求解线性递推关系

定理 1 设 c_1 和 c_2 是实数。假设 $r^2-c_1r-c_2=0$ 有两个不相等的根 r_1 和 r_2，那么序列 $\{a_n\}$ 是递推关系 $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$ 的解，当且仅当 $a_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n$，$n=0, 1, 2, \cdots$，其中 α_1 和 α_2 是常数。

定理 2 设 c_1 和 c_2 是实数，$c_2\neq0$。假设 $r^2-c_1r-c_2=0$ 只有一个根 r_0。序列 $\{a_n\}$ 是递推关系 $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$ 的解，当且仅当 $a_n=\alpha_1r_0^n+\alpha_2nr_0^n$，$n=0, 1, 2, \cdots$，其中 α_1 和 α_2 是常数。

定理 3 设 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是实数。假设特征方程

$$r^k-c_1r^{k-1}-\cdots-c_k=0$$

有 k 个不相等的根 $r_1, r_2, \cdots, r_k$。那么序列 $\{a_n\}$ 是递推关系

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k}$$

的解，当且仅当

$$a_n=\alpha_1r_1^n+\alpha_2r_2^n+\cdots+\alpha_kr_k^n$$

$n=0, 1, 2, \cdots$，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是常数。

定理 4 设 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是实数，假设特征方程

$$r_k-c_1r^{k-1}-\cdots-c_k=0$$

有 t 个不相等的根 $r_1, r_2, \cdots, r_t$，其重数分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_t$，满足 $m_i\geqslant1$，$i=1, 2, \cdots, t$，且 $m_1+m_2+\cdots+m_t=k$。那么序列 $\{a_n\}$ 是递推关系

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k}$$

的解，当且仅当

$$\begin{aligned}a_n&=(\alpha_{1,0}+\alpha_{1,1}n+\cdots+\alpha_{1,m_1-1}n^{m_1-1})r_1^n\\&+(\alpha_{2,0}+\alpha_{2,1}n+\cdots+\alpha_{2,m_2-1}n^{m_2-1})r_2^n\\&+\cdots+(\alpha_{t,0}+\alpha_{t,1}n+\cdots+\alpha_{t,m_t-1}n^{m_t-1})r_t^n\end{aligned}$$

$n=0, 1, 2, \cdots$，其中 $\alpha_{i,j}$ 是常数，$1\leqslant i\leqslant t$ 且 $0\leqslant j\leqslant m_i-1$。

定理 5 如果$\{a_n^{(p)}\}$是常系数非齐次线性递推关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

的一个特解，那么每个解都是$\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$的形式，其中$\{a_n^{(h)}\}$是相伴的齐次递推关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

的一个解。

定理 6 假设$\{a_n\}$满足线性非齐次递推关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

其中 c_1，c_2，…，c_k 是实数，且

$$F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0) s^n$$

其中 b_0，b_1，…，b_t 和 s 是实数。当 s 不是相伴的线性齐次递推关系的特征方程的根时，存在一个下述形式的特解

$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n$$

当 s 是特征方程的根且它的重数是 m 时，存在一个下述形式的特解

$$n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n$$

定理 1 设 f 是满足递推关系

$$f(n) = af(n/b) + c$$

的增函数，其中 n 被 b 整除，$a \geqslant 1$，b 是大于 1 的整数，c 是一个正实数。那么

$$f(n) \text{ 是 } \begin{cases} O(n^{\log_b a}) & a > 1 \\ O(\log n) & a = 1 \end{cases}$$

而且，当 $n = b^k$（其中 k 是正整数），$a \neq 1$ 时

$$f(n) = C_1 n^{\log_b a} + C_2$$

其中 $C_1 = f(1) + c/(a-1)$ 且 $C_2 = -c/(a-1)$。

定理 2 **主定理** 设 f 是满足递推关系

$$f(n)=af(n/b)+cn^d$$

的增函数，其中 $n=b^k$，k 是一个正整数，$a\geqslant 1$，b 是大于 1 的整数，c 和 d 是实数，满足 c 是正的且 b 是非负的。那么

$$f(n)\text{ 是}\begin{cases} O(n^d) & a<b^d \\ O(n^d\log n) & a=b^d \\ O(n^{\log_b a}) & a>b^d \end{cases}$$