# 计数

## 四种计数法则

**乘积法则** 假定一个过程可以被分解成两个任务。如果完成第一个任务有 $n_1$ 种方式，在第一个任务完成之后有 $n_2$ 种方式完成第二个任务，那么完成这个过程有 $n_1 n_2$ 种方式。

**求和法则** 如果完成第一项任务有 $n_1$ 种方式，完成第二项任务有 $n_2$ 种方式，并且这些任务不能同时执行，那么完成第一或第二项任务有 $n_1+n_2$ 种方式。

**减法法则** 如果一个任务或者可以通过 $n_1$ 种方法执行或者可以通过 $n_2$ 种另一类方法执行，那么执行这个任务的方法数是 $n_1+n_2$ 减去两类方法中执行这个任务相同的方法。

**除法法则** 如果一个任务能由一个可以用 $n$ 种方式完成的过程实现，而对于每种完成任务的方式 $w$，在 $n$ 种方式中正好有 $d$ 种与之对应，那么完成这个任务的方法数为 $n/d$。

## 鸽巢原理

**定理 1** **鸽巢原理** 如果 $k+1$ 个或更多的物体放入 $k$ 个盒子，那么至少有一个盒子包含了 2 个或更多的物体。

**推论 1** 一个从有 $k+1$ 甚至更多的元素的集合到 $k$ 个元素集合的函数 $f$ 不是一对一函数。

**定理 2** **广义鸽巢原理** 如果 $N$ 个物体放入 $k$ 个盒子，那么至少有一个盒子包含了至少 $\lceil N/k \rceil$ 个物体。

**定理 3** 每个由 $n^2+1$ 个不同实数构成的序列都包含一个长为 $n+1$ 的严格递增子序列或严格递减子序列。

## 排列组合

排列数

**定理 1** 具有 $n$ 个不同元素的集合的 $r$ 排列数是

$$P(n,\ r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

**推论 1** 如果 $n$ 和 $r$ 都是整数，且 $0\leqslant r\leqslant n$，则

$$P(n,\ r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

组合数

**定理 2** 设 $n$ 是正整数，$r$ 是满足 $0\leqslant r\leqslant n$ 的整数，$n$ 元素的集合的 $r$ 组合数等于

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

**推论 2** 设 $n$ 和 $r$ 是满足 $r\leqslant n$ 的非负整数，那么 $C(n,\ r)=C(n,\ n-r)$。

**证** 由定理 2 得到

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C(n,n-r)=\frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

因此，$C(n,\ r)=C(n,\ n-r)$。

## 二项式定理

**定理 1** **二项式定理** 设 $x$ 和 $y$ 是变量，$n$ 是非负整数，那么

$$(x+y)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\cdots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+\binom{n}{n}y^n$$

**推论 1** 设 $n$ 为非负整数，那么

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

**推论 2** 设 $n$ 是正整数，那么

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

**推论 3** 设 $n$ 是非负整数，那么

$$\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}=3^n$$

## 帕斯卡三角形

**定理 2** **帕斯卡恒等式** 设 $n$ 和 $k$ 是满足 $n \geqslant k$ 的正整数，那么有

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

## 范德蒙德恒等式

**定理 3** **范德蒙德恒等式** 设 $m$，$n$ 和 $r$ 是非负整数，其中 $r$ 不超过 $m$ 或 $n$，那么

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$$

**证** 假定在第一个集合中有 $m$ 项，第二个集合中有 $n$ 项。从这两个集合的并集中取 $r$ 个元素的方式数是 $\binom{m+n}{r}$。

第一个集合取一项，第二个集合取n-1项............

**推论 4** 如果 $n$ 是一个非负整数，那么

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

**定理 4** 设 $n$ 和 $r$ 是非负整数，$r \leqslant n$，那么

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}$$

## 有重复的排列

**定理 1** 具有 $n$ 个对象的集合允许重复的 $r$ 排列数是 $n^r$。

## 有重复的组合

**定理 2** $n$ 个元素的集合中允许重复的 $r$ 组合有 $C(n+r-1, r)=C(n+r-1, n-1)$ 个。

相当于有n+r-1个不同的元素

## 具有不可区别物体的集合的排列

**定理 3** 设类型 1 的相同的物体有 $n_1$ 个，类型 2 的相同的物体有 $n_2$ 个，…，类型 $k$ 的相同的物体有 $n_k$ 个，那么 $n$ 个物体的不同排列数是

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

**定理 4** 把 $n$ 个不同的物体分配到 $k$ 个不同的盒子使得 $n_i$ 个物体放入盒子 $i(i=1, 2, \cdots, k)$ 的方式数等于

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$