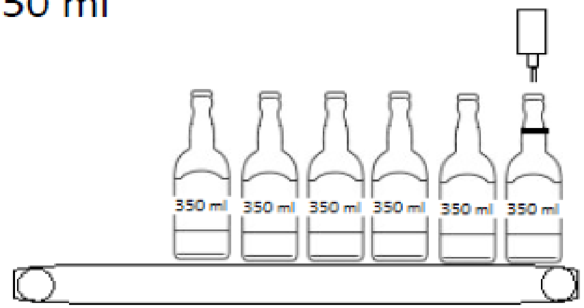
Pruebas de hipótesis

Motivación 1

Proceso de llenado de cervezas de 350 ml

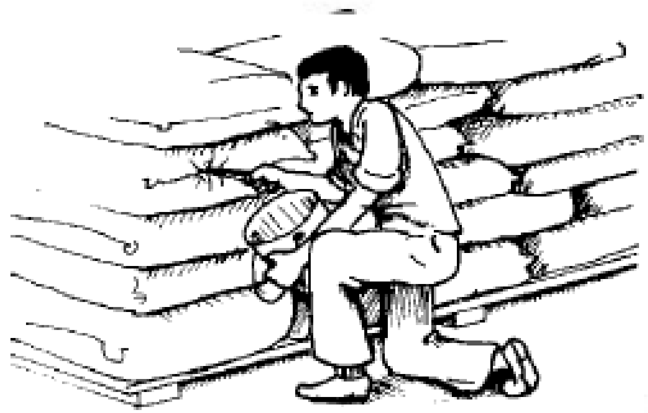


Muestra de cervezas

¿Está el proceso de llenado cumpliendo con lo prometido en la etiqueta?

¿Será el contenido medio de cerveza μ igual a 350ml?

Motivación 2



¿Está el saco de café cumpliendo con lo porcentaje de granos defectuosos?

¿Será el porcentaje p de granos defectuosos igual al 3%?

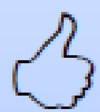
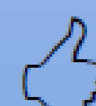
Prueba de hipótesis

Una hipótesis estadística es una aseveración o conjetura con respecto a una o más poblaciones.

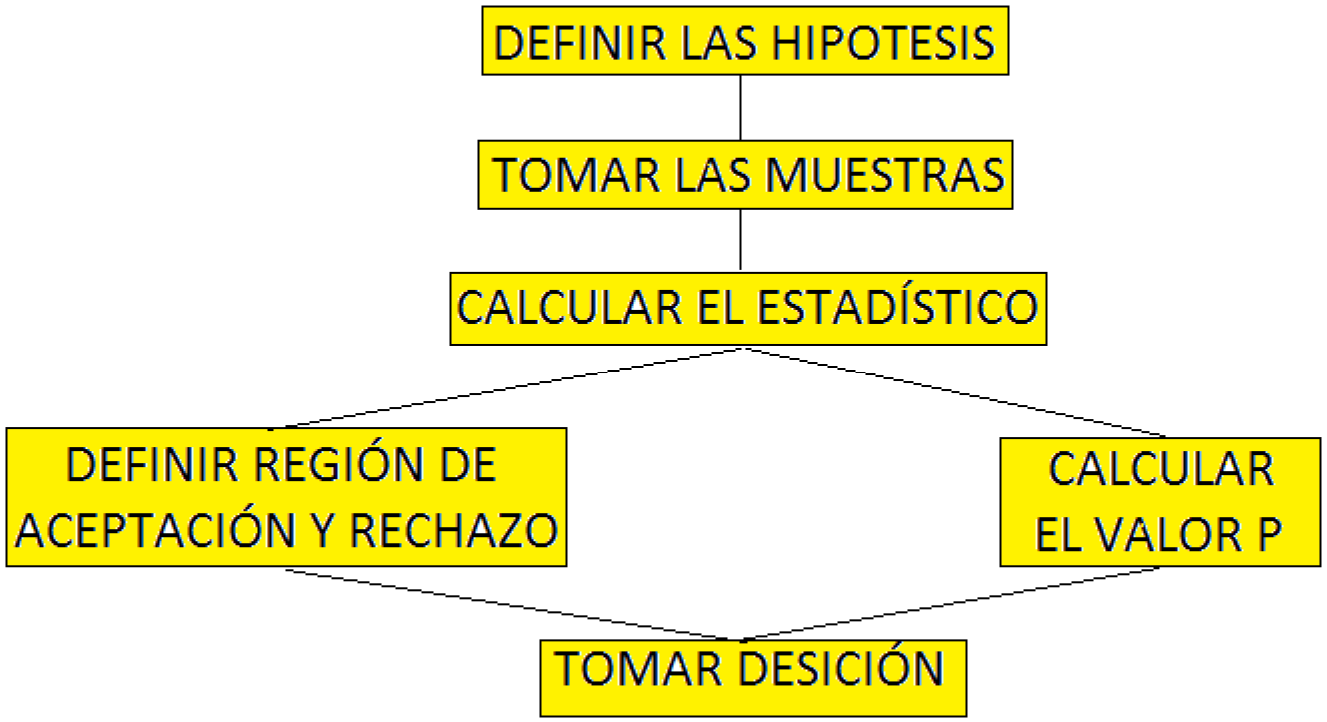
Tipos de hipótesis

- Tipos
  - Hipótesis nula (Ho) — Status quo
  - Hipótesis alternativa (Ha o H1) — Sospechas

Tipos de errores en prueba de hipótesis

	Situación real de Ho	
Decisión	Ho es verdadera	Ho es falsa
Aceptar Ho		Error tipo II (β)
Rechazar Ho	Error tipo I (α)	

Proceso de pruebas de hipótesis



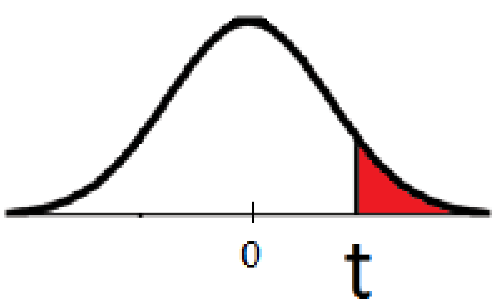
TIPOS DE PRUEBAS SEGÚN LA REGIÓN DE ACEPTACIÓN Y RECHAZO

$$\begin{aligned} H_0&: \quad \theta = \theta_0 \\ H_1&: \quad \theta > \theta_0 \end{aligned}$$

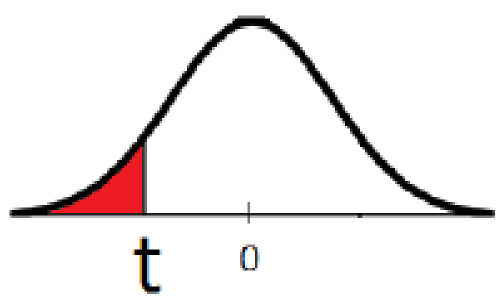
$$\begin{aligned} H_0&: \quad \theta = \theta_0 \\ H_1&: \quad \theta < \theta_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_0&: \quad \theta = \theta_0 \\ H_1&: \quad \theta \neq \theta_0 \end{aligned}$$

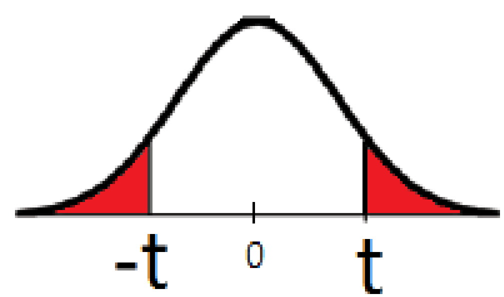
Prueba unilateral derecha



Prueba unilateral izquierda



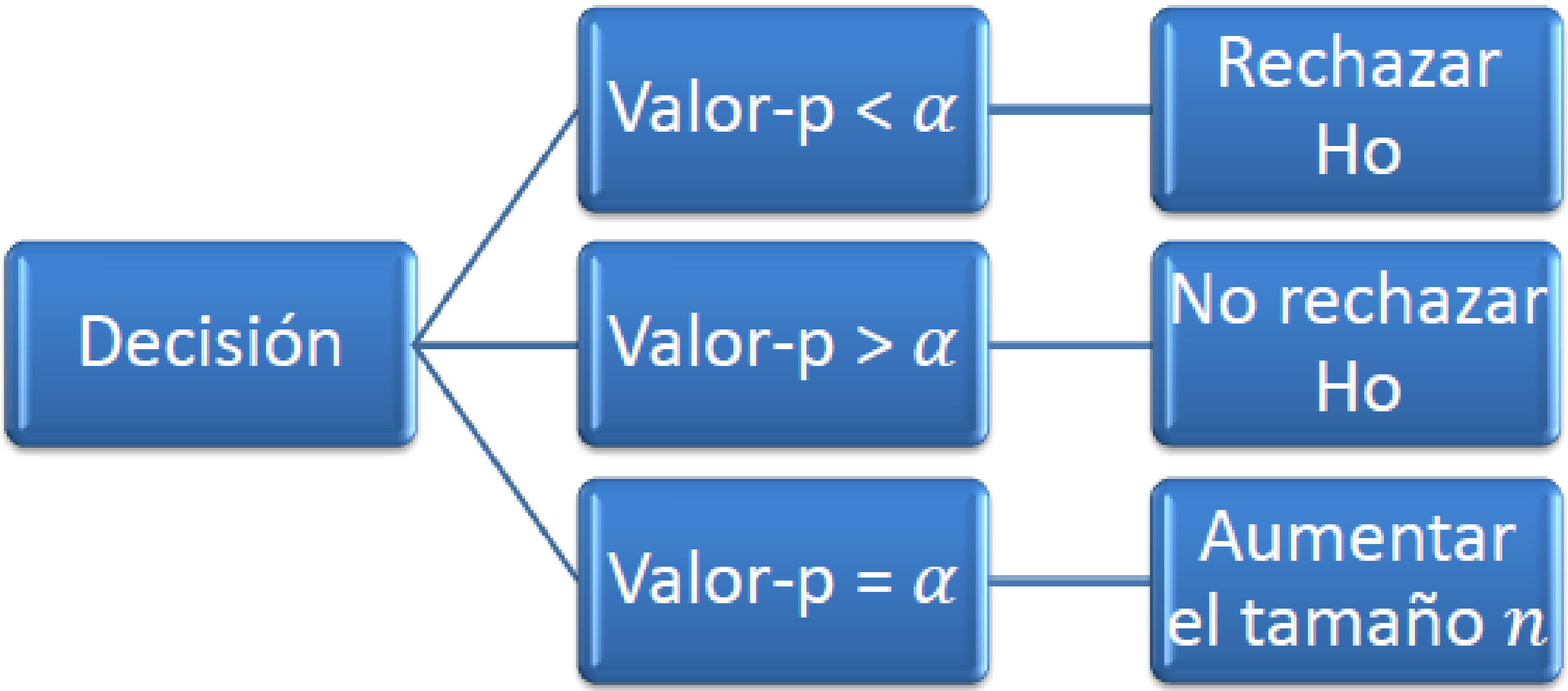
Prueba bilateral



Valor p

- El valor-p de una prueba de hipótesis es la probabilidad de obtener un estadístico (evidencias) igual al que se obtuvo o más extremo.
- Probabilidad de equivocarse rechazando la hipótesis nula.

Toma de decisión en pruebas de hipótesis

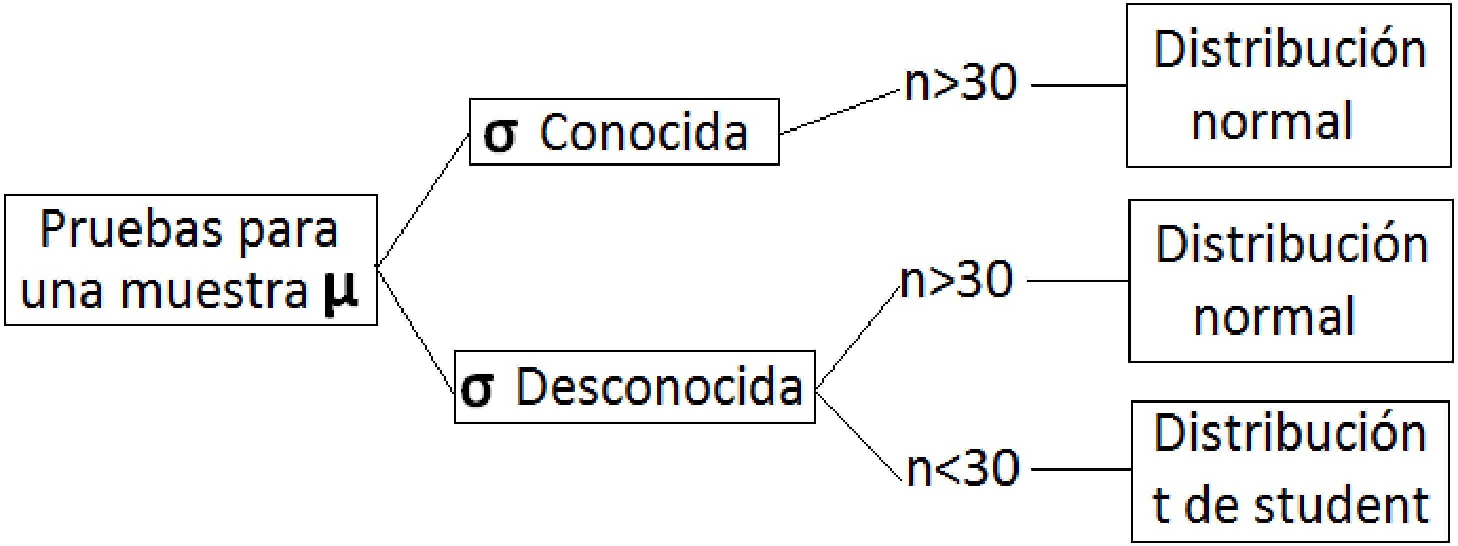


Problemas de pruebas de hipótesis

Pruebas

- Para una muestra
  - μ
  - p
  - σ^2
- Para dos muestras
  - $\mu_1 - \mu_2$
  - $\mu_1 - \mu_2$ pareadas
  - $p_1 - p_2$
  - σ_1^2 / σ_2^2

Pruebas para la media μ



1. Prueba de hipótesis para μ

Paso 1. Definir Ho, H1 y el tipo de prueba

$$H_0: \quad \mu = \mu_0 \qquad H_0: \quad \mu = \mu_0 \qquad H_0: \quad \mu = \mu_0$$
$$H_1: \quad \mu > \mu_0 \qquad H_1: \quad \mu < \mu_0 \qquad H_1: \quad \mu \neq \mu_0$$

Paso 2. Calcular el estadístico

Media muestral

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Valor de referencia

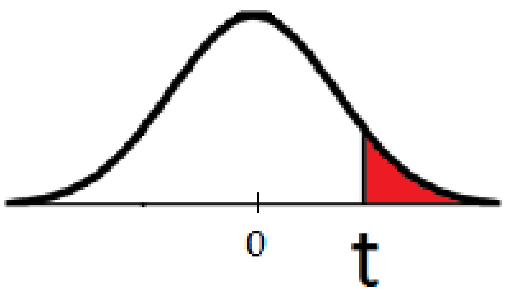
Tamaño de muestra

Desviación muestral

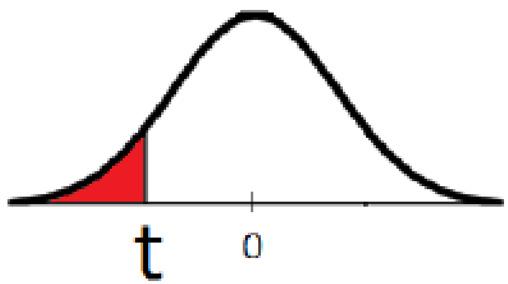
Paso 3. Definir el error tipo I denotado por α

Paso 4. Calcular el valor-p en una distribución t-student con $n-1$ grados de libertad

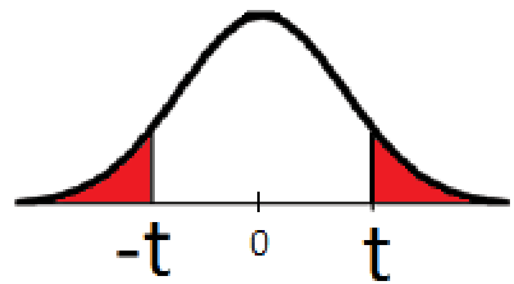
$$H_0: \quad \mu = \mu_0$$
$$H_1: \quad \mu > \mu_0$$



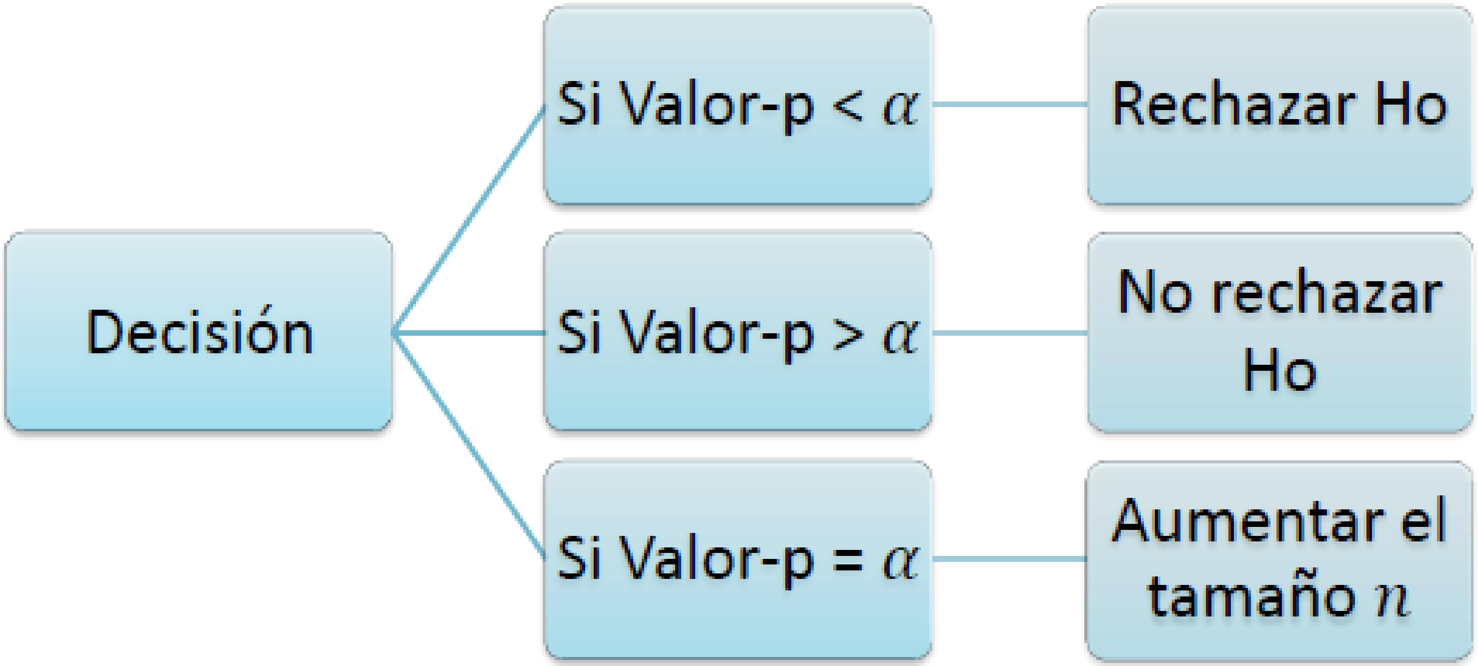
$$H_0: \quad \mu = \mu_0$$
$$H_1: \quad \mu < \mu_0$$



$$H_0: \quad \mu = \mu_0$$
$$H_1: \quad \mu \neq \mu_0$$



Paso 5. Comparar valor-p con α y tomar la decisión



Ejemplo 1

Para verificar si el proceso de llenado de bolsas de café con 500 gramos está operando correctamente se toman aleatoriamente muestras de tamaño diez cada cuatro horas. Una muestra de bolsas está compuesta por las siguientes observaciones:

502, 501, 497, 491, 496, 501, 502, 500, 489, 490.

¿Está el proceso llenando bolsas conforme lo dice la envoltura?

Paso 1. Definir Ho y H1

$$H_0: \quad \mu = 500\ gr$$
$$H_1: \quad \mu \neq 500\ gr$$

Paso 2. Calcular el estadístico

De la muestra tenemos que:

$$\bar{x} = 496.9\ gr$$
$$s = 5.174\ gr$$
$$n = 10$$

Por tanto el estadístico es:

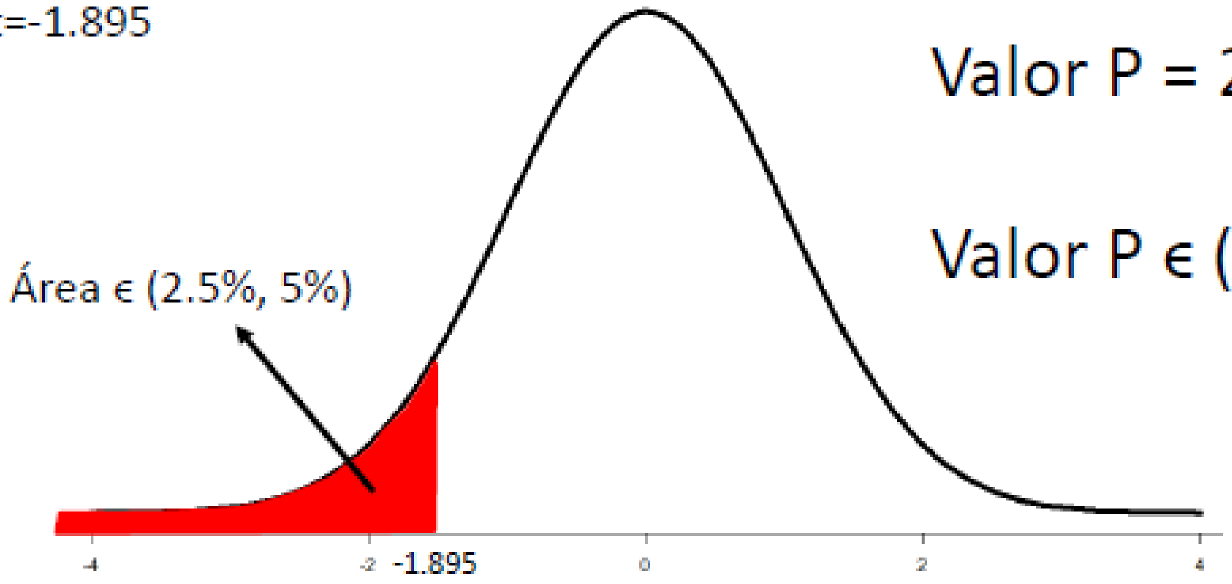
$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{496.9 - 500}{5.174/\sqrt{10}} = -1.895$$

Paso 3. Definir el error tipo I denotado por α

Usemos $\alpha = 0.05$

Paso 4. Calcular el valor-p en una distribución t-student con $n-1$ grados de libertad

t=-1.895



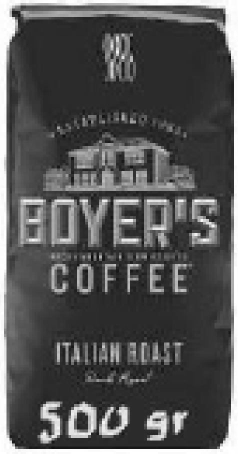
Valor P = 2 x Área roja

Valor P ∈ (5%, 10%)

Paso 5. Comparar valor-p con α y tomar la decisión

Como Valor P $>$ α=0.05 entonces NO RECHAZAMOS Ho

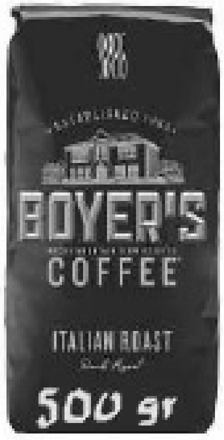
El proceso está llenando las bolsas conforme al aviso en la envoltura.



Tiempo después se lleva a cabo otra verificación del proceso y se obtiene la siguiente muestra:

500, 495, 494, 498, 495, 500, 500, 496, 498, 493.

¿Está el proceso llenando bolsas conforme lo dice la envoltura?



Paso 1. Definir Ho y H1

$$H_0: \quad \mu = 500 \ gr$$
$$H_1: \quad \mu \neq 500 \ gr$$

Paso 2. Calcular el estadístico

De la muestra tenemos que:

$$\bar{x} = 496.9\ gr$$
$$s = 2.643\ gr$$
$$n = 10$$

Por tanto el estadístico es:

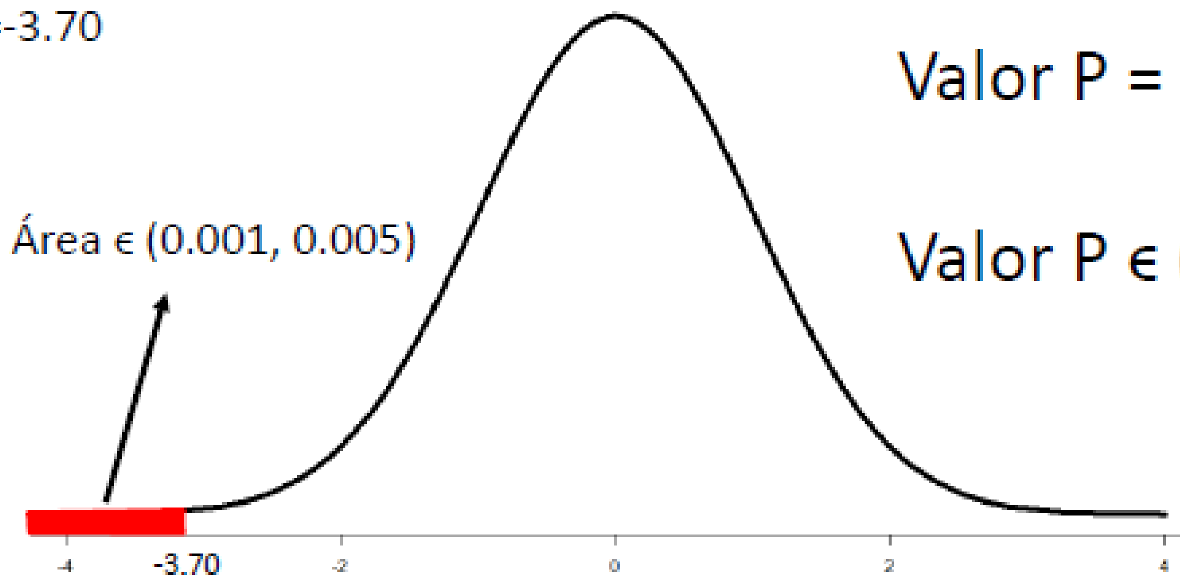
$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{496.9 - 500}{2.643/\sqrt{10}} = -3.70$$

Paso 3. Definir el error tipo I denotado por α

Usemos $\alpha = 0.05$

Paso 4. Calcular el valor-p en una distribución t-student con $n-1$ grados de libertad

t=-3.70



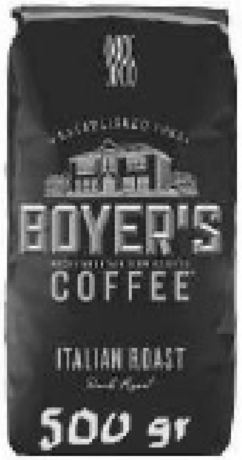
Valor P = 2 x Área roja

Valor P ∈ (0.002, 0.01)

Paso 5. Comparar valor-p con α y tomar la decisión

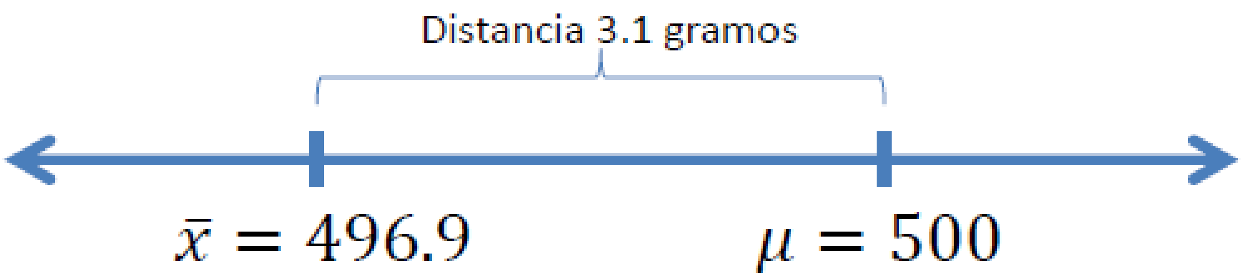
Como Valor P $<$ α=0.05 entonces RECHAZAMOS Ho

El proceso NO está llenando las bolsas conforme al aviso en la envoltura.



Resumen de los ejemplos 1 y 2

	Ejemplo 1	Ejemplo 2
Muestra	502, 501, 497, 491, 496, 501, 502, 500, 489, 490	500, 495, 494, 498, 495, 500, 500, 496, 498, 493
Media muestral	496.9 gramos	496.9 gramos
Desviación muestral	5.174 gramos	2.643 gramos
Tamaño de muestra	10	10
Hipótesis nula	$H_0: \quad \mu = 500\ gr$	$H_0: \quad \mu = 500\ gr$
Decisión	Aceptamos Ho	Rechazamos Ho



Población normal con σ conocida

Hipótesis nula: H_0: $\mu = \mu_0$

Valor del estadístico de prueba: $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Hipótesis alternativa	Región de rechazo para la prueba de nivel α
H_a: $\mu > \mu_0$	$z \geq z_\alpha$ (prueba de cola superior)
H_a: $\mu < \mu_0$	$z \leq -z_\alpha$ (prueba de cola inferior)
H_a: $\mu \neq \mu_0$	o $z \geq z_{\alpha/2}$ o $z \leq -z_{\alpha/2}$ (prueba de dos colas)

EJEMPLO

Un fabricante de alarma de calor, afirma que la temperatura de activación del sistema es de 130°F. Una muestra de n=9 sistemas, cuando se somete a prueba, da una temperatura de activación promedio muestral de 131.08°F.

Si la distribución de los tiempos de activación es normal con desviación estándar de 1.5°F, ¿contradicen los datos la afirmación del fabricante a un nivel de significancia 0.01?

PASOS A REALIZAR

Parámetro de interés:

μ=temperatura de activación promedio verdadera

1. Definir Ho y H1:

Ho: $\mu=130$ H1: $\mu\neq130$

2. Calcule el estadístico

De la muestra se tiene:

$\bar{X}$=131.08

σ=1.5

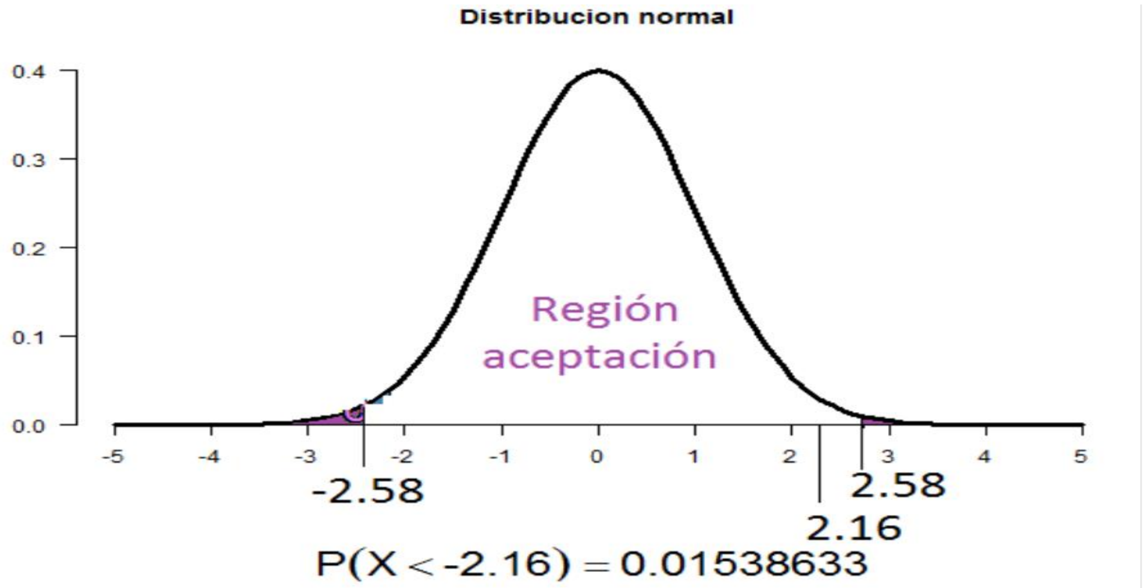
n=9

$$z=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{131.08-130}{1.5/\sqrt{9}}=2.16$$

3. Definir el error tipo 1 denotado por α

NC=0.99 α=0.01 α/2=0.005 $Z_{\alpha/2} = 2.58$

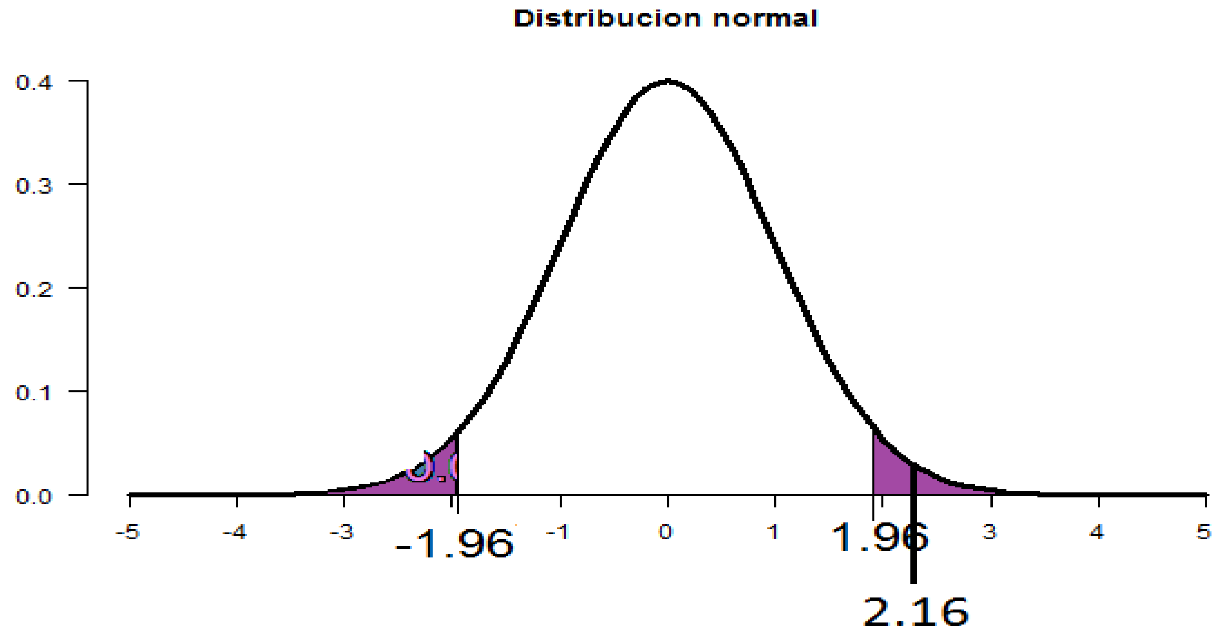
4. Defina la zona de aceptación y de rechazo



Con un nivel de significancia del 1% se acepta la hipótesis nula,
no existe evidencia para rechazar la evidencia de que la media difiera de 130

¿Qué pasa si se cambia el nivel de significancia?

NC=0.95 α=0.05 α/2= 0.025 $Z_{\alpha/2} = 1.96$



Con un nivel de significancia del 5%, se rechaza la hipótesis nula, existe evidencia para afirmar de que la temperatura media de los rociadores difiere de 130

2. Prueba de hipótesis para p

Paso 1. Definir Ho, H1 y el tipo de prueba

$$H_0:\ p = p_0 \qquad H_0:\ p = p_0 \qquad H_0:\ p = p_0$$
$$H_1:\ p > p_0 \qquad H_1:\ p < p_0 \qquad H_1:\ p \neq p_0$$

Paso 2. Calcular el estadístico

Proporción muestral

$$Z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

Valor de referencia

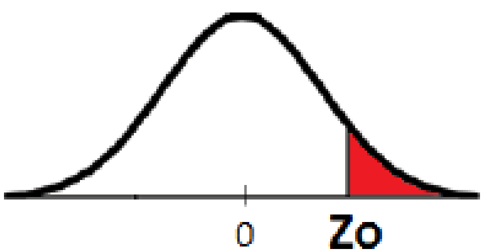
Tamaño de muestra

2. Prueba de hipótesis para p

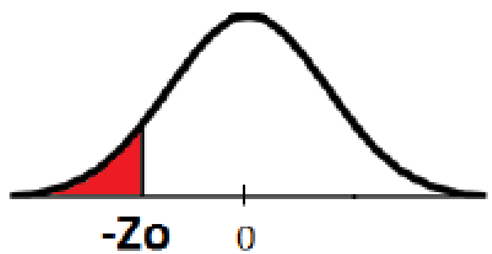
Paso 3. Definir el error tipo I denotado por α

Paso 4. Calcular el valor-p en una distribución normal

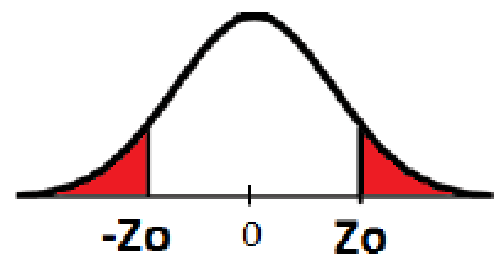
$$H_0:\quad p = p_0$$
$$H_1:\quad p > p_0$$



$$H_0:\quad p = p_0$$
$$H_1:\quad p < p_0$$

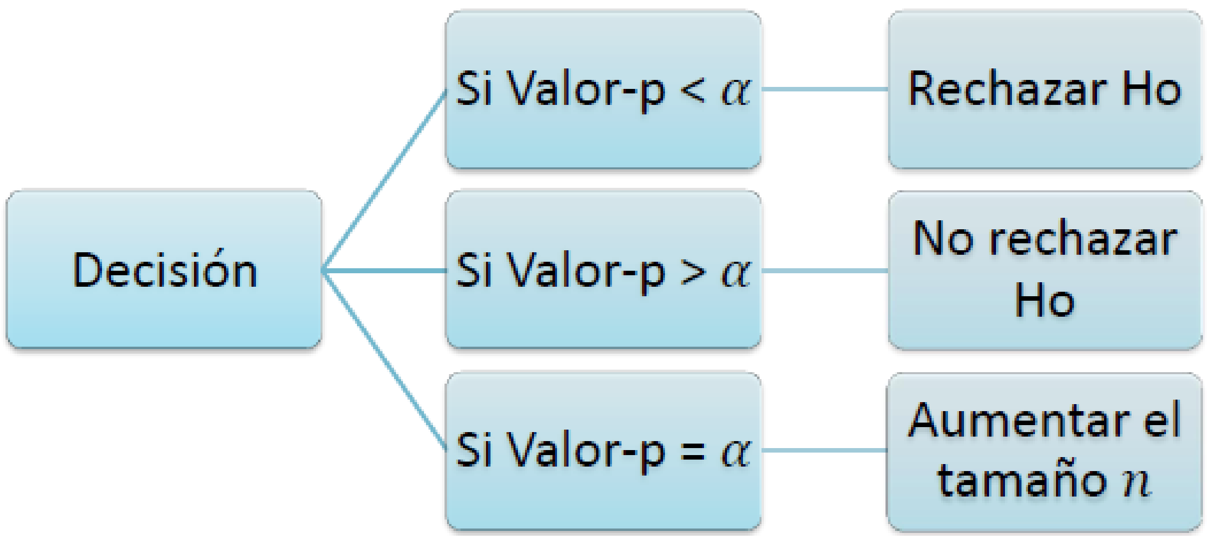


$$H_0:\quad p = p_0$$
$$H_1:\quad p \neq p_0$$



2. Prueba de hipótesis para p

Paso 5. Comparar valor-p con α y tomar la decisión



EJEMPLO

Un fabricante de un quitamanchas afirma que su producto quita 90 por ciento de todas las manchas. Para poner a prueba esta afirmación se toman 200 camisetas manchadas de las cuales a solo 174 les desapareció la mancha. Pruebe la afirmación del fabricante a un nivel $\alpha = 0.05$

Paso 1. Definir Ho y H1

$$H_0: \quad p = 0.90$$
$$H_1: \quad p < 0.90$$

Paso 2. Calcular el estadístico

De la muestra tenemos que:

$$n = 200$$
$$x = 174$$
$$\hat{p} = \frac{174}{200} = 0.87$$

Por tanto el estadístico es:

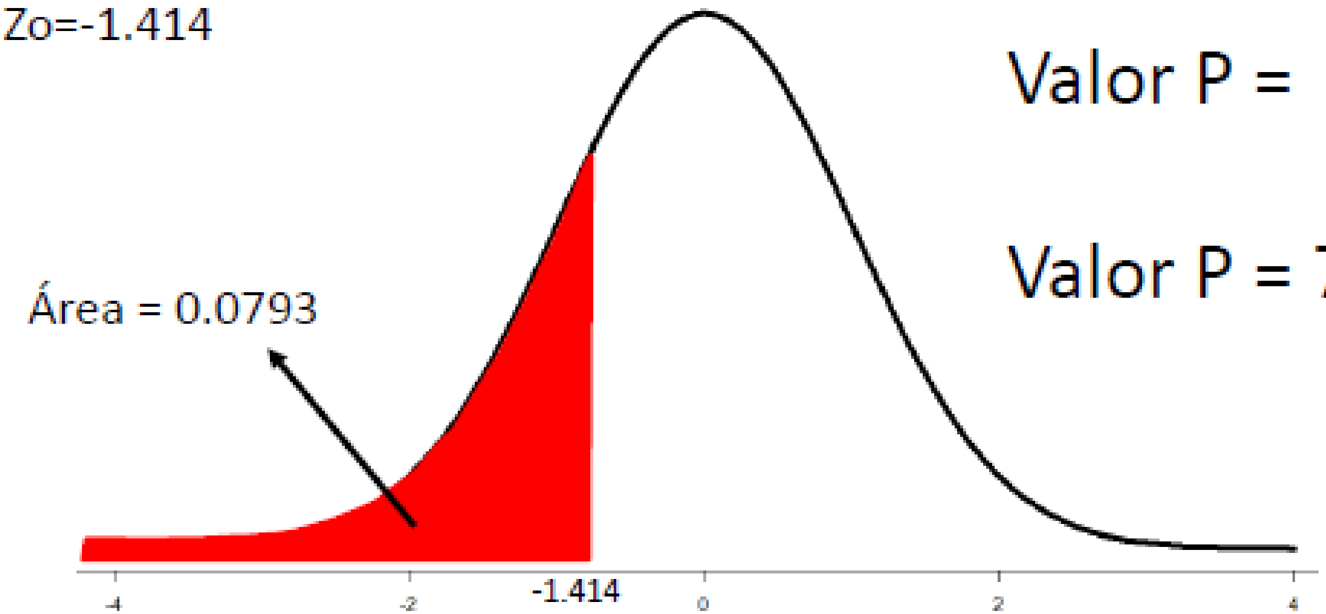
$$Z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.87 - 0.90}{\sqrt{\frac{0.90(1-0.90)}{200}}} = -1.414$$

Paso 3. Definir el error tipo I denotado por α

Del enunciado tenemos que $\alpha = 0.05$

Paso 4. Calcular el Valor P en una normal

Zo=-1.414



Valor P = Área roja

Valor P = 7.93%

Paso 5. Comparar valor-p con α y tomar la decisión

Como valor-p= 0.0793 > α=0.05 entonces NO RECHAZAMOS Ho

No hay evidencias suficientes para afirmar que el detergente no limpia el 90% de todas las manchas.

Pruebas de hipótesis para la varianza de una distribución normal

Con frecuencia surgen problemas que requieren inferencias acerca de la variabilidad, por ejemplo considere la variabilidad de las calificaciones otorgadas por cierto profesor en determinado examen. Se esperaría que las puntuaciones tuvieran una varianza pequeña y que además su media fuera mayor o igual al promedio mínimo aprobatorio.

En otras palabras, interesa la prueba de hipótesis relacionada con la uniformidad de una población. Se parte bajo el supuesto de la muestra proviene de una población que se distribuye normal.

Hipótesis de interés

- H_o: $\sigma^2 = \sigma^2_o$. En oposición a H_a: $\sigma^2 \neq \sigma^2_o$.

- H_o: $\sigma^2 = \sigma^2_o$. En oposición a H_a: $\sigma^2 > \sigma^2_o$.

- H_o: $\sigma^2 = \sigma^2_o$. En oposición a H_a: $\sigma^2 < \sigma^2_o$.

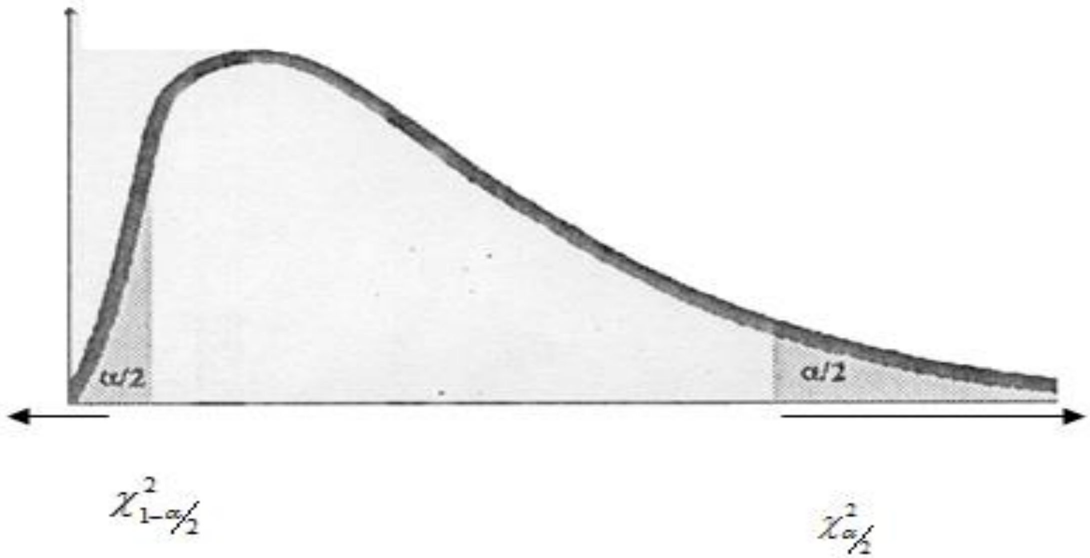
donde σ^2_o es el valor propuesto de σ^2.

El estadístico

El estadístico para probar estas hipótesis se basa en la varianza muestral S^2, y se distribuye según una chi cuadrado:

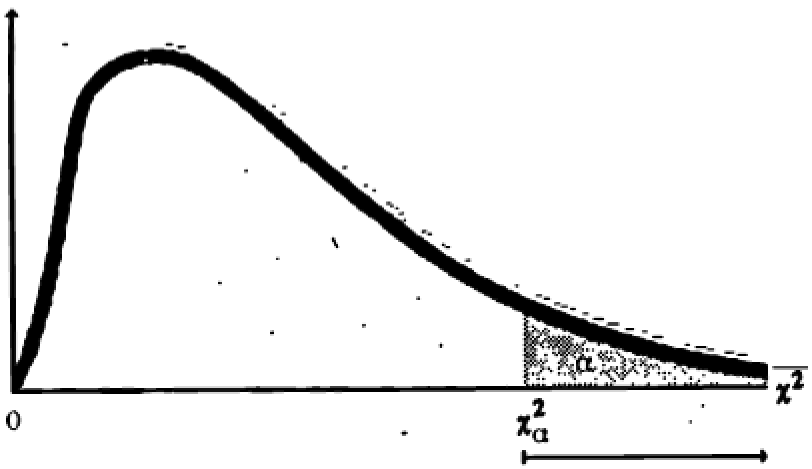
$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

Regiones de rechazo



Región de rechazo para una prueba de hipótesis bilateral para σ^2

Región de rechazo de cola derecha



Región de rechazo de cola izquierda

EJEMPLO

Datos históricos indican que la varianza de las mediciones sobre una lámina metálica, tomadas por expertos en control de calidad es de 0.18 pulgadas cuadradas.

Las mediciones realizadas por un inspector sin experiencia podrían tener una varianza mayor o menor.

Si un nuevo inspector mide 40 laminas grabadas con una varianza de 0.13 pulgadas cuadradas, pruébese con un nivel de significancia de 0.05 si el inspector realiza mediciones satisfactorias.

Solución

1. Definir Ho y H1:

$$H_0: \sigma^2 = 0.18$$
$$H_1: \sigma^2 \neq 0.18$$

2. Calcule el estadístico

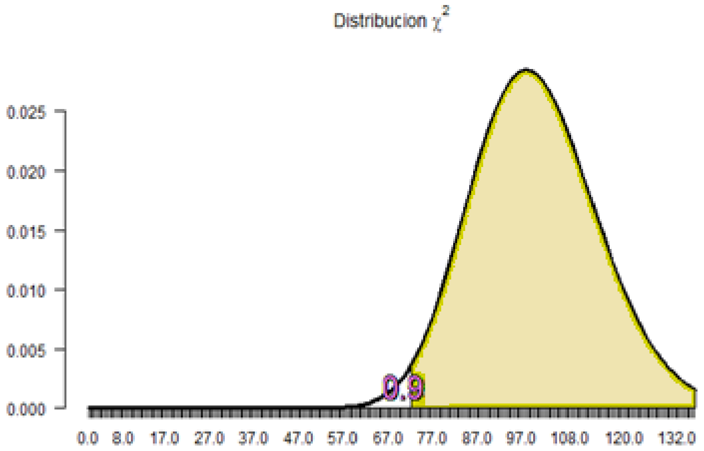
De la muestra se tiene:

S^2=0.13

n=40

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

$$\chi^2 = \frac{(39)0.13}{0.18} = 28.16$$



$P(\chi^2 > 28.16) = 0.9$

3. Definir región de aceptación y rechazo

4. Decisión:

Con un nivel de significancia α=0.05 se acepta la hipótesis nula H_o , es decir existe evidencia muestral para afirma r que la varianza es igual a en favor de H_a. Es decir existe evidencia muestral suficiente para indicar que el nuevo inspector no toma satisfactoriamente sus mediciones.

Otro ejemplo

El gerente de una planta sospecha que el número de piezas que produce un trabajador en particular por día, fluctúa más allá del valor normal esperado.

El gerente decide observar el número de piezas que produce este trabajador durante 10 días, seleccionados estos al azar. Los resultados son 15, 12, 8, 13, 12, 15, 16, 9, 8 y 14.

Si se sabe que la desviación estándar para todos los trabajadores es de 2 unidades y si el numero de estas que se produce diariamente se encuentra modelada en forma adecuada por una distribución normal, aun nivel de α= 0.05, ¿ Tiene apoyo la sospecha del gerente?

Pruebas de hipótesis para diferencia de dos medias

- Se prueba si dos muestras tienen igual promedio o si alguna de ellas es mayor que otra.

$$\mu_x = \mu_y \qquad \mu_x < \mu_y \qquad \mu_x > \mu_y$$

- Se supone que ambas muestras son aleatorias e independientes y las poblaciones de las cuales provienen se distribuyen normal.
- Sean X_1, X_1 ,...,X_n, y Y_1, Y_2, ..., Y_n, muestras aleatorias que se obtienen de dos distribuciones normales independientes con media μ_x y μ_y .

Pruebas para dos muestras

Varianzas iguales pero desconocidas

$$t_{(n_1+n_2-2)} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s^2{}_p}}$$

Varianzas diferentes y desconocidas

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right) + \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)}}$$

Varianzas conocidas

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1}\right) + \left(\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}}$$

Hipótesis de interés

$H_o: \mu_x - \mu_y = \mu_d$ vs $H_a: \mu_x - \mu_y \neq \mu_d$

$H_o: \mu_x - \mu_y = \mu_d$ vs $H_a: \mu_x - \mu_y > \mu_d$

$H_o: \mu_x - \mu_y = \mu_d$ vs $H_a: \mu_x - \mu_y < \mu_d$

Donde $\mu_d \geq 0$, representa la diferencia que se desea probar entre los valores desconocidos de las medias poblacionales.

Ejemplo con varianzas iguales pero desconocidas

Un fabricante comparó la productividad de trabajadores de ensamblaje para dos tipos de horarios semanales de trabajo de 40 horas. Uno cuatro días de 10 horas (horario 1) y el horario estándar de 5 días de 8 horas (horario 2). Se asignaron 15 trabajadores a cada horario de trabajo y se registro el número de unidades armadas durante una semana las medias (en cientos de unidades) y las varianzas muestrales se indican a continuación

Estadística	Horario	
	1	2
n	15	15
Media muestral	43.10	44.6
Varianza muestral	4.28	3.89

¿Proporcionan los datos evidencia suficiente para indicar una diferencia en la productividad media para los dos horarios de trabajo?. Haga la prueba con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

Ejemplo con varianzas iguales pero desconocidas

Se ha desarrollado una nueva cura para el cemento Pórtland. Se efectúan ensayos para determinar si la nueva cura tiene un efecto (positivo o negativo) en la resistencia. Se ha producido un lote sometido a ambas curas, la estándar y la experimental. Las resistencias a la compresión (psi) son las siguientes

Cura estándar X	4.125	4.225	4.35	3.575	3.875	3.825	3.975	3.80	3.775	3.850
Cura experimental Y	4.25	3.95	3.9	4.075	4.55	4.45	4.15	4.55	3.70	4.25

Pruebe el efecto en la resistencia del cambio de cura a un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$.

Prueba de hipótesis para la diferencia de proporciones

Se quiere comparar dos muestras cuyo parámetro de interés es la proporción.

Deseamos conocer si pertenecen a la misma población o corroborar si la diferencia entre estas excede cierto porcentaje.

Hipótesis de interés

H_o: $p_1 - p_2 = p_c$ vs H_a $p_1 - p_2 = p_c$

H_o: $p_1 - p_2 = p_c$ vs H_a $p_1 - p_2 > p_c$

H_o: $p_1 - p_2 = p_c$ vs H_a $p_1 - p_2 < p_c$

donde p_1 y p_2 son las proporciones poblacionales para la muestra 1 y 2 respectivamente y la p_c es la diferencia que probamos entre ambas proporciones.

$p_c = 0$ si esperamos detectar cualquier diferencia

El valor del estadístico es:

$$Z = \frac{\left(\widehat{P_1} - \widehat{P_2}\right) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$

Donde

$\widehat{P_1}$ y $\widehat{P_2}$ Proporciones estimadas

P_1 y P_2 Proporciones poblacionales

$\hat{p}\hat{q}$ Proporción de éxito y de falla observada

- Un genetista esta interesado en la proporción de machos y hembras de una población que tiene cierta enfermedad menor en la sangre. En una muestra aleatoria de 100 machos se encuentran 31 afectados mientras que solamente 24 de 100 hembras presentan la enfermedad. Se puede concluir, con un nivel de significancia de $\alpha = 0.01$, que la proporción de machos afectados por esta enfermedad de la sangre es mayor que la proporción de hembras también afectadas? (Walpole V Myers, 1989)

Prueba de hipótesis para la razón de varianzas

Depende del supuesto de que las poblaciones muestreadas son *normales e independientes.* La estructura de los datos es:

$X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de $N(\mu_x, \sigma^2_x)$

$Y_1, \ldots, Y_n$ es una muestra aleatoria de $N(\mu_y, \sigma^2_y)$

Hipótesis de interés

La distribución F permite probar la hipótesis sobre la razón de dos varianzas, cuyas hipótesis de interés son:

H_o: $\sigma^2_x = \sigma^2_y$. En oposición a H_a: $\sigma^2_x \neq \sigma^2_y$.

H_o: $\sigma^2_x = \sigma^2_y$. En oposición a H_a: $\sigma^2_x > \sigma^2_y$.

H_o: $\sigma^2_x = \sigma^2_y$. En oposición a H_a: $\sigma^2_x < \sigma^2_y$.

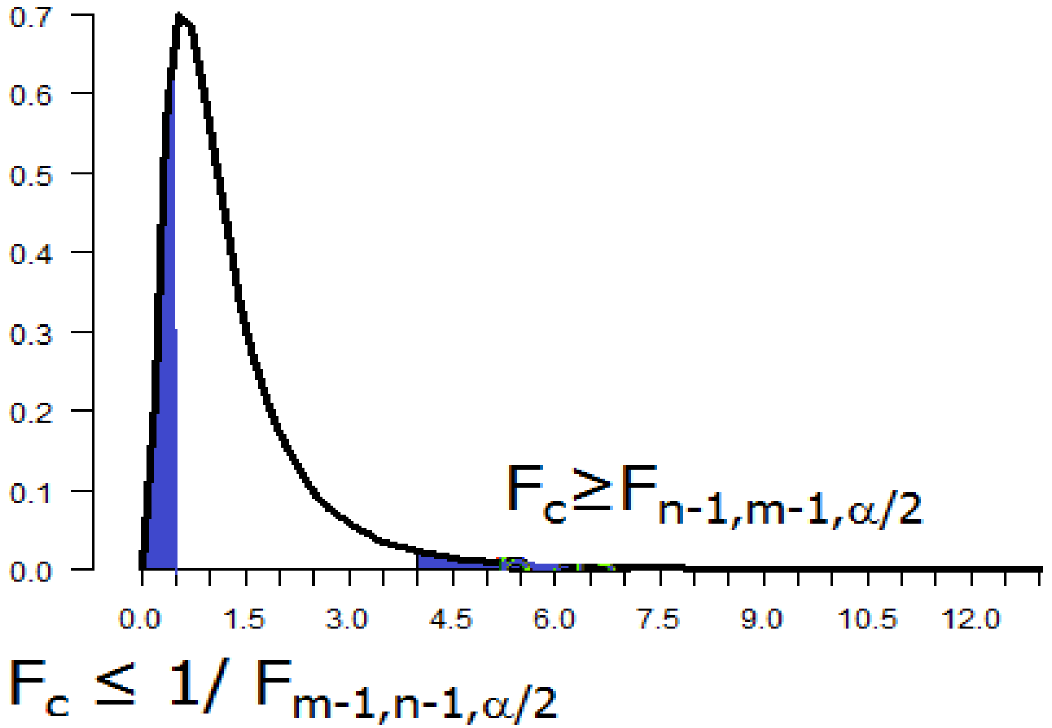
El estadístico es:

$$F_c = \frac{{S_x}^2}{{S_y}^2} = \frac{Varianza\ muestral\ mayor}{varianza\ muestral\ menor}$$

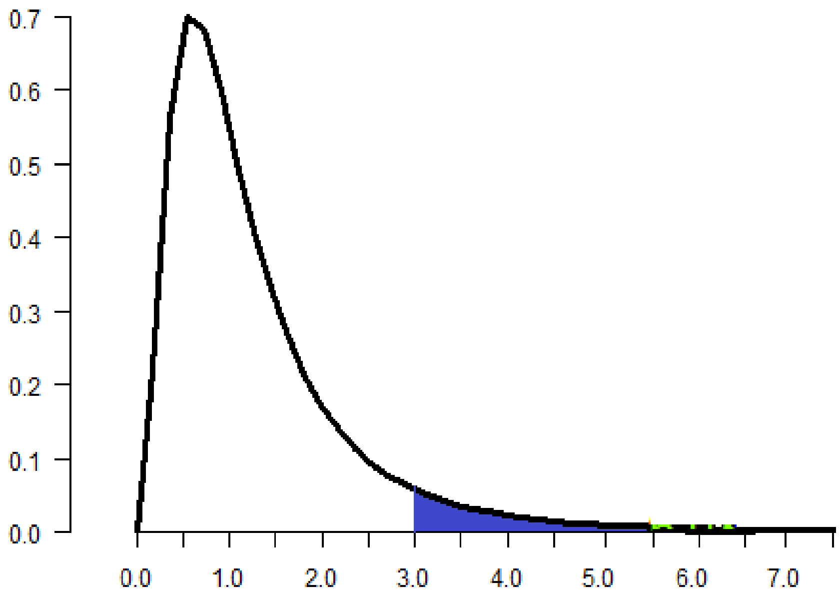
La elección de cual población es X y cual es Y, se determina por el tamaño de las varianzas muestrales.

Criterios de rechazo

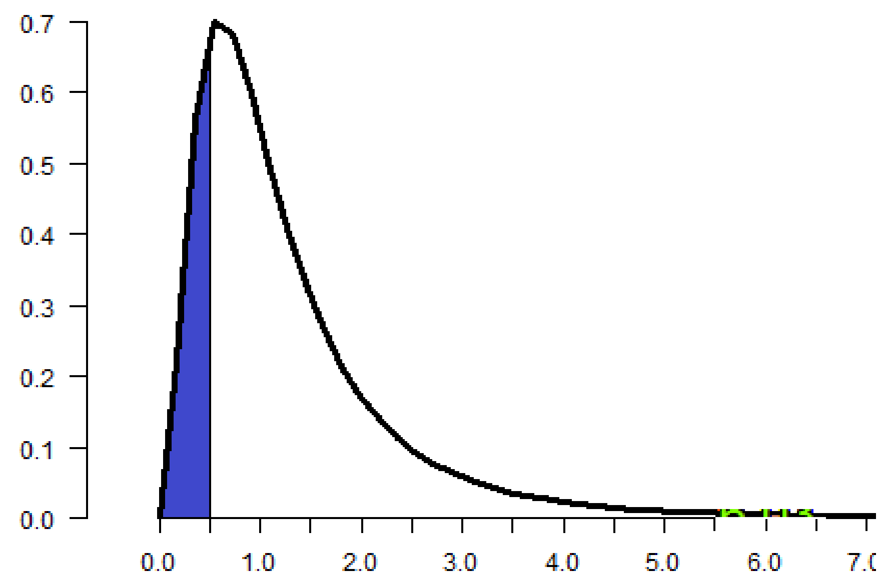
Si es una prueba a dos colas rechazar H_o si $F_c \geq F_{n-1,m-1,\alpha/2}$ o si $F_c \leq 1/\ F_{m-1,n-1,\alpha/2}$



Rechazar H_o si $F_c \geq F_{n-1,m-1,\alpha}$



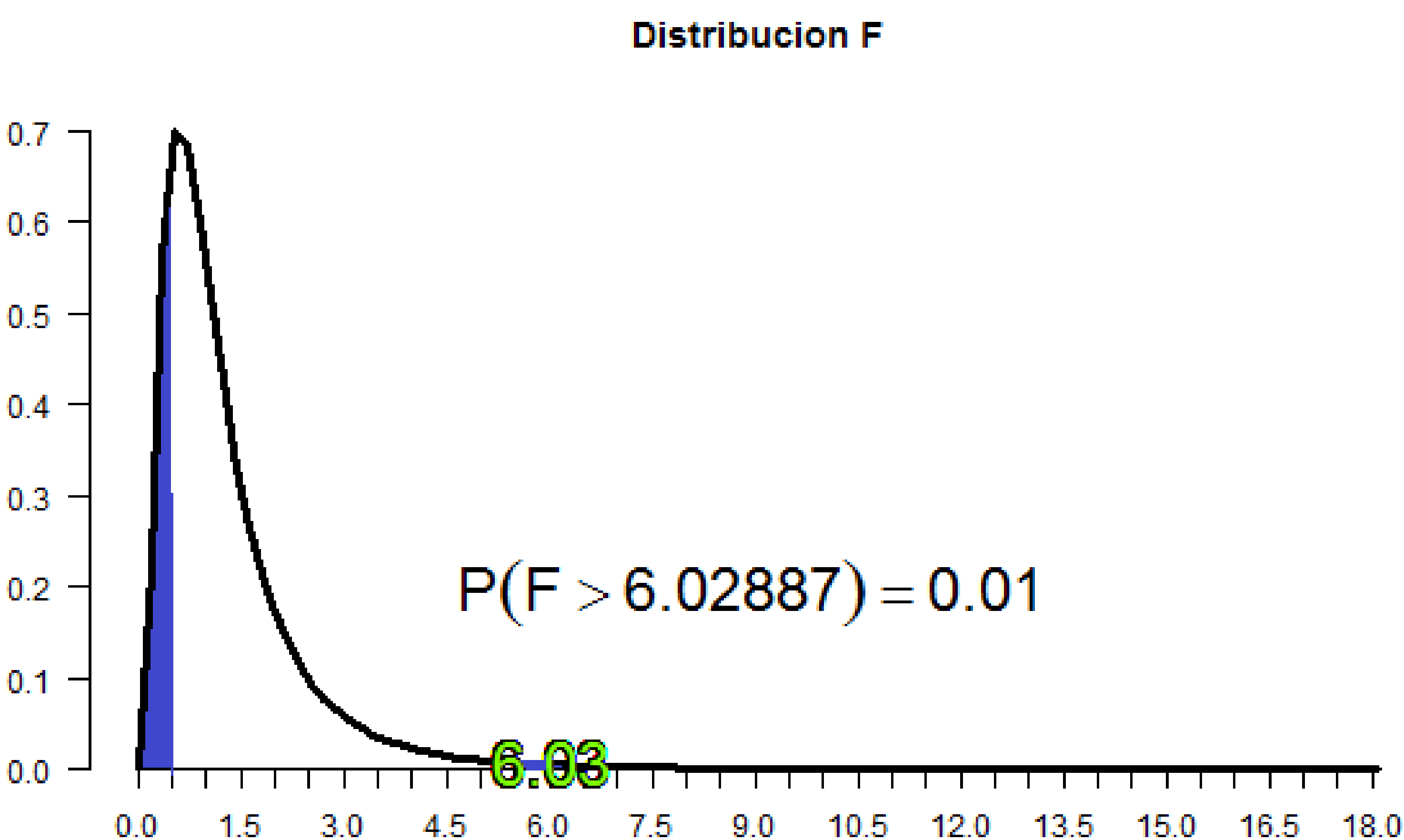
Rechazar H_o si $F_c \leq 1/ F_{m-1,n-1,\alpha}$



EJEMPLO

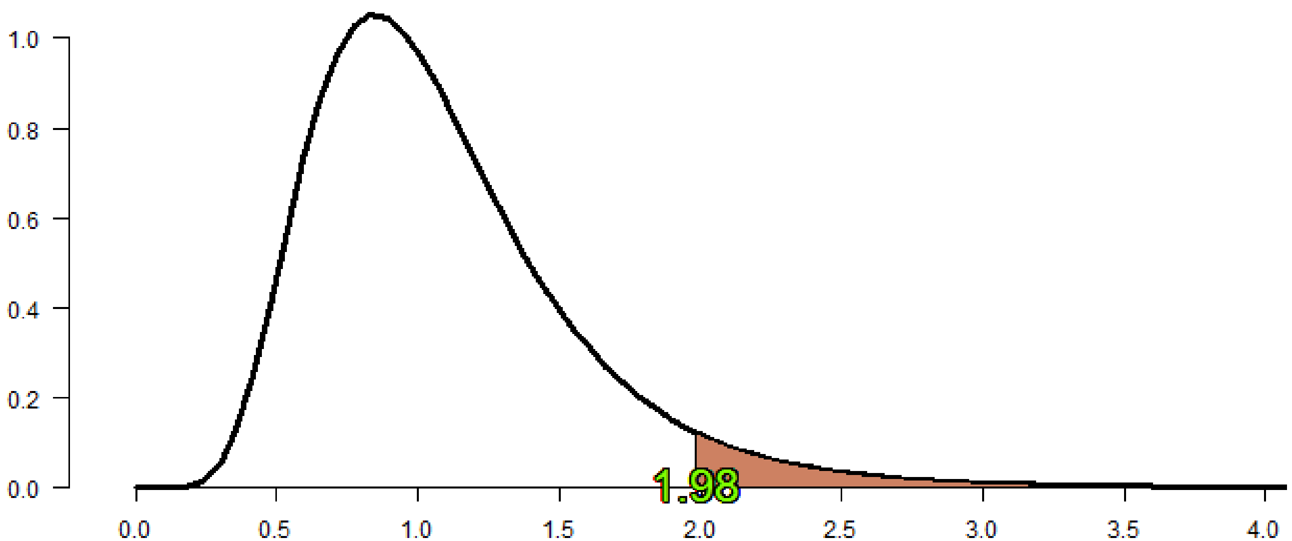
En un experimento acerca de la contaminación del aire, se comparan dos tipos de instrumentos para medir la cantidad de monóxido de sulfuro en la atmósfera. Se desea determinar **si los dos tipos de instrumentos producen mediciones que tienen la misma variabilidad.** Se registraron las siguientes lecturas para los dos instrumentos. Suponiendo que las distribuciones de las poblaciones están distribuidas en forma normal, probar la hipótesis planteada con un nivel de significancia de α=0.02.

Monóxido de sulfuro		
Instrumento	A	B
	0.86	0.87
	0.82	0.74
	0.75	0.63
	0.61	0.55
	0.89	0.76
	0.64	0.70
	0.81	0.69
	0.68	0.57
	0.65	0.53
Media	0.7455	0.673111
Desviación estándar	0.10405	0.11174
Varianza	0.0108	0.01248



$$\frac{1}{6.09} = 0.16$$

El Instituto del consumidor desea comparar la variabilidad en la eficacia de un medicamento elaborado por las compañías X e Y. Ambos medicamentos se distribuyen en forma de tabletas de 250 mg. Se determinó la eficacia en 25 tabletas en cada compañía encontrándose $S^2_1 = 2.09$ y $S^2_2 = 1.06$. Realizar una prueba para contrastar la variabilidad de ambos medicamentos con $\alpha = 0.10$.



$$P(F > 1.98376) = 0.05$$