Universidad del Valle de Guatemala
Análisis y Diseño de Algoritmos - Sección 10
María Fernanda Estrada 14198
17/03/2020

Tarea 2
Computabilidad: máquinas de Turing

1. **Defina una máquina de Turing que compute la función característica:**

$$C_A(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \in A \\ 1 \; si \; x \notin A \end{cases}$$

Demuestre que funciona tal como se demostró el funcionamiento de la máquina de Turing para sumar.

Hay cuatro pasos importantes en esta máquina de Turing. El primero siempre es que se debe eliminar el primer 1 que viene de default, ya que arruinaría el resultado de la máquina si se dejase. Luego, hay que tener una cuádrupla que verifique si el número pertenece o no al conjunto; se irá a cierto estado si pertenece o no. Después, si el número pertenece, se deben borrar todos los 1s recorriendo toda la cinta y dejar 0 al final. Por último, si no pertenece, se deben borrar todos los 1s de la cinta excepto el 1 del final. Las cuádruplas entonces son:

1. $q_1 1 B q_1$ (eliminar el primer 1)
2. $q_1 B q_2 q_3$ (ir a q2 si pertenece o ir a q3 si no pertenece)
3. $q_2 B R q_4$ (recorrer la cinta si ya hay B) *pertenece*
4. $q_4 1 B q_2$ (eliminar los 1s) *pertenece*
5. $q_3 B R q_5$ (recorrer la cinta si ya hay B) *no pertenece*
6. $q_5 1 B q_3$ (eliminar los 1s) *no pertenece*
7. $q_5 B 1 q_3$ (dejar el último 1) *no pertenece*

Ahora, un ejemplo de funcionalidad es (si el número sí pertenece al conjunto):

$a_0 = q_1 1 1^x$
$a_1 = q_1 B 1^x$
$a_2 = q_2 B 1^x$
$a_3 = B q_4 1^x$
$a_4 = B q_2 B 1^{x-1}$
$a_5 = B B q_4 1^{x-1}$
.
.
.
$a_n = BBBB...q_4 B$

2. **Sea una función de proyección una función que devuelve el i-ésimo elemento en una secuencia de n elementos, para i y n dados (cada combinación distinta de i y:**

$$U^n_i(x_1,\ldots,x_n) = x_i$$

a. **Diseñe una máquina de Turing que compute la función cuando *n*=6 e *i*=3.**
Para encontrar el número en la posición 3, se deben seguir los siguientes pasos. Primero, se elimina el primer 1 default de la tira. Luego, se van eliminando los 1s de las posiciones 1 y 2. Al llegar a la posición 3, solo se recorre hasta llegar al siguiente B. Cuando llegamos al final, ya no nos interesan las posiciones 4 a 6, por lo que se deben eliminar hasta llegar al final de la cinta. Las cuádruplas son:
1. $q_1 1 B q_1$ (eliminar el primer 1)
2. $q_1 B R q_2$ (recorrer el primer número)
3. $q_2 1 B q_1$ (borrar los 1 del primer número)
4. $q_2 B R q_3$ (ya nos pasamos al segundo número)
5. $q_3 1 B q_4$ (borrar los 1 del segundo número)
6. $q_4 B R q_3$ (recorrer el segundo número)
7. $q_3 B R q_5$ (ya nos pasamos al tercer número)
8. $q_5 1 B q_5$ (eliminar el primer 1 del número)
9. $q_5 B R q_6$ (comenzar a leer el tercer número)
10. $q_6 1 R q_7$ (dejar como está el tercer número)
11. $q_7 1 R q_6$ (leer el tercer número)
12. $q_7 B R q_8$ (ya llegamos al cuarto número)
13. *Se repiten los pasos de eliminar todos los 1s hasta llegar al último B*

b. **Diseñe una máquina de Turing que compute esta función para cualesquiera *n* e *i* tales que 1 ≤ *i* ≤ *n*.**
Para todo número distinto de la posición i, se deben eliminar todos los 1s y dejar Bs. Para el número en la posición i, solamente se elimina el primer 1 y se dejan los 1s como están.

3. **Defina una máquina de Turing de la misma forma que Arora, et. al. (es decir, puede tener más de una cinta, al menos una cinta de input y una de output/trabajo, describe una función de transición, etc.). Esta máquina debe efectuar la suma de dos números binarios. Recuerde incluir en su definición al alfabeto, los estados y la función de transición.**
La máquina tendrá tres cintas: input, output, copia del parámetro 2. No podemos tener ambos números en la misma cinta (no estaríamos aprovechando la capacidad multicinta), entonces cuando se leen los números uno de ellos se copia en la cinta tres. Esto se hace para poder sumar simultáneamente. La cinta de output debe dejar suficiente espacio para ambos números, así que solo se mueve los espacios que lee todo el input que ya incluye ambos números. Al regresar todos los cabezales, se inicia el proceso de suma.
1. Alfabeto: {a, B, 1, 0}
2. Estados: $\{q_{inicio}, q_{copiar}, q_{suma}, q_{residuo}, q_{fin}\}$
3. Función de transición: AxE^3 -> $AxE^3x\{L, R, S\}^3$

4. **Explique cómo podría simular el funcionamiento de una máquina de Turing de múltiples cintas con una de una única cinta. Una máquina de Turing de múltiples cintas tiene un lector para cada cinta, y maneja, en cada paso de una computación, un único estado. En cada paso, la máquina lee el símbolo bajo cada lector y, en base a los símbolos leídos, opera escribiendo en alguna(s) cinta(s), y/o moviendo algún(os) lector(es) de forma independiente.**
   La simulación se hace al juntar todas las cintas de la multicinta en una única cinta, representandolas como pistas. El lector de la unicinta lee una columna a la vez, pero no lee varios símbolos sino un único símbolo compuesto de los símbolos del alfabeto de cada cinta de la multicinta. Sin embargo, los lectores de cada cinta no están en la misma posición, por lo que la unicinta debe poder representar las posiciones de estos lectores. Se agrega una nueva pista para indicar en dónde se encuentra el lector de cada cinta.

5. **Considere una máquina de Turing que tiene una única cinta, pero k lectores sobre ella. Puede haber varios lectores sobre la misma casilla de la cinta. En cada paso:**
   a. **Los lectores tienen el símbolo bajo sí.**
   b. **Todos los lectores escriben un símbolo (no necesariamente el mismo) en su respectiva casilla.**
   c. **Se mueven los lectores de forma independiente a la derecha o a la izquierda.**

   Explique, como en el ejercicio anterior, cómo esta máquina de Turing puede ser simulada con una máquina normal de una única cinta y un único lector.
   Se puede simular al separar esta nueva máquina en varias cintas con su respectivo lector. Se copian todos los símbolos correspondientes y su lector. Se agrega una última cinta para representar con otro símbolo en dónde se encuentran los lectores del resto de cintas. Ya con esta nueva máquina multicinta, se toma la demostración del inciso anterior y se concluye que la multicinta puede representarse como unicinta normal.