Estadística Básica

Estadística Básica

Adriana Guerrero Peña
María Victoria Buitrago
María Curieses Paulete

TEXTOS ACADÉMICOS

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO
Institución Universitaria

ESTADÍSTICA BÁSICA

1a. Edición: septiembre de 2007
3a. Reimpresión (revisada y aumentada): julio de 2009
2a. Edición: febrero de 2010

ISBN: 978-958-8351-77-3
Hechos todos los depósitos legales

Dirección editorial
Fondo Editorial ITM

Corrección de textos
Lucía Inés Valencia

Diagramación y montaje
L. Vieco e Hijas Ltda.

Impreso y hecho en Medellín, Colombia

Instituto Tecnológico Metropolitano
Calle 73 No. 76A 354
Tel.: (574) 440 51 60
Fax: 440 52 52
www.itm.edu.co
Medellín - Colombia

Contenido

Presentación

Con esta guía se pretende que el estudiante aprenda a manejar mediante el uso de procedimientos estadísticos, herramientas que podrá utilizar en el mejoramiento de su desempeño laboral y en muchos otros aspectos de la vida diaria.

En la guía desarrollaremos los conceptos básicos que permitan la comprensión de los métodos empleados en la estadística descriptiva, para la solución de casos relacionados con el análisis de información.

Estadística Básica estudia la solución de problemas sobre probabilidades que requieren una cabal comprensión de algunas reglas fundamentales de probabilidad.

El texto introduce al estudiante en el mundo de la estadística, desarrollando competencias que lo ayudan a mejorar su desempeño laboral y asuntos de su profesión, para que tome decisiones y solucione problemas por medio de la aplicación de procedimientos estadísticos.

Introducción

La materia estadística e introducción a la probabilidad se adapta a las necesidades del curso semestral de las tecnologías e ingenierías, en las que se estudian los fundamentos de la estadística.

Con la guía Estadística Básica se pretende llevar al alumno al mundo de la estadística, mostrándole el manejo de la información como recurso, y adquiere una nueva dimensión, dejando de ser una simple colección de hechos, para convertirse en una fuente de alimentación del proceso de toma de decisiones. Muestra cómo resolver problemas ante la incertidumbre, situación que todos enfrentamos tanto en el mundo de los negocios como en la vida cotidiana.

El orden que guarda este material en los capítulos siguientes es el enfoque pedagógico que tiene el Instituto Tecnológico Metropolitano en los microcurrículos de los diferentes programas.

Cada capítulo contiene una serie de ejercicios y aplicaciones que ayudan a los estudiantes a desarrollar habilidades para la aplicación de razonamientos estadísticos y resolver situaciones problemáticas e interpretación de resultados.

Capítulo 1

En este capítulo se presentan los principales conceptos básicos que permiten la comprensión de los métodos empleados en estadística descriptiva, para la solución de casos relacionados con el análisis de información.

Competencia

Conceptualizar y reconocer la terminología básica en Estadística.

Eje temático

Razones, proporciones y porcentajes, sumatoria y sus propiedades. Historia de la estadística.

1. Conceptos previos

1.1 Definición de sumatoria

Si $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son n números, la suma de estos números $x_1 + x_2 + x_3 +, \ldots, + x_n$ se expresa simbólicamente mediante la escritura, esto es,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

Así, por ejemplo, si $x_i = i^3$ entonces,

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = \sum_{i=1}^{5} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$$

1.2 Propiedades

De la definición de $\sum_{i=1}^{n} x_i$ se derivan las siguientes propiedades.

1. Si $x_i = c$ (constante) entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} c = c + c + c + ... + c = nc$$

Así, por ejemplo, $\sum_{i=1}^{5} 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 * 4 = 20$

2. Si c es una constante que multiplica a cada una de las observaciones $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ entonces la suma de los n productos es igual a c multiplicada por la suma de las observaciones, esto es,

$$\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$$

3. Si $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ e $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ son sucesiones de números, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

4. Si $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ y $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ son dos sucesiones de números, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i$$

La *media aritmética* o simplemente media es la medida de posición más utilizada. La media aritmética representa el centro físico del conjunto de datos y se define como la suma de los valores observados, dividido por el total de observaciones. De una manera formal decimos que si $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ son n observaciones numéricas, entonces la media aritmética de estas n observaciones se denota y define de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

Entonces; $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, de donde se puede concluir que $n\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i$

1.3 Actividad

1. Suponga que $X = 1,3,5,7,9$ son las unidades producidas en una pequeña empresa en cada una de las primeras cinco horas de un día cualquiera de trabajo, suponga además que los costos de producción Y de las unidades producidas están dados por: $Y = 3 + 2X$.

    a. Calcule los costos Y de producir 1, 3, 5, 7, 9 unidades.
    b. Calcule $\overline{X}$ y $\overline{Y}$. Compruebe que $\overline{Y} = 3 + 2\overline{X}$. ¿Qué puedes concluir?

2. Si $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ son sucesiones de números y además $y_i = a + bx$, siendo a y b constantes entonces $\overline{y}_i = a + b\overline{x}$. Utilizando propiedades de sumatoria, justifica la propiedad anterior.

1.4 Ejercicios

1. Suponga que se tienen dos sucesiones X y Y, apareadas de la manera siguiente:

    X: 1 2 3 4 5
    Y: 2 4 6 8 10

    hallar el valor de cada una de las siguientes expresiones:

    a. $\left(\sum X\right)\left(\sum Y\right)$
    b. $\left(\sum_{i=1}^{4} x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2$
    c. $\left(\sum XY\right) - \left(\sum X\right)\left(\sum Y\right)$
    d. $\sum (X+Y)$

2. Utilizar el símbolo $\sum$ para representar las expresiones siguientes:

    a. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

b. $a x_1 + 2a x_2 + 3a x_3 + 4a x_4 + 5a x_5$

c. $c(x_1 + 1) + c(x_2 + 2) + c(x_3 + 3) + ... + c(x_n + n)$

d. $(x_1 - 1)1^2 + (x_2 - 2)2^2 + (x_3 - 3)3^2 + (x_4 - 4)4^2 + (x_5 - 5)5^2$

3. Escriba con notación $\sum$.

   a. 4 + 8 + 12 + 16 + 20

   b. $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n$

   c. 3 + 9 + 27 + 81

4. Hallar el valor de cada una de las expresiones siguientes:

   a. $\sum_{i=1}^{8} i$

   b. $\sum_{i=1}^{5} (i^2 + 3)$

   c. $\sum_{k=1}^{4} (k + 2)^2$

   d. $\sum_{i=1}^{7} (-1)^{i+2} (i^2 - 3)$

   e. $\sum_{i=1}^{4} \frac{4}{i(i+2)}$

5. Si $\sum_{i=1}^{4} x_i = 14 \ y \ \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 54$; calcular

   a. $\sum_{i=1}^{4} (x_i - 2)$

   b. $\sum_{i=1}^{4} (x_i + 2)$

c. $\sum_{i=1}^{4}(x_i - 2)^2$

d. $\sum_{i=1}^{4} 3\left(2x_i^2 - 3x_i + 1\right)$

6. Calcular; utilizando propiedades

a. $\sum_{i=1}^{4}(i + 2)^2$

b. $\sum_{1=1}^{2} 7i^2 - 3i$

c. $\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{i^3 - i}{6}\right)$

7. Pruebe si las expresiones A y B son iguales:

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j}^{m}\left(bx_{ij} - \bar{x}..\right)$$

$$B = (b-1)nm\bar{x}.. \quad \text{si,} \quad \bar{X}.. = \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} X_{ij}$$

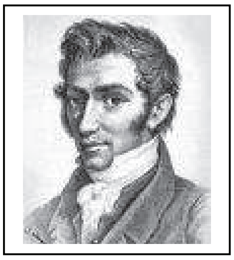
Historia de la estadística

Desarrollo histórico de la estadística

El término *estadística* se empleó para referirse a los datos del estado. En la Europa Medieval se utilizó la estadística para llevar datos sobre la población de un estado, los diezmos y los impuestos.

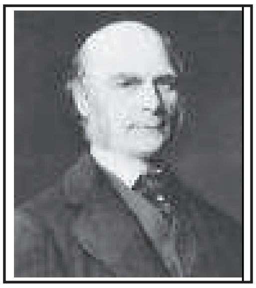
Hay algunos personajes fundamentales en el desarrollo de la estadística:

Adolph Quetelet
(1796-1874)



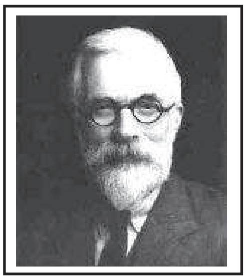
Fue el primero en aplicar métodos modernos a un conjunto de datos y es considerado el padre de la estadística.

Francis Galton
(1822-1911)



Creó la teoría de regresión que posteriormente refinó su discípulo Karl Pearson (1857-1936).

Ronald Fisher
(1890-1962)



Es la figura más prominente hasta el presente y creó la teoría moderna de la estimación.

Capítulo 2

Competencia

Describir y analizar gráficamente diferentes tipos de información.

Eje temático

Concepto de estadística como ciencia
Términos básicos
Métodos gráficos para describir información. Cualitativa
Gráfico de barras y circulares
Métodos gráficos para variables cuantitativas
Histogramas de frecuencia para datos no agrupados
Histograma de frecuencia para datos agrupados

2. Estadística descriptiva

2.1 Definiciones de términos estadísticos

Estadística: Es la ciencia de las matemáticas que se encarga de la selección, recolección, tabulación, presentación y análisis de la información que se utiliza en la toma de decisiones organizacionales.

La estadística se divide en dos grandes ramas, a saber:

Estadística descriptiva: Se dedica a la descripción, organización, síntesis y análisis de la información de interés; pero sin llegar a conclusiones fuertes o profundas, sobre la misma.

Estadística inferencial: Busca obtener conclusiones sólidas y más profundas, basado en el trabajo con muestras y su posterior generalización de resultados para la toma de decisiones y conclusiones sólidas.

La estadística inferencial nos permite inducir conclusiones de situaciones, sucesos o fenómenos previamente estudiados.

2.2 Conceptos estadísticos

Para comprender mejor la parte de estadística descriptiva, definiremos algunos términos muy utilizados, que nos servirán de guía para el desarrollo de los ejercicios.

POBLACIÓN: Se concibe como un conjunto total de elementos, datos, personas, atributos, medidas, acontecimientos u objetos, que poseen una o más características comunes y cuyas propiedades serán analizadas.

La población puede ser :

1. POBLACIÓN FINITA: Cuando es posible enumerar físicamente, TODOS los elementos que pertenecen a la población.
2. POBLACIÓN INFINITA: Cuando es imposible enumerar físicamente TODOS los elementos que pertenecen a la población.

MUESTRA: Es un subconjunto de la población, que se selecciona siguiendo ciertos procedimientos estadísticos, que se llama teoría de muestreo.

PARÁMETRO: Valor numérico que resume todos los datos de una población completa. Para determinar su valor es necesario utilizar la información poblacional completa.

ESTADÍSTICO: Es un valor numérico que resume todos los datos de una muestra y sirve como estimación del parámetro de la población.

VARIABLE: Es una característica, atributo o medida que se está analizando en un estudio estadístico.

La variable puede ser:

1. VARIABLE CUALITATIVA: Clasifica o describe un atributo o cualidad de los elementos de la población o muestra. (Atributos)
2. VARIABLE CUANTITATIVA: Los datos recolectados cuantifican un elemento de la población o muestra.

La variable cuantitativa puede ser:

a) VARIABLE CUANTITATIVA DISCRETA: Cuando los valores que toma la variable son enteros que no se pueden partir.
b) VARIABLE CUANTITATIVA CONTINUA: Cuando los valores que toma la variable se pueden partir.

DATOS: Conjunto de valores recolectados para la variable.

DATO: Valor de la variable asociado a un elemento de una población muestra.

EXPERIMENTO: Actividad planeada, cuyos resultados producen un conjunto de datos.

VARIABLE ALEATORIA: Una variable aleatoria (v.a) es una función que asigna a cada elemento de un espacio muestral un numero real. O sea, una variable es aleatoria si toma diferentes valores como resultado de un experimento aleatorio.

2.3 Ejercicios: conceptos estadísticos

1. Utilizando la información suministrada en la situación siguiente, identifica los *conceptos básicos* de la estadística, tales como: población, muestra, variable, dato, datos, experimento, parámetro.

Situación 1

Un estudiante de estadística está interesado en determinar algo sobre el promedio del valor en pesos de los automóviles que pertenecen al cuerpo docente del Instituto Tecnológico Metropolitano.

La siguiente es la lista de información con la que el estudiante cuenta.

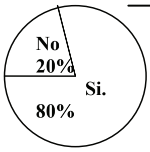
- Automóviles que pertenecen a los profesores del Departamento Idiomas: ____
- Colección de todos los automóviles que pertenecen a todos los miembros del cuerpo docente:______________________________
- Valor en pesos de cada automóvil individual: _________________
- Los valores de los autos de cada uno de los docentes de idiomas: ____
- Le pregunto a cada docente de idiomas el valor de su auto: ____
- El valor promedio de todos los automóviles de los docentes del Instituto es de $1.700.830: _________________________________

- El automóvil del profesora Sánchez está valuado en $14.594.000: ______________________________

Situación 2

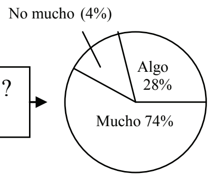
Comer juntos: sigue siendo importante.

A continuación se presentan los resultados obtenidos en una encuesta realizada respecto a la importancia de que una familia coma junta.



¿La mayor parte de su familia cenó junta ayer ?

¿Qué tan importante es para usted cenar con su familia ?



En los últimos siete días, ¿Cuántas veces cenó junta la mayor parte de su familia?

Nº.días	0	1	2	3	4	5	6	7
Porcentaje	7	7	8	8	13	3	8	46

Cuando su familia cena junta ¿Cuánto tiempo dura la cena?

Duración	½ hora	45 min	más de 1 h.	< ½ h	1 hora	lo ignora
Porcentaje	48%	21%	2%	20%	8%	1%

Con la información suministrada, responda las siguientes preguntas:

a. Mencione las cuatro variables.

b. ¿Qué tipo de variable es cada una?

Situación 3

Un fabricante de medicamentos está interesado en la proporción de personas que padecen hipertensión (presión arterial elevada) cuya condición pueda ser controlada por un nuevo producto desarrollado por la empresa. Se condujo un estudio en el que participaron 5000 personas que padecen de hipertensión, y se encontró que 80% de las personas pueden controlar su hipertensión con el medicamento. Suponiendo que las cinco mil personas son representativas del grupo con hipertensión, conteste las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la población?
b. ¿Cuál es la muestra?
c. Identifique el parámetro de interés
d. Identifique la estadística y proporcione su valor
e. ¿Se conoce el valor del parámetro?

Situación 4

La fábrica de gaseosas La Sed proyecta lanzar al mercado un nuevo sabor. Se realiza un test de aceptación de dicho sabor a 20 niños, utilizando una escala de 10 puntos, para medir el grado de aceptación. Uno de los niños (Pedro) aceptó el nuevo sabor con 7 puntos. Los puntos obtenidos en los 19 niños restantes son los siguientes: 2,6,7,4,5,5,9,8,7,5,1,8,4,7,7,7,6,5,4.

La muestra estuvo compuesta por igual número de niños de ambos sexos, de 6 a 12 años, pertenecientes a una escuela de Medellín, los cuales, en su mayoría, dieron una aceptación de 7 puntos.

1. Con la información, identifique:

a. ¿Cuál es la población?: _______________
b. ¿Cuál es la muestra?: ________________
c. ¿Cuál es la variable?: _______________
d. ¿Es la variable cualitativa o cuantitativa?: __________________
e. ¿Cuál es el experimento?: ________________________
f. ¿Cuál es un dato?: _______________________________

g. ¿Cuáles son los datos?: ________________________
h. ¿Cuál es el estadístico?: ________________________
i. ¿Cuál es el parámetro?: __________________________

2. Ejercicio

Identifique las siguientes expresiones como ejemplos de variables cualitativas o cuantitativas.

a. Una encuesta de electores registrados según el candidato que apoyen.
b. El tipo de cuentas que se pueden registrar en una contabilidad.
c. Códigos utilizados para marcar productos en un supermercado
d. El tiempo mínimo necesario para una persona ejecute una tarea específica.
e. El número de páginas por trabajo que salen de la impresora de una computadora.
f. Registro por estratos de los habitantes de Medellín.

3. Resolver las siguientes preguntas:

a. Describa en sus propias palabras cómo puede utilizarse la estadística para solucionar en varias disciplinas y ocupaciones.
b. Describa en sus propios términos la diferencia entre población y muestra, entre parámetro y un estadístico.
c. ¿Cuál es la diferencia entre una variable cuantitativa y una variable cualitativa? Dé ejemplos.
d. Diferencie entre una variable continua y una variable discreta. Dé ejemplo de cada una.
e. Una revista reciente reveló que los japoneses pronto controlarán hasta un 35% de las ventas de autos en los Estados Unidos, comparando con el 28% de finales de los años 80 está apenas un 8% por encima de lo ocurrido en 1970. ¿Esta información contiene estadística descriptiva, inferencias, o ambas? Explique.

f ¿Cuál es la diferencia entre la estadística descriptiva y la estadística inferencias? ¿Cuál cree usted constituye una forma más elevada de análisis estadístico y por qué?

g. Seleccione una población cualquiera que sea de su interés. Identifique variables cuantitativas y cualitativas de esa población que puedan seleccionarse para ser estudiadas.

h. Si los estadísticos están interesados realmente en poblaciones, ¿por qué realmente trabajan con muestras?

4. Determine si las siguientes variables son discretas o continuas:

   a. Número de cursos que los estudiantes de Costos y Presupuestos cursan en este semestre.
   b. Número de pases atrapados por el beisbolista Tim Brown, receptor de los La Raiders.
   c. Peso de los compañeros de equipo de Tim Brown.
   d. Peso del contenido de las cajas de cereal.
   e. Número de libros que usted leyó el año pasado.

5. El presidente de una fraternidad en el campus desea tomar una muestra de las opiniones de 112 miembros respecto a las actividades urgentes para el otoño:

   a. ¿Cuál es la población?
   c. ¿Cuál es la muestra?

2.4 Métodos gráficos para describir información

Un análisis estadístico comienza generalmente, con un estudio gráfico de los datos disponibles en una tabla.

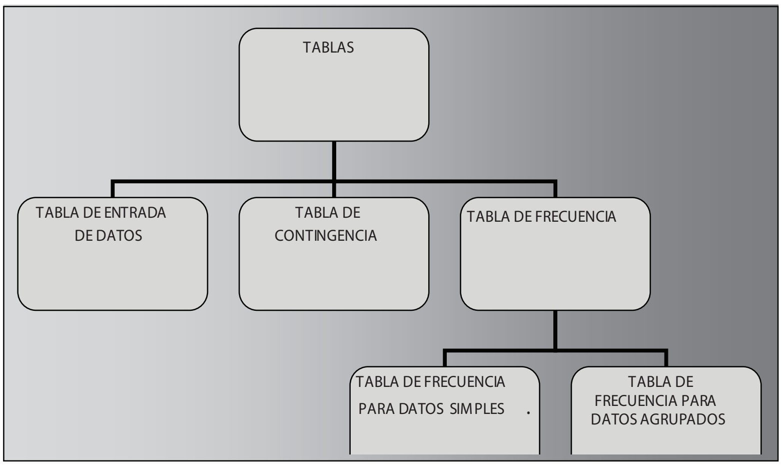
Cuando se tiene información considerable, acerca de una variable, es difícil hacer una interpretación rápida del comportamiento de ésta. Organizando estos datos en una tabla y a partir de elaborar algunas gráficas, se puede observar en forma clara e inmediata la variable.

2.5 Tablas de datos

TABLA**:** Es un cuadro que consiste en la disposición ordenada de los datos.

Las tablas sistematizan los resultados y ofrecen una visión numérica, sintética y global del fenómeno observado.

Tipo de tablas



2.5.1 Tabla de entrada de datos

Es aquella en la cual sólo aparecen los datos que se obtuvieron en la recolección de datos. Es la tabla más sencilla y se utiliza para registro de datos.

2.5.2 Tabla de contingencia

Llamada también tabla de doble entrada. Es aquella tabla que contiene los datos de dos variables y está formada de la siguiente manera: en la cabeza de las filas por los valores de una variable y las de las columnas por la otra, y en las casillas de la mitad, donde se cruzan las dos variables, van las frecuencias o número de elementos que reúne a la vez los valores de las dos variables. Para, i=1.2,3,….,m y j=1,2,3,…..,n

Construcción de la tabla de contingencia

Variable X_1 \ Variable Y_j	Y_1	Y_2	...	Y_n	Total
X_1	$X_1 Y_1$	$X_1 Y_2$	...	$X_1 Y_n$	$\sum_{J=1}^{n} X_1 Y_j$
X_2	$X_2 Y_1$	$X_2 Y_2$	...	$X_2 Y_n$	$\sum_{J=1}^{n} X_2 Y_j$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_m	$X_m Y_1$	$X_m Y_2$	...	$X_m Y_n$	$\sum_{j=1}^{n} X_m Y_j$
Total	$\sum_{i=1}^{m} X_i Y_1$	$\sum_{i=1}^{m} X_i Y_2$	...	$\sum_{i=1}^{m} X_i Y_n$	**n** tamaño muestra)

2.5.3 Tabla de frecuencias

La tabla de frecuencias está formada por los valores de una variable cuantitativa y sus frecuencias correspondientes.

Definiremos qué es frecuencia:

FRECUENCIA: La frecuencia se refiere al número de repeticiones de una clase o de un valor de la variable.

2.5.3.1 Tabla de frecuencia simple

Está formada por los valores de una variable cuantitativa y sus frecuencias correspondiente. Generalmente se usa para un número de observaciones menores de 30 datos.

PROCESO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA TABLA DE FRECUENCIA SIMPLE

Utilizaremos el siguiente proceso para la elaboración de la tabla:

- Primera columna: Se organizan los datos de la variable en formas ascendente, sin repetir y a esta columna la llamamos x_i.
- Segunda columna: Se cuenta el número de veces que se repite el valor, y se coloca al frente de cada x_i. A esta frecuencia la llamamos frecuencia absoluta y la representamos por f_i o n_i.

  Entonces, $\sum_{i=1}^{n} f_i = n$ (n = tamaño de la muestra)

- Tercera columna: Se denomina Frecuencia Absoluta Acumulada. Está representada por F_i o N_i. Se calcula sumando la frecuencia absoluta f_i o n_i en cada valor, así:

$$F_1 = f_1$$
$$F_2 = f_1 + f_2$$
$$\vdots$$
$$F_i = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

- Cuarta columna: Frecuencia relativa, se representa por h_i. Se calcula dividiendo cada frecuencia absoluta f_i por el número total de observaciones n, así:

$$h_i = \frac{f_i}{n}, \text{ Entonces, } \sum_{i=1}^{n} h_i = 1$$

- Quinta columna: Frecuencia relativa acumulada, representada por H_i, correspondiente a cada valor de x_i. Se calcula sumando la frecuencia relativa en cada valor, así:

$$H_1 = h_1$$
$$H_2 = h_1 + h_2$$
$$H_3 = h_1 + h_2 + h_3 \text{ y así sucesivamente}$$
$$\vdots$$

$$H_i = \sum_{i=1}^{n} h_i$$

La tabla para datos simples quedaría:

Tabla 1: tabla de distribución de frecuencias datos sin agrupar

X_i	f_i	F_i	h_i	H_i	$h_i^*\ \%$
X_1	f_1	F_1	$h_1 = f_1/n$	h_1	$h_1(100)$
X_2	f_2	F_2	$h_2 = f_2/n$	$h_1 + h_2$	$h_2(100)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_n	f_n	F_n	$h_n = f_n/n$	$h_1 + h_2 + \cdots + h_n$	$h_n(100)$

2.5.3.2 Tabla de frecuencia para datos agrupados

Se utiliza para las variables continuas y algunas discretas que presentan una gama de valores distintos considerables (con número de observaciones mayores de 30), se agrupan por intervalos o grupos.

Proceso para la construcción de la tabla de frecuencia para datos agrupados

1. Calculamos el número de intervalos de clase representado por **m**.
   m: Es el número de subgrupos en el cual se subdivide la variable.
   Se puede calcular:

   $m = 1 + 3.3 \log n$ (1)

   $m = \sqrt{n}$

2. Cálculo el rango R: Que es la diferencia entre el valor mayor y el menor valor que toma la variable.

   $R = X_{\max} - X_{\min}$ (2)

   $X_{\max}$: Valor máximo que toma la variable.

   $X_{\min}$: Valor mínimo que toma la variable.

3. Cálculo de la amplitud de los intervalos, se denota por la letra: **a**

   $a = \frac{R}{m}$ (3)

4. Intervalos de clase: Esta es la primera columna de la tabla, comienza con el valor mínimo que toma la variable como el límite inferior de la primera clase, se le suma la amplitud como el cálculo del límite superior de la primera clase y este a su vez será el límite inferior (Ll_1), de la segunda clase; luego se le vuelve a sumar la amplitud para el límite superior (LS_i), de la segunda clase, y así sucesivamente hasta llegar al último intervalo.

   (Ll_1): Límite inferior del intervalo o clase
   (LS_i): Límite superior del intervalo o clase

i	Intervalos de clase	
1	$LI_1 = X_{min}$	$LS_1 = LI_1 + a$
2	$LI_2 = LS_1$	$LS_2 = LI_2 + a$
⋮	⋮	⋮
n	$LI_n = LS_{n-1}$	$LS_n = LI_n + a$

i = 1, 2, 3, ..., n

$(LS_i) = (Ll_i) + a$ (4)

5. Se busca la marca de clase que denotamos por la nueva X_i, y es:

$$Xi = \frac{Lli + LSi}{2} \qquad (5)$$

6. La segunda columna de la tabla, para datos agrupados, es la frecuencia absoluta (*fi*): Es el número de observaciones que caen en el intervalo sin incluir el límite superior, es decir, número de datos mayores o iguales a (L_1), pero menores que (LS_i), o sea que el intervalo es cerrado hacia la izquierda y abierto a la derecha.
   [ )Intervalo.

   Es importante anotar que el último intervalo de clase es cerrado [ ] a ambos lados, para no dejar información fuera del rango.

7. Se buscan las otras columnas, con las frecuencias F_i, h_i, H_i, h_i*, siguiendo el mismo procedimiento del de la tabla de frecuencia simple.

TABLA 2: TABLA DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS DATOS AGRUPADOS

Intervalos Ll_i - LS_i	f_i	X_i	F_i	h_i	H_i	h_i*%
Ll_1 - LS_1	f_1	X_1	F_1	$h_1 = f_1/n$	h_1	h_1 (100)
Ll_2 - LS_2	f_2	X_2	F_2	$h_2 = f_2/n$	$h_2 + h_2$	h_2 (100)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
Ll_n - LS_n	f_n	X_n	F_n	$h_n = f_n/n$	$h_1 + h_2 + ... + h_n$	h_n (100)

2.6 Métodos gráficos

La presentación de la información mediante gráficos es algo que se analiza a diario y en forma casi natural por personas de diferentes profesiones. Los gráficos estadísticos nos permiten usar nuestra habilidad para visualmente procesar información de un gráfico. Luego, un gráfico es una de las mejores formas de conocer el material disponible pues facilita una comprensión global del problema en estudio. Los gráficos más usuales son:

2.6.1 Gráfico de pastel o circular

Llamado también el gráfico de sectores: Es un gráfico en forma de círculo, donde las categorías se basan en una proporcionalidad entre la frecuencia y el ángulo central de una circunferencia, de tal manera que a la frecuencia total le corresponde el ángulo central de 360°. Para construir se aplica la siguiente fórmula:

X = frecuencia relativa * 360°/S frecuencia relativa

También lo podemos representar en forma porcentual, se divide tantas partes como categorías tenga, de manera que el total del círculo sea el 100% y las cantidades se expresan en porcentaje.

Si la variable es cualitativa (rubio, moreno, alto bajo, etc.) se suele utilizar más este tipo de gráfico.

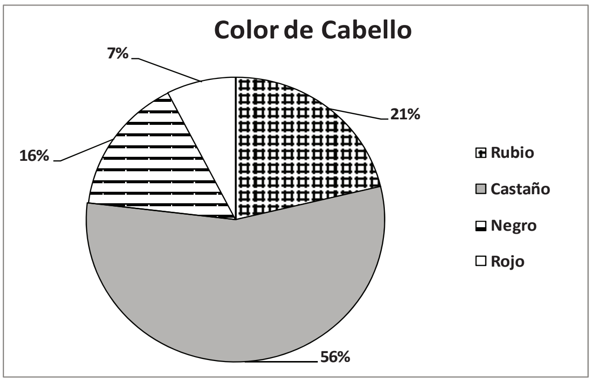
Ejemplo:

Supongamos que se tiene el color del cabello de un grupo de 160 estudiantes de la institución, el gráfico de pastel o circular, quedaría:

Tabla 1: Color de cabello del un grupo de estudiantes de la institución

Categorías	No. de personas	% porcentaje	Angulo
Rubio	34	21	77°
Castaño	89	56	200°
Negro	25	16	56°
Rojo	12	7	27°
	Total = 160	100	**360°**

Gráfico de sectores

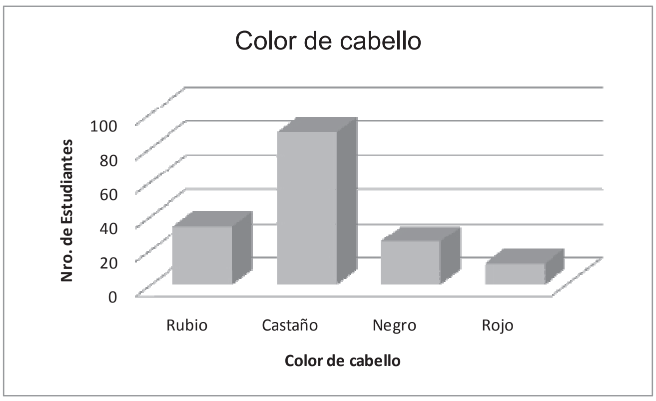


2.6.2 Diagrama de barras

Se utiliza para graficar las frecuencias absolutas o relativas de una VARIABLE CUALITATIVA. En el eje de abscisas, situaremos las diferentes categorías de la variable. En el eje de ordenadas la frecuencia. Levantaremos barras o columnas SEPARADAS de altura correspondiente a la frecuencia adecuada.

Ejemplo

Utilizando el ejercicio anterior, obtenemos el siguiente diagrama de barras:



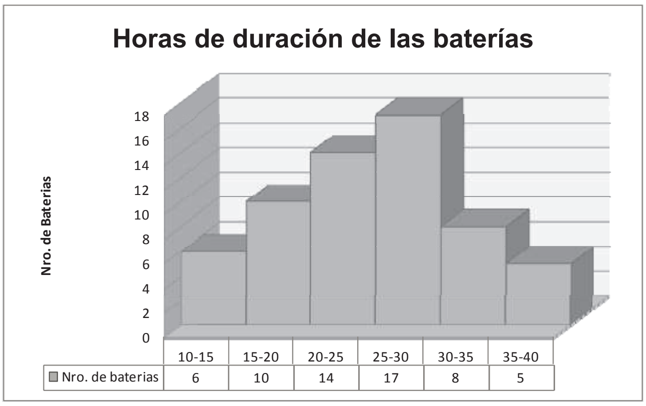
2.6.3 Histograma

Se emplea para ilustrar muestras agrupadas en intervalos. Está formado por rectángulos unidos a otros, cuyos vértices de la base coinciden con los límites de los intervalos y el centro de cada intervalo es la marca de clase, que representamos en el eje de las abscisas. La altura de cada rectángulo es proporcional a la frecuencia del intervalo respectivo.

Es para variables CONTINUAS. La amplitud del intervalo es la misma, elevaremos columnas UNIDAS, a altura la frecuencia correspondiente. Si la amplitud del intervalo es diferente, el área del rectángulo columna será proporcional a la frecuencia representada.

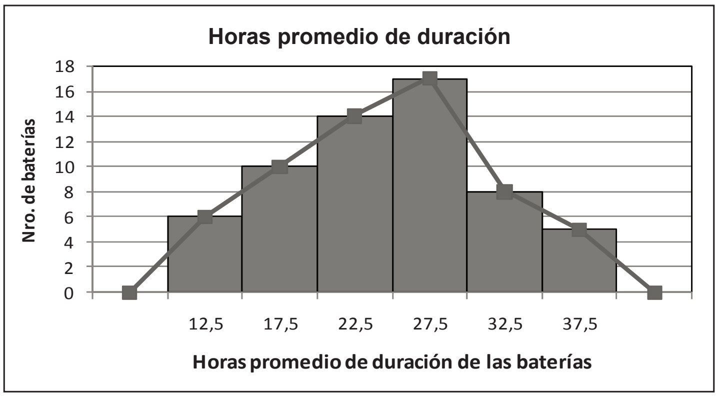
Frecuencia acumulada

Ejemplo: Una comercializadora de baterías desea realizar un estudio sobre la duración de éstas en horas. Se analiza una muestra de 60 baterías. Construir un histograma de frecuencias.



2.6.4 Polígono de frecuencias

Este gráfico se utiliza para el caso de variables cuantitativas, tanto discretas como continuas, partiendo del diagrama de columnas, barras o histograma, según el tipo de tabla de frecuencia manejada. En el histograma, es la recta que une los puntos medios (marcas de clase) de la variable.



2.6.5 Actividad

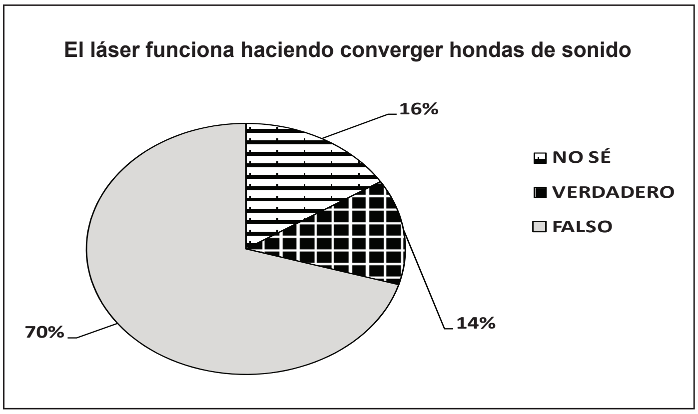
El estudiante consultará el gráfico de Tallo y Hoja, la ojiva, cajas de Tukey, el gráfico de barras compuestas y el gráfico de barras múltiples.

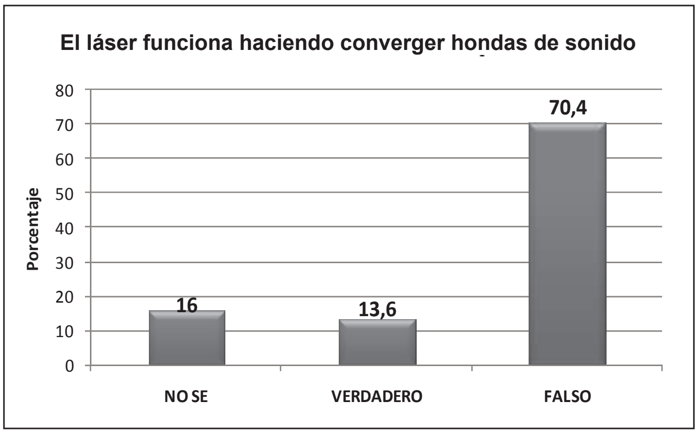
2.7 Ejercicios: descripción de la información por métodos gráficos

1. Utilizando la siguiente información, cree tabla de categorías con sus respectivos porcentajes, grafique e interprete.
   En el ITM el ingreso de estudiantes para este semestre fue de 1.000; de los cuales 200 ingresaron a tecnología de Electromecánica, 150 a tecnología de Electrónica, 250 a tecnología de Costos y Presupuestos, 200 a tecnología de MEB, y 200 a otras tecnologías.
2. Utilizando la siguiente información, genere una tabla de contingencia (tabla de doble entrada), realice gráficos de barras y circulares para cada variable e interprete. De los 200 empleados de una empresa 180 almuerzan en ésta. Existen 150 hombres que en esta compañía trabajan, de los cuales 138 almuerzan en la compañía.
3. De la siguiente tabla de contingencia realice un gráfico de barras y de pastel (o circular) para cada variable e interprete.
   De una muestra de 350 estudiantes de primer semestre del 2005 se obtuvo la siguiente tabla:

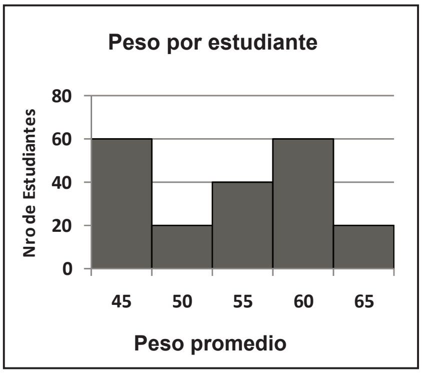
	Matemáticas	CTS	Lengua materna	Total
Aprobaron	100	50	70	220
No aprobaron	40	20	20	80
Desertaron	15	30	5	50
Total	155	100	95	350

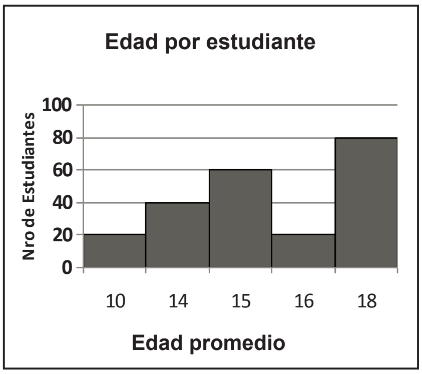
4. De la siguientes gráficas realice una interpretación de la variable:





5. En un curso de bachillerato de un colegio masculino se hizo una encuesta nutricional, realizando un censo de edad y midiendo el peso de cada uno de los estudiantes del curso. El peso promedio fue 52 kilos, cuando el esperado según las edades era 58.
   En consecuencia, se hizo una campaña para que los estudiantes equilibraran su alimentación y subieran un poco de peso. Para medir la efectividad de la campaña, tres meses después se hizo un nuevo control, cuyos resultados se pueden apreciar en las siguientes gráficas:

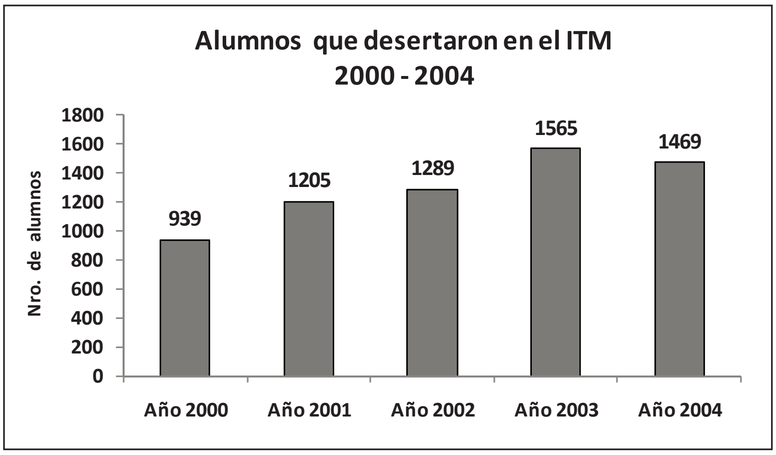




- De acuerdo con los datos registrados, debe concluirse que la campaña fue:
  a. Efectiva, porque 3/5 de los estudiantes del curso superó el promedio inicial de peso.
  b. Inefectiva, porque el promedio de peso posterior a la campaña fue de 50,5 kilos, que es menor que el inicial.
  c. Efectiva, porque el promedio posterior a la campaña fue de 54 kilos, que es mayor que el inicial.
- Teniendo en cuenta las gráficas, al hacer una comparación entre edades y pesos de los estudiantes, es correcto deducir que:
  a. Los estudiantes de 10 años pesan 45 kilos.
  b. El promedio de edad es superado por menos estudiantes que los que superan el promedio de peso.

c. Los estudiantes que tienen 15 años pueden pesar entre 50 y 60 kilos.

6. Del siguiente gráfico saque la tabla de distribución de frecuencias:



2.8 Ejercicios: descripción de la información por tablas

1. El Gobierno desea averiguar si el número medio de hijos por familia ha descendido respecto de la década anterior. Para ello ha encuestado a 50 familias, respecto al número de hijos, y ha obtenido los siguientes datos:

2	4	2	3	1	2	4	2	3	0	2	2	2	3	2	6	2	3	2	2	3	2	3	3	4
3	3	4	5	2	0	3	2	1	2	3	2	2	3	1	4	2	3	2	4	3	3	2	2	1

Se pide:

a. ¿Cuál es la población objeto de estudio?
b. ¿Qué variable estamos estudiando?
c. ¿Qué tipo de variable es?
d. Construir la tabla de frecuencias?
e. ¿Cuál es el número de familias que tiene como máximo 2 hijos?

f. ¿Cuántas familias tienen más de 1 hijo, pero como máximo 3?
g. ¿Qué porcentaje de familias tiene más de 3 hijos?
h. Realice el gráfico

2. Las siguientes son las dimensiones en milímetros, de 30 tornillos elaborados por una máquina en la empresa “z”

174	170	162	163	162
170	168	162	188	168
186	188	168	184	184
174	170	160	178	170
174	186	184	178	178
186	174	163	160	160

a. Elabore una tabla de frecuencia y defina la variable y la frecuencia absoluta
b. Grafique el diagrama de frecuencia simple e interprételo
c. Grafique el diagrama de frecuencia acumulada
d. ¿Qué porcentaje de tornillos tienen una dimensión entre 160 mm y 174 mm
e. ¿Qué porcentaje de tornillos tienen una dimensión de más de 163 mm?

3. La siguiente tabla muestra la clasificación de 901 individuos, según la satisfacción en el trabajo.

X_i	f_i
Muy insatisfecho	62
Moderadamente insatisfecho	108
Moderadamente satisfecho	319
Muy satisfecho	412
Total	901

a. ¿Cuántos individuos están moderadamente satisfechos?
b. ¿Qué porcentaje representan Los individuos que están moderadamente insatisfechos?
c. ¿Qué porcentaje de individuos está muy satisfecho con el trabajo que realiza?
d. Construya un gráfico que represente la información.

4. En una muestra de 30 secretarias del municipio se registró el número de errores que cometen por página, así:

   5, 6,7,8,9,10,5,6,7,8,8,9,9,5,7,8,8,8,8,9,7,7,7,6,6,10,10,9,5,6

   a. Elabore una tabla de frecuencia para datos no agrupados y defina variables
   b. Grafique el histograma de frecuencia simple e interprételo
   c. Grafique el histograma de frecuencia acumulada
   d. ¿Cuántas secretarias cometen 7 errores o menos?
   e. ¿Cuántas secretarias cometen entre 8 y 10 errores?
   f. ¿Qué porcentaje de secretarias cometen más de 9 errores?

5. Se quiere estudiar la eficacia de un nuevo insecticida para plantas de interior. Se seleccionan 50 plantas y se cuenta el número de hojas que han sido atacadas después de haber tratado la planta con el nuevo producto. Los resultados son:

Hojas atacadas	f_i
0	6
1	10
2	12
3	8
4	5
5	4
6	3
8	1
10	1

a. Termine de construir la tabla de frecuencias, y defina variables
b. ¿Cuántas plantas tienen como mínimo 6 hojas atacadas?
c. ¿Cuántas plantas tienen entre 3 y 6, inclusive, atacadas?
d. ¿Qué porcentaje de plantas tienen 8 hojas atacadas.
e. ¿Qué porcentaje de plantas tienen más de 4 hojas atacadas?

6. Los datos que a continuación se presentan corresponden a las horas extras laboradas por un grupo de trabajadores de una empresa.

29	30	33	38	39	40	42	45	47	48
50	50	51	52	53	57	58	61	64	65
68	69	70	72	73	73	75	75	76	77
78	79	80	81	82	84	86	87	89	90
91	92	93	96	99	102	103	104	106	107
107	110	112	114	116	117	119	123	125	129

a. Defina objetivo y variable. Realice un análisis para datos agrupados, utilice 5 intervalos de clase, interprete la tabla analizando la tercera fila
b. Grafique un histograma y un polígono de frecuencia
c. ¿Cuántos trabajadores laboran menos de 69 horas?
d. ¿Qué porcentaje de trabajadores laboran 89 horas o más?
e. ¿Cuál es el ingreso promedio de los trabajadores de Anica?
f. ¿Qué porcentaje de trabajadores laboran 69 horas o más?
g. ¿A cuántas horas corresponde el 35% acumulado?
h. ¿Cuántos trabajadores laboran 49 horas pero menos de 109?
i. ¿Qué porcentaje de trabajadores laboran 49 horas pero menos de 109?

7. La siguiente tabla de entrada de datos representa las notas de un grupo de estudiantes de estadística del ITM.

3.6	3.5	2.8	4.4
3.1	2.3	3.5	2.5
4.1	3.5	4.2	3.6
4.0	2.7	3.7	2.6
3.8	3.3	4.3	3.3
2.7	4.0	2.5	2.7
3.5	3.6	3.6	3.5
2.9	2.6	2.6	4.0
4.5	2.8	2.9	3.6
3.1	3.5	3.5	3.1

El profesor desea construir:

a. Una tabla de frecuencia con 6 intervalos.
c. Un histograma de frecuencia, para mirar la tendencia de la información.
d. Un polígono de frecuencias
c. Interpretar cada uno de los datos de la fila 4.

8. Los datos que a continuación se presentan corresponden a las horas extras laboradas por una muestra de trabajadores de EPM.

Clase i	LI_i	LS_i	X_i	f_i	F_i	h_i	H_i
1				5			
2		68		15			
3			78	20			
4				15			
5				5			
				60			

a. ¿Cuántos trabajadores laboraron 88 horas o más?
b. ¿Qué porcentaje de trabajadores laboraron entre 68 y menos de 108?
c. ¿Qué porcentaje de trabajadores laboró menos de 50 horas?
d. El 20% de trabajadores, máximo ¿cuántas horas trabaja?
e. Interpreta los datos de la fila 3.

9. Los 97 empleados de una fábrica textil se clasificaron de acuerdo con el tiempo laborado para la empresa, con la siguiente distribución:

Clase	Tiempo trabajado (años)	Número de trabajadores
1	0 < 5	10
2	5 < 10	28
3	10 < 15	27
4	15 <20	14
5	20 < 25	6
6	25 <=30	12

a. ¿Cuántos trabajadores han laborado entre 10 y menos de 24 años?
b. ¿Qué porcentaje de trabajadores laboran entre 10 y menos de 19 años
c. ¿Qué porcentaje de trabajadores laboran 15 o más años?
d. ¿Calcule la media e interprete?
e. ¿Qué porcentaje de trabajadores tienen 15 años o más de tiempo laborado en la empresa.

Capítulo 3

Competencia

Describir y analizar información cuantitativa, utilizando métodos numéricos.

Ejes temáticos

Métodos numéricos para describir información

Medidas de tendencia central
- Media aritmética
- Mediana
- Moda

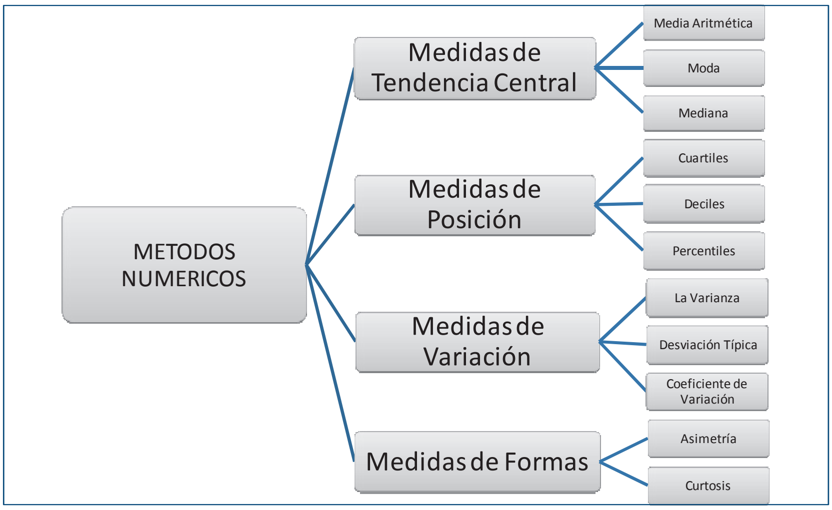
Medidas de dispersión
- Desviación estándar
- Coeficiente de variación
- Regla empírica

Medidas de forma
Asimetría
Curtosis o apuntamiento

3. Métodos numéricos para describir información

Para realizar comparaciones cuantitativas se requieren descripciones de datos más concisas, que las obtenidas por medio de un histograma.

Las características más importantes de la distribución de una variable son las medidas de tendencia central y de dispersión o variación.



3.1 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Son aquellas que se encuentran localizadas hacia el centro de la información. Estas medidas se buscan, tanto para datos simples como para datos agrupados.

3.1.1 MEDIA ARITMÉTICA

Se define como el promedio de los valores de la distribución de datos y es el estadístico más usado para medir la tendencia central dada su simplicidad.

Se denota por X, cuando hablamos de muestras,

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i f_i}{n} \qquad i=1,2,\ldots,n$$

Hay que saber cuándo se puede utilizar la media aritmética, ya que esta medida está afectada por valores extremos, es decir, si existe algún dato muy diferente a los demás, nos puede dar un resultado totalmente erróneo para la labor estadística.

3.1.1.1 Actividad

Consulte

a. ¿Cuál es y a qué es igual la media poblacional?
b. ¿Será igual la fórmula para hallar la media aritmética para datos simples y agrupados?

3.1.2 Mediana

La mediana corresponde al valor situado en el centro de las observaciones, cuando éstas son agrupadas en orden de magnitud; es decir, la mediana parte la distribución de datos en dos partes iguales, por ser también una medida de localización no es afectada por valores extremos.

3.1.2.1 Cálculo de la mediana para datos sin agrupar

Para el cálculo de la mediana se deben tener los datos organizados en orden ascendente y se debe considerar cuando el número de datos es impar o par.

a) Cuando el número de datos es impar (n impar), la mediana es el valor que se encuentra en la posición $\frac{(n+1)}{2}$.

$$m_e = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

b) Cuando el número de datos es par (n par) la mediana es la suma de los dos valores centrales dividida por dos.

$$m_e = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\left(\frac{n}{2}\right)+1}}{2}$$

3.1.2.2 Cálculo de la mediana para datos agrupados

Para calcular la mediana, cuando se tiene la información agrupada en intervalos, procedemos de la siguiente forma:

1. Calcular n/2.
2. Encontrar la F_i en la tabla que contenga inmediatamente a n/2.
3. Calcular la mediana con la siguiente ecuación:

$$m_e = L_i + \frac{a\left(\frac{n}{2} - F_{i-1}\right)}{\left(F_i - F_{i-1}\right)}$$

Nomenclatura de la tabla de datos agrupados.

Ll_i: límite inferior del intervalo i que corresponde a F_i

F_i: Frecuencia absoluta acumulada del que corresponde al intervalo de la mediana.

F_{i-1}: Frecuencia absoluta acumulada, que corresponde al intervalo anterior al de la mediana.

a: amplitud del intervalo.

3.1.3 Moda

Es el valor más común de la distribución de datos. Igual a la mediana, se calcula para datos agrupados y sin agrupar.

3.1.3.1 Moda para datos sin agrupar

La moda es el valor (x_i), que más se repite; es decir, el valor de la variable que mayor frecuencia absoluta tiene.

$m_o = x_x$ (Correspondiente al f_i mayor)

3.1.3.2 Moda para datos agrupados

Para calcular la moda cuando la información es agrupada por intervalos, utilizamos la siguiente ecuación

$$m_o = L_i + \frac{a(f_i - f_{i-1})}{(2f_i - f_{i-1} - f_{i+1})}$$

Lli: límite inferior del intervalo i que corresponde a f_i

a : amplitud del intervalo

f_i: frecuencia absoluta del intervalo en que está la moda

f_{i+1}: Frecuencia absoluta posterior al intervalo que se encuentra la moda.

f_{i-1}: Frecuencia absoluta anterior al intervalo donde se encuentra la moda.

3.2 Medidas de posición

Las medidas de posición más utilizadas son los cuartiles, deciles y percentiles. Como su nombre lo indica, muestran la posición de la distribución de datos.

3.2.1 Los cuartiles

Son tres valores que distribuyen la serie de datos, ordenada de forma creciente o decreciente, en cuatro tramos iguales, en los que cada uno de ellos concentra el 25% de los resultados.

Calcular $\frac{Kn}{4}$ (posición del cuartil) encontrar la frecuencia absoluta acumulada F_i que inmediatamente contenga a $\frac{Kn}{4}$ y aplicar

$$q_k = LI_i + \frac{a\left(\frac{kn}{4} - F_{i-1}\right)}{\left(F_i - F_{i-1}\right)}$$ Donde, K = 1,2,……, n

3.2.2 Los deciles

Son diez valores que distribuyen la serie de datos, ordenada de forma creciente o decreciente, en diez tramos iguales, en los que cada uno de ellos concentra el 10% de los resultados.

$$d_k = LI_i + \frac{a\left(\frac{kn}{10} - F_{i-1}\right)}{\left(F_i - F_{i-1}\right)}$$ Donde $\frac{kn}{10}$ es la posición del decil

3.2.3 Los percentiles

Son cien valores que distribuyen la serie de datos, ordenada de forma creciente o decreciente, en cien tramos iguales, en los que cada uno de ellos concentra el 1% de los resultados.

3.2.4 Actividad

Consulta como se buscan los deciles y los percentiles para datos sin agrupar y datos agrupados.

3.3 Medidas de dispersión

Las medidas de dispersión pueden ser usadas para estimar la confiabilidad de un promedio o para compara cuál de dos muestras es más homogénea. Una dispersión baja indica que el promedio es representativo y confiable, si la dispersión es alta el promedio tiene poca utilidad práctica.

Las medidas de dispersión más utilizadas son:

- El rango
- La desviación media
- La varianza
- La desviación típica o estándar
- El coeficiente de variación

3.3.1 La varianza

Se conoce también como el error cuadrático y mide la variación en unidades cuadráticas de los datos con respecto a la media.

Cálculo de la varianza:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(X_i - \mu)^2 f_i}{N}$$ i= 1,2,…..,N varianza poblacional

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2 f_i}{n-1}$$ i= 1,2,….,n varianza muestral

3.3.1.1 Actividad

Demuestre, utilizando propiedades de sumatorias, que la varianza también puede ser igual a

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - \overline{X}\right)^2 f_i}{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2 f -_i n\overline{X}^2}{n-1}$$

3.3.2 Desviación estándar

Indica el grado de dispersión o alejamiento de los datos con respecto a su promedio. Se calcula como la raíz cuadrada de la varianza.

Cálculo de la desviación típica o estándar:

$$S = \sqrt{\sum \frac{X_i^2 f_i - n\overline{X}^2}{n-1}} \qquad \text{i= 1,2,3,….,n}$$

3.3.3 Coeficiente de variación

Es el porcentaje de variación de la distribución de datos. Se puede definir en forma empírica, que si el valor del coeficiente no excede el 20%, la distribución de datos es homogénea y si es mayor del 20% la distribución de datos es heterogénea, o sea que pueden existir valores extremos que se deben analizar.

Cálculo del coeficiente de variación:

$$CV = \frac{S}{\overline{X}} * 100 \qquad \text{Coeficiente de variación muestral}$$

3.3.4 Regla empírica

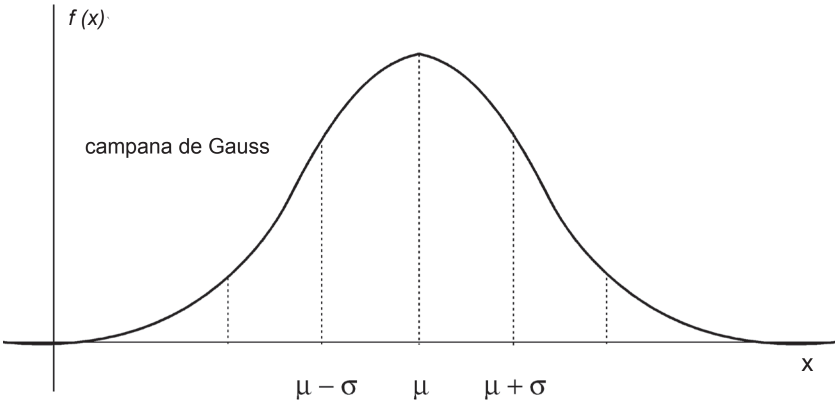
Cuando tenemos datos que tienen aproximadamente una distribución normal (simétricos, unimodales, en forma de campana), observaremos aproximadamente: el 68% de los datos a una desviación estándar o menos de la media, el 95% a una distancia de dos o menos desviaciones estándar de la media y el 99% a una distancia de tres o menos desviaciones estándar de la media.

De donde $\overline{X} \pm S = 68\%$

$\overline{X} \pm 2S = 95\%$

$\overline{X} \pm 3S = 99{,}7\%$

Representación gráfica de esta función de densidad



Ejemplo

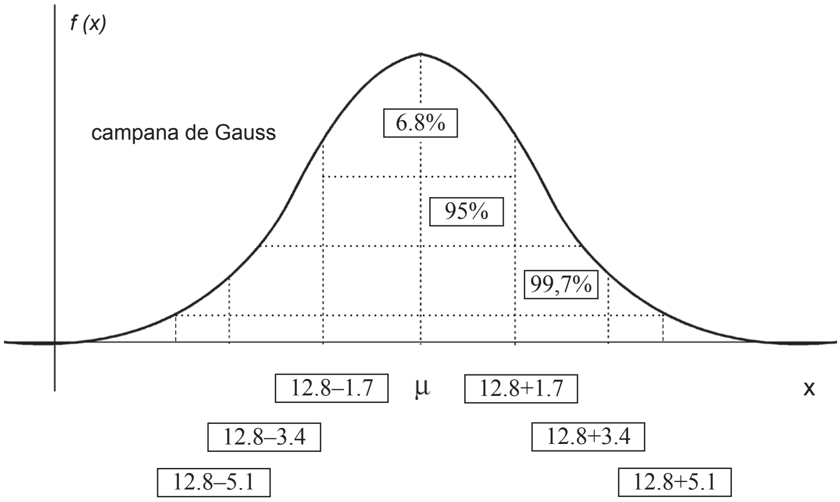
En un estudio de tiempos y movimientos practicado en una fábrica se midió el tiempo que tomaba a cada uno de los 40 obreros terminar una operación específica. Se encontró que la media y la desviación estándar eran 12.8 y 1.7 respectivamente. Describa los datos de la muestra mediante la regla empírica.

Solución

Miremos cómo se encuentra distribuida la información.

($\overline{X} \pm S$) = 12.8 ± 1.7, es decir 12.8 – 1.7 = 11.1 y 1.8 + 1.7 = 14.5

Según la regla empírica, se espera que aproximadamente el 68% de las mediciones estén entre 11.1 y 14.5.



$(\overline{X} \pm 2S) = 12.8 \pm 2(1.7)$, es decir $12.8 - 3.4 = 9.4$ y $12.8 + 3.4 = 16.2$

Según, la regla empírica, se espera que aproximadamente el 95% de las mediciones estén entre 9.4 y 16.4.

$(\overline{X} \pm 3S) = 12.8 \pm 3(1.7)$, es decir $12.8 - 5.1 = 7.7$ y $12.8 + 5.1 = 17.9$

Entonces, se espera que el 99,7 de la información esté entre 7,7 y 17,9.

3.4 Medidas de forma

Una vez iniciado el análisis estadístico de sintetización de la información, para lo cual hemos estudiado las medidas de posición y dispersión de la distribución de una variable, necesitamos conocer más sobre el comportamiento de la misma.

Por lo que estudiaremos las medidas de forma que permiten comprobar si una distribución de frecuencia tiene características especiales como simetría, asimetría, nivel de concentración de datos y nivel de apuntamiento que la clasifiquen en un tipo particular de distribución.

Las medidas de forma: son indicadores estadísticos que permiten identificar si una distribución de frecuencia presenta uniformidad y son necesarias para determinar el comportamiento de los datos y así adaptar herramientas para el análisis probabilístico.

Las medidas de forma se clasifican en:

- Medidas de asimetría
- Medidas de curtosis o apuntamiento

3.4.1 Medidas de asimetría

Las medidas de asimetría tienen como finalidad elaborar un indicador que permita establecer el grado de simetría o asimetría que presenta una distribución.

Existen dos coeficientes principales para medir el grado de simetría o asimetría, coeficiente de Pearson y de Fisher. Utilizaremos el coeficiente de Pearson.

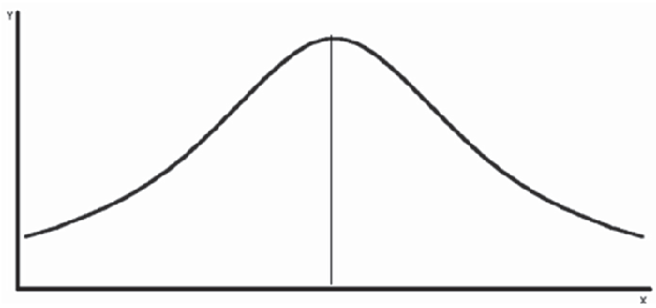
Coeficiente de asimetría de Pearson

Es muy sencillo de calcular. Está basado en la relación entre la media y la moda en distribuciones simétricas o asimétricas.

$$A_S = \frac{\bar{X} - M_o}{S}$$

Distribución simétrica: Diremos que una distribución es simétrica cuando la moda, la media aritmética y la mediana coinciden, por lo tanto, $\overline{X} = M_o = M_e$.

Entonces, la distribución es simétrica si el coeficiente de Pearson es igual a cero, $A_s = 0$.

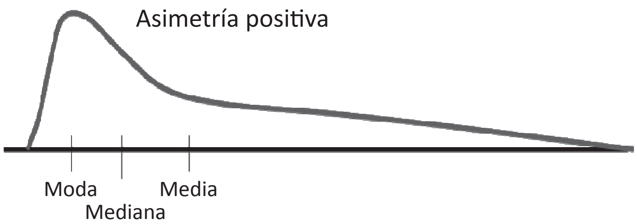


$\overline{X} = M_o = M_e$

La distribución es simétrica normal

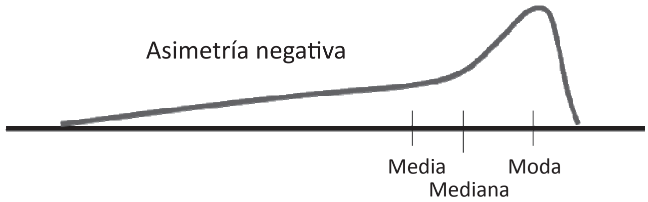
Distribución asimétrica positiva o a la derecha: Diremos que una distribución es asimétrica a la derecha si las frecuencias (absolutas o relativas) descienden más lentamente por la derecha que por la izquierda. Por lo tanto $M_o > M_e > \overline{X}$

Entonces, la distribución es asimétrica positiva si $A_s > 0$.



Distribución asimétrica negativa o a la izquierda: Si las frecuencias descienden más lentamente por la izquierda que por la derecha, diremos que la distribución es asimétrica a la izquierda; por lo tanto $\overline{X} < M_e < M_o$.

Entonces, la distribución es asimétrica negativa si $A_s < 0$.



Ejemplo:

La siguiente distribución muestra el número de defunciones reportadas por día, en una entidad de salud de la ciudad.

LIi - LSi	fi	Fi
10 - 12	6	6
12 - 14	8	14
14 - 16	10	24
16 - 18	11	35
18 - 20	5	40

Calcular si la distribución es simétrica o asimétrica.

Solución:

El grado de simetría o asimetría de la curva se mide por el coeficiente de Pearson

$$A_S = \frac{\bar{X} - M_o}{S}$$

Calculemos la *Mo, Me* y $\bar{X}$.

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i f_i}{n} = 602/40 = 15.05$$

+

$$m_o = LI_i + \frac{a(f_i - f_{i-1})}{(2f_i - f_{i-1} - f_{i+1})}$$

$$M_o = 16 + \frac{2(11-10)}{2(11)-10-5} = 16 + \frac{2}{7} = 16 + 0.29 = 16.29$$

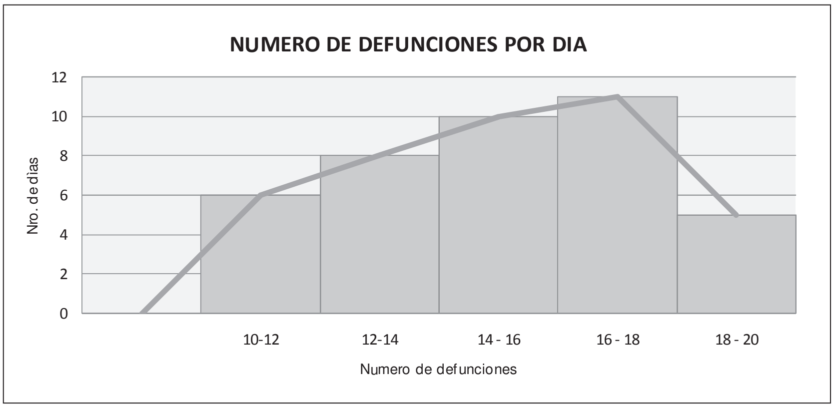
$$S = \sqrt{\sum \frac{X_i^2 f_i - n\overline{X}^2}{n-1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{9312 - 40(15.05)^2}{39}} = \sqrt{6.46} = 2.54$$

$$A_s = \frac{15.05 - 16.29}{2.54} = -0.488$$

Como $A_s < 0$, la distribución es asimétrica a la izquierda o negativa.

Observemos en la gráfica cómo los datos se desplazan más hacia la izquierda



3.4.2 Medidas de curtosis o apuntamiento

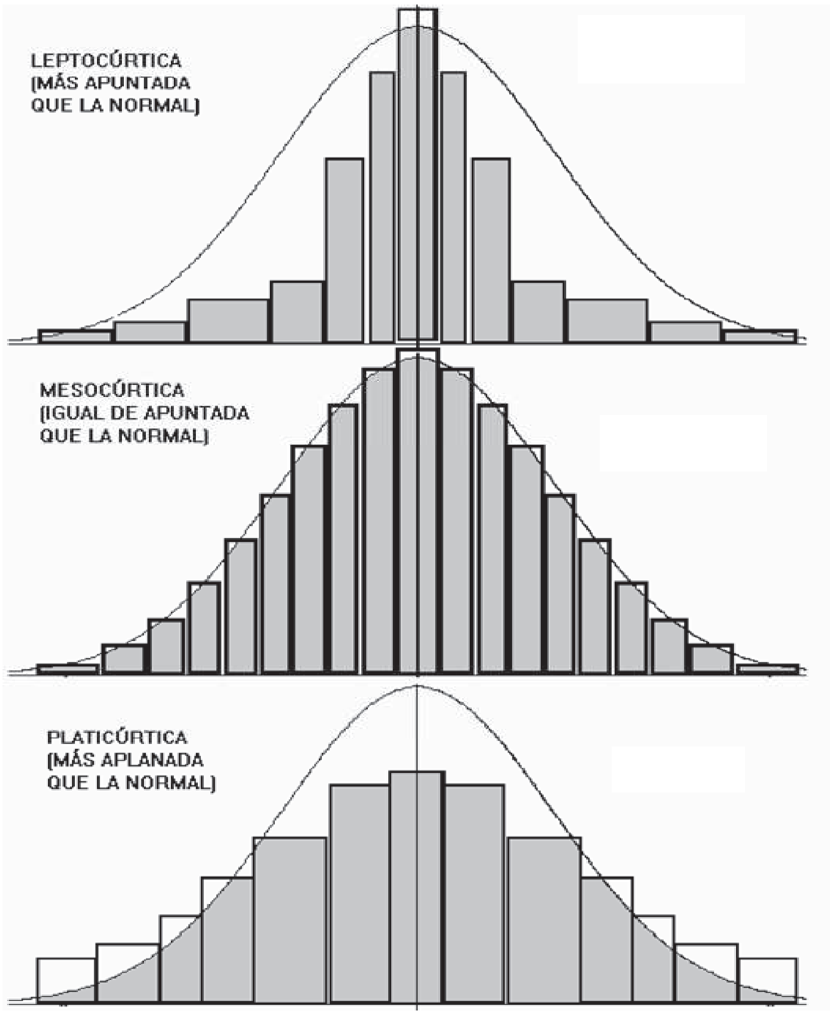
Las medidas de Curtosis estudian la distribución de frecuencias en la zona central de la misma. La mayor o menor concentración de frecuencias alrededor de la media, y en la zona central de la distribución, dará lugar a una distribución más o menos apuntada. Por esta razón, a las medidas de Curtosis se les llama también de apuntamiento o concentración central. Las medidas de curtosis se aplican a distribuciones campaniformes, es decir, unimodales simétricas o con ligera asimetría. Para estudiar la Curtosis de una distribución es necesario definir previamente una distribución tipo, que vamos a tomar como modelo de referencia. Esta distribución es la **Normal**, que corresponde a fenómenos muy corrientes en la naturaleza, y cuya representación gráfica es una campana llamada de Gauss, por su mentor.

Se definen tres tipos de distribuciones según su grado de Curtosis:

Distribución mesocúrtica: presenta un grado de concentración medio alrededor de los valores centrales de la variable (el mismo que presenta una distribución normal).

Distribución leptocúrtica: presenta un elevado grado de concentración alrededor de los valores centrales de la variable. Es decir, es muy apuntada en el centro (más que la normal), decae muy rápidamente en un primer momento, pero en los extremos es algo más alta que la distribución normal.

Distribución platicúrtica: presenta un reducido grado de concentración alrededor de los valores centrales de la variable. Es decir, la distribución es más aplanada de lo normal.



Existen varios coeficientes que miden el grado de apuntamiento de la curva, pero utilizaremos el coeficiente de Curtosis Percentílico.

Coeficiente de Curtosis Percentílico:

Este coeficiente se basa en los cuartiles y percentiles de la distribución.

$$K = \frac{(Q_3 - Q_1)}{2(P_{90} - P_{10})}$$

Q_3 = Cuartil 3, le corresponde el 75% de la información.

Q_1 = Cuartil 1, le corresponde el 25% de la información.

P_{90} = Percentil noventa, le corresponde el 90% de la información.

P_{10} = Percentil diez, le corresponde el 10% de la información.

Si $K=0.263$, la distribución es normal, es decir mesocúrtica.

Si $K>0.263$, la distribución es leptocúrtica.

Si $K<0.263$, la distribución es platicúrtica.

Ejemplo:

La siguiente distribución muestran el número de defunciones reportadas por día, en una entidad de salud de la ciudad.

LIi - LSi	**fi**	**Fi**
10 - 12	6	6
12 - 14	8	14
14 - 16	10	24
16 - 18	11	35
18 - 20	5	40

Calcular el grado de apuntamiento de la curva.

Solución:

Calculemos el coeficiente Percentílico.

$$K = \frac{(Q_3 - Q_1)}{2(P_{90} - P_{10})}$$

$$Q_3 = 16 + \frac{2(30-24)}{(35-24)} = 16 + 1.1 = 17.1$$

$$Q_1 - 12 + \frac{2(10-6)}{(14-6)} - 12 + 1 - 13$$

$$P_{90} = 18 + \frac{2(36-35)}{(40-35)} = 18 + 0.4 = 18.4$$

$$P_{10} = 6 + \frac{2(4-0)}{(6-0)} = 6 + 1.33 = 7.33$$

$$K = \frac{(17.1-13)}{2(18.4-7.33)} = 0.185$$

$0.185 < 0.263$, $K < 0.263$, la distribución es platicúrtica.

3.5 Ejercicios sobre medidas de tendencia central, posición, variación y forma

1. Hallar la media, mediana y la desviación de los siguientes conjuntos de números:

   a. {5, 4, 8, 3, 7, 2, 9}
   b. {18,3; 20,6; 19,3; 22,4; 20,2; 18,8; 19,7; 20,0}
   c. {121, 441, 930, 587, 788, 49, 749, 786, 581}

2. En la siguiente tabla encontramos las dimensiones en milímetros, de tornillos elaborados por una máquina en la empresa “z”.

x_i	f_i
156	2
159	2
162	2
168	4
170	3
174	4
178	3
184	2
186	2
188	1

a. Calcular la dimensión promedio de los 25 tornillos
b. ¿Cuál es la dimensión en mm que más se repite?
c. Calcular el 50% de la dimensión de los 25 tornillos
d. Calcular el 25%, 75%, 30% de la información
e. Interpretar resultados
f. Interpretar la fila 7
g. Calcular el error cuadrático de la información

3. Tenemos información correspondiente al número de horas diarias trabajadas por una persona contratada durante doce días en una determinada empresa: 8, 8, 7, 8, 7, 9, 9, 5, 6, 7, 8, 8.

a. Calcular la media aritmética
b. Calcular la mediana y la moda
c. Interpretar resultados
d. Calcular cuál es el 30% de la información
e. Calcular la desviación típica y el coeficiente de variación

4. La siguiente tabla nos muestra el número de hermanos que tienen los estudiantes del curso de geometría del programa de Telecomunicaciones del ITM.

x_i	f_i	h_i	F_i
2	10	0,25	
3			
4	15	0,375	30
5		0,25	

   a. Completar la tabla. Definir la variable y la frecuencia absoluta
   b. Calcular el promedio de hermanos de los estudiantes del curso de geometría
   c. Calcular el 75% de la información
   d. ¿Cuál es el número de hermanos que más tienen los estudiantes del curso de geometría del ITM?
   e. Calcular la mediana de la información e interpretar resultados

5. Se quiere estudiar la eficacia de un nuevo insecticida para plantas de interior. Se seleccionan 50 plantas y se cuenta el número de hojas que han sido atacadas después de haber tratado la planta con el nuevo producto. Los resultados son:

Hojas atacadas	f_i
0	6
1	10
2	12
3	8
4	5
5	4
6	3
8	1
10	1

a. Calcular el promedio de hojas atacadas?
b. Calcular la mediana de la información e interpretar resultados
c. Calcular el 20%, el 60 y el 75% de la información.
d. ¿Cuál es el número de hojas atacadas que más se repiten?

6. Con la información del ejercicio 6 del taller anterior, responda las siguientes preguntas:

   a. ¿Qué promedio de horas extras trabajan los trabajadores de Anica?
   b. ¿Cuántas horas extras trabajan el 75% de los trabajadores?
   c. ¿Cuál es el 50% o menos de las horas extras que trabajan los trabajadores de la empresa?
   d. ¿Cuál es el común de horas extras que más laboran los trabajadores?
   e. Calcular los cuartiles de la información?

7. El departamento de bienestar del ITM, realiza una encuesta a 90 estudiante, para estudiar el numero de pasajes que se gastan los estudiantes para desplazarse a la universidad.

Intervalos *LIi – LSi*	f_i
0 – 2	25
2 - 4	20
4 - 6	15
6 - 8	17
8 - 10	13

   a. Defina la variable y la frecuencia absoluta
   b. ¿Cuál es el promedio de pasajes que gastan los estudiantes para desplazarse al ITM?
   c. El 50% de los estudiantes, ¿cuántos pasajes utilizan?
   d. ¿Cuál es el número de pasajes más común?
   e. Calcular el 25% y 75% de los estudiantes, ¿cuántos pasajes utilizan?
   f. Calcular las medidas de forma, simetría y apuntamiento.

8. Un estudio realizado entre un conjunto de personas con el fin de observar la relación entre la inteligencia y el nivel socioeconómico (medio por el salario mensual familiar) arroja los siguientes datos, discriminando dos grupos según el cociente intelectual.

Intervalos	CI <95	CI = o > 95
1000 < 3000	75	19
3000 < 5000	35	26
5000 < 7000	20	25
7000 < 9000	30	30
9000 < 11000	25	54
11000 ≤ 11999	15	46

a. Hallar media, mediana, moda, los cuartiles y el decil 2 y el percentil 37 para cada grupo y para todo el conjunto.
b. Encontrar el coeficiente de variación y afirmar si la muestra es homogénea o heterogénea.
c. Encontrar los coeficientes de simetría y curtosis

9. Los datos siguientes muestran la distancia de frenado para 35 automóviles que circulan cada uno sobre una superficie húmeda de 30 millas por hora.

63	67	90	85	86	63	85
74	72	85	71	95	85	62
85	84	70	63	72	70	100
94	91	66	69	70	64	73
103	104	90	71	75	62	85

a. Definir las variables
b. Encontrar el promedio de distancia de frenado de los 35 automóviles
c. Interprete los datos de la fila 3

d. ¿Cuál es la distancia de frenado que más se repite?
e. Calcular el 50% de la distancia de frenado de los 35 automóviles
f. Encontrar el 25%, 60% y 75% de las distancias de frenado de los automóviles
g. Interpretar las respuestas
h. Calcular cuál es el 50% de la distancia de frenado
i. Calcular la desviación de las observaciones alrededor de la media

10. A continuación se dan los resultados obtenidos en una muestra de 50 individuos donde se deja constancia del tiempo de reacción, en segundos, a un estímulo auditivo.

0,113	0,110	0,126	0,112	0,117	0,113	0,135	0,107	0,122	0,118
0,113	0,098	0,122	0,105	0,103	0,119	0,100	0,117	0,113	0,106
0,124	0,118	0,132	0,108	0,115	0,120	0,107	0,123	0,109	0,128
0,117	0,111	0,112	0,101	0,112	0,111	0,119	0,103	0,100	0,094
0,108	0,120	0,099	0,102	0,129	0,115	0,121	0,130	0,134	0,114

a) Hallar la media, la mediana, la moda, los cuartiles y el decil 4 y el percentil 85, la varianza y el coeficiente de variación.
b) Reagrupar los datos en un cuadro donde la variable tome intervalos:

0 – 0,100; 0,100 – 0,110; 0,110 – 0,120; 0,120 – 0,130; 0,130 – 0,140

c) Hallar los mismos datos que se hallaron para en a) pero ahora para los datos agrupados

11. Las edades de una muestra aleatoria de 10 estudiantes del programa diurno y nocturno del postgrado en administración de una universidad son:

Diurno	24	30	28	23	25	22	26	27	28	25
Nocturno	26	33	29	28	27	29	33	34	27	28

Si la homogeneidad del grupo es un factor positivo de aprendizaje, aplicar una medida de variabilidad relativa para indicar a cual grupo es más fácil enseñarle.

12. Un registro del peso (medido en libras) de un conjunto de 40 personas arrojó la siguiente distribución de frecuencias relativas acumuladas

Peso	F_i
118 < 127	0,075
127 < 136	0,200
136 < 145	0,425
145 < 154	0,700
154 < 163	0,850
163 < 172	0,900
172 ≤ 181	1,000

a. Hallar la media, la mediana, la moda
b. Encontrar los cuartiles y el decil 10
c. Encontrar la desviación estándar y el coeficiente de variación
d. Interpretar resultado
e. Encontrar los coeficientes de simetría y curtosis

13. Un número de cheques cobrados diariamente en 5 sucursales de un banco, durante un mes, tuvo la siguiente distribución de frecuencias:

Número de cheques	Número de días
0 < 200	10
200 < 400	13
400 < 600	17
600 < 800	42
800 ≤ 1000	18

El director de operaciones del banco sabe que una desviación estándar en el cobro de los cheques de más de 200 cheques diarios, crea problemas de organización y dotación de personal en las sucursales, debido a una carga de trabajo no uniforme. ¿Qué se puede concluir?

14. Se hicieron pruebas de laboratorio para analizar la vida útil de las baterías, obteniendo la siguiente distribución de frecuencias:

$LI_i - LS_i$	f_i
0.5 < 1.0	7
1.0 < 1.5	8
1.5 < 2.0	20
2.0 < 2.5	18
2.5 < 3.0	4
3.0 <=3.5	3

Encontrar el coeficiente de simetría de Pearson y el coeficiente de Curtosis.

15. En las siguientes tablas se presentan las remuneraciones quincenales de obreros y empleados de la empresa El Progreso, en el mes de abril de 2008 (en miles de pesos).

OBREROS	
Remuneraciones	fi
200 - 250	30
250 - 300	50
300 - 350	85
350 - 400	55

EMPLEADOS	
Remuneraciones	fi
700 - 750	10
750 - 800	25
800 - 850	15
850 - 900	5

a. Se afirma que la remuneración promedio de los empleados es mayor en un 30% respecto a la remuneración promedio de los obreros. ¿Está usted de acuerdo?
b. ¿Cuál es la remuneración más frecuente de los obreros y de los empleados?
c. En mayo, los empleados recibieron la mitad del porcentaje de reajuste de los obreros, más una asignación permanente de perfeccionamiento de $25.000 pesos. Con respecto a mayo, ¿cuál será la remuneración promedio total en mayo?
d. Construya el Histograma de los obreros y la Ojiva de los empleados.
e. Determine los coeficientes de curtosis y simetría.

Capítulo 4

Competencia

Investigar la relación estadística que existe entre una variable dependiente y una o más variables independientes, postulando una relación funcional entre las variables.

Ejes temáticos

Variable independiente
Variable dependiente
Diagrama de dispersión
Ecuación de regresión por el método de los mínimos cuadrados
Interpretación de la pendiente y del intercepto
Valores ajustados
Gráfica de la recta de regresión
Predicciones
Correlación y determinación

4. Regresión y correlación

En un análisis descriptivo es importante el análisis univariado, pero este análisis solo tiene en cuenta el análisis de cada variable por separado sin tener en cuenta las relaciones que puede existir entre ellas.

En múltiples ocasiones en la práctica nos encontramos con situaciones en las que se requiere analizar la relación entre dos variables cuantitativas. Los dos objetivos fundamentales de este análisis serán por un lado, determinar si dichas variables están asociadas y en qué sentido se da dicha asociación (es decir, si los valores de una de las variables tienden a aumentar –o disminuir– al aumentar los valores de la otra), y por otro, estudiar si los valores de una variable pueden ser utilizados para predecir el valor de la otra.

La forma correcta de abordar el primer problema es recurriendo a coeficientes de correlación. Sin embargo el estudio de la correlación es insuficiente para obtener una respuesta a la segunda cuestión: se limita a indicar la fuerza de la asociación mediante un único número tratando las variables de modo simétrico, mientras que nosotros estaríamos interesados en modelizar dicha relación y usar una de las variables para explicar la otra. Para tal propósito se recurrirá a la técnica de regresión.

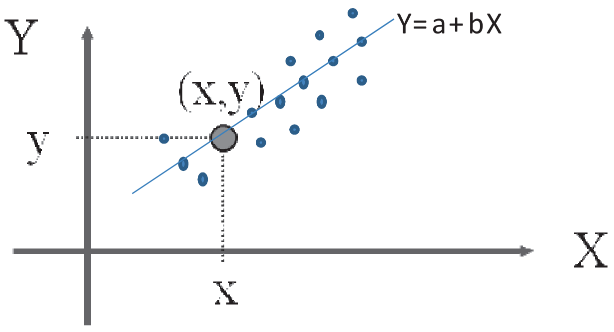
4.1 Regresión

El objeto de un análisis de regresión es investigar la relación estadística que existe entre una variable *dependiente* (Y) y una o más variables *independientes* ($X_1, X_2, X_3,\ldots$). Para poder realizar esta investigación, se debe postular una relación funcional entre las variables. Cuando solo existe una variable independiente (X), esto se reduce a una línea recta:

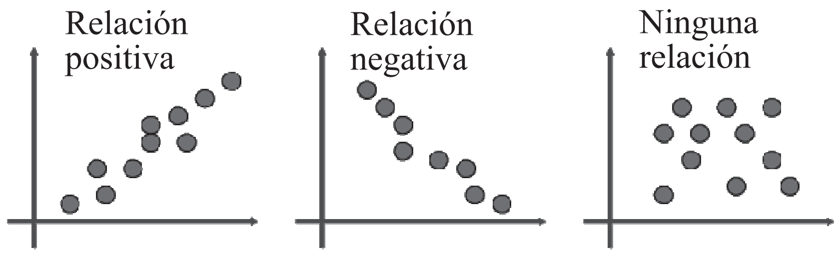
$$\hat{Y} = a + b\overline{X}$$

En donde, sabemos que existe una relación entre una variable denominada dependiente (Y) y otra denominada independiente (X), como por ejemplo, la relación existente entre la experiencia profesional de los trabajadores y sus respectivos sueldos, las estaturas y pesos de las personas.

Para poder visualizar el grado de relación que existe entre las variables, como primer paso en el análisis de regresión, es conveniente elaborar un *diagrama de dispersión*, que es una representación gráfica en un sistema de coordenadas cartesianas de los datos numéricos observados. En el diagrama resultante, en el eje X van los datos de la variable independiente (X), y en el eje Y van los datos de la variable dependiente. Cada punto en el diagrama muestra la pareja de datos (X,Y), formando una nube de puntos, cuyo análisis permite estudiar cualitativamente, la relación entre ambas variables tal como se ve en la figura:



Como el propósito principal de una gráfica de dispersión es mostrar gráficamente la relación entre las variables, observemos de esta manera cómo se puede dar esa relación:

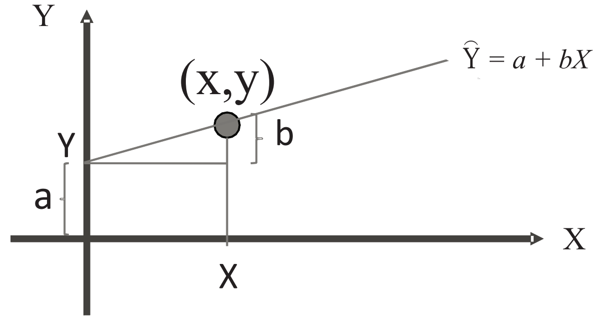


Cuando se presume una relación lineal entre dos variables, se utiliza el método de los mínimos cuadrados (debido al científico alemán Kart Gauss, 1777-1855), para conseguir la línea recta o de regresión $\hat{Y} = a + b\overline{X}$ que mejor pronostica los valores de una variable a partir de la otra, es decir, que pueda ser utilizada para predecir los valores de Y a partir de los de X.

4.1.1 Método de los mínimos cuadrados

Consiste en estimar los coeficientes de la recta de regresión **a** y **b** que son los parámetros que definen la posición e inclinación de la recta.

El parámetro ***a***, conocido como la "ordenada en el origen," nos indica cuánto es *Y* cuando *X* = 0. El parámetro ***b***, conocido como la "pendiente," nos indica cuánto aumenta *Y* por cada aumento de una unidad en *X*. Nuestro problema consiste en obtener estimaciones de estos coeficientes a partir de una muestra de observaciones sobre las variables *Y* y *X*.



Para estimar los coeficientes por medio de mínimos cuadrados, se utilizan las siguientes fórmulas:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{I=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}; \quad i = 1,2,\dots,n$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

Ejemplo

Una empresa de transporte de pasajeros desea estimar la relación que existe entre los costos totales de operación en miles de pesos mensualmente y los kilómetros recorridos por cada vehículo que pertenece a la compañía. Se recogió la siguiente información;

X: Kilómetros recorridos por vehículo (Variable Independiente)

Y: Costos (Gastos) de operación mensual, en miles de pesos (variable dependiente).

Calcular los coeficientes **a** y **b**, para la estimación de la recta.

Tabla de entrada de datos

Vehículo	Km recorrido por vehículo (x)	Costos (en miles de pesos) (Y)
1	3147	213,9
2	3160	212,6
3	3197	215,3
4	3173	215,3
5	3561	228,2
6	3292	215,4
7	4013	245,6
8	4244	259,9
9	4159	250,9
10	3776	234,5
11	3232	205,9
12	3141	202,7
13	2928	198,5
14	3063	195,6
15	3096	200,4
16	3096	200,1
17	3158	201,5
18	3338	213,2
19	3492	219,5
20	4019	243,7
21	4394	262,3
22	4251	252,3
23	3844	224,4
24	3276	215,3
25	3184	202,5
26	3037	200,7
27	3142	201,8
28	3159	202,1
29	3139	200,4
30	3203	209,3
31	3307	213,9
32	3585	227
33	4073	246,4
Totales	**113879**	**7231,1**

Tabla de cálculos

XY	X^2	Y^2
673143,3	9903609	45753,21
671816	9985600	45198,76
688314,1	10220809	46354,09
683146,9	10067929	46354,09
812620,2	12680721	52075,24
709096,8	10837264	46397,16
985592,8	16104169	60319,36
1103015,6	18011536	67548,01
1043493,1	17297281	62950,81
885472	14258176	54990,25
665468,8	10445824	42394,81
636680,7	9865881	41087,29
581208	8573184	39402,25
599122,8	9381969	38259,36
620438,4	9585216	40160,16
619509,6	9585216	40040,01
636337	9972964	40602,25
711661,6	11142244	45454,24
766494	12194064	48180,25
979430,3	16152361	59389,69
1152546,2	19307236	68801,29
1072527,3	18071001	63655,29
862593,6	14776336	50355,36
705322,8	10732176	46354,09
644760	10137856	41006,25
609525,9	9223369	40280,49
634055,6	9872164	40723,24
638433,9	9979281	40844,41
629055,6	9853321	40160,16
670387,9	10259209	43806,49
707367,3	10936249	45753,21
813795	12852225	51529
1003587,2	16589329	60712,96
25216020,3	**398855769**	**1596893,53**

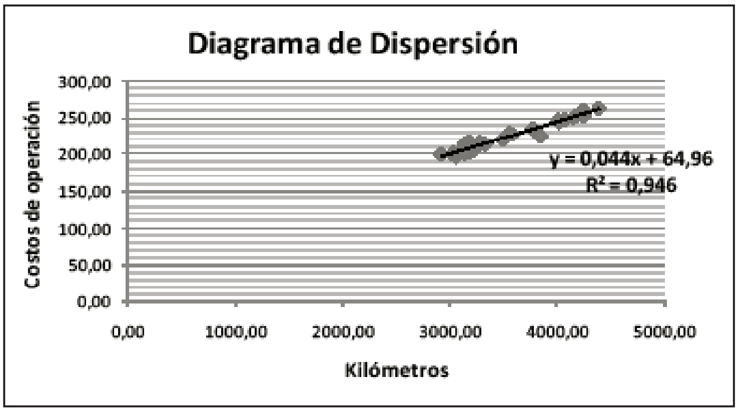
$$b = \frac{25216020,30 - 33(219.12)\ (3450.88)}{398855769 - 33(3450,88)^2} = 0,044674$$

$$a = 219,1242 - 0,04467(3450,88) = 64,96$$

Recta de regresión

$$\hat{Y} = 64,96 + 0,04467X$$

Grafica del diagrama de dispersión



Podemos concluir que por cada kilómetro adicional recorrido, los costos de operación aumentan en aproximadamente 4.5 centavos –esto podría interpretarse como el "costo marginal" para la empresa de recorrer un kilómetro adicional– mientras que el coeficiente **a** nos estaría indicando la parte del costo mensual que no varía directamente con la cantidad de kilómetros recorridos (aproximadamente 64,960 pesos mensuales).

Predicciones

La recta de mejor ajuste es $\hat{Y} = 64,96 + 0,04467X,$ esta recta pronostica los valores de una variable a partir de la otra.

Si un vehículo recorre 3.350 km, ¿cuál es el costo de operación?

Reemplazando la variable X (km) en la recta de mejor ajuste, tenemos:

$$\hat{Y} = 64{,}96 + 0{,}04467(3350) = 214{,}6045$$

Si un vehículo recorre 3.350 km, los costos de operación son de $214.604 pesos.

Si un vehículo tiene unos costos de operación de $220.500, ¿cuántos kilómetros recorre?

Reemplazando la variable Y (costos de operación) en la recta, tenemos:

$$X = \frac{220{,}5 - 64.96}{0.04467} = 3482$$

Si el vehículo tiene unos costos de operación de $220.500 recorre 3.482 Kilómetros.

4.2 Correlación

La correlación es una técnica estadística usada para determinar la relación entre dos o más variables. Por ejemplo, la relación entre la estatura y los pesos de los individuos, la demanda y el precio de un artículo o el rendimiento académico y el número de horas.

La correlación puede ser de al menos dos variables o de una variable dependiente y dos o más variables independientes, denominada correlación múltiple.

La correlación que existe entre una variable independiente (X) y una variable dependiente (Y), se mide por el coeficiente de correlación (r) de Pearson.

4.2.1 Coeficiente de correlación de Pearson (r)

El coeficiente de correlación de Pearson (r) es un índice que mide la magnitud de la relación lineal entre dos variables cuantitativas, así como el sentido positivo o negativo de dicha relación. Indica en qué grado dos variables X y Y fluctúan simultáneamente, es decir, cuánto aumenta X al aumentar Y (correlación positiva), o cuánto aumenta X al disminuir Y (correlación negativa). A diferencia de la regresión lineal, el coeficiente de correlación no presupone dependencia de una variable respecto de la otra, X y Y se sitúan a un mismo nivel.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2} * \sqrt{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\bar{Y}^2}} \qquad i = 1,2,3 \ldots\ldots, n$$

El coeficiente de correlación de Pearson es adimensional. Puede tomar cualquier valor desde +1 hasta –1, es decir, $-1 \leq r \leq 1$.

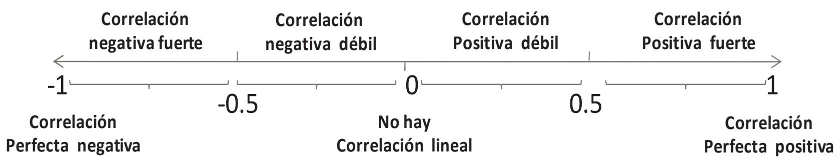
Si el coeficiente de correlación lineal toma valores cercanos a –1 la correlación es fuerte inversa, y será tanto más fuerte cuando más se aproxima r a –1. Es decir, X disminuye al incrementarse Y, o X aumenta al decrecer Y, relación negativa.

Si el coeficiente de correlación toma valores cercanos a 1, la correlación es fuerte y directa y será tanto más fuerte cuanto más se aproxime a uno. Es decir, X aumenta al incrementarse Y, relación positiva.

Si el coeficiente de correlación lineal toma valores cercanos a cero, la correlación es débil y si toma el valor de cero, indica una ausencia absoluta de correlación lineal.

Si el coeficiente de correlación r = 1 ó r = –1, denotan una correlación lineal perfecta, positiva o negativa, respectivamente.

El siguiente diagrama resume el análisis del coeficiente de correlación, entre dos variable:



Hay que insistir en que el coeficiente **r** de Pearson mide únicamente la correlación lineal, por lo que no es útil para evaluar otro tipo de correlaciones.

4.2.2 Coeficiente de determinación (R^2)

El coeficiente de determinación nos indica el porcentaje del ajuste que se ha conseguido con el modelo lineal, es decir el porcentaje de variación de la variable Y, a través del comportamiento de la variable X. A mayor porcentaje mejor es el modelo para predecir el comportamiento de la variable Y.

También se puede entender el coeficiente de determinación como el porcentaje de varianza explicada por la recta de regresión. Su valor siempre estará entre 0 , 1 y Se calcula elevando el coeficiente de correlación al cuadrado.

$$R^2 = r^2$$

Ejemplo

En el ejercicio anterior, hallar:

a. El coeficiente de correlación *r*
b. El coeficiente de determinación R^2

Solución

a. El coeficiente de correlación es:

$$r = \frac{25216020.30 - 33(3450.88)(219.12)}{\sqrt{398855769 - 33(6450.88)^2}\sqrt{1596893.53 - 33(219.12)^2}} = 0.9727$$

Como r = 0.9727, decimos que hay una correlación fuerte positiva entre los costos de operación mensual y los kilómetros recorridos por vehículo.

b. El coeficiente de determinación es:

$$R^2 = 0.9727^2 = 0.946$$

Esto significa que la variación en los kilómetros recorridos explica 94.6 % de la variación en el costo de operación mensual.

4.3 Ejercicios - regresión y correlación

1. El siguiente cuadro muestra, las estaturas y los pesos de 10 estudiantes del ITM elegidos al azar. Calcular el coeficiente de correlación para las alturas (en cm) y pesos (en kilos).

Estudiante	Estatura	Peso
1	185	73
2	175	71
3	200	75
4	210	72
5	190	72
6	195	75
7	150	67
8	170	69
9	180	71
10	175	69

2. Con los datos del ejercicio anterior, se pide:
   a. ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?
   b. Encontrar la recta de mejor ajuste.
   c. Si un estudiante tiene una estatura de 188 cms, ¿cuánto debe pesar?

3. Un concesionario realizó un estudio para mirar si existe algún grado de relación entre el salario mensual laboral y el costo de su vehículo. Para dicho estudio seleccionó en forma aleatoria a 10 personas que laboran y tienen vehículo, con los siguientes resultados:

Valor del vehículo (en millones)	Salario mensual (en miles de pesos)
7	480
15	1000
10	650
27	2000
25	2100
9	780
6	480
6	500
13	1500
30	2800

a. Si una persona se gana mensualmente 1’800.000, ¿cuál sería el costo del vehículo esperado?
b. Calcular el coeficiente de determinación.

4. El gerente de un Banco desea tomar la decisión de crear una nueva sucursal en un sector de la ciudad. Para ello sabe que el Banco tiene por política el que todas las sucursales deben tener igual número de funcionarios y que los edificios deben ser del mismo costo aproximadamente. Que la rentabilidad de las sucursales depende de los depósitos totales. Se ha averiguado que si el total de los depósitos de una sucursal es igual o superior a los \$2.5 millones, ésta podrá dar utilidades. Considera que los depósitos están relacionados con la riqueza del vecindario, por lo tanto determina tomar como medida válida el avalúo catastral como relación directa para los depósitos. Por consiguiente, se necesita saber ahora cuál es la relación entre estas dos variables (depósitos vs avalúo catastral). Para saber dicha medida, toma como base la información de las sucursales ya existentes. La tabla siguiente muestra la información obtenida.

Sucursal	Avaluó catastral total de las unidades residenciales del área	Depósitos totales en la sucursal
1	41,1	3,1
2	66,0	4,0
3	35,1	2,6
4	14,0	2,3
5	47,9	2,9
6	77,9	3,9
7	57,8	3,3
8	30,6	2,7
9	36,0	3,1
10	72,4	4,3
11	64,2	3,5
12	22,5	2,2
13	70,0	3,8
14	42,2	3,3
15	53,0	3,7

a. ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente?
b. Si los depósitos totales en la sucursal propuesta, fueran iguales o mayores que $2,5 millones, el Banco seguiría adelante con la sucursal?
c. ¿Existe relación entre las variables?
d. Calcular el coeficiente de determinación e interpretar los resultados.

5. Se aplicó a siete estudiantes ligeramente discapacitados un programa de capacitación en habilidades sociales para determinar si mejoraban con él sus mediciones previas y posteriores así, como sus evaluaciones de conducta. Para realizar el estudio, se dan en la tabla siguiente las puntuaciones que obtuvieron los estudiantes antes y después de la prueba:

Estudiante	Antes de la prueba	Después de la prueba
1	101	113
2	89	89
3	112	121
4	105	99
5	90	104
6	91	94
7	89	99

a. ¿Qué tipo de correlación, si existe, espera ver entre las puntuaciones previas y posteriores a la prueba?
b. Realice la gráfica respectiva.
c. ¿La correlación parece ser positiva o negativa?
d. ¿Cuál sería la recta de mejor ajuste?

6. Si se intenta alquilar un apartamento, se encuentra que los representantes de bienes raíces establecen las rentas de los apartamentos con base en el área (metros cuadrados) del apartamento. Los datos de la siguiente tabla proporcionan las áreas y los precios de renta de 12 apartamentos seleccionados al azar de un barrio de la ciudad de Medellín.

Aparta.	Área (mts. cuadrados)	Renta (miles de pesos)
1	77	232
2	92	436
3	81	335
4	77	289
5	101	789
6	96	585
7	100	631
8	82	498
9	110	812
10	75	294
11	87	412
12	80	523

a. Si el apartamento tiene un área de 78 mts^2, ¿cuál sería la renta de éste?
b. Si el precio de renta es $856.500, ¿cuál es el área del apartamento?
c. Represente las variables gráficamente.
d. ¿Qué tipo de relación hay entre las variables?
e. Calcular el coeficiente de determinación e interpretarlo.

7. Un Supermercado ha decidido ampliar el negocio. Decide estudiar de forma exhaustiva el número de cajas registradoras que va a instalar, para evitar grandes colas. Para ello, se obtuvieron los siguientes datos procedentes de otros establecimientos similares acerca del número de cajas registradoras y del tiempo medio de espera.

No. de cajas registradoras	10	12	14	12	18	20	11	17	10	11
Tiempo medio de espera	59	51	42	32	26	22	45	30	55	55

a. Definir cuál es la variable dependiente y cuál la variable independiente.
b. Elaborar el diagrama de dispersión, y por medio de éste, cómo es la relación entre las variables.
c. Si se instalan 16 cajas registradoras, ¿cuál sería el tiempo medio de espera?
d. Si el tiempo medio de espera fuese de 15 minutos, ¿cuántas cajas registradoras debería tener el supermercado?
e. Encontrar la correlación entre las variables.
d. ¿Qué interpreta el coeficiente de determinación?

Capítulo 5

Competencia

Conocer el concepto de probabilidad, su terminología y el cálculo de probabilidades simples

Ejes temáticos

Introducción a la probabilidad
Modelo clásico de probabilidad
Análisis combinatorio
Reglas de la probabilidad
Teorema de Bayes

5. Probabilidades

La estadística consta de herramientas y métodos que nos permite evaluar la confiabilidad de conclusiones obtenidas a partir de datos muestrales. De todas las herramientas que utiliza la estadística, el concepto de probabilidad es el más importante.

Todo esfuerzo por reducir el nivel de incertidumbre en el proceso de toma de decisiones, incrementará la probabilidad de que tomen decisiones más inteligentes y bien informadas.

El propósito de esta unidad es ilustrar las formas en las cuales puede medirse la posibilidad ó probabilidad de ocurrencia de eventos futuros. Al mejorar la habilidad para juzgar la ocurrencia de eventos futuros, se puede minimizar el riesgo y la especulación arriesgada, relacionadas con el proceso de toma de decisiones.

A continuación estudiaremos unos conceptos básicos de probabilidad.

5.1 Conceptos básicos de probabilidad

EXPERIMENTO: Es cualquier proceso al azar que produce un resultado.

RESULTADO: Efectos obtenidos del experimento.

ESPACIO MUESTRAL: Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento estadístico. Tiene relación con el conjunto universal de la teoría de conjuntos y se representa con la letra mayúscula **S.**

EJEMPLO

Lanzar dos monedas y observar los resultados posibles.

El espacio muestral es: S = {(c,c), (c,s), (s,c), (s,s)}

Lanzar un dado y observar los resultados de su cara superior (puntos)

El espacio muestral es: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

EVENTO: Es un subconjunto del espacio muestral que puede tener uno o más elementos. Se denota con letras mayúsculas similar a los subconjuntos de la teoría de conjuntos.

PUNTOS MUESTRALES: Es el número de posibles resultados que hay en un espacio muestral.

5.1.1 ACTIVIDAD

Según las definiciones anteriores, construye un ejemplo que represente estas definiciones.

5.2 MODELOS DE PROBABILIDAD

Existen tres modelos principales de probabilidad, a saber:

5.2.1 MODELO CLÁSICO O A PRIORI

La probabilidad clásica de un evento E se determina:

$$P_r(E) = \frac{Numero\ de\ formas\ en\ que\ puede\ ocurrir\ el\ evento}{numero\ total\ de\ posibles\ resultados}$$

Para asignar probabilidades a los diversos puntos muestrales se ha convenido dos reglas axiomáticas principales:

1. La probabilidad de cada punto muestral debe estar entre 0 y 1, o sea, $0 \leq P_r(E) \leq 1$.
2. La suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales debe ser iguales a uno (1).

5.2.2 Modelo subjetivo

Cuando se desea asignar probabilidad a un evento que nunca ha ocurrido, y por tanto no se tienen datos pasados disponibles.

Esta probabilidad se establece con base en la mejor evidencia disponible.

5.2.3 Modelo de probabilidad empírico a posteriori

El modelo de frecuencia relativa, llamado también modelo *a posteriori,* utiliza datos que se han observado empíricamente, registra la frecuencia con que ha ocurrido algún evento en el pasado y estima la probabilidad de que el evento ocurra nuevamente con base en estos datos históricos.

La probabilidad de un evento con base en el modelo de frecuencia relativa, se determina mediante:

$$P(E) = \frac{\text{número de veces que ha ocurrido el evento en el pasado}}{\text{número total de observaciones}}$$

5.3 Complemento de un evento

Conjunto de todos los eventos muestrales que no pertenecen al conjunto A. Denotado por $\overline{A}$ o A', entonces, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

5.4 Actividad

Antes de entrar a las reglas de probabilidades, repase operaciones con conjuntos (intersección, unión y complemento).

5.5 Reglas de pobabilidad

La solución de muchos problemas sobre probabilidades requiere una cabal comprensión de algunas reglas fundamentales que rigen el manejo de ellas. En general estas reglas permiten determinar la probabilidad de un suceso, si se conocen las probabilidades de otros sucesos relacionados con él. Las más importantes de estas reglas son: regla de la adición, regla de la multiplicación y regla de Bayes.

5.5.1 Regla de la adición

Expresa que la probabilidad de que ocurra un evento A o B o ambos es igual a la probabilidad del evento A, más la probabilidad del evento B, menos la probabilidad que ocurran ambos para eventos no excluyentes.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5.5.1.1 Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes

Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes, si no pueden ocurrir simultáneamente, o sea $P(A \cap B) = 0$.

Entonces, si dos eventos son mutuamente excluyentes la regla de la adición viene dada por $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

5.5.1.2 Actividad

Consulte un ejemplo de eventos mutuamente excluyentes.

5.5.2 Probabilidad condicional

La probabilidad de que un evento B ocurra, cuando se sabe que ya ocurrió algún evento A, se llama probabilidad condicional y se denota por $P\left(B/A\right)$.

Se lee como la probabilidad de B dado A y es igual:

$$P\left(B/_A\right)=\frac{(A\cap B)}{P(A)} \qquad \text{o}$$

$$P\left(A/_B\right)=\frac{(B\cap A)}{P(B)} \qquad \text{si, } P(A), P(B)\neq 0$$

5.5.3 Regla de la multiplicación

La fórmula para la probabilidad condicional puede manipularse algebraicamente de forma tal que la probabilidad conjunta $P(A \cap B)$ pueda determinarse a partir de la probabilidad condicional de un evento, de la siguiente forma:

$P(A\cap B) = P(A)P(B/A)$, donde:

$P(A\cap B):$ Probabilidad conjunta de los eventos A y B

$P(A):$ Probabilidad marginal del evento A

$P\left(B/_A\right)$ Probabilidad condicional del evento B, dado el evento A

5.5.3.1 Eventos independientes

Dos eventos A y B son independientes cuando la ocurrencia de uno no influye sobre la probabilidad de la ocurrencia del otro. Esto quiere decir, que independiente de que el evento A haya ocurrido o no, la probabilidad asignada al evento B es siempre la misma, o sea $P\left(B/_A\right)=P(B)$.

Entonces la regla de la multiplicación para sucesos independientes está dada por $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$.

5.5.3.2 Actividad

1. Identifica la diferencia entre eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes
2. Consulta sobre el diagrama del árbol

5.5.4 Teorema de Bayes

El Teorema de Bayes, dentro de la teoría probabilística, proporciona la distribución de probabilidad condicional de un evento "A" dado otro evento "B" (probabilidad posteriori), en función de la distribución de probabilidad condicional del evento "B" dado "A" y de la distribución de probabilidad marginal del evento "A" (probabilidad simple o apriori).

Definición: Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos, tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta a cero, y sea B un suceso conocido cualquiera, del que se conocen las probabilidades condicionales $P\left(B/A_i\right)$, entonces la probabilidad de $P\left(A_i/B\right)$, viene dada por la expresión:

$$P_r\left(A_i/B\right) = \frac{P_r(A_i \cap B)}{P_r(B)} = \frac{P_r\left(B/A_i\right) P_r(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P_r\left(B/A_i\right) P_r(A_i)} \quad Para\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Donde:

- El numerador es la probabilidad conjunta:
  $P(A \cap B) = P(B)\ P(A/B)$
- El denominador es la probabilidad marginal de que ocurra el evento "B".
  $P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \ldots + P(A_n)\ P(B/A_n)$

  Entonces, tanto "A" como "B) son eventos estadísticamente dependientes.

Ejemplo

Una fábrica produce un artículo en tres diferentes máquinas. Del total de producción el 30% es producido por la máquina A1, el 50% en la A2 y el 20% lo produce la máquina A3.

La probabilidad de que un artículo producido por una máquina específica sea de primera calidad, se muestra en la siguiente tabla:

Máquina	Probabilidad
A1	0,8
A2	0,7
A3	0,9

Si se selecciona un artículo aleatoriamente de la línea de producción:

a. ¿Cuál es la probabilidad que sea de primera calidad?
b. Si el articulo seleccionado es de primera calidad, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A1?

Solución:

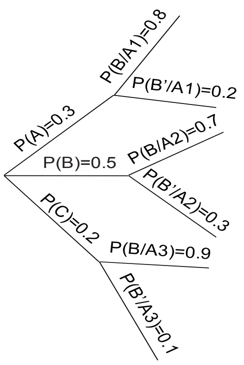
A1: Probabilidad que el artículo sea producido por la máquina 1.
A2: Probabilidad que el artículo sea producido por la máquina 2.
A3: Probabilidad que el artículo sea producido por la máquina 3.
B: Probabilidad de que un artículo producido por una máquina específica sea de primera calidad.

$P(B/A_1) = 0.8$ Probabilidad que salga de la máquina A1 dado que sea de primera calidad.

$P(B/A_2) = 0.7$ Probabilidad que salga de la máquina A2 dado que sea de primera calidad.

$P(B/A_3) = 0.9$ Probabilidad que salga de la máquina A3 dado que sea de primera calidad.

Diagrama de árbol



P(B'/Ai)=1 – P(B/Ai)

P(B'/A1)=1-0.8=0.2

P(B'/A2)=1-0.7=0.3

P(B'/A3)=1-0.9=0.1

a. ¿Cuál es la probabilidad que sea de primera calidad?

$P(B) = P(A_1)P\ (B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)$
$P(B) = 0.3 * 0.8 + 0.5 * 0.7 + 0.2 * 0.9 = 0.77$

La probabilidad de obtener un artículo de primera calidad es del 77%.

b. Si el artículo seleccionado es de primera calidad, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A1?

$$P_r\left({}^{A_1}/_{B}\right) = \frac{P_r\left({}^{B}/_{A_1}\right) P_r(A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P_r\left({}^{B}/_{A_i}\right) P_r(A_i)} \quad Para\ i = 1,2,3$$

$$P(A_1 / B) = \frac{0.8 * 0.3}{0.77} = 0.31$$

Hay una probabilidad del 31% de que la máquina A1 haya producido un artículo de primera calidad.

5.6 Análisis combinatorio

Es una herramienta matemática muy útil para saber el total de resultados posibles en un experimento estadístico o espacio muestral. Son usadas para enumerar eventos difíciles de cuantificar, con el fin de calcular probabilidades.

5.6.1 Técnica de la multiplicación

Si hay *m* formas de hacer una cosa y hay *n* formas de hacer otra cosa, hay *m x n* formas da hacer ambas cosas.

Número total de arreglos = m x n

Esto puede ser extendido a más de dos eventos. Para tres eventos, m, n, y o:

Número total de arreglos = m x n x o

Ejemplo

Un vendedor de autos quiere presentar a sus clientes todas las diferentes opciones con que cuenta: auto convertible, auto de dos puertas y auto de cuatro puertas, cualquiera de ellos con rines deportivos o estándar. ¿Cuántos diferentes arreglos de autos y rines puede ofrecer el vendedor?

Para solucionar el problema podemos emplear la técnica de la multiplicación, (donde m es número de modelos y n es el número de tipos de rin).

Número total de arreglos = 3 x 2

No fue difícil de listar y contar todos los posibles arreglos de modelos de autos y rines en este ejemplo. Suponga, sin embargo, que el vendedor tiene para ofrecer ocho modelos de auto y seis tipos de rines. Sería tedioso hacer un dibujo con todas las posibilidades, pero aplicando la técnica de la multiplicación, fácilmente realizamos el cálculo:

Número total de arreglos = m x n = 8 x 6 = 48

5.6.2 Técnica de la permutación

Como vimos anteriormente, la técnica de la multiplicación es aplicada para encontrar el número posible de arreglos para dos o más grupos. La técnica de la permutación es aplicada para encontrar el número posible de arreglos donde hay solo un grupo de objetos. Como ilustración analizaremos el siguiente problema:

Tres componentes electrónicos –un transistor, un capacitor y un diodo– serán ensamblados en una tarjeta electrónica de televisión. Los componentes pueden ser ensamblados en cualquier orden. ¿De cuántas diferentes maneras pueden ser ensamblados los tres componentes?

Las diferentes maneras de ensamblar los componentes son llamadas permutaciones, y son las siguientes:

T D C	D T C	C D T
T C D	D C T	C T D

PERMUTACIÓN: Todos los arreglos de r objetos seleccionados de n objetos posibles, importando el orden de escogencia.

La fórmula empleada para contar el número total de diferentes permutaciones es:

$$n\,P\,r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Donde:

nPr es el número de permutaciones posible
n es el número total de objetos
r es el número de objetos utilizados en un mismo momento

$$n\,P\,r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3 \times 2}{1} = 6$$

Ejemplo

Suponga que hay ocho tipos de computadora, pero sólo tres espacios disponibles para exhibirlas en la tienda de computadoras. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ser arregladas las 8 máquinas en los tres espacios disponibles?

$$n\,P\,r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 336$$

En el análisis anterior, los arreglos no presentan repeticiones, es decir, no hay dos espacios disponibles con el mismo tipo de computadora. Si en los arreglos se permite la repetición, la fórmula de permutaciones es la siguiente: $n\,Pr = n^r$

Para ilustrar el punto, queremos saber cuántas series de dos letras se pueden formar con las letras A, B, C, si se permite la repetición. Las permutaciones son las siguientes:

AA, AB, AC, BA, CA, BB, BC, CB, CC

Usando la fórmula:

$$n\,Pr = n^r = 3P2 = 3^2 = 9$$

5.6.3 Técnica de la combinación

En una permutación, el orden de los objetos de cada posible resultado es diferente. Si el orden de los objetos no es importante, cada uno de estos resultados se denomina combinación. Por ejemplo, si se quiere formar un equipo de trabajo formado por dos personas seleccionadas de un grupo de tres (A, B y C). Si en el equipo hay dos funciones diferentes, entonces sí importa el orden, los resultados serán permutaciones. Por el contrario, si en el equipo no hay funciones definidas, entonces no importa el orden y los resultados serán combinaciones. Los resultados en ambos casos son los siguientes:

Permutaciones: AB, AC, BA, CA, BC, CB

Combinaciones: AB, AC, BC

COMBINACIONES: Todos los arreglos de r objetos de un grupo de n objetos sin importar el orden.

La fórmula de combinaciones es:

$$n\,C\,r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Ejemplo

En una compañía se quiere establecer un código de colores para identificar cada una de las 42 partes de un producto. Se quiere marcar con tres colores de un total de siete cada una de las partes, de tal suerte que cada una tenga una combinación de tres colores diferentes. ¿Será adecuado este código de colores para identificar las 42 partes del producto?

Usando la fórmula de combinaciones:

$$n\,C\,r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$$

El tomar tres colores de siete posibles, no es suficiente para identificar las 42 partes del producto.

5.7 Ejercicios de conjuntos y análisis combinatorio

1. En un curso 10 alumnos aprobaron historia, 15 aprobaron matemáticas y 14 aprobaron español, 3 aprobaron español e historia, 5 matemáticas y español, 3 aprobaron matemáticas e historia y 1 solo aprobó las 3 materias. ¿Cuántos alumnos aprobaron:
   Matemáticas, pero no aprobaron ni historia ni español?
   Español, pero no aprobaron ni historia ni matemáticas?
   Historia, pero no matemáticas?
   Cuántos alumnos aprobaron matemáticas o español?
   Cuántos alumnos historia y español?
   Cuántos alumnos aprobaron español o matemáticas, pero no historia?

2. Una tienda de comidas rápidas ofrece dos tipos de hamburguesas: la “sencilla” y la “súper”. Al final del día, la contabilidad arrojó los siguientes datos: 130 prefirieron la sencilla, 170 la súper y 50 ambos tipos de hamburguesas. Si el servicio fue ofrecido a 300 personas, se desea saber:
   a. ¿Cuántas personas no tuvieron preferencia por ninguna?
   b. ¿Cuántas prefieren sólo la sencilla?
   c. ¿Cuántos prefieren sólo la súper?

3. En una cierta encuesta, se les pregunta a 500 ejecutivos acerca de sus gustos por la lectura de las revistas A y B. Sus respuestas mostraron lo siguiente datos: 330 leen la revista A, 270 leen la revista B, 200 leen ambas revistas, 100 no leen ninguna.
   a. ¿Cuántos ejecutivos leen la revista A o la B o ambas?
   b. ¿Cuántos leen sólo la revista A
   c. ¿Cuántos leen sólo la revista B

4. Un investigador encontró que el 55% del público le gusta el futbol, al 43% le gusta la natación, al 20% le gusta el fútbol y la natación, al 25% le gusta el futbol y atletismo, al 35% le gusta la natación

y el atletismo. Al 7% no le gusta ninguno y al 15% le gusta los 3 deportes. Se desea saber:

a. ¿A qué porcentaje le gusta dos deportes?
b. ¿A cuántos le gusta como mínimo 2 deportes?
c. ¿A cuántos le gusta máximo 1 deporte?
d. ¿A cuántos les gusta el fútbol y la natación pero no el atletismo?
e. ¿A cuántos les gusta el fútbol o el atletismo pero no la natación?

5. Un director de arte de una revista tiene doce fotografías de donde elegir para cinco posiciones en su revista.
   a. ¿Cuántos conjuntos diferentes de cinco fotos podría elegir de las doce disponibles?
   b. Una vez que eligió sus cinco fotos, ¿de cuántas maneras puede acomodarlas en la revista?

6. Un comité de 5 personas se va a elegir entre 10 principales y 7 suplentes. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto:
   a. Si en el comité ha de haber más principales que suplentes.
   b. Debe haber 4 suplentes.

7. Cuántos números telefónicos de 7 cifras se pueden formar si la primera cifra debe ser 2, 3,4 ó 5.

8. De cuántas maneras se pueden llenar los puestos de Presidente, tesorero y secretario de una junta de 15 miembros.

9. De un total de 8 contadores y 5 administradores, se forma un comité: 3 contadores y 2 administradores. ¿De cuántas maneras se pueden formar si:
   a. Puede pertenecer al comité cualquier contador y cualquier administrador?
   b. Un contador determinado debe estar en el comité?
   c. Un administrador determinado no puede estar en el comité?

10. Cuántos números con al menos 4 dígitos se pueden formar con las cifras 1,2,3,5,7,8 sin repetir cifras

11. Un examen tiene cinco preguntas de verdadero o falso. ¿De cuántas maneras diferentes puede ser contestado?

12. ¿De cuántas maneras pueden formarse 6 personas para subir al metro?

13. De un total de 8 matemáticos y 6 físicos se va a formar un comité de 3 matemáticos y 2 físicos. ¿De cuántas maneras puede formarse si:
    a. Puede pertenecer cualquier matemático y cualquier físico?
    b. Un matemático determinado debe estar en el comité?

5.8 Ejercicios de probabilidad

1. ¿Cuál modelo de probabilidad es apropiado para cada uno de los experimentos enumerados a continuación? Explique el porqué de su respuesta.
    a. El índice del precio al consumidor IPC hoy será alto
    b. Una unidad de producción será defectuosa
    c. Sacar un 6 con un dado
    d. El sol será nova

2. Cite tres ejemplos para cada uno de los tres modelos de probabilidad.

3. Durante el año anterior, las ventas semanales en un supermercado de la ciudad han sido “bajas” durante 16 semanas, “considerables” durante 27 semanas y “ altas” el resto de las semanas. ¿Cuál es la probabilidad de que las ventas de esta semana sean:

    a. Considerables
    b. Bajas
    c. Altas
    d. Por lo menos considerables

4. Se lanza un par de dados
   a. Encuentre los elementos del espacio muestral S
   b. Encuentre los elementos contenidos en el suceso de que la suma de los puntajes sea 9
   c. Encuentre los elementos contenidos en el suceso de que la suma sea 4 ó 5
5. Un experimento consiste en señalar tres piezas en un proceso manufacturero y observar si son defectuosos D o no defectuosos N
   a. Encuentre todos los elementos del espacio muestral S
   b. Enumere los elementos contenidos en el suceso de que el número de piezas defectuosas sea 0
   c. ¿Cómo puede definir el suceso $A = \{DDN, DND, NDD\}$?
6. En un experimento de preferencia de color, se ponen en un recipiente, celulares idénticos, pero de diferente color: dos son negros y seis grises. Si le piden a una persona que escoja dos celulares al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elija los dos celulares grises?
7. Usted recolectó datos sobre 500 economistas en la academia, la industria privada y el gobierno respecto a sus opiniones sobre si la economía podría ser estable, podría expandirse o podría entrar en un periodo de contracción en el futuro próximo. Sin embargo, parte de la información se perdió, resultando la siguiente tabla de contingencia parcial. Con base en los datos restantes, cree una tabla de probabilidades.

Economistas	Estable (E_1)	Expansión (E_2)	Contracción (E_3)	Total
Academia (A_1)	100		110	
Industria privada (A_2)		40		210
Gobierno (A_3)		40	0	70
Total	200			500

Llene la tabla de contingencia y calcule:

1. La tabla de probabilidad conjunta
2. Si saca una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que:

a. Sea economista de la academia?
b. Sea economista de la industrial y que su opinión no sea estable?
c. Sea economista del Gobierno o que su opinión sea de expansión?

8. La probabilidad de que un hombre casado vea cierta telenovela es de 0.3, y la de que una mujer del mismo estado civil lo haga, 0.6; La probabilidad de que un hombre vea la telenovela, dado de que su esposa lo hace es de 0.8. Encontrar la probabilidad de:

   a. Una pareja de casados vea la telenovela.

   b. Una esposa no vea la telenovela dado que su esposo lo hace.

   c. Al menos una persona de un matrimonio vea la telenovela.

   d. Ninguno de los dos vea la telenovela.

9. Se lanza un dado no cargado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener:

   a. un número impar?
   b. un número mayor que 3?

10. La probabilidad de que llueva el 12 de octubre es 0.10, de que truene es 0.05 y de que llueva y truene es 0.03. ¿Cuál es la probabilidad de que llueva o truene en ese día?

11. En el último año de colegio, en un grupo de 100 alumnos, se encontró que 42 cursaron matemáticas, 68 sicología, 54 historia, 22 matemáticas e historia, 25 matemáticas y sicología, 7 historia pero no matemáticas ni sicología, 12 las tres materias y 8 ninguna de las tres. Si se selecciona un estudiante aleatoriamente, encuentre la probabilidad de que:

a. haya estudiado matemáticas o sicología?
b. haya estudiado sicología, pero no matemáticas ni historia?
c. haya estudiado matemáticas o historia, pero no sicología?
d. estudió historia dado que estudio matemáticas?
e. haya estudiado historia y sicología?

12. En un instituto, el 40% de los estudiantes tienen cabellos castaños, el 25% tiene ojos oscuros, y el 15% tiene cabellos castaños y ojos oscuros. Se selecciona un estudiante al azar:

    a. Si tiene cabello castaño, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos oscuros?
    b. Si tiene ojos oscuros, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga cabello castaño?

13. En cierta comunidad, la probabilidad de que una familia tenga televisor es 0.80, de que tenga máquina lavadora es 0.50 y de que tenga ambas es 0.45. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga televisor o máquina lavadora o ambas?

14. De los estudiantes de una universidad, el 40% son varones y el 4% son varones que estudian Arte. Si se elige un estudiante al azar y éste resulta ser un varón, ¿cuál es la probabilidad de que estudie arte?

15. Una urna contiene cuatro bolitas blancas y tres rojas.

    a. Si se sacan dos bolitas sin restitución, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas?
    b. Si se sacan dos bolitas con restitución, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas?

16. El número de compañías que ofrecen programas de trabajo flexibles ha aumentado conforme las compañías intentan ayudar a los empleados a arreglárselas con las exigencias de la casa y el trabajo. Un horario flexible consiste en trabajar 4 turnos de 10 horas. Sin embargo, un gran obstáculo de los horarios flexibles para los trabajadores que cobran por hora es la legislación laboral, relacionada

con las horas extras. En un estudio se obtuvo la siguiente información para 220 empresas localizadas en dos ciudades de Colombia:

Horario flexible / Ciudad	Disponible	No disponible	Total
Santa Fe de Bogotá	39	75	114
Medellín	25	81	106
Total	64	156	220

De las 220 compañías se elige una al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad que la compañía se localice en Bogotá?

b. ¿Cuál es la probabilidad que la compañía se localice en Medellín y ofrezca horarios flexibles?

c. ¿Cuál es la probabilidad que la compañía no tenga horarios flexibles?

d. ¿Cuál es la probabilidad que la compañía se ubique en Bogotá, dado que tiene horarios flexibles?

e. ¿Cuál es la probabilidad que la compañía se ubique en Medellín y no tenga horarios flexibles?

17. Un lote de 10 fusibles contiene dos fusibles defectuosos. Si se prueban los fusibles uno por uno, ¿cuál es la probabilidad de que el último fusible defectuoso sea detectado en la tercera prueba?

18. La probabilidad de que Sor Alicia estudie para un examen final de Estadística es 0.20. Si estudia, la probabilidad de que apruebe el examen es de 0.80; en tanto que, si no estudia, la probabilidad es de sólo 0.50:

    a. ¿Cuál es la probabilidad de que Sor Alicia apruebe el examen final de Estadística?

    b. Dado que Sor Alicia aprobó el examen, ¿cuál es la probabilidad de que ella haya estudiado?

19. Una compañía ha puesto a disposición de sus empleados (sin costo), amplias instalaciones de un club deportivo que pueden usarse antes del trabajo, durante la hora de almuerzo, después del trabajo y durante los fines de semana. Los registros del último año indican que de 250 empleados, 110 usaron las instalaciones en algún momento. De los 170 hombres empleados por la compañía, 65 usaron las instalaciones. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un empleado al azar:

    a. Sea hombre.
    b. Haya utilizado las instalaciones del club.
    c. Sea mujer y no haya utilizado las instalaciones del club?
    d. Sea hombre o no haya utilizado las instalaciones del club?
    e. Si es empleada de la compañía, ¿cuál es entonces la probabilidad que haya utilizado las instalaciones del club?

20. En un recinto, el 40% de los asistentes tienen aretes, el 70% tienen lentes, el 25% tienen aretes y usan lentes. El resto tiene tenis negro. Si se selecciona un asistente al azar, ¿cuál es la probabilidad:

    a. Que tenga aretes o use lentes?
    b. Que no tenga aretes y use lentes?
    c. Que no use lentes?

21. Tres máquinas, *A, B* y *C*, producen el 45%, 30% y 25%, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3%, 4% y 5%.

    a. Seleccionamos una pieza al azar. Calcula la probabilidad de que sea defectuosa.
    b. Tomamos, al azar, una pieza y resulta ser defectuosa. Calcula la probabilidad de haber sido producida por la máquina *B*.
    c. ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa?

22. Los tenis ya no son sólo para los jóvenes. En un estudio reciente realizado por una revista de calzado, se daba la fracción de adultos colombianos de 18 años de edad y más que poseían 5 o más pares de tenis. Como muestra la siguiente tabla:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Grupos y edades / Categorías	18-24	25-34	35-49	50-64	65
Fracción con 5 pares o más	0,26	0,2	0,13	0,18	0,14
Fracción de adultos colombianos de 18 años y más	0,19	0,22	0,29	0,17	0,13

a. Determine la probabilidad de que un adulto de 18 años o más posea 5 o más pares de tenis.
b. Determine la probabilidad de que la persona seleccionada tenga 65 años o más, dado que posea por lo menos 5 pares de tenis.

Capítulo 6

Competencia

Comprender el concepto de variable aleatoria asociada a una distribución de probabilidad.

Ejes temáticos

Variables aleatorias discretas empíricas y su distribución de probabilidad
Valor esperado de las variables discretas
Variables aleatorias continuas y su distribución de probabilidad
Valor esperado de las variables continúas

6. Variables aleatorias

Una *variable aleatoria (v.a)* es un evento numérico cuyo valor se determina mediante un proceso al azar. Cuando se asignan valores de probabilidad a todos los datos numéricos posibles de una variable aleatoria X, ya sea mediante un listado o a través de una función matemática, se obtiene como resultado una distribución *de probabilidad.* La suma de las probabilidades para todos los resultados numéricos posibles debe ser igual a 1. Pueden denotarse los valores de probabilidad individuales, mediante el símbolo $f(x)$, lo cual implica que hay implícita una función matemática, mediante $P(X = x)$, lo cual implica que la variable aleatoria puede asumir diversos valores específicos, o simplemente mediante $P(X)$.

Una variable aleatoria es una función que asigna a cada elemento de un espacio muestral un numero real.

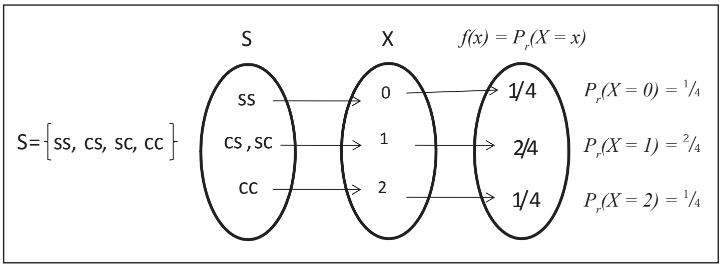
Una variable es aleatoria si toma diferentes valores como resultado de un experimento aleatorio. Esta variable aleatoria puede ser discreta o continua. Si puede tomar sólo un número limitado de valores, entonces es una variable aleatoria discreta. En el otro extremo, si puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo dado, entonces se trata de una variable aleatoria continua.

6.1 Variables aleatorias discretas

Se pueden enumerar todos los valores numéricos posibles de la variable en una tabla con las probabilidades correspondientes. Existen diversas distribuciones estándar de probabilidad que pueden utilizarse como modelos para una amplia gama de variables aleatorias discretas en aplicaciones de negocios.

EJEMPLO**:** Si se lanzan dos monedas al aire, sea x la v.a que indica el número de caras obtenido. **X** puede tomar los valores (X = 0,1,2) y a cada valor está asociada una probabilidad.

Gráficamente



6.1.1 Distribución de probabilidad de las variables aleatorias discretas

Para una variable discreta, la distribución de probabilidades es una tabla que asocia una probabilidad, a cada valor que puede tomar la variable aleatoria.

Para el ejemplo del número de caras en dos lanzamientos de una moneda, la distribución de probabilidades sería:

X	0	1	2
f(X)	1/4	2/4	1/4

f (x) se llama función de probabilidades de la v.a.x

Es importante observar como $\sum f(X) = 1$. Algunos autores definen como función PUNTUAL DE PROBABILIDAD o FUNCIÓN DE CUANTÍA a una función que cumpla la condición.

6.1.1.1 Propiedades de las v.a discretas f(x)

Tiene siete propiedades importantes para que sea función de distribución de probabilidad son:

1. $0 \leq f(x) \leq 1$
2. $f(x) = P(X = x)$
3. $\Sigma f x = 1$
4. $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$
5. $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$
6. $P(X < k) = P(X \leq k - 1)$
7. $P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1)$

6.1.2 Distribucion de probabilidad acumulada f(x)

Se define como la probabilidad acumulada de la variable aleatoria X:

Es la suma de las probabilidades hasta el valor que se desee tomar, así:

$$F(x) = P(x \leq x) = \sum_{x=0}^{x} f(x)$$

Ejemplo: F(3)

$$F(3) = P(X \leq 3) = \sum_{X=0}^{3} f(X) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$

Ejemplo: Si se lanzan dos dados de distinto color al aire y se denomina X la suma obtenida, hallar la distribución de probabilidades.

El espacio muestral para este experimento es:

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{Bmatrix}$$

Como puede observarse, la v.a. puede tomar los valores

X = 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12, y sus probabilidades se pueden hallar con la definición clásica. Número de casos favorables / número de casos posibles, así: para que la suma sea cinco los casos favorables son: (1,4), (2,3), (3,2), (4,1) cuatro elementos y los casos posibles son 36.

$$f(5) = P(X = 5) = \frac{4}{36}$$

Así la distribución de probabilidad de la v.a. de la suma del lanzamiento de dos dados sería

X	f(x)	F(x)
2	1/36	1/36
3	2/36	3/36
4	3/36	6/36
5	4/36	10/36
6	5/36	15/36
7	6/36	21/36
8	5/36	26/36
9	4/36	30/36
10	3/36	33/36
11	2/36	35/36
12	1/36	36/36
	1	

6.1.3 Valor esperado de una variable aleatoria discreta

Conociendo la distribución de probabilidades, se calcula el valor esperado de una v.a discreta como:

La esperanza matemáticas también se denomina media de la v.a

En el ejemplo anterior la esperanza sería:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i f(X_i)$$

$$E(X) = 2\left(\frac{1}{36}\right) + 3\left(\frac{2}{36}\right) + ... + 12\left(\frac{1}{36}\right)$$

6.2 Ejercicios – Variables aleatorias

1. Sea X el número de veces que un cliente visita una tienda de comestibles en un periodo de una semana. La siguiente es la distribución de probabilidad de X:

x	*P(x)*
0	0,1
1	0,4
2	0,4
3	0,1

   a. ¿La variable de estudio es discreta o continua, y por qué?
   b. Encuentre la cantidad promedio de veces que el cliente visita la tienda.
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que visite la tienda más de una vez a la semana?

2. Una compañía tiene cinco solicitantes para dos puestos: 2 mujeres y 3 hombres. Suponga que los cinco candidatos están igualmente calificados y que no existe preferencia por ningún género al escoger. Sea X el número de mujeres elegidas para cubrir los dos puestos.

a. Determinar la distribución de probabilidad.
b. Determinar la probabilidad de que sean escogidas las dos mujeres para cubrir el puesto.

3. Por experiencia una compañía de envíos sabe que entregar un paquete pequeño dentro de 24 horas cuesta $14,80. La compañía cobra $15.50 por envío, pero garantiza reintegrar el cargo si la entrega no se hace en 24 horas. Si la compañía no entrega el 2% de sus paquetes dentro del periodo de de 24 horas, ¿cuál es la ganancia esperada por paquete?

4. La vida máxima de la patente para un nuevo fármaco es 17 años. Si se resta el tiempo que requiere la FDA (Food and Drug Administration), por probar y aprobar el fármaco, se obtiene la vida real de la patente del fármaco, es decir, el tiempo que una compañía tiene para recuperar la utilidad y los costos de la investigación y desarrollo. Suponga que la distribución de tiempo de la vida de la patente para los nuevos fármacos es como se muestra enseguida:

Años X	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P(x)	0,03	0,05	0,07	0,1	0,14	0,2	0,18	0,12	0,07	0,03	0,01

a. Encuentre el número esperados de años de vida de la patente para un nuevo fármaco.
b. Determine la desviación estándar del número de años.
c. Calcular la probabilidad de que el tiempo de vida de la patente sea por lo menos 10 años.

5. En una rifa organizada a beneficio del equipo de fútbol del ITM, se venderán 8.000 boletos a $2.000 cada uno. El premio es un automóvil de $12.000.000 millones de pesos. Si un estudiante compra 2 boletas, ¿cuál es la ganancia esperada?

Capítulo 7

Competencia

Reconocer el modelo binomial, Hipergeométrico y Poisson como unas de las distribuciones de probabilidad más aplicadas a variables aleatorias discretas.

Ejes temáticos

Distribución binomial
Distribución hipergeométrica
Distribución Poisson

7. Distribuciones de de probabilidad discreta

En la distribución de probabilidad discreta la variable puede tomar sólo un número limitado de valores. Las distribuciones de probabilidad discretas que veremos a través del curso son la binomial, ha hipergeométrica y la Poisson.

7.1 Distribución binomial

Supongamos que un experimento aleatorio tiene las siguientes características:

- En cada prueba del experimento sólo son posibles dos resultados: el suceso A (éxito) y su contrario A’ (fracaso).
- El resultado obtenido en cada prueba es independiente de los resultados obtenidos anteriormente.
- La probabilidad del suceso A es constante, la representamos por p, y no varía de una prueba a otra. La probabilidad de A es 1- p y la representamos por q .
- El experimento consta de un número n de pruebas.

Todo experimento que tenga estas características diremos que sigue el modelo de la *distribución Binomial*. A la variable X que expresa el número de éxitos obtenidos en cada prueba del experimento, la llamaremos *variable aleatoria binomial*.

La variable binomial es una variable aleatoria *discreta*, sólo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, ..., *n* suponiendo que se han realizado *n* pruebas. Como hay que considerar todas las maneras posibles de obtener k-éxitos y (n-k) fracasos, debemos calcular éstas por combinaciones (número combinatorio n sobre k).

La distribución binomial se suele representar por *B(n,p)* siendo *n* y *p* los parámetros de dicha distribución.

7.1.1 Función de probabilidad de la v.a. binomial

Función de probabilidad de la distribución binomial o también denominada función de la distribución de Bernoulli (para n=1).

Probabilidad de obtener k-éxitos en la muestra.

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Como el cálculo de estas probabilidades puede resultar algo tedioso, se han construido tablas para algunos valores de *n* y *p* que nos facilitan el trabajo.

7.1.2 Parámetros de la distribución binomial

$$\begin{array}{ll} \textit{Media} & \mu = np \\ \textit{Varianza} & \sigma^2 = npq \\ \textit{Desv.típica} & \sigma = \sqrt{npq} \end{array}$$

7.1.3 Función de distribución de la v.a. binomial

$$\mathrm{F}(x_i) = p(X \leq x_i) = \binom{n}{o} p^o q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \ldots + \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Siendo k el mayor número entero menor o igual a x_i.

Esta función de distribución proporciona, para cada número real x_i, la probabilidad de que la variable X tome valores menores o iguales que x_i.

Ejemplo 1

Una máquina fabrica una determinada pieza y se sabe que produce un 7 por 1.000 de piezas defectuosas. Hallar la probabilidad de que al examinar 50 piezas sólo haya una defectuosa.

Solución

Se trata de una distribución binomial de parámetros B(50, 0.007) y debemos calcular la probabilidad p(X=1).

$$P(x=1) = \binom{50}{1} 0{,}007^1 \;.\; 0{,}993^{49} = 0{,}248$$

Ejemplo 2

La probabilidad de éxito de una determinada vacuna es 0,72. Calcule la probabilidad de que una vez administrada a 15 pacientes:

a) Ninguno sufra la enfermedad
b) Todos sufran la enfermedad
c) Dos de ellos contraigan la enfermedad

Solución

Se trata de una distribución binomial de parámetros B(15, 0.72)

a) $P(X=15) = \binom{15}{15}\ 0{,}72^{15}\ \ 0{,}28^{0} = 0{,}00724$

b) $P(X=0)= \binom{15}{0}\ 0{,}72^{0}\ \ 0{,}28^{15} = 5{,}097\ \ 10^{-9}$

c) $P(X=13) = \binom{15}{13} 0{,}72^{13}\ \ 0{,}28^{2} = 0{,}11503$

Ejemplo 3

La probabilidad de que el carburador de un coche salga de fábrica defectuoso es del 4 por 100. Hallar:

a) El número de carburadores defectuosos esperados en un lote de 1.000.
b) La varianza y la desviación típica.

Solución

a) $\mu = n \quad p = 1000 \quad 0.04 = 40$ carburadores defectuosos
b $\sigma^2 = n\ p\ q = 1000\ \ 0.04\ \ 0{,}96 = 38.4$; o $= \sigma\ \sqrt{npq} = 6{,}19$

7.2 Distribución hipergeométrica

Los experimentos que tienen este tipo de distribución tienen las siguientes características:

a) Al realizar un experimento con este tipo de distribución, se esperan dos tipos de resultados.

b) Las probabilidades asociadas a cada uno de los resultados no son constantes.

c) Cada ensayo o repetición del experimento no es independiente de los demás.

d) El número de repeticiones del experimento (n) es constante.

En estadística la *Distribución hipergeométrica* es una distribución de probabilidad discreta con tres parámetros discretos N, k y n cuya función de probabilidad es:

$$P(x = x_0) = \frac{\binom{k}{x_0}\binom{N-k}{n-x_0}}{\binom{N}{n}}$$

N: tamaño población

n: tamaño muestra

k: número de éxitos en la población

N – k: número de fracasos en la población

x es la variable aleatoria que indica el número de éxitos en la muestra

$P = \frac{k}{N}$ proporción de éxito

$Q = 1 - P$ proporción de fracaso

Esta distribución se refiere a un espacio muestral donde hay elementos de dos tipos posibles. Indica la probabilidad de obtener un número de objetos *x* de uno de los tipos, al sacar una muestra de tamaño *n*, de un total de *N* objetos, de los cuales *k* son del tipo requerido.

7.2.1 Parámetros de la distribución hipergeométrica

Media $\mu = (n)(\frac{k}{N})$

Varianza $\sigma^2 = \frac{(N-n)}{(N-1)}(n)(\frac{k}{N})(1-\frac{k}{N})$

Ejemplos

1. Para evitar que lo descubran en la aduana, un viajero ha colocado 6 tabletas de narcótico en una botella que contiene 9 píldoras de vitamina que son similares en apariencia. Si el oficial de la aduana selecciona 3 tabletas aleatoriamente para analizarlas, a) ¿Cuál es la

probabilidad de que el viajero sea arrestado por posesión de narcóticos?, b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea arrestado por posesión de narcóticos?

Solución

a) N = 9 + 6 = 15 total de tabletas
k = 6 tabletas de narcótico
n = 3 tabletas seleccionadas
x = 0, 1, 2, ó 3 tabletas de narcótico = variable que nos indica el número de tabletas de narcótico que se puede encontrar al seleccionar las 3 tabletas
p(viajero sea arrestado por posesión de narcóticos) = p(de que entre las 3 tabletas seleccionadas haya 1 o más tabletas de narcótico)

$$= p(x = 1{,}2ó3 tabletas; n = 3) = \frac{{}_6C_1 * {}_9C_2}{{}_{15}C_3} + \frac{{}_6C_2 * {}_9C_1}{{}_{15}C_3} + \frac{{}_6C_3 * {}_9C_0}{{}_{15}C_3} =$$

$$= \frac{(6)(36)}{455} + \frac{(15)(9)}{455} + \frac{(20)(1)}{455} = \frac{216 + 135 + 20}{455} = \frac{371}{455} = 0.81538$$

otra forma de resolver;

p (el viajero sea arrestado por posesión de narcóticos) = 1 – p (de que entre las tabletas seleccionadas no haya una sola de narcótico)

$$= 1 - p(x = 0; n = 3) = 1 - \frac{{}_6C_0 * {}_9C_3}{{}_{15}C_3} =$$

$$= 1 - \frac{(1)(84)}{455} = -0.184615 = 0.815385$$

b) p (no sea arrestado por posesión de narcóticos)

$$= p(x = 0; n = 3) = \frac{{}_6C_0 * {}_9C_3}{{}_{15}C_3} =$$

$$= \frac{(1)(84)}{455} = 0.184615$$

2. De un lote de 10 proyectiles, 4 se seleccionan al azar y se disparan. Si el lote contiene 3 proyectiles defectuosos que no explotarán, ¿cuál es la probabilidad de que: a) los 4 exploten?, b) al menos 2 no exploten?

Solución

a) N = 10 proyectiles en total
k = 7 proyectiles que explotan
n = 4 proyectiles seleccionados
x = 0, 1, 2, 3 o 4 proyectiles que explotan = variable que nos define el número de proyectiles que explotan entre la muestra que se dispara

$$p(x=4;n=4)=\frac{{}_7C_4 * {}_3C_0}{{}_{10}C_4}=\frac{(35)(1)}{210}=\frac{35}{210}=0.16667$$

b) N = 10 proyectiles en total
k = 3 proyectiles que no explotan
n = 4 proyectiles seleccionados
x = 0, 1, 2 ó 3 proyectiles que no explotan

p (al menos 2 no exploten) = p (2 o más proyectiles no exploten) =

$$p(x=2,o,3;n=4)$$

$$=\frac{{}_3C_2 * {}_7C_2 + {}_3C_3 * {}_7C_1}{{}_{10}C_4}=\frac{(3)(21)+(1)(7)}{210}=\frac{63+7}{210}=\frac{70}{210}=0.333333$$

3. a) ¿Cuál es la probabilidad de que una mesera se rehúse a servir bebidas alcohólicas únicamente a dos menores de edad si verifica aleatoriamente sólo 5 identificaciones de entre 9 estudiantes, de los cuales 4 no tienen la edad suficiente? b) ¿Cúal es la probabilidad de que como máximo 2 de las identificaciones pertenezcan a menores de edad?

Solución

a) N = 9 total de estudiantes
k = 4 estudiantes menores de edad
n = 5 identificaciones seleccionadas
x = variable que nos define el número de identificaciones que pertenecen a personas menores de edad
x = 0, 1, 2, 3 ó 4 identificaciones de personas menores de edad

$$p(x = 2, n = 5) = \frac{{}_4C_2 * {}_5C_3}{{}_9C_5} = \frac{(3)(10)}{126} = 0.238095$$

b) N = 9 total de estudiantes
k = 4 estudiantes menores de edad
n = 5 identificaciones seleccionadas
x = variable que nos define el número de identificaciones que pertenecen a personas menores de edad
x = 0, 1, 2, 3 ó 4 identificaciones de personas menores de edad

$$p(x = 0,1,2; n = 5) = \frac{{}_4C_0 * {}_5C_5 + {}_4C_1 * {}_5C_4 + {}_4C_2 * {}_5C_3}{{}_9C_5} = \frac{(1)(1) + (4)(5) + (6)(10)}{126} =$$

$$p(x = 0,1,2; n = 5) = \frac{1 + 20 + 60}{126} = \frac{81}{126} = 0.64286$$

7.3 Distribución de Poisson

La *distribución de Poisson* es una distribución de probabilidad discreta. Expresa la probabilidad de un número de eventos ocurriendo en un tiempo fijo si estos eventos ocurren con una tasa media conocida, y son independientes del tiempo desde el último evento.

Su distribución de probabilidad está dada por:

P(X=x) = $f(k, \mu) = \dfrac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}$

Donde:

- e es la base del logaritmo natural = (e = 2.71828...),
- k! es el factorial de k,
- μ es un número real positivo, equivalente al número esperado de ocurrencias durante un intervalo dado.

Ejemplo

El número promedio de accidentes de tránsito que ocurren en un tramo de carretera es de dos por semana. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra uno o menos de un accidente en este tramo de carretera durante una semana?

$$P(X \leq 1) = P(0) + P(1) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = 0.2706 + 0.1353$$
$$= 0.4059$$

Hay una probabilidad del 41% que ocurra, por lo menos un accidente de tránsito en ese tramo de carretera, durante una semana.

7.3.1 Parámetros de la distribución Poisson

Media $\mu = \mu$
Varianza $\sigma^2 = \mu$

7.4 Ejercicios: modelos de probabilidad discretas

1. Un estudio determinó que 40% de los alumnos de una universidad se desayunan en alguna de las cafeterías del campus. Si una tarde se escogen al azar ocho estudiantes de dicho campus, determine la probabilidad de que hayan tomado su desayuno en alguna cafetería del campus:

   a. Exactamente dos de ellos
   b. Por lo menos dos de ellos
   c. Ninguno de ellos

2. Según datos de la Secretaría de Protección y Vialidad, 25% de los operadores de microbuses urbanos manejan con imprudencia. Calcule la probabilidad de que cuatro de los próximos 10 microbuses que pasen por un crucero sean conducidos con imprudencia.

3. Un individuo afirma que es capaz de distinguir a simple vista entre una perla auténtica y una falsa 75% de las veces. Para comprobar si lo que afirma es cierto, se le muestran, una por una, seis perlas diferentes escogidas al azar, y se aceptará lo que afirma si logra establecer la autenticidad (o falsedad) en por lo menos cinco de las perlas.

    a. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo pase la prueba, si sólo está adivinando?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que no logre pasar la prueba?

4. Si una moneda ordinaria se lanza ocho veces consecutivas, calcule la probabilidad de que resulten:

    a. Todas sello
    b. Que le salgan 4 sellos y 4 caras

5. Pueden crecer corporaciones en nuevas áreas y mejorar su rentabilidad adquiriendo otras empresas? Supóngase que la probabilidad de que tenga éxito la adquisición de una corporación es de 0.1 y que se selecciona al azar 10 corporaciones involucradas en la adquisición de otra compañía.

    a. ¿Cuál es la probabilidad de que las 10 adquisiciones sean fracasos?
    b. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos de las adquisiciones sean exitosas?

6. Al probar una cierta clase de neumáticos para camión en un terreno escabroso, se encontró que 25% de los camiones terminaban la prueba con los neumáticos dañados. De los siguientes 15 camiones probados, encuentre la probabilidad de que:

a. De 3 a 6 tengan pinchaduras
b. Menos de 4 tengan pinchaduras

7. Si el 20% de los cerrojos producidos por una máquina son defectuosos, determinar la probabilidad de que de 4 cerrojos seleccionados al azar:

   a. 1 sea defectuoso
   b. A lo más 2 cerrojos sean defectuosos

8. Una compañía fabricante sabe que la posibilidad de que un artículo salga defectuoso es de un 15%. Dicha compañía utiliza un esquema de aceptación de producción de artículos antes de que se embarquen. El plan tiene dos etapas. Se preparan cajas de artículos para su embarque y se prueba una muestra de tres en busca de defectuosos. Si se encuentra alguno defectuoso, toda la caja se devuelve para verificar el 100%. Si no se encuentran defectuosos, la caja se embarca. ¿Cuál es la probabilidad de que una caja se embarque?

9. Una cooperativa agrícola asegura que el 40% de las sandías embarcadas están maduras y listas para comerse. Determine las probabilidades de que entre 10 sandías embarcadas:

   a. Las 10 estén maduras y listas para comerse
   b. Cuando más 4 estén maduras y listas para comerse
   c. Siete no estén maduras y listas para comerse

10. Según el último estudio sobre favorabilidad del actual gobernante, éste tiene a su favor el 50% de todos los habitantes mayores de edad. Si de esta población se seleccionan al azar cinco personas:

    a. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente tres personas estén a favor del mandatario?
    b. ¿4 personas estén a favor?
    c. ¿Cuál es el valor esperado y su desviación?

11. El número de llamadas que llegan al PBX de la universidad es de 4.5 por minuto. Determine la probabilidad de que:

a. Ocurran por lo menos cuatro llamadas
b. En un minuto determinado ocurran mínimo tres
c. A lo sumo 5 llamadas
d. Recalcule las probabilidades anteriores si el intervalo de tiempo fuera de 30 segundos. Analice los cambios.

12. Un centro médico tiene un promedio de 12 usuarios todas las mañanas, entre las 10:00 y las 11:00. Calcule la probabilidad de que:

    a. Lleguen máximo 12 usuarios a esa hora
    b. Lleguen entre 8 y 12 usuarios, inclusive
    c. Lleguen menos de 10 usuarios a esta hora
    d. Lleguen exactamente 12 usuarios

13. El número promedio de accidentes de tránsito que ocurren en un tramo de una carretera es de dos por semana.

    a. Obtenga la probabilidad de que ningún accidente ocurra en ese tramo carretera durante una semana.
    b. Encuentre la probabilidad de que a lo más ocurran tres accidentes en ese tramo de carretera durante dos semana?
    c. Obtenga la probabilidad de que pasen a lo sumo 4 accidentes en una semana?
    d. Obtenga la probabilidad que ocurran más de 5 accidentes en una semana?

14. Una caja de vino tiene 12 botellas, tres de las cuales contienen vino descompuesto. De la caja se elige al azar una muestra de 4 botellas:

    a. ¿Cuál es la probabilidad de que dos salgan descompuestas?
    b. ¿Cuál es la probabilidad que más de tres estén descompuestas?

15. Un producto industrial particular se envía en lotes de 20. El análisis para determinar si un artículo tiene defectos es costoso; por lo tanto, el fabricante emplea una muestra para no tener que inspeccionar el 100%. El plan de muestreo consiste en sacar 5 artículos de cada lote y rechazarlo, si se observa más de un artículo defectuoso (si el lote se rechaza se prueba cada uno de los artículos) si en un lote hay 4 artículos defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad que sea aceptado?

Capítulo 8

Competencia

Reconocer el modelo normal como una de las distribuciones de probabilidad más aplicadas a variables aleatorias continuas

Ejes temáticos

Distribución normal
Aproximaciones de la binomial a la Poisson
Aproximaciones de la binomial a la normal

8. Distribuciones de de probabilidad continuas

Como vimos anteriormente, las distribuciones continuas son las que pueden tomar cualquier valor en un intervalo. La distribución continua más importante es la normal.

8.1 Distribucion normal

La *distribución normal*, también llamada *distribución de Gauss* o *distribución gaussiana*, es la distribución continua de probabilidad que con más frecuencia aparece en estadística y teoría de probabilidad. Esto se debe a dos razones fundamentalmente:

Su *función de densidad* es simétrica y con forma de campana, lo que favorece su aplicación como modelo a gran número de variables estadísticas.

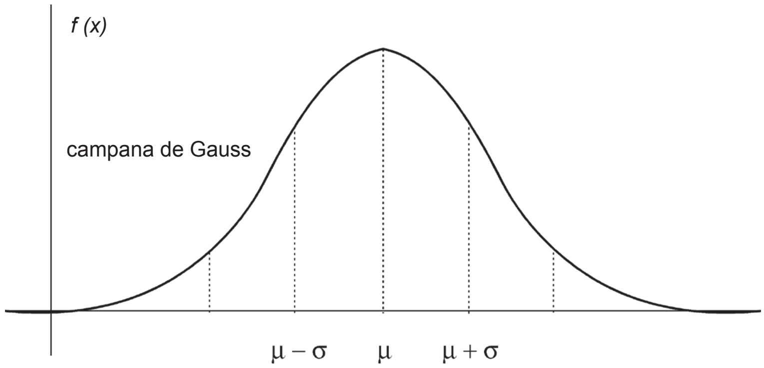
Es, además, límite de otras distribuciones y aparece relacionada con multitud de resultados ligados a la teoría de las probabilidades gracias a sus propiedades matemáticas.

La *función de densidad* de la distribución normal:

Donde: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

μ : media σ : desviación estándar σ^2 : varianza

8.1.1 Representación gráfica



8.1.2 Distribución normal estándar

La probabilidad de que nuestra variable aleatoria (que sigue una distribución normal) se encuentre entre dos valores determinados será en general difícil de calcular (hay que usar la integral de la función de probabilidad). Para ello, existen tablas que nos dan estos valores directamente; y dado que la variable de interés X, puede tomar valores $-\infty < X < \infty$, tipificamos la variable de interés para así poder trabajar con la tabla, quedando la distribución normal, como una distribución normal tipificada con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

1. Planteamos la pregunta matemáticamente.
2. Dado que las tablas son acumulativas, llevamos la pregunta a menor. Así:

Si $p(x < a)$ ya está expresada en menor

Si $p(x > a) = 1 - p(x < a)$

Si $p(a < x < b) = p(x < b) - p(x < a)$

3. Tipificamos cada valor de X utilizando la fórmula:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Debe de quedar con dos decimales.

4. Para buscar en la tabla, el signo, el entero y el primer decimal, lo buscamos en la primera columna. El segundo decimal lo buscamos en la primera fila. La intersección entre la fila y la columna es la respectiva probabilidad.
Ejemplo. Supongamos que Z = 0.43, luego

$p(z < 0.43) = 0.6664$

Se busca en la tabla de la siguiente manera:

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	**0,6664**	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531

Ejercicio 1

La vida útil de cierto tipo de lavadora automática tiene una distribución aproximadamente normal con una vida promedio de 3.1 años y una desviación estándar de 1.2 años.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que una lavadora dure entre 2.9 y 3.5 años?

b. Si este tipo de lavadora tiene garantía de un año, ¿qué fracción de la cantidad vendida originalmente, necesitará ser reemplazada?

Solución

Sea X la variable de interés que significa el número de años de duración de cierto tipo de lavadora.

Parámetros: tiempo de vida promedio $\mu = 3.1$ años
Desviación estándar $\sigma = 1.2$ años

a. $P(2.9 < x < 3.5)$

$p(x < 3.5) - p(x < 2.9)$

$$z_1 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{3.5 - 3.1}{1.2} = 0.33$$

$$z_1 = \frac{2.9 - 3.1}{1.2} = 0.17$$

$p(z < 0.33) - p(z < 0.17) = 0.6293 - 0.4325 = 0.1968.1968$

El 19.68% de las lavadoras tienen una vida útil entre 2.9 y 3.5 años

$P(x < 1)$

$$z = \frac{1 - 3.1}{1.2} = 1.75$$

$p(z < - 1.75) = 0.0401$

El 4% de las lavadoras durarán menos del año de garantía.

Ejercicio 2

La resistencia a la tracción de cierto componente de metal se distribuye normalmente con una media de 10.000 kilogramos por centímetro cuadrado y una desviación estándar de 100 kilogramos por centímetro cuadrado.

¿Qué proporción de estos componentes excede 10.150 kilogramos por centímetro cuadrado de resistencia a la tracción?

a. Si las especificaciones requieren que todos los componentes tengan resistencia a la tracción entre 9.800 y 10.200 kilogramos por centímetro cuadrado inclusive, ¿qué proporción de piezas esperaría que se descartaran?

b. ¿Qué resistencia máxima cubre el 2.5% de los componentes?

SOLUCIÓN

Sea X la variable de interés que significa la resistencia a la tracción (kilogramos/centímetros cuadrados).

Parámetros:	resistencia promedio	$\mu = 10.000$ *kgms/cms*^{2}
	Desviación estándar	$\sigma = 100$ *kgms / cm*^{2}

a. $P(x > 10.150)$

$1 - p(x < 10.150)$

$$z_1 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{10.150 - 10.000}{100} = 1.50$$

$1 - p(z < 1.50) = 1 - 0.9332 = 0.068$

El 6.68% de los componentes de metal, excede en 10.150 kilogramos/centímetros cuadrados a la resistencia a la tracción.

b. Se descartan todas las piezas que están por fuera de las especificaciones.

O sea

$p(x < 9.800) - p(x > 10.200)$

$p(x < 9.800) + 1 - p(x < 10.200)$

$$z = \frac{9.800 - 10.000}{100} = - 2.00$$

$$z = \frac{10.200 - 10.000}{100} = 2$$

$p(z < - 2.00) + 1 - p(z < 2) = 0.0228 + 1 - 0.9772 = 0.0456$

El 4.56% de las piezas se descartarán, ya que no cumplen con las especificaciones.

c. $p(x < x_0) = 0.025$

$p(z < z_0) = 0.025$

Buscando en la tabla de adentro hacia fuera, ya que 0.025 es la probabilidad, hallamos el valor de Z y despejamos el valor de x.

$z = -1.96$

$$-1.96 = \frac{x - 10.000}{100}$$

$x = 9.804$

8.2 Aproximaciones

8.2.1 Aproximación de la binomial mediante la distribución Poisson

Cuando el valor ***n*** de la distribución binomial es muy grande y el de ***p*** es muy pequeño, los términos de la binomial tienden a los valores de la distribución de Poisson y se considera una buena aproximación a la distribución binomial, en el caso que:

$np < 5$ y $p < 0.1$ ó $n > 100$ y $p < 0.05$

En ese caso $\mu = np$. El interés por sustituir la distribución binomial por una distribución de Poisson se debe a que esta última depende únicamente de un solo parámetro, μ, y la binomial de dos, n y p.

Veamos un ejemplo:

Se tiene un proceso en el cual se sabe que uno de cada 25 elementos producidos es defectuoso. Si se seleccionan 75, ¿cuál es la probabilidad que se tenga tres o menos artículos defectuosos?

$P = 1/25 = 0.04$ y $n = 75$ $np = 0.04*75 = 3$ como $np<5$ y $p<0.1$ se aproxima la distribución binomial a la Poisson con $\mu = 3$

$P(x \leq 3) = 0.6472$

8.2.2 Aproximación normal a la distribución de probabilidad binomial

La aproximación normal de las probabilidades binomiales serán adecuadas, si:

1 np>5 y nq>5 o

2 Cuando el valor ***n*** de la distribución binomial es muy grande, y el valor de ***p*** está aproximado a 0.5

$\mu = np \qquad \sigma = \sqrt{npq}$ y trabajamos con la distribución normal.

Debemos tener en cuenta que la distribución binomial es discreta y la distribución normal es continua; debemos hacer un cambio en la variable, así:

Binomial	P(x=a)	Normal	P(a-0.5<x<a+0.5)
Binomial	P(x≤a)	Normal	P(x<a+0.5)
Binomial	P(x≥a)	Normal	P(x>a-0.5)

Ejemplo

Una fábrica de refrescos estaba muy segura de que su marca tenía el 10% del mercado. En un estudio de mercado, en el que participaron 2.500 consumidores de refrescos, X = 211 consumidores, expresaron una preferencia por su marca. Si la cifra de 10% es correcta, encuentre la probabilidad de observar 211 ó menos consumidores que prefieren la marca de esta fábrica.

Solución

$$\mu = np = 2500(0.10) = 250$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2500(0.10)(0.90)} = \sqrt{225} = 15$$

$$P(x \leq 211) = P(x \leq 211 + 0.5) = P(x \leq 211.5)$$

Como la variable aleatoria es discreta y debemos realizar una aproximación normal, entonces:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{211.5 - 250}{15} = -2.57$$

$$P(z \leq -2.57) = 0.0051$$

La probabilidad de que 211 o menos consumidores prefieran la marca es del 0,51%.

8.3 Ejercicios: sobre modelos de probabilidad continua y aproximaciones

1. El diámetro interno ya terminado de un anillo de pistón está normalmente distribuido con una media de 10 centímetros y una desviación estándar de 0.03 centímetros,
   a. ¿Qué proporción de los anillos tendrá un diámetro interno que exceda de 10.075 centímetros?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que un anillo de pistón tenga un diámetro interno entre 9.97 y 10.03?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que un anillo de pistón tenga un diámetro interno inferior a 10.03?

2. Los paquetes grandes de café, marca Águila Roja de tipo exportación, producidos en Colombia, señalan en la etiqueta un contenido neto que debería ser de 4 kg. En el departamento de empaque saben que el contenido neto en peso es ligeramente variable y han estimado que la desviación estándar es de $\sigma = 0{,}04$ kg. Además, aseguran que sólo 2% de los paquetes contienen menos de 4 kg. Si se supone una distribución normal, ¿cuál es el contenido neto promedio de los paquetes?".

3. En cierta investigación sobre las dimensiones de un repuesto para una máquina industrial se encuentra que se distribuye aproximadamente normal, con una dimensión promedio de 8.643 pulgadas y una desviación standard de 0.028 pulgadas,
   a. ¿Qué porcentaje de los repuestos tiene más de 8.675 pulgadas?
   b. En cierto contrato con una "REP S.A.", la empresa se compromete a que el repuesto tiene por lo menos 8.628 pulgadas de diámetro. ¿Qué porcentaje de las entregas está por fuera de los requerimientos?

4. Un abogado va todos los días de su casa a su oficina utilizando un tiempo promedio de 24 minutos, con una desviación estándar de 3.8 minutos. Suponga que la distribución de los tiempos de viaje está distribuida normalmente.

   a. Si la oficina abre a las 9:00 a. m. y él sale diariamente de su casa a las 8:45 a. m., ¿qué porcentaje de las veces llega tarde al trabajo?
   b. Encuentre la longitud de tiempo por arriba de la cual encontramos el 15% de los viajes más lentos?

5. La vida útil de cierto tipo de lavadora automática tiene una distribución aproximadamente normal con una vida promedio de 3.1 años y una desviación estándar de 1.2 años.

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que una lavadora dure entre 2.9 y 3.5 años?
   b. Si este tipo de lavadora tiene garantía de un año, ¿qué fracción de la cantidad vendida originalmente, necesitará ser reemplazada?

6. En un proceso industrial el diámetro de un cojinete es una parte componente importante. El comprador establece que las especificaciones en el diámetro sean 3.0 ± 0.01 cm. La implicación es que ninguna parte que caiga fuera de estas especificaciones se aceptará. Se sabe que en el proceso el diámetro de un cojinete tiene una distribución aproximadamente normal con un promedio de 3.0 y una desviación estándar de 0.005. ¿Qué porcentaje de cojinetes se descartarán?

7. Se regula una máquina despachadora de Coca-cola para que sirva un promedio de 210 mililitros por vaso. Si la cantidad de Coca-cola se distribuye normalmente con una desviación estándar igual a 18 mililitros,

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que un vaso contenga entre 186.6 y 208.38 mililitros?

b. ¿Por debajo de qué valor obtendremos 25% de las Coca-colas más pequeñas?
c. ¿Qué posibilidad hay de que un vaso contenga al menos 228 mililitros?

8. Use la aproximación de Poisson para resolver el siguiente problema, relativo a la distribución binomial. La señora García está encargada de los préstamos de un banco y, con base en sus años de experiencia, estima que la probabilidad de que un solicitante no pueda pagar oportunamente su préstamo es 0.025. Si el mes pasado realizó cuarenta préstamos, ¿cuál es la probabilidad de que tres préstamos no se paguen oportunamente?

9. Use la aproximación de Poisson para resolver el siguiente problema, relativo a la distribución binomial. La señora García está encargada de los préstamos de un banco y, con base en sus años de experiencia, estima que la probabilidad de que un solicitante no pueda pagar oportunamente su préstamo es 0.025. Si el mes pasado realizó cuarenta préstamos, ¿cuál es la probabilidad de que no más de tres préstamos no se paguen oportunamente?

10. Use la aproximación de Poisson en este problema: Se estima que 0.5% de las llamadas telefónicas que entran al número 030, para pedir la hora exacta, reciben la señal de ocupado. ¿Cuál es la probabilidad de 1.200 llamadas telefónicas en un día, al menos cinco hayan recibido la señal de ocupado?

11. Encuentre la aproximación normal a $p(355 \leq x \leq 360)$ para una distribución de probabilidad binomial con n = 400 y p = 0.9.

12. Una fábrica de refrescos estaba muy segura de que su marca tenía 10% del mercado. En un estudio de mercado, en el que participaron 2.500 consumidores de refrescos, X = 211 consumidores, expresaron una preferencia por su marca. Si la cifra de 10% es correcta, encuentre la probabilidad de que por lo menos 211 consumidores prefieran la marca de esta fábrica.

Capítulo 9

9. Tablas de distribuciones

En esta sección encontraremos las tablas de la distribuciones: binomial, Poisson y normal.

9.1 Tabla de la distribución poisson acumulada

Tabla acumulada de la distribución Poisson

	μ								
x	0,1	0,2	0,30	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725
2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371
3	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865
4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977
5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997
6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

	μ								
x	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
0	0,3679	0,2231	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111	0,0067
1	0,7358	0,5578	0,4060	0,2873	0,1991	0,1359	0,0916	0,0611	0,0404
2	0,9197	0,8088	0,6767	0,5438	0,4232	0,3208	0,2381	0,1736	0,1247
3	0,9810	0,9344	0,8571	0,7576	0,6472	0,5366	0,4335	0,3423	0,2650
4	0,9963	0,9814	0,9473	0,8912	0,8153	0,7254	0,6288	0,5321	0,4405
5	0,9994	0,9955	0,9834	0,9580	0,9161	0,8576	0,7851	0,7029	0,6160
6	0,9999	0,9991	0,9955	0,9858	0,9665	0,9347	0,8893	0,8311	0,7622
7	1,0000	0,9998	0,9989	0,9958	0,9881	0,9733	0,9489	0,9134	0,8666

μ									
x	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
8		1,0000	0,9998	0,9989	0,9962	0,9901	0,9786	0,9597	0,9319
9			1,0000	0,9997	0,9989	0,9967	0,9919	0,9829	0,9682
10				0,9999	0,9997	0,9990	0,9972	0,9933	0,9863
11				1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	0,9976	0,9945
12					1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
13						1,0000	0,9999	0,9997	0,9993
14							1,0000	0,9999	0,9998
15								1,0000	0,9999
16									1.0000

μ									
x	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5
0	0,0041	0,0025	0,0015	0,0009	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0266	0,0174	0,0113	0,0073	0,0047	0,0030	0,0019	0,0012	0,0008
2	0,0884	0,0620	0,0430	0,0296	0,0203	0,0138	0,0093	0,0062	0,0042
3	0,2017	0,1512	0,1118	0,0818	0,0591	0,0424	0,0301	0,0212	0,0149
4	0,3575	0,2851	0,2237	0,1730	0,1321	0,0996	0,0744	0,0550	0,0403
5	0,5289	0,4457	0,3690	0,3007	0,2414	0,1912	0,1496	0,1157	0,0885
6	0,6860	0,6063	0,5265	0,4497	0,3782	0,3134	0,2562	0,2068	0,1649
7	0,8095	0,7440	0,6728	0,5987	0,5246	0,4530	0,3856	0,3239	0,2687
8	0,8944	0,8472	0,7916	0,7291	0,6620	0,5925	0,5231	0,4557	0,3918
9	0,9462	0,9161	0,8774	0,8305	0,7764	0,7166	0,6530	0,5874	0,5218
10	0,9747	0,9574	0,9332	0,9015	0,8622	0,8159	0,7634	0,7060	0,6453
11	0,9890	0,9799	0,9661	0,9467	0,9208	0,8881	0,8487	0,8030	0,7520
12	0,9955	0,9912	0,9840	0,9730	0,9573	0,9362	0,9091	0,8758	0,8364
13	0,9983	0,9964	0,9929	0,9872	0,9784	0,9658	0,9486	0,9261	0,8981
14	0,9994	0,9986	0,9970	0,9943	0,9897	0,9827	0,9726	0,9585	0,9400
15	0,9998	0,9995	0,9988	0,9976	0,9954	0,9918	0,9862	0,9780	0,9665

μ									
x	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5
16	0,9999	0,9998	0,9996	0,9990	0,9980	0,9963	0,9934	0,9889	0,9823
17	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9984	0,9970	0,9947	0,9911
18		1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9993	0,9987	0,9976	0,9957
19			1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9995	0,9989	0,9980
20					1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9991
21						1,0000	0,9999	0,9998	0,9996
22							1,0000	0,9999	0,9999
23								1,0000	0,9999
24									1,0000

μ									
x	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0005	0,0002	0,001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0028	0,0012	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0103	0,0049	0,0023	0,0011	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000
4	0,0293	0,0151	0,0076	0,0037	0,0018	0,0009	0,0004	0,0002	0,0001
5	0,0671	0,0375	0,0203	0,0107	0,0055	0,0028	0,0014	0,0007	0,0003
6	0,1301	0,0786	0,0458	0,0259	0,0142	0,0076	0,0040	0,0021	0,0010
7	0,2202	0,1432	0,0895	0,0540	0,0316	0,0180	0,0100	0,0054	0,0029
8	0,3328	0,2320	0,1550	0,0998	0,621	0,0374	0,0220	0,0126	0,0071
9	0,4579	0,3405	0,2424	0,1658	0,1094	0,0699	0,0433	0,0261	0,0154
10	0,5830	0,4599	0,3472	0,2517	0,1757	0,1185	0,0774	0,0491	0,0304
11	0,6968	0,5793	0,4616	0,3532	0,2600	0,1848	0,1270	0,0847	0,0549
12	0,7916	0,6887	0,5760	0,4631	0,3585	0,2676	0,1931	0,1350	0,0917
13	0,8645	0,7813	0,6815	0,5730	0,4644	0,3632	0,2745	0,2009	0,1426
14	0,9165	0,8540	0,7720	0,6751	0,5704	0,4657	0,3675	0,2808	0,2081

μ									
x	10	11	12	13	14	15	16	17	18
15	0,9513	0,9074	0,8444	0,7636	0,6694	0,5681	0,4667	0,3715	0,2867
16	0,9730	0,9441	0,8987	0,8355	0,7559	0,6641	0,5660	0,4677	0,3751
17	0,9857	0,9678	0,9370	0,8905	0,8272	0,7489	0,6593	0,5640	0,4686
18	0,9928	0,9823	0,9626	0,9302	0,8826	0,8195	0,7423	0,6550	0,5622
19	0,9965	0,9907	0,9787	0,9573	0,9235	0,8752	0,8122	0,7363	0,6509
20	0,9984	0,9953	0,9884	0,9750	0,9521	0,9170	0,8682	0,8055	0,7307
21	0,9993	0,9977	0,9939	0,9859	0,9712	0,9469	0,9108	0,8615	0,7991
22	0,9997	0,9990	0,9970	0,9924	0,9833	0,9673	0,9418	0,9047	0,8551
23	0,9999	0,9995	0,9985	0,9960	0,9907	0,9805	0,9633	0,9367	0,8989
24	1,000	0,9998	0,9993	0,9980	0,9950	0,9888	0,9777	0,9594	0,9317
25	1,000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9974	0,9938	0,9869	0,9748	0,9554
26		1,000	0,9999	0,9995	0,9987	0,9967	0,9925	0,9848	0,9718
27			0,9999	0,9998	0,9994	0,9983	0,9959	0,9912	0,9827
28			1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	0,9978	0,9950	0,9897
29				1,0000	0,9999	0,9996	0,9989	0,9973	0,9941
30					0,9999	0,9998	0,9994	0,9986	0,9967
31					1,0000	0,9999	0,9997	0,9993	0,9982
32						1,0000	0,9999	0,9996	0,9990
33							0,9999	0,9998	0,9995
34							1,0000	0,9999	0,9998
35								1,0000	0,9999
36									0,9999
37									1,0000

9.2 Tabla de la distribucion binomial acumulada

Tabla acumulada de la distribucion binomial

		p									
n	x	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
1	0	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6000	0,5000	0,4000	0,3000	0,2000	0,1000
	1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,3600	0,2500	0,1600	0,0900	0,0400	0,0100
	1	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8400	0,7500	0,6400	0,5100	0,3600	0,1900
	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2160	0,1250	0,0640	0,0270	0,0080	0,0010
	1	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,6480	0,5000	0,3520	0,2160	0,1040	0,0280
	2	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9360	0,8750	0,7840	0,6570	0,4880	0,2710
	3	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1296	0,0625	0,0256	0,0081	0,0016	0,0001
	1	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,4752	0,3125	0,1792	0,0837	0,0272	0,0037
	2	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8208	0,6875	0,5248	0,3483	0,1808	0,0523
	3	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9744	0,9375	0,8704	0,7599	0,5904	0,3439
	4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,0778	0,0313	0,0102	0,0024	0,0003	0,0000
	1	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,3370	0,1875	0,0870	0,0308	0,0067	0,0005
	2	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,6826	0,5000	0,3174	0,1631	0,0579	0,0086
	3	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9130	0,8125	0,6630	0,4718	0,2627	0,0815
	4	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9898	0,9688	0,9222	0,8319	0,6723	0,4095
	5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0467	0,0156	0,0041	0,0007	0,0001	0,0000
	1	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,2333	0,1094	0,0410	0,0109	0,0016	0,0001
	2	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,5443	0,3438	0,1792	0,0705	0,0170	0,0013
	3	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8208	0,6563	0,4557	0,2557	0,0989	0,0159

		p									
n	x	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
	4	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9590	0,8906	0,7667	0,5798	0,3446	0,1143
	5	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9959	0,9844	0,9533	0,8824	0,7379	0,4686
	6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0280	0,0078	0,0016	0,0002	0,0000	0,0000
	1	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,1586	0,0625	0,0188	0,0038	0,0004	0,0000
	2	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,4199	0,2266	0,0963	0,0288	0,0047	0,0002
	3	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,7102	0,5000	0,2898	0,1260	0,0333	0,0027
	4	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9037	0,7734	0,5801	0,3529	0,1480	0,0257
	5	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9812	0,9375	0,8414	0,6706	0,4233	0,1497
	6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9984	0,9922	0,9720	0,9176	0,7903	0,5217
	7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0168	0,0039	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1064	0,0352	0,0085	0,0013	0,0001	0,0000
	2	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,3154	0,1445	0,0498	0,0113	0,0012	0,0000
	3	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,5941	0,3633	0,1737	0,0580	0,0104	0,0004
	4	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,8263	0,6367	0,4059	0,1941	0,0563	0,0050
	5	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9502	0,8555	0,6846	0,4482	0,2031	0,0381
	6	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9915	0,9648	0,8936	0,7447	0,4967	0,1869
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9961	0,9832	0,9424	0,8322	0,5695
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0101	0,0020	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,0705	0,0195	0,0038	0,0004	0,0000	0,0000
	2	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,2318	0,0898	0,0250	0,0043	0,0003	0,0000
	3	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,4826	0,2539	0,0994	0,0253	0,0031	0,0001
	4	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,7334	0,5000	0,2666	0,0988	0,0196	0,0009
	5	0,9999	0,9969	0,9900	0,9747	0,9006	0,7461	0,5174	0,2703	0,0856	0,0083
	6	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9750	0,9102	0,7682	0,5372	0,2618	0,0530
	7	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9962	0,9805	0,9295	0,8040	0,5638	0,2252
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9980	0,9899	0,9596	0,8658	0,6126
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

		p									
n	x	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
10	0	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0060	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0464	0,0107	0,0017	0,0001	0,0000	0,0000
	2	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,1673	0,0547	0,0123	0,0016	0,0001	0,0000
	3	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,3823	0,1719	0,0548	0,0106	0,0009	0,0000
	4	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,6331	0,3770	0,1662	0,0473	0,0064	0,0001
	5	0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,8338	0,6230	0,3669	0,1503	0,0328	0,0016
	6	1,0000	0,9991	0,9965	0,9894	0,9452	0,8281	0,6177	0,3504	0,1209	0,0128
	7	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9877	0,9453	0,8327	0,6172	0,3222	0,0702
	8	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9983	0,9893	0,9536	0,8507	0,6242	0,2639
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9990	0,9940	0,9718	0,8926	0,6513
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
11	0	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0036	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0302	0,0059	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,1189	0,0327	0,0059	0,0006	0,0000	0,0000
	3	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,2963	0,1133	0,0293	0,0043	0,0002	0,0000
	4	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,5328	0,2744	0,0994	0,0216	0,0020	0,0000
	5	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,7535	0,5000	0,2465	0,0782	0,0117	0,0003
	6	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9006	0,7256	0,4672	0,2103	0,0504	0,0028
	7	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9707	0,8867	0,7037	0,4304	0,1611	0,0185
	8	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9941	0,9673	0,8811	0,6873	0,3826	0,0896
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9941	0,9698	0,8870	0,6779	0,3026
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9964	0,9802	0,9141	0,6862
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
12	0	0,2824	0,0687	0,0317	0,0138	0,0022	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,6590	0,2749	0,1584	0,0850	0,0196	0,0032	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,8891	0,5583	0,3907	0,2528	0,0834	0,0193	0,0028	0,0002	0,0000	0,0000
	3	0,9744	0,7946	0,6488	0,4925	0,2253	0,0730	0,0153	0,0017	0,0001	0,0000
	4	0,9957	0,9274	0,8424	0,7237	0,4382	0,1938	0,0573	0,0095	0,0006	0,0000
	5	0,9995	0,9806	0,9456	0,8822	0,6652	0,3872	0,1582	0,0386	0,0039	0,0001
	6	0,9999	0,9961	0,9857	0,9614	0,8418	0,6128	0,3348	0,1178	0,0194	0,0005
	7	1,0000	0,9994	0,9972	0,9905	0,9427	0,8062	0,5618	0,2763	0,0726	0,0043

		p									
n	x	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
	8	1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9847	0,9270	0,7747	0,5075	0,2054	0,0256
	9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9972	0,9807	0,9166	0,7472	0,4417	0,1109
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9968	0,9804	0,9150	0,7251	0,3410
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9978	0,9862	0,9313	0,7176
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
13	0	0,2542	0,0550	0,0238	0,0097	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,6213	0,2336	0,1267	0,0637	0,0126	0,0017	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,8661	0,5017	0,3326	0,2025	0,0579	0,0112	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000
	3	0,9658	0,7473	0,5843	0,4206	0,1686	0,0461	0,0078	0,0007	0,0000	0,0000
	4	0,9935	0,9009	0,7940	0,6543	0,3530	0,1334	0,0321	0,0040	0,0002	0,0000
	5	0,9991	0,9700	0,9198	0,8346	0,5744	0,2905	0,0977	0,0182	0,0012	0,0000
	6	0,9999	0,9930	0,9757	0,9376	0,7712	0,5000	0,2288	0,0624	0,0070	0,0001
	7	1,0000	0,9988	0,9944	0,9818	0,9023	0,7095	0,4256	0,1654	0,0300	0,0009
	8	1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9679	0,8666	0,6470	0,3457	0,0991	0,0065
	9	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9922	0,9539	0,8314	0,5794	0,2527	0,0342
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987	0,9888	0,9421	0,7975	0,4983	0,1339
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,000	0,9999	0,9983	0,9874	0,9363	0,7664	0,3787
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987	0,9903	0,9450	0,7458
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
14	0	0,2288	0,0440	0,0178	0,0068	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,5846	0,1979	0,1010	0,0475	0,0081	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,8416	0,4481	0,2811	0,1608	0,0398	0,0065	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9559	0,6982	0,5213	0,3552	0,1243	0,0287	0,0039	0,0002	0,0000	0,0000
	4	0,9908	0,8702	0,7415	0,5842	0,2793	0,0898	0,0175	0,0017	0,0000	0,0000
	5	0,9985	0,9561	0,8883	0,7805	0,4859	0,2120	0,0583	0,0083	0,0004	0,0000
	6	0,9998	0,9884	0,9617	0,9067	0,6925	0,3953	0,1501	0,0315	0,0024	0,0000
	7	1,0000	0,9976	0,9897	0,9685	0,8499	0,6047	0,3075	0,0933	0,0116	0,0002
	8	1,0000	0,9996	0,9978	0,9917	0,9417	0,7880	0,5141	0,2195	0,0439	0,0015
	9	1,0000	1,0000	0,9997	0,9983	0,9825	0,9102	0,7207	0,4158	0,1298	0,0092
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9961	0,9713	0,8757	0,6448	0.3018	0,0441

		p									
n	x	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9935	0,9602	0,8392	0,5519	0,1584
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9919	0,9525	0,8021	0,4154
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9932	0,9560	0,7712
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
15	0	0,2059	0,0352	0,0134	0,0047	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,5490	0,1671	0,0802	0,0353	0,0052	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,8159	0,3980	0,2361	0,1268	0,0271	0,0037	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9444	0,6482	0,4613	0,2969	0,0905	0,0176	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000
	4	0,9873	0,8358	0,6865	0,5155	0,2173	0,0592	0,0093	0,0007	0,0000	0,0000
	5	0,9978	0,9389	0,8516	0,7216	0,4032	0,1509	0,0338	0,0037	0,0001	0,0000
	6	0,9997	0,9819	0,9434	0,8689	0,6098	0,3036	0,0950	0,0152	0,0008	0,0000
	7	1,0000	0,9958	0,9827	0,9500	0,7869	0,5000	0,2131	0,0500	0,0042	0,0000
	8	1,0000	0,9992	0,9958	0,9848	0,9050	0,6964	0,3902	0,1311	0,0181	0,0003
	9	1,0000	0,9999	0,9992	0,9963	0,9662	0,8491	0,5968	0,2784	0,0611	0,0022
	10	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9907	0,9408	0,7827	0,4845	0,1642	0,0127
	11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9824	0,9095	0,7031	0,3518	0,0556
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9963	0,9729	0,8732	0,6020	0,1841
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9948	0,9647	0,8329	0,4510
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9953	0,9648	0,7941
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
16	0	0,1853	0,0281	0,0100	0,0033	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,5147	0,1407	0,0635	0,0261	0,0033	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,7892	0,3518	0,1971	0,0994	0,0183	0,0021	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9316	0,5981	0,4050	0,2459	0,0651	0,0106	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9830	0,7982	0,6302	0,4499	0,1666	0,0384	0,0049	0,0003	0,0000	0,0000
	5	0,9967	0,9183	0,8103	0,6598	0,3288	0,1051	0,0191	0,0016	0,0000	0,0000
	6	0,9995	0,9733	0,9204	0,8247	0,5272	0,2272	0,0583	0,0071	0,0002	0,0000
	7	0,9999	0,9930	0,9729	0,9256	0,7161	0,4018	0,1423	0,0257	0,0015	0,0000
	8	1,0000	0,9985	0,9925	0,9743	0,8577	0,5982	0,2839	0,0744	0,0070	0,0001
	9	1,0000	0,9998	0,9984	0,9929	0,9417	0,7728	0,4728	0,1753	0,0267	0,0005
	10	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9809	0,8949	0,6712	0,3402	0,0817	0,0033

		p									
n	x	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
	11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9951	0,9616	0,8334	0,5501	0,2018	0,0170
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9894	0,9349	0,7541	0,4019	0,0684
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9979	0,9817	0,9006	0,6482	0,2108
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9967	0,9739	0,8593	0,4853
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9967	0,9719	0,8147
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
17	0	0,1668	0,0225	0,0075	0,0023	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,4818	0,1182	0,0501	0,0193	0,0021	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,7618	0,3096	0,1637	0,0774	0,0123	0,0012	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9174	0,5489	0,3530	0,2019	0,0464	0,0064	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9779	0,7582	0,5739	0,3887	0,1260	0,0245	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000
	5	0,9953	0,8943	0,7653	0,5968	0,2639	0,0717	0,0106	0,0007	0,0000	0,0000
	6	0,9992	0,9623	0,8929	0,7752	0,4478	0,1662	0,0348	0,0032	0,0001	0,0000
	7	0,9999	0,9891	0,9598	0,8954	0,6405	0,3145	0,0919	0,0127	0,0005	0,0000
	8	1,0000	0,9974	0,9876	0,9597	0,8011	0,5000	0,1989	0,0403	0,0026	0,0000
	9	1,0000	0,9995	0,9969	0,9873	0,9081	0,6855	0,3595	0,1046	0,0109	0,0001
	10	1,0000	0,9999	0,9994	0,9968	0,9652	0,8338	0,5522	0,2248	0,0377	0,0008
	11	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9894	0,9283	0,7361	0,4032	0,1057	0,0047
	12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9975	0,9755	0,8740	0,6113	0,2418	0,0221
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9936	0,9536	0,7981	0,4511	0,0826
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9988	0,9877	0,9226	0,6904	0,2382
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9979	0,9807	0,8818	0,5182
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9977	0,9775	0,8332
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
18	0	0,1501	0,0180	0,0056	0,0016	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,4503	0,0991	0,0395	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,7338	0,2713	0,1353	0,0600	0,0082	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9018	0,5010	0,3057	0,1646	0,0328	0,0038	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9718	0,7164	0,5187	0,3327	0,0942	0,0154	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9936	0,8671	0,7175	0,5344	0,2088	0,0481	0,0058	0,0003	0,0000	0,0000

		p									
n	x	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
	6	0,9988	0,9487	0,8610	0,7217	0,3743	0,1189	0,0203	0,0014	0,0000	0,0000
	7	0,9998	0,9837	0,9431	0,8593	0,5634	0,2403	0,0576	0,0061	0,0002	0,0000
	8	1,0000	0,9957	0,9807	0,9404	0,7368	0,4073	0,1347	0,0210	0,0009	0,0000
	9	1,0000	0,9991	0,9946	0,9790	0,8653	0,5927	0,2632	0,0596	0,0043	0,0000
	10	1,0000	0,9998	0,9988	0,9939	0,9424	0,7597	0,4366	0,1407	0,0163	0,0002
	11	1,0000	1,0000	0,9998	0,9986	0,9797	0,8811	0,6257	0,2783	0,0513	0,0012
	12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9942	0,9519	0,7912	0,4656	0,1329	0,0064
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9987	0,9846	0,9058	0,6673	0,2836	0,0282
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9962	0,9672	0,8354	0,4990	0,0982
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9918	0,9400	0,7287	0,2662
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987	0,9858	0,9009	0,5497
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9820	0,8499
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
19	0	0,1351	0,0144	0,0042	0,0011	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,4203	0,0829	0,0310	0,0104	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,7054	0,2369	0,1113	0,0462	0,0055	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,8850	0,4551	0,2631	0,1332	0,0230	0,0022	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9648	0,6733	0,4654	0,2822	0,0696	0,0096	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9914	0,8369	0,6678	0,4739	0,1629	0,0318	0,0031	0,0001	0,0000	0,0000
	6	0,9983	0,9324	0,8251	0,6655	0,3081	0,0835	0,0116	0,0006	0,0000	0,0000
	7	0,9997	0,9767	0,9225	0,8180	0,4878	0,1796	0,0352	0,0028	0,0000	0,0000
	8	1,0000	0,9933	0,9713	0,9161	0,6675	0,3238	0,0885	0,0105	0,0003	0,0000
	9	1,0000	0,9984	0,9911	0,9674	0,8139	0,5000	0,1861	0,0326	0,0016	0,0000
	10	1,0000	0,9997	0,9977	0,9895	0,9115	0,6762	0,3325	0,0839	0,0067	0,0000
	11	1,0000	1,0000	0,9995	0,9972	0,9648	0,8204	0,5122	0,1820	0,0233	0,0003
	12	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9884	0,9165	0,6919	0,3345	0,0676	0,0017
	13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9969	0,9682	0,8371	0,5261	0,1631	0,0086
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9904	0,9304	0,7178	0,3267	0,0352
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9978	0,9770	0,8668	0,5449	0,1150
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9945	0,9538	0,7631	0,2946
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9992	0,9896	0,9171	0,5797
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9989	0,9856	0,8649
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

		p									
n	x	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
20	0	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0036	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0160	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0510	0,0059	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,1256	0,0207	0,0016	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,2500	0,0577	0,0065	0,0003	0,0000	0,0000
	7	0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,4159	0,1316	0,0210	0,0013	0,0000	0,0000
	8	0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,5956	0,2517	0,0565	0,0051	0,0001	0,0000
	9	1,0000	0,9974	0,9861	0,9520	0,7553	0,4119	0,1275	0,0171	0,0006	0,0000
	10	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,8725	0,5881	0,2447	0,0480	0,0026	0,0000
	11	1,0000	0,9999	0,9991	0,9949	0,9435	0,7483	0,4044	0,1133	0,0100	0,0001
	12	1,0000	1,0000	0,9998	0,9987	0,9790	0,8684	0,5841	0,2277	0,0321	0,0004
	13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9935	0,9423	0,7500	0,3920	0,0867	0,0024
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9984	0,9793	0,8744	0,5836	0,1958	0,0113
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,000	0,9997	0,9941	0,9490	0,7625	0,3704	0,0432
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9987	0,9840	0,8929	0,5886	0,1330
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9964	0,9645	0,7939	0,3231
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9924	0,9308	0,6083
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9992	0,9885	0,8784
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
21	0	0,1094	0,0092	0,0024	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,3647	0,0576	0,0190	0,0056	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,6484	0,1787	0,0745	0,0271	0,0024	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,8480	0,3704	0,1917	0,0856	0,0110	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9478	0,5860	0,3674	0,1984	0,0370	0,0036	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9856	0,7693	0,5666	0,3627	0,0957	0,0133	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9967	0,8915	0,7436	0,5505	0,2002	0,0392	0,0036	0,0001	0,0000	0,0000
	7	0,9994	0,9569	0,8701	0,7230	0,3495	0,0946	0,0123	0,0006	0,0000	0,0000
	8	0,9999	0,9856	0,9439	0,8523	0,5237	0,1917	0,0352	0,0024	0,0000	0,0000
	9	1,0000	0,9959	0,9794	0,9324	0,6914	0,3318	0,0849	0,0087	0,0002	0,0000
	10	1,0000	0,9990	0,9936	0,9736	0,8256	0,5000	0,1744	0,0264	0,0010	0,0000

		p									
n	x	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
	11	1,0000	0,9998	0,9983	0,9913	0,9151	0,6682	0,3086	0,0676	0,0041	0,0000
	12	1,0000	1,0000	0,9996	0,9976	0,9648	0,8083	0,4763	0,1477	0,0144	0,0001
	13	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9877	0,9054	0,6505	0,2770	0,0431	0,0006
	14	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9964	0,9608	0,7998	0,4495	0,1085	0,0033
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9992	0,9867	0,9043	0,6373	0,2307	0,0144
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9964	0,9630	0,8016	0,4140	0,0522
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9890	0,9144	0,6296	0,1520
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9976	0,9729	0,8213	0,3516
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9944	0,9424	0,6353
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9908	0,8906
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
22	0	0,0985	0,0074	0,0018	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,3392	0,0480	0,0149	0,0041	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,6200	0,1545	0,0606	0,0207	0,0016	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,8281	0,3320	0,1624	0,0681	0,0076	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9379	0,5429	0,3235	0,1645	0,0266	0,0022	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9818	0,7326	0,5168	0,3134	0,0722	0,0085	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9956	0,8670	0,6994	0,4942	0,1584	0,0262	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,9991	0,9439	0,8385	0,6713	0,2898	0,0669	0,0070	0,0002	0,0000	0,0000
	8	0,9999	0,9799	0,9254	0,8135	0,4540	0,1431	0,0215	0,0011	0,0000	0,0000
	9	1,0000	0,9939	0,9705	0,9084	0,6244	0,2617	0,0551	0,0043	0,0001	0,0000
	10	1,0000	0,9984	0,9900	0,9613	0,7720	0,4159	0,1207	0,0140	0,0003	0,0000
	11	1,0000	0,9997	0,9971	0,9860	0,8793	0,5841	0,2280	0,0387	0,0016	0,0000
	12	1,0000	0,9999	0,9993	0,9957	0,9449	0,7383	0,3756	0,0916	0,0061	0,0000
	13	1,0000	1,0000	0,9999	0,9989	0,9785	0,8569	0,5460	0,1865	0,0201	0,0001
	14	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9930	0,9331	0,7102	0,3287	0,0561	0,0009
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9981	0,9738	0,8416	0,5058	0,1330	0,0044
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9915	0,9278	0,6866	0,2674	0,0182
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9978	0,9734	0,8355	0,4571	0,0621
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9924	0,9319	0,6680	0,1719
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9793	0,8455	0,3800
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9959	0,9520	0,6608

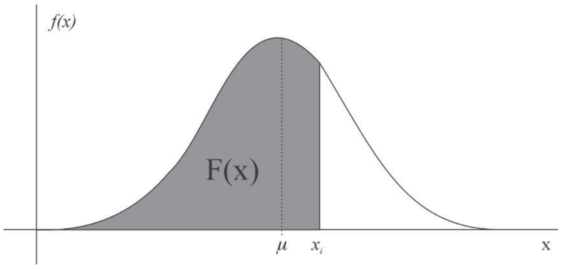
		p									
n	x	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9926	0,9015
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
23	0	0,0886	0,0059	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,3151	0,0398	0,0116	0,0030	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,5920	0,1332	0,0492	0,0157	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,8073	0,2965	0,1370	0,0538	0,0052	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9269	0,5007	0,2832	0,1356	0,0190	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9774	0,6947	0,4685	0,2688	0,0540	0,0053	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9942	0,8402	0,6537	0,4399	0,1240	0,0173	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,9988	0,9285	0,8037	0,6181	0,2373	0,0466	0,0040	0,0001	0,0000	0,0000
	8	0,9998	0,9727	0,9037	0,7709	0,3884	0,1050	0,0128	0,0005	0,0000	0,0000
	9	1,0000	0,9911	0,9592	0,8799	0,5562	0,2024	0,0349	0,0021	0,0000	0,0000
	10	1,0000	0,9975	0,9851	0,9454	0,7129	0,3388	0,0813	0,0072	0,0001	0,0000
	11	1,0000	0,9994	0,9954	0,9786	0,8364	0,5000	0,1636	0,0214	0,0006	0,0000
	12	1,0000	0,9999	0,9988	0,9928	0,9187	0,6612	0,2871	0,0546	0,0025	0,0000
	13	1,0000	1,0000	0,9997	0,9979	0,9651	0,7976	0,4438	0,1201	0,0089	0,0000
	14	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9872	0,8950	0,6116	0,2291	0,0273	0,0002
	15	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9960	0,9534	0,7627	0,3819	0,0715	0,0012
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9990	0,9827	0,8760	0,5601	0,1598	0,0058
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9947	0,9460	0,7312	0,3053	0,0226
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9987	0,9810	0,8644	0,4993	0,0731
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9948	0,9462	0,7035	0,1927
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9990	0,9843	0,8668	0,4080
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9970	0,9602	0,6849
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9941	0,9114
	23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
24	0	0,0798	0,0047	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,2925	0,0331	0,0090	0,0022	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,5643	0,1145	0,0398	0,0119	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,7857	0,2639	0,1150	0,0424	0,0035	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9149	0,4599	0,2466	0,1111	0,0134	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9723	0,6559	0,4222	0,2288	0,0400	0,0033	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000

		p									
n	x	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
	6	0,9925	0,8111	0,6074	0,3886	0,0960	0,0113	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,9983	0,9108	0,7662	0,5647	0,1919	0,0320	0,0022	0,0000	0,0000	0,0000
	8	0,9997	0,9638	0,8787	0,7250	0,3279	0,0758	0,0075	0,0002	0,0000	0,0000
	9	0,9999	0,9874	0,9453	0,8472	0,4891	0,1537	0,0217	0,0010	0,0000	0,0000
	10	1,0000	0,9962	0,9787	0,9258	0,6502	0,2706	0,0535	0,0036	0,0000	0,0000
	11	1,0000	0,9990	0,9928	0,9686	0,7870	0,4194	0,1143	0,0115	0,0002	0,0000
	12	1,0000	0,9998	0,9979	0,9885	0,8857	0,5806	0,2130	0,0314	0,0010	0,0000
	13	1,0000	1,0000	0,9995	0,9964	0,9465	0,7294	0,3498	0,0742	0,0038	0,0000
	14	1,0000	1,0000	0,9999	0,9990	0,9783	0,8463	0,5109	0,1528	0,0126	0,0001
	15	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9925	0,9242	0,6721	0,2750	0,0362	0,0003
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9978	0,9680	0,8081	0,4353	0,0892	0,0017
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9887	0,9040	0,6114	0,1889	0,0075
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9967	0,9600	0,7712	0,3441	0,0277
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9992	0,9866	0,8889	0,5401	0,0851
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9965	0,9576	0,7361	0,2143
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9881	0,8855	0,4357
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9978	0,9669	0,7075
	23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9202
	24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
25	0	0,0718	0,0038	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,2712	0,0274	0,0070	0,0016	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,5371	0,0982	0,0321	0,0090	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,7636	0,2340	0,0962	0,0332	0,0024	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9020	0,4207	0,2137	0,0905	0,0095	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9666	0,6167	0,3783	0,1935	0,0294	0,0020	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9905	0,7800	0,5611	0,3407	0,0736	0,0073	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,9977	0,8909	0,7265	0,5118	0,1536	0,0216	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000
	8	0,9995	0,9532	0,8506	0,6769	0,2735	0,0539	0,0043	0,0001	0,0000	0,0000
	9	0,9999	0,9827	0,9287	0,8106	0,4246	0,1148	0,0132	0,0005	0,0000	0,0000
	10	1,0000	0,9944	0,9703	0,9022	0,5858	0,2122	0,0344	0,0018	0,0000	0,0000
	11	1,0000	0,9985	0,9893	0,9558	0,7323	0,3450	0,0778	0,0060	0,0001	0,0000
	12	1,0000	0,9996	0,9966	0,9825	0,8462	0,5000	0,1538	0,0175	0,0004	0,0000

		p									
n	x	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
	13	1,0000	0,9999	0,9991	0,9940	0,9222	0,6550	0,2677	0,0442	0,0015	0,0000
	14	1,0000	1,0000	0,9998	0,9982	0,9656	0,7878	0,4142	0,0978	0,0056	0,0000
	15	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9868	0,8852	0,5754	0,1894	0,0173	0,0001
	16	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9957	0,9461	0,7265	0,3231	0,0468	0,0005
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9784	0,8464	0,4882	0,1091	0,0023
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9927	0,9264	0,6593	0,2200	0,0095
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9980	0,9706	0,8065	0,3833	0,0334
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9905	0,9095	0,5793	0,0980
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9976	0,9668	0,7660	0,2364
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9910	0,9018	0,4629
	23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9726	0,7288
	24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9962	0,9282
	25	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
26	0	0,0646	0,0030	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,2513	0,0227	0,0055	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,5105	0,0841	0,0258	0,0067	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,7409	0,2068	0,0802	0,0260	0,0016	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,8882	0,3833	0,1844	0,0733	0,0066	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9601	0,5775	0,3371	0,1626	0,0214	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	0,9881	0,7474	0,5154	0,2965	0,0559	0,0047	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	7	0,9970	0,8687	0,6852	0,4605	0,1216	0,0145	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000
	8	0,9994	0,9408	0,8195	0,6274	0,2255	0,0378	0,0025	0,0000	0,0000	0,0000
	9	0,9999	0,9768	0,9091	0,7705	0,3642	0,0843	0,0079	0,0002	0,0000	0,0000
	10	1,0000	0,9921	0,9599	0,8747	0,5213	0,1635	0,0217	0,0009	0,0000	0,0000
	11	1,0000	0,9977	0,9845	0,9397	0,6737	0,2786	0,0518	0,0030	0,0000	0,0000
	12	1,0000	0,9994	0,9948	0,9745	0,8007	0,4225	0,1082	0,0094	0,0001	0,0000
	13	1,0000	0,9999	0,9985	0,9906	0,8918	0,5775	0,1993	0,0255	0,0006	0,0000
	14	1,0000	1,0000	0,9996	0,9970	0,9482	0,7214	0,3263	0,0603	0,0023	0,0000
	15	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9783	0,8365	0,4787	0,1253	0,0079	0,0000
	16	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9921	0,9157	0,6358	0,2295	0,0232	0,0001
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9975	0,9622	0,7745	0,3726	0,0592	0,0006
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9855	0,8784	0,5395	0,1313	0,0030

		p									
n	x	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9953	0,9441	0,7035	0,2526	0,0119
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9786	0,8374	0,4225	0,0399
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9934	0,9267	0,6167	0,1118
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9984	0,9740	0,7932	0,2591
	23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9933	0,9159	0,4895
	24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9989	0,9773	0,7487
	25	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9970	0,9354
	26	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

9.3 Tabla de la distribucion normal



$$F(x) = Pr(X \leq x)$$

Tabla de probabilidades acumuladas normal

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
-3,8	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,7	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,6	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,0	0,5000	0,040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

BIBLIOGRAFÍA

WALPOLE, Ronald, MYERS Raymon: *Probabilidad y estadística,* 4ª ed; México: Mc Graw Hill 1992, 797 p.

CANAVOS, George *Probabilidad y estadística: aplicaciones y métodos.* México: McGraw-Hill, 1988, 651 p.

BERENSON, Marck L, LEVINE David: *Estadística básica en administración conceptos y aplicaciones*, 6ª ed. México: Prentice-Hall, 1996, 943 p.

BERENSON, Marck L, LEVINE David: *Estadística para administración y economía, conceptos y aplicaciones*. Bogotá: McGraw-Hill, 1993, 720 p.

SOTO MAYOR Gabriel Velazco *Probabilidad y estadística para ingeniaría y ciencias.* México: Thomson Learning, 2001,326 p.

MENDENHALL William: *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*, 4ª ed. México: Prentice Hall, 1997, 1182 p. + disquete.

MONTGOMERY, Doglas *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería:* México: McGraw-Hill, 1994, 895 p.

MILLER, Irwing: *Probabilidad y estadística para ingenieros,* 4ª ed, México: Prentice-Hall, 1992, 624.

Estadística Básica

se terminó de imprimir en febrero de 2010.
Para su elaboración se utilizó papel Bond de 75 g,
en páginas interiores, y cartulina Propalcote 250 g para la carátula.
Las fuentes tipográficas empleadas son Novarese Bk Bt 11 puntos,
en texto corrido, y Myriad Pro 14 puntos en títulos.

INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO
Dirección Fondo Editorial

Serie TEXTOS ACADÉMICOS
¡*Publicaciones de nuestros docentes para los estudiantes de Colombia*!

FUNDAMENTOS DE LEGISLACIÓN LABORAL
Mónica Lucía Granda Viveros

GESTIÓN DE MANTENIMIENTO HOSPITALARIO E INDUSTRIAL. TENDENCIAS ACTUALES
William Orozco Murillo, compilador

APRENDIENDO A SER EL MEJOR
Yudi Amparo Marín Álvarez

EL LENGUAJE MUSICAL
Elkin Pérez Álvarez

FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE LA ARMONÍA
Elkin Pérez Álvarez

FUNCIONES REALES CON MATLAB
Yolanda Álvarez Ríos / Gloria María Díaz Londoño

ESTUDIO DEL TRABAJO: NOTAS DE CLASE
María del Rocío Quesada Castro / William Villa Arenas

INTRODUCCIÓN AL MANTENIMIENTO BIOMÉDICO
Luis Fernando Castrillón Gallego

ÉTICA, INNOVACIÓN Y ESTÉTICA
Marta Palacio Sierra / Raúl Domínguez Rendón / Héctor Cardona Carmona

ESTÁDISTICA BÁSICA
Adriana Guerrero / María Victoria Buitrago / María de los Ángeles Curieses

PRESUPUESTO Y PROGRAMACIÓN DE OBRAS CIVILES
Sergio Andrés Arboleda López

TEXTOS ACADÉMICOS

GRAFICAR CON AUTOCAD
John Jairo García Mora

ACÚSTICA: LA CIENCIA DEL SONIDO
Ana María Jaramillo Jaramillo

INTRODUCCIÓN DE ERRORES EN LA MEDICIÓN
Adriana Guerrero Peña / Gloria María Díaz Londoño

METROLOGÍA. ASEGURAMIENTO METROLÓGICO INDUSTRIAL. TOMO I
Jaime Restrepo Díaz

NEUMÁTICA BÁSICA
Luis Giovanny Berrío Zabala / Sandra Ruth Ochoa Gómez

ELEMENTOS BÁSICOS DE INGENIERÍA DEL SOFTWARE
Diego Guerrero Peña

ADMINISTRACIÓN DE SISTEMAS DE COSTOS POR ÓRDENES
Armando García Muñoz

MANUAL DE PRÁCTICAS PROFESIONALES
Silvia Elena Rivera Escobar

GEOMETRÍA INTEGRADA
León Darío Fernández Betancur / Gustavo Saldarriaga Rivera

QUÍMICA BÁSICA. PRÁCTICAS DE LABORATORIO
Margarita Patiño Jaramillo

PRINCIPIOS DE ADMINISTRACIÓN
Darío Hurtado Cuartas

CÁLCULO DIFERENCIAL. LÍMITES Y DERIVADAS
Sergio Alberto Alarcón Vasco / María Cristina González Mazuelo
Hernando Manuel Quintana Ávila

FÍSICA MECÁNICA. EJERCICIOS RESUELTOS
Richard Hamilton Benavides Palacios / Claudia Milena Serpa Imbett

CARTILLA TÉCNICA DEL DESFIBRILADOR
William Orozco Murillo / Edward Cardona Montoya

CONSULTA Y ACTUALIZACIÓN DE BASES DE DATOS MEDIANTE EQUIPOS MÓVILES
Jaime Vásquez Rojas

INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN EN JAVA
Fray León Osorio Rivera

BASES DE DATOS RELACIONALES. TEORÍA Y PRÁCTICA
Fray León Osorio Rivera

MATEMÁTICAS ESPECIALES PARA INGENIERÍA. NIVEL I
Martha Cecilia Guzmán Zapata

METROLOGÍA: ASEGURAMIENTO METROLÓGICO INDUSTRIAL. TOMO II
Jaime Restrepo Díaz

MATEMÁTICAS ESPECIALES PARA INGENIERÍA. NIVEL II
Diego Agudelo Torres

ESPAÑOL AL DÍA. NORMAS DE USO COMÚN
Humberto de la Cruz Arroyave

FÍSICA MECÁNICA. CONCEPTOS BÁSICOS Y PROBLEMAS
Javier Vargas / Iliana Ramírez / Santiago Pérez / Jairo Madrigal

MATERIALES INDUSTRIALES. TEORÍA Y APLICACIONES
Ligia María Vélez Agudelo

LÓGICA Y PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS:
INICIO AL DESARROLLO DEL SOFTWARE
Fray León Osorio Rivera

SECCIONES CÓNICAS: UNA MIRADA DESDE LA DERIVACIÓN IMPLÍCITA
Maria Cristina González Mazuelo / Juan Guillermo Paniagua Castrillón
Gustavo Adolfo Patiño Jaramillo

SENTENCIAS BÁSICAS USADAS EN LA PROGRAMACIÓN DE COMPUTADORES
Roberto Carlos Guevara Calume

FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LA INFORMACIÓN
Mauricio Correa Villa

ANÁLISIS DE SEÑALES CON LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER, GABOR Y ONDITAS
Horacio Arango Marín

TEXTOS ACADÉMICOS

APLICACIÓN DE GEOGEBRA EN LA GEOMETRÍA INTEGRADA
León Darío Fernández Betancur / Gustavo Saldarriaga Rivera

GEOMETRÍA INTERACTIVA
Grupos GNOMON-ELIME.CEID-ADIDA

CÁLCULO INTEGRAL
Yolanda Álvarez Ríos / Jorge Agudelo Quiceno

APLICACIONES MATEMÁTICAS EN LA INGENIERÍA
José Benjamín Gallego Alzate

PROCESOS PRODUCTIVOS Y ADMINISTRATIVOS
Yudi Amparo Marín Álvarez / Melba Elena Marín Ramírez

MANUAL BÁSICO DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS
Luis Fernando Román Henao

FUNDAMENTO SOCIAL DEL DERECHO
Mónica Lucía Granda Viveros / Juan Fernando Gómez Gutiérrez

INTRODUCCIÓN A LAS COMUNICACIONES INDUSTRIALES CON PROFIBUS
Aplicaciones con controladores lógicos programables y variadores de velocidad
Juan Guillermo Mejía Arango

LabVIEW PRÁCTICO CON APLICACIONES
Alexander Arias Londoño / Paula Andrea Ortiz Valencia

MÉTODOS NUMÉRICOS
Héctor Tabares Ospina