathrm{d}y_0 \left(\frac{\dot{a}^2}{r^2} x_0^2 + \frac{\dot{a}^2 \cdot r^2}{a^4} y_0^2\right) \\ &= \iint_S \frac{1}{2}\rho_0 \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \left(\frac{\dot{a}^2}{r^2} \cdot \rho^2 \cos^2\theta + \frac{\dot{a}^2 \cdot r^2}{a^4} \cdot \rho^2 \sin^2\theta\right) \\ &= \frac{\pi}{8} \cdot \rho_0 \cdot \dot{a}^2 \cdot r^2 \left(1 + \frac{r^4}{a^4}\right) \end{aligned}$$

2.4 小震动分析

体系的拉格朗日量:

$$L \equiv T - V = \frac{\pi}{8} \cdot \rho_0 \cdot \dot{a}^2 \cdot r^2 \left(1 + \frac{r^4}{a^4}\right) - \sigma\pi \left[\frac{3}{2}\left(a + \frac{r^2}{a}\right) - r\right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{a}} &= \frac{\pi}{4} \cdot \rho_0 \cdot \dot{a} \cdot r^2 \left(1 + \frac{r^4}{a^4}\right) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}} &= \frac{\pi}{4} \cdot \rho_0 \cdot \ddot{a} \cdot r^2 \left(1 + \frac{r^4}{a^4}\right) - \pi \cdot \rho_0 \cdot \dot{a}^2 \cdot \frac{r^6}{a^5} \\
\frac{\partial L}{\partial a} &= -\frac{\pi}{2} \cdot \rho_0 \cdot \dot{a}^2 \cdot \frac{r^6}{a^5} - \frac{3\pi}{2} \cdot \sigma \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)
\end{aligned}$$

由欧拉-拉格朗日方程得到体系的运动方程:

$$\rho_0 \cdot \ddot{a} \cdot r^2 \left(1 + \frac{r^4}{a^4}\right) - 2 \cdot \rho_0 \cdot \dot{a}^2 \cdot \frac{r^6}{a^5} = -6 \cdot \sigma \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

取 a 在 r 附近的小量近似 $a = r + \delta$，并忽略了 δ 和 $\dot{\delta}$ 的二阶小:

$$2 \cdot \rho_0 \cdot \ddot{\delta} \cdot r^2 = -12 \cdot \sigma \cdot \frac{\delta}{r}$$

解得:

$$\ddot{\delta} = -\frac{6\sigma}{\rho \cdot r^3}\delta$$

震动的周期为:

$$T = \frac{\sqrt{6}\pi}{3}\sqrt{\frac{\rho \cdot r^3}{\sigma}}$$

如果考虑到水柱的喷出速度 v，则椭圆变化的特征长度（长度周期）为

$$\lambda = T \cdot v = \frac{\sqrt{6}\pi}{3} \cdot v \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot r^3}{\sigma}}$$

3 实验验证

在实验中，抽水机从量筒中抽水，假设时间 t 内抽取了体积为 V 的水，这些水通过竖直的水管口射出，则水柱速度在较短的一段距离内不发生太大的变化，且其大小为

$$v = \frac{V}{t \cdot S} = \frac{V}{\pi r^2 t}$$

其中，$S = \pi r^2$ 代表水管的面积，于是水柱周期性变化的长度周期为:

$$\lambda = \frac{\sqrt{6}\pi}{3} \cdot v \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot r^3}{\sigma}} = \frac{V}{t} \cdot \sqrt{\frac{2\rho}{3\sigma r}}$$

我们测量了以不同抽水速度抽水时 λ 的大小，实验中采用了 $r = 2\mathrm{mm}$ 和 $r = 3\mathrm{mm}$ 两种水管，以下为实验数据表格（理论修正是根据实验对理论进行了线性修正）：

参量	V/L	t1/s	t2/s	t3/s	t/s	r/mm	$\lambda_{实验}$/mm	$\lambda_{理论}$/mm	$\lambda_{理论修正后}$/mm
值	1	14.77	14.53	14.88	14.73	2	47	145	49
		11.38	11.50	11.68	11.52		64	186	63
		11.25	11.25	11.23	11.24		64	190	65
		8.12	8.50	8.34	8.32		88	257	87
		12.53	12.77	12.67	12.66	3	46	138	47
		7.81	7.66	7.55	7.67		82	228	78
		9.41	9.78	9.71	9.63		62	181	62
		5.47	5.39	5.47	5.44		124	321	109

4 实验分析与数据分析

1. 实验与理论在量级层次符合得较好，且除最后一次实验速度过快外，实验与执行线性修正后的理论基本符合，证明理论至少在参量的幂次上是正确的，仅在系数上有差别。

2. 实验中，对 V 的测量是对量筒的直接读数给出的，但是抽水泵的水管在量筒中会占据一定量的体积，导致抽出水的体积无法精确测量。

3. 实验中由于条件限制，并没有对椭圆参数 e 进行限制或者控制，且实验中采取的 e 并不满足小震动 $e \to 0$ 的要求。

4. 抽水泵的抽水有明显震动，计算得到水柱的周期大约是 $0.02\mathrm{s} - 0.05\mathrm{s}$，它与交流电周期较近（但目测与水泵震动周期有数量级差距），可能会有影响。

5. 理论没有解决水柱破碎的问题，正式实验中没有复现预实验中那样超过两个周期的椭圆循环，且在重力场中的运动还有待研究（虽然按照我们的假设它应当只会影响速度）。