事件的概率

古典概率

定义 1.1 设一个试验有 N 个等可能的结果,而事件 E 恰包含其中的 M 个结果,则事件 E 的概率,记为 $P(E)$,定义为

$$P(E) = M/N \tag{1.1}$$

4. n 个相异物件分成 k 堆,各堆物件数分别为 $r_1,\cdots,r_k$ 的分法是

$$n!/(r_1!\cdots r_k!) \tag{2.6}$$

条件概率

定义 3.1 设有两事件 A,B 而 $P(B)\neq 0$. 则"在给定 B 发生的条件下 A 的条件概率",记为 $P(A|B)$,定义为

$$P(A|B) = P(AB)/P(B) \tag{3.6}$$

加法定理

定理 3.1 若干个互斥事件之和的概率，等于各事件的概率之和：

$$P(A_1 + A_2 + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots \qquad (3.1)$$

事件个数可以是有限的或无限的，这定理就称为（概率的）加法定理，其重要条件是各事件必须为两两互斥.

系 3.1 以 $\overline{A}$ 表 A 的对立事件，则

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad (3.2)$$

事件的独立性（乘法定理）

$$P(AB) = P(A)P(B) \qquad (3.7)$$

定义 3.2 两事件 A,B 若满足(3.7)，则称 A,B 独立.

定理 3.2 两独立事件 A,B 的积 AB 之概率 $P(AB)$ 等于其各自概率之积 $P(A)P(B)$.

定义 3.3 设 $A_1, A_2, \cdots$ 为有限或无限个事件.如果从其中任

意取出有限个 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_m}$ 都成立.

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_m}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_m}) \qquad (3.8)$$

则称事件 $A_1, A_2, \cdots$ 相互独立或简称独立.

这个定义与由条件概率出发的定义是等价的,后者是说:对任何互不相同的 $i_1, i_2, \cdots, i_m$,有

$$P(A_{i_1} \mid A_{i_2} \cdots A_{i_m}) = P(A_{i_1}) \qquad (3.9)$$

定理 3.3 若干个独立事件 $A_1, \cdots, A_n$ 之积的概率,等于各事件概率的乘积:

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) \qquad (3.10)$$

系 3.2 独立事件的任一部分也独立.例如,A, B, C, D 四事件相互独立,则 A, C,或 A, B, D 等,都是独立的.

系 3.3 若一列事件 $A_1, A_2, \cdots$ 相互独立,则将其中任一部分改为对立事件时,所得事件列仍为相互独立.

注意：两两独立不能推出相互独立

全概率公式

- $$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots$$

贝叶斯公式

在全概率公式的假定之下，有

$$\begin{aligned} P(B|A) &= P(AB_i)/P(A) \\ &= P(B_i)P(A|B_i)/\sum_i P(B_j)P(A|B_j) \qquad (3.19) \end{aligned}$$