Множества. Операции над множествами

Множество — это объединение различных объектов, обладающих каким-то общим признаком или совокупностью признаков.

Множество состоит из **элементов**. Их может быть любое количество, вплоть до бесконечности. Но важно, что все элементы уникальны, они не повторяются. Количество элементов множества называется **мощностью множества**.

Множество, не имеющее элементов, называется **пустым** и обозначается как $\varnothing$.

Операции над множествами

Объединением множеств A и B называют множество C, состоящее из элементов, принадлежащих множествам A или B:

$$C = A \cup B$$

То есть во множество C помещаются абсолютно все элементы из двух множеств (но без повторений).

Пересечением множеств A и B называют множество C, состоящее из элементов, которые являются общими для множеств A и B:

$$C = A \cap B$$

Симметрическая разность двух множеств — это группа всех тех объектов, которые принадлежат только одному множеству:

$$C = A \Delta B$$

Дополнением множества A называют множество $\overline{A}$, которое является разностью универсального множества U и множества A:

$$\overline{A} = U \setminus A$$

Разностью множеств A и B называют множество C, состоящее из таких элементов множества A, которые не являются элементами множества B:

$$C = A \setminus B$$

Операции над множествами в Python

В языке Python реализованы все перечисленные операции над множествами. Для каждой из них есть свой символ и метод. Рассмотрим их все.

Для тренировки создадим два множества:

- Во множестве A будут храниться уникальные ID клиентов компании, которые пользуются мобильной связью.
- Во множестве B — уникальные ID клиентов компании, которые используют домашний интернет.

```
A = {'ID453', 'ID312', 'ID41', 'ID3', 'ID500', 'ID920', 'ID36', 'ID27'}
B = {'ID41', 'ID36', 'ID27', 'ID124', 'ID7', 'ID501', 'ID91' }
```

Объединение множеств

Для того чтобы найти объединение множеств, можно использовать метод `union()`. В качестве результата мы получим тех клиентов, которые используют хотя бы одну из двух услуг компании:

```
union_AB = A.union(B)
print(union_AB)
#{'ID500', 'ID27', 'ID41', 'ID3', 'ID501', 'ID453', 'ID312', 'ID124',
'ID920', 'ID91', 'ID7', 'ID36'}
```

Пересечение множеств

Для нахождения пересечения множеств используется метод `intersection()`. В контексте нашего примера мы получим клиентов, которые пользуются обеими услугами:

```
inter_AB = A.intersection(B)
```

```
print(inter_AB)
#{'ID27', 'ID41', 'ID36'}
```

Разность множеств

Для того чтобы получить разность между двумя множествами, применим метод `difference()`. В данном случае мы получим перечень тех клиентов, которые используют мобильную связь, однако не используют домашний интернет.

```
diff_AB = A.difference(B)
print(diff_AB)
#{'ID500', 'ID3', 'ID453', 'ID312', 'ID920'}
```

Симметрическая разность множеств

Для вывода симметрической разности можно использовать метод `symmetric_difference()` или оператор `^`. В качестве результата получим клиентов, которые пользуются только какой-то одной из услуг:

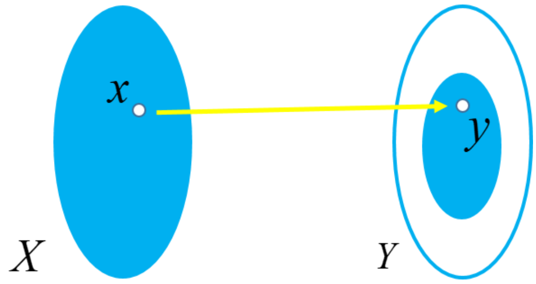
```
symmAB = A.symmetric_difference(B)
print(symmAB)
#{ID124', 'ID91', 'ID7', 'ID312', 'ID500', 'ID453', 'ID3', 'ID501',
'ID920'}


symmAB = A ^ B
print(symmAB)
#{ID124', 'ID91', 'ID7', 'ID312', 'ID500', 'ID453', 'ID3', 'ID501',
'ID920'}
```

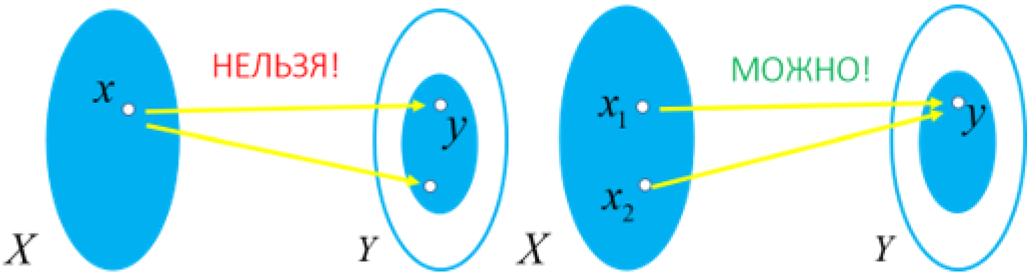
Функция. Элементарные функции

Функцией в математике называется правило, по которому можно сопоставить элементы двух множеств.

У каждого элемента x из X должна быть пара y в Y. То есть под действием функции f каждому элементу из множества X сопоставляется элемент из множества Y.



Важно понимать, что одному x нельзя поставить в соответствие два разных y, а вот ставить один y в соответствие двум x можно.



Элементарные функции — это функции, которые являются суммой, произведением или композицией функций следующих трёх видов:

- степенные функции

$$f(x) : kx + b,\ x^2,\ x^3,\ \frac{1}{x},\ P_n(x),\ x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

- тригонометрические функции

$$f(x) : sin\ x,\ cos\ x,\ tg\ x,\ ctg\ x,\ arctg\ x$$

- показательные и логарифмические функции

$$f(x) : e^x,\ a^x, ln\ x,\ log_a\ x, log_x\ a$$

Исследование функции

План исследования функции выглядит следующим образом:

1. Нахождение области определения и области значений функции.
2. Нахождение точек пересечения графика функции с осями координат.
3. Исследование функции на чётность и нечётность.
4. Нахождение точек минимума и максимума функции, а также промежутков возрастания и убывания.
5. Нахождение промежутков выпуклости и вогнутости функции и точек перегиба.
6. Нахождение асимптот функции.

Область определения функции

Возможно, из школьной программы вы помните, что в математике строго запрещено делить на 0 или, например, извлекать корень из отрицательного числа. Именно из таких «запретов» возникает понятие «области определения».

> По сути, **область определения** — это множество всех значений аргументов, к которым мы можем применять рассматриваемую функциональную зависимость и с точки зрения математики это будет «разрешено».

Например, пусть у нас есть функция:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Мы можем использовать в качестве аргумента для этой функции любое число, кроме нуля, так как на ноль делить нельзя. Это значит, что областью определения нашей функции является множество всех вещественных чисел за исключением нуля.

Более строго, математически, это утверждение можно записать следующим образом:

$$D(f(x)) : x \in (-\infty; 0) \ \cup \ (0; +\infty)$$

$D(f(x))$ здесь читается как «область определения функции $f(x)$».

Разумеется, мы можем вычислять область определения и с помощью библиотеки Python для символьных вычислений, с которой мы познакомились ранее — **SymPy**.

Например, рассчитаем область определения для функции $f(x) = \frac{1}{x}$:

```
from sympy import Symbol, S #импортируем нужные функции для обозначения переменных
from sympy.calculus.util import continuous_domain #импортируем функцию для поиска области определения
x = Symbol("x") #определяем нашу переменную
f = 1/x #определяем нашу функцию
continuous_domain(f, x, S.Reals) #вычисляем область определения
```

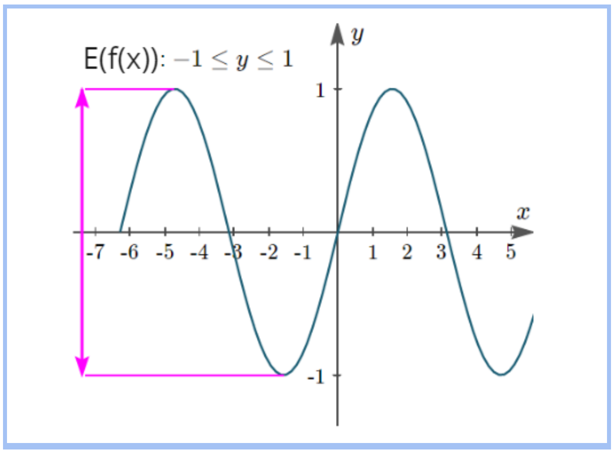
$$(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$$

Область значений функции

Теперь, когда мы разобрались с областью определения функции, мы можем перейти к поиску области значений функции.

> Под **областью значений** функции понимаются все значения, которые она может принимать.

Например, возможно, вы помните, что синус или косинус никогда не могут быть меньше -1 или больше 1. Это очень хорошо видно на графике:



Видно, что область значений — от -1 до 1 включительно. Формально это можно записать следующим образом:

$$E(f(x)) : f(x) \in [-1;1]$$

$E(f(x))$ читается как «область значений функции $f(x)$».

Разумеется, область значений мы также можем найти с помощью библиотеки SymPy. Например, сделаем это для функции $sin(x)$:

```
from sympy import sin
from sympy import
x = Symbol("x")
f = sin(x)
function_range(f, x, S.Reals)
```

$[-1;1]$

Точки пересечения с осями абсцисс и ординат

Для того чтобы найти эти точки пересечения, мы также можем использовать библиотеку SymPy. Например, найдём точки пересечения для функции:

$$f(x) = x^2 + 5x + 4$$

Сначала найдём точку пересечения с осью ординат. Для этого просто подставим 0 вместо значения x:

```
from sympy import sin
x = Symbol("x")
f = x*x+5*x+4
f.subs(x, 0)
```

4

Теперь найдём точку пересечения с осью абсцисс. Для этого решим уравнение, в котором приравняем нашу функцию к нулю:

```
from sympy import solveset, Eq
solveset(Eq(x*x+5*x+4, 0), x)
```

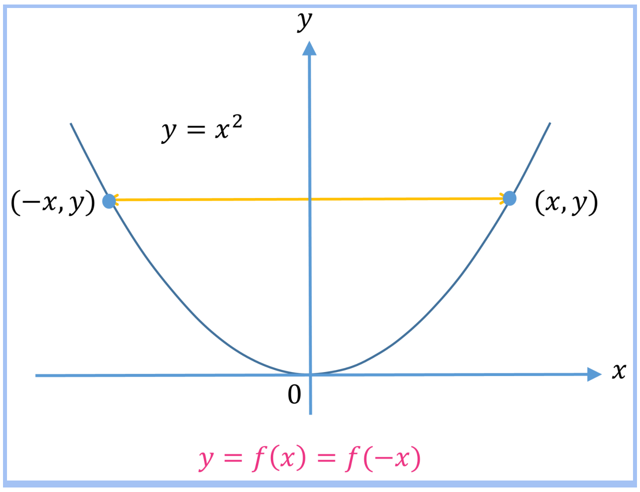
$\{-4; 1\}$

Итак, мы получили, что наша функция $f(x) = x^2 + 5x + 4$ пересекается с осью ординат в точке (0; 4), а с осью абсцисс — в точках (-4; 0) и (-1; 0).

Исследование функции на чётность и нечётность

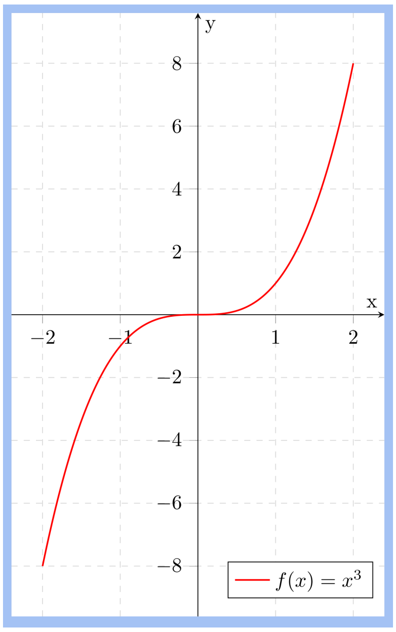
> Функция является **чётной**, если $f(x) = f(-x)$ для всех значений x. Это означает, что функция одинакова для оси x, и на положительной и отрицательной полуплоскостях она симметрична относительно оси y.

Например, функция $y = x^2$ является примером чётной функции:



Можно заметить, что функция симметрична относительно оси y, а также, что её значения в точках x и -x равны. Она принимает одно и то же значение для 3 и -3, для 2 и -2, для 4 и -4 и так далее.

Ещё одним примером чётной функции является функция $f(x) = |x|$, так как функция модуля принимает одинаковое значение для x и -x.



Производная

Производная — это предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю. Графически это тангенс угла наклона касательной в точке x_0 к кривой, изображающей функцию.

Задача о приближении, с помощью которой мы только что ввели понятие производной в графическом восприятии, называется линеаризацией. Рассмотрим, как мы можем её решить ↓

У нас есть значение функции в точке x_0, и мы хотим узнать её приближённое значение в точке x_1:

$$y_0 = f(x_0)\ y_1 = f(x_1)$$

Мы показали, что если x_1 находится не очень далеко от x_0, то отношение приращений примерно равно производной в точке x_0.

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \approx y'(x_0)$$

$$y_1 - y_0 \approx (x_1 - x_0)y'(x_0)$$

$$\underbrace{y_1}_{\text{новое значение}} \approx \underbrace{y_0}_{\text{старое значение}} + \underbrace{\boxed{y'(x_0)(x_1 - x_0)}}_{\text{линейное приращение}}$$

Чем ближе новая точка расположена к старой, тем точнее приближение.

Взаимосвязь функции и производной

Представим, что мы хотим составить инвестиционный план, и для этого нам нужно понять, когда наступают наиболее удачные моменты для покупки акций, а когда, наоборот, акции покупать не стоит. Нас будут интересовать следующие аспекты поведения функции цены:

- промежутки времени, в которые цена растёт;
- промежутки времени, в которые цена падает;
- точки минимума (точки, где цена достигает своей нижней точки и начинает расти);
- точки максимума (точки, где цена достигает своей верхней точки и начинает падать).

Оказывается, все эти области и точки можно легко найти, если вычислить производную для интересующей нас функции.

Так как производная характеризует скорость изменения функции, то, разумеется, когда цена растёт, производная будет положительной, когда цена падает, производная будет отрицательной.

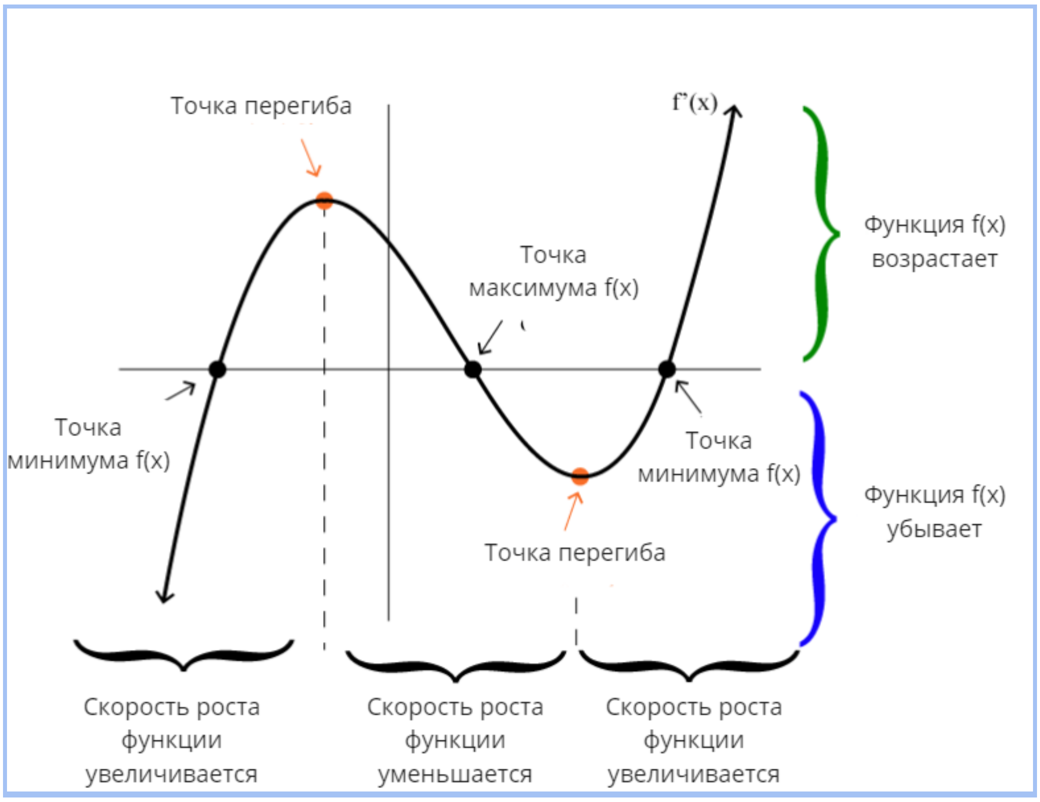
> Точки минимума и максимума (их ещё называют **экстремумами**) — это те точки, где поведение функции меняется с падения на рост или с роста на падение. В этих местах значение производной меняется с отрицательного на

положительное или с положительного на отрицательное, то есть она равна нулю (т. к. чтобы перейти из положительной полуплоскости в отрицательную или наоборот, надо обязательно перейти через 0).

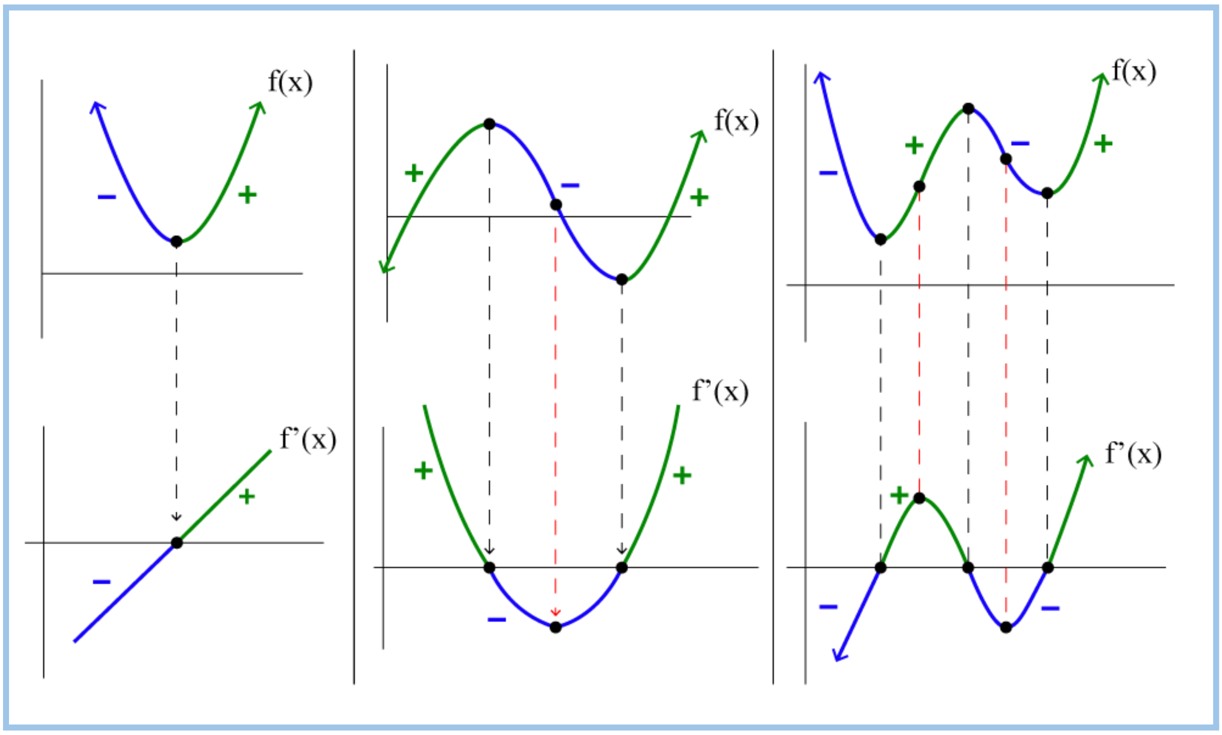
Обобщим эту информацию в таблице:

Функция	Возрастает	Убывает	Минимум	Максимум
Производная	Положительная	Отрицательная	Равна 0	Равна 0

Также посмотрим на график, на котором одновременно изображены функция и её производная, чтобы сравнить, как связано их поведение:



Также в качестве примера приведём сравнение графиков функций (верхний ряд) и графиков их производных (нижний ряд):



Взаимосвязь функции и производной

Для того чтобы искать производные элементарных функций, мы будем пользоваться специальной таблицей:

ФУНКЦИЯ	ПРОИЗВОДНАЯ
$y = C, y = Const$	0
$y = Cx$	$y' = C$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = e^{nx}$	$y' = ne^{nx}$
$y = a^x$	$y' = a^x\ ln\ a$
$y = ln\ x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = sin\ x$	$y' = cos\ x$
$y = cos\ x$	$y' = sin\ x$
$y = tgx$	$y' = \frac{1}{cos^2\ x}$
$y = ctgx$	$y' = \frac{1}{sin^2\ x}$

Например, нам надо рассчитать производную от x^4. Мы видим, что производная от x^n равняется $n * x^{n-1}$. Значит, производная от $x^4 = 4 * x^{4-1} = 4 * x^3$.

Или, к примеру, если дана функция $5 * e^x$, её производная останется такой же, так как коэффициент сохраняется при дифференцировании функций, а производная e^x, согласно таблице, равна e^x.

Если у нас есть сумма функций, то производная суммы будет равна сумме производных:

$$(sin(x) + 3x^2)' = cos(x) + 6x$$

Ранее мы обсудили задачу линеаризации, и теперь, когда мы умеем вычислять простые производные, мы можем разобрать пример для вычисления приблизительных значений.

?

Вычислить приближённое значение функции $y(x) = \sqrt{x}$ в точках $x_1 = 1.1$, $x_2 = 1.001$ и $x_3 = 2$.

Для начала разберём пример для точки $x_1 = 1.1$.

Найдём ближайшую «удобную» для нас точку и значение функции в ней:

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = \sqrt{1} = 1$$

Также найдём значение производной интересующей нас функции в этой точке:

$$y'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x}}|_{x=x_0} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

Найдём приращение аргумента:

$$\Delta x = 0.1$$

Теперь вычислим результат:

$$y(1.1) = \sqrt{1.1} \approx y_0 + (x_1 - x_0)\, y'|_{x=x_0} = 1 + 0.1 \cdot \frac{1}{2} = 1.05$$

Посмотрим, насколько сильной получилась погрешность относительно настоящего значения:

$$1.05^2 = 1.1025 \; \sqrt{1.1} \approx 1.0488088$$

Вычисление производных

Производная суммы

Начнём с производной суммы, то есть с производной от выражения следующего вида:

$$(f(x) + g(x))',$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — какие-то функции, зависящие от x.

Правило, по которому ищется производная суммы, мы уже отчасти рассмотрели. По сути, здесь нет никаких дополнительных усложнений.

Для того чтобы найти **производную суммы**, надо лишь найти производную от каждого слагаемого и затем найти сумму получившихся результатов:

$$(f + g)'(u) = f'(u) + g'(u)$$

?

Пример № 1

Вычислить производную для суммы функций e^x и x^2.

Так как производная для e^x равна e^x, а производная для x^2 равна 2x, получаем следующее:

$$(e^x + x^2)' = (e^x)' + (x^2)' = e^x + 2x$$

Производная произведения

К сожалению, здесь всё не так просто, как с суммой.

Для того чтобы вычислить **производную произведения**, необходимо воспользоваться следующей формулой:

$$(f \cdot g)'(u) = f'(u) \cdot g(u) + f(u) \cdot g'(u)$$

Таким образом, нужно:

1. Вычислить производную первого множителя и умножить результат на второй множитель.
2. Вычислить производную второго множителя и умножить результат на первый множитель.
3. Сложить результаты, полученные в пунктах 1 и 2.

?

Пример № 1

Вычислить производную для произведения функций e^x и x^2.

$$(e^x \cdot x^2)' = ?$$

Производная для e^x равна e^x, а производная для x^2 равна 2x. Поэтому получаем следующее:

$$(e^x \cdot x^2)' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x$$

Производная частного

Искать производную частного немного сложнее, чем производную произведения.

При **дифференцировании частного** знаменатель возводится в квадрат, а в числителе появляется разница произведения производной числителя на знаменатель и произведения числителя на производную знаменателя:

$$\frac{f}{g}(u) = \frac{f'(u)g(u) - f(u)g'(u)}{g^2(u)}$$

?

Пример № 1

Вычислить для функции $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

Воспользуемся нашей формулой и запишем выражение для вычисления производной:

$$f'(x) = \frac{(x-1)'(x+2) - (x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}$$

Теперь вычислим производные от двух множителей в числителе:

$$f'(x) = \frac{(1)(x+2) - (x-1)(1)}{(x+2)^2}$$

Упростим наше выражение с помощью равносильных преобразований, чтобы оно стало более компактным:

$$f'(x) = \frac{(x+2) - (x-1)}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$$

Производная композиции функций

Нам осталось разобраться с тем, как искать производную для композиции функций (или, как её ещё иногда называют, **производную для сложной функции**).

Дифференцировать композицию функций можно по следующей формуле:

$$(f \cdot g)'(x) = (f(d(x)))' = //g(x) = u// = (f(u))'_x = f'(u) \cdot u' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

То есть мы ищем производную, как обычно, а затем домножаем результат на производную от той функции, которая выступает в качестве аргумента для внешней функции.

?

Пример № 1

Вычислить производную для функции $f(x) = (3x+1)^5$.

Данную функцию можно представить как композицию функций $u(x) = 3x + 1$ и $g(x) = x^5$. Причём внешней функцией здесь является функция $g(x)$, а $u(x)$ выступает её аргументом. Поэтому изначально мы ищем производную для степенной функции. Выносим вперёд коэффициент и понижаем степень на 1. Затем домножаем результат на производную функции, которая была аргументом:

$$f'(x) = ((3x+1)^5)' = 5\,(3x+1)^4\,(3x+1)' = 5\,(3x+1)^4(3)$$

Упрощаем результат до максимально компактного вида:

$$5(3x+1)^4(3) = 15(3x+1)^4$$