

Estimación Estadística de Control de Calidad

(Statistical Assessment of Quality Control)

Badii, M. H; Guillen, A & J. L. Abreu

Abstract. The evolution of the development of techniques used in quality control is highlighted. The monitoring of quality control by means of figures or diagrams is presented. Control diagram for attributes and the number of deficient items are given. Sampling to accept items by means of variables is also discussed.

Key words: Control, diagram, quality, statistics

Resumen. Se menciona la evolución del desarrollo de las técnicas utilizadas para el control de calidad. Se presenta el monitoreo de control de calidad por medio de las gráficas o diagramas. Se manejan los diagramas de control para atributos y para el número de los artículos defectuosos. Se discute el muestreo para la aceptación de ítems por medio de variables.

Palabras claves: Calidad, control, estadística, diagrama

Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar algunas técnicas muy útiles (Badii et al, 2004, Badii et al., 2006, Badii et al, 2007a, b, c, d, e, f, g, Badii & Castillo, 2007) que se usan en la industria para controlar y mejorar la calidad de productos como resultado de desarrollo científico y tecnológico. Desde un punto de vista histórico, los cambios principales en el enfoque del trabajo del control de calidad han ocurrido más o menos cada dos décadas y se pueden resumir como sigue.

Operador de calidad. En este sistema un trabajador, o por lo menos un número muy reducido de trabajadores, tenían la responsabilidad de la manufactura completa del producto y, por tanto, cada trabajador podía controlar totalmente la calidad de su trabajo.

Supervisor de control de calidad. En los principios de la década de 1900 surgió el supervisor de control de calidad. Durante este periodo se creó el concepto de la fábrica moderna, en la que muchos hombres agrupados desempeñaban tareas similares en las que pueden ser dirigidos por un supervisor, quien asume la responsabilidad de la calidad del trabajo.

Control estadístico de la calidad. Después de al Segunda Guerra Mundial, la enorme producción en masa obligó al surgimiento del control estadístico de la calidad. Esta fase fue una extensión de la inspección, a los inspectores se les proveyó de herramientas estadísticas, tales como muestreo (Badii et al., 2000) y gráficas de control. La contribución de mayor importancia del control estadístico fue la introducción de la inspección por muestreo, en lugar de la inspección al 100%. La lentitud del crecimiento del control de calidad tuvo poco que ver con problemas del desarrollo de las ideas técnicas y estadísticas. El crecimiento de conceptos como la gráfica de control y los planes fundamentales de

muestreo quedó pronto establecido. Los impedimentos fueron la voluntad o la habilidad de las organizaciones para tomar las medidas adecuadas referentes a estos temas.

Supervisión de la calidad mediante gráficas o diagramas de control

Las mediciones de una variable de calidad varían en el tiempo. Por ejemplo, el diámetro de troncos de una especie de pino de la misma edad. Una variación de este tipo se denomina *definida* o *por causa atribuible*. Otra variación en la que ocurren pequeños cambios fortuitos que se deben a la gran cantidad de variables desconocidas que afectan el diámetro: cambios climáticos, condiciones ambientales, etc., se considera como una *variación aleatoria*. Si la variación es una variable de calidad es únicamente del tipo aleatorio, se dice que el proceso está *bajo control*. El hecho de estar bajo control no indica que el proceso origine productos 100% aceptables. Los valores de la variable de la calidad pueden o no localizarse de manera fortuita, dentro de los límites especificados por los usuarios. El primer objetivo de un productor o un tecnólogo es eliminar las causas de variación atribuibles de una variable de calidad y mantener el proceso bajo control. El siguiente paso es reducir la variación del proceso y tener la distribución de las mediciones de calidad dentro de especificaciones. El valor medio de la distribución tendría que encontrarse cerca o en el centro del intervalo de los valores de especificación, y la varianza de la distribución tendrá que ser la más pequeña posible.

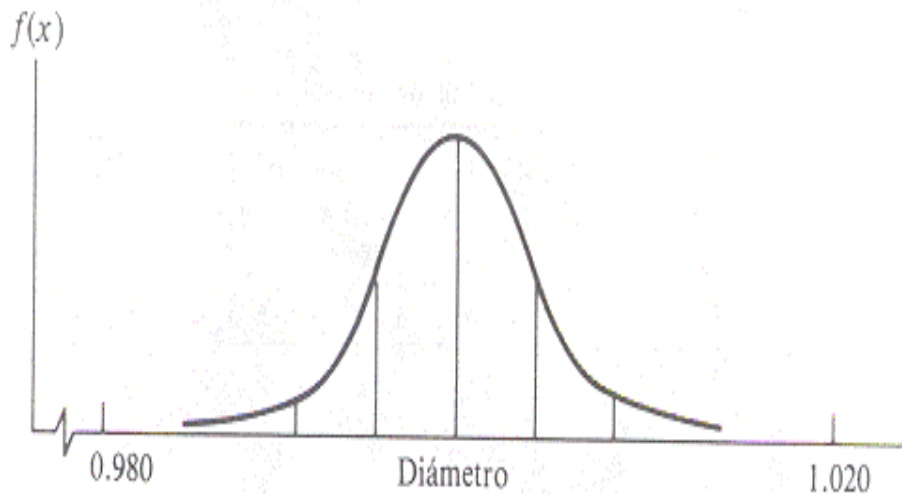


Figura 1. Una distribución deseable.

Una vez que un proceso está bajo control y que produce productos satisfactorios, se controlan el medio del proceso y su varianza mediante *diagramas de control*. Se sacan muestras de n producto (artículos) del proceso a intervalos de tiempo específicos y se calcula la media muestral y la amplitud total (*rango*). Se transportan estas variables estadísticas a gráficas de media y rango similares a las que se tienen en la Figura 1. Se

utiliza el diagrama de control de la media muestral \bar{x} para detectar posibles corrimientos en la media de la distribución de una variable de calidad. De igual manera, se emplea un diagrama de control para la amplitud de variación de la muestra, a fin de detectar cambios en la varianza de la distribución.

Gráficas de control para la media del proceso

Se puede definir a la gráfica de control como un método gráfico para evaluar si un proceso está o no en un "estado de control estadístico." En su forma más usual, la gráfica de control es una comparación gráfica cronológica (hora a hora, día a día) de las características de calidad reales del producto, parte o unidad, con límites que reflejan la capacidad del producirla de acuerdo con la experiencia de las características de calidad de la unidad. Es probable que la actividad más reconocida en general del control de calidad sea el control de la materia prima, de los lotes de producción y de las piezas y ensambles durante el proceso de su manufactura. La principal ayuda estadística para estos trabajos, es la gráfica de control y sus modificaciones particulares. Existen diversas preferencias para el establecimiento de tolerancias del proyecto y límites de especificaciones. En algunas ocasiones, estos límites se determinan cuidadosamente por medio de pruebas; otras veces se han fijado arbitrariamente. La mayoría de las veces, se basan en experiencias anteriores con los materiales y con los procesos de manufactura.

La experiencia de un taller tiene mucha importancia cuando se reciben en producción los planos enviados por el ingeniero proyectista. Por ejemplo, el obrero de la máquina producirá un lote de estas piezas, cuya variación en la distancia entre centrado sea de ± 0.005 pulgada en lugar de ± 0.003 pulgada, que era la indicada. La reacción inmediata del jefe de taller será la de que algo "anormal" está ocurriendo; puede ser que la broca esté descentrada o que está mal afilada, o bien que la guías de la broca estén desgastadas. Por tanto, se puede pensar la posible acción correctiva, y actuará sobre el taladro. Existen dos tipos de variables. 1. *Variables casuales o accidentales*. Que son las que no se pueden controlar ni eliminar, son debidas al proceso mismo. 2. *Variables asignables o atribuibles*. Que son las que si se pueden controlar y eliminar, se deben al factor humano, a la temperatura, la materia prima, maquinaria, etc.

Límites en las gráficas de control para variables y la capacidad del proceso

La lógica que apoya un diagrama de \bar{x} para control es que si el proceso está controlado, las medias muestrales tendrán que variar alrededor de la media poblacional μ de manera aleatoria, y que casi todos los valores de \bar{x} tendrán que estar en el intervalo $\mu \pm 3\sigma_{\bar{x}}$. Aunque se desconoce el valor exacto de la media del proceso μ , es posible obtener una estimación precisa promediando un número grande, k (por lo menos 25), de medias muestrales.

Se han elegido los límites de 3-sigma, porque la experiencia a demostrado es el más útil y económico para la aplicación de los límites de control, puesto que la mayor parte de los valores se encuentran dentro de ese rango (99.73%). Los límites superior e inferior de

control se localizan arriba y abajo de eje. $3\sigma_{\bar{x}} = 3\sigma_{\bar{x}} / \sqrt{n}$. Puede estimarse el valor de σ calculando la desviación estándar muestral s , utilizando el conjunto combinado de datos de las k muestras.

El cálculo de las mediciones de tendencia central y dispersión para las diferentes gráficas de control están auxiliadas por el uso de constantes que se han desarrollado para estos cálculos. Estos factores se encuentran enlistados en unas tablas en las que se dan constantes para calcular los límites de control y estas constantes depende del tamaño de las muestras.

La capacidad de un proceso es el rango de variación que en condiciones normales, un proceso tiene debido a las variables accidentales. Los pasos para determinar la capacidad de un proceso son los siguientes. **1.** Determinar la característica de calidad. **2.** Controlar el proceso y eliminar todas las variables asignables o atribuibles del proceso. **3.** Tomar muestras del proceso. Las muestras no deben ser menos de 25. **4.** Calcular la media y de la desviación estándar del proceso.

$$\mu = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{x}}{k} = \frac{\sum x}{n * k} \quad \hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{R_i}{k}}{d_2}$$

Donde, d^2 es la constante que hace de $\hat{\sigma}$ un estimador no sesgado de σ cuando se realiza el muestreo de una población distribuida normalmente. Substituyendo $\hat{\sigma}$ en la fórmula de $3\sigma_{\bar{x}}$, resulta

$$3\hat{\sigma}_{\bar{x}} = 3 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} = A_2 \bar{R} \quad A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}}$$

5. Cálculo de los límites del proceso. Calcular la distribución normal y la capacidad del proceso de acuerdo con las siguientes fórmulas: *Límite Superior de Control*: $LSC = \bar{x} + A_2 \bar{R}$ $LSC = \bar{x} + 3\sigma$. *Límite Inferior de Control*: $LIC = \bar{x} - A_2 \bar{R}$, $LIC = \bar{x} - 3\sigma$, Donde, $R = \sum R_i / K$, y los valores de A_2 se tienen en la Tabla 1.

Tabla 1. Factores utilizados en la elaboración de diagramas (o gráficas) de control.

Número de Observaciones en la Muestra n	Diagrama para Medias			Diagrama para Desviaciones Estándares						Diagrama para Amplitudes						
	Factores para Límites de Control			Factores para Línea Central		Factores para Límites de Control				Factores para Línea Central		Factores para Límites de Control				
	A	A_1	A_2	c_2	$1/c_2$	B_1	B_2	B_3	B_4	d_2	$1/d_2$	d_3	D_1	D_2	D_3	D_4
2	2.121	3.760	1.880	0.5642	1.7725	0	1.843	0	3.267	1.128	0.8865	0.853	0	3.686	0	3.276
3	1.732	2.394	1.023	0.7236	1.3820	0	1.858	0	2.568	1.693	0.5907	0.888	0	4.358	0	2.575
4	1.501	1.880	0.729	0.7979	1.2533	0	1.808	0	2.266	2.059	0.4857	0.880	0	4.698	0	2.282
5	1.342	1.596	0.577	0.8407	1.1894	0	1.756	0	2.089	2.326	0.4299	0.864	0	4.918	0	2.115
6	1.225	1.410	0.483	0.8686	1.1512	0.026	1.711	0.030	1.970	2.534	0.3946	0.848	0	5.078	0	2.004
7	1.134	1.277	0.419	0.8882	1.1259	0.105	1.672	0.118	1.882	2.704	0.3698	0.833	0.205	5.203	0.076	1.924
8	1.061	1.175	0.373	0.9027	1.1078	0.167	1.638	0.185	1.815	2.847	0.3512	0.820	0.387	5.307	0.136	1.864
9	1.000	1.094	0.337	0.9139	1.0942	0.219	1.609	0.239	1.761	2.970	0.3367	0.808	0.546	5.394	0.184	1.816
10	0.949	1.028	0.308	0.9227	1.0837	0.262	1.584	0.284	1.716	3.078	0.3249	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777
11	0.905	0.973	0.285	0.9300	1.0753	0.299	1.561	0.321	1.679	3.173	0.3152	0.787	0.812	5.534	0.256	1.744
12	0.866	0.925	0.266	0.9359	1.0684	0.331	1.541	0.354	1.646	3.258	0.3069	0.778	0.924	5.592	0.284	1.719
13	0.832	0.884	0.249	0.9410	1.0627	0.359	1.523	0.382	1.618	3.336	0.2998	0.770	1.026	5.646	0.308	1.692
14	0.802	0.848	0.235	0.9453	1.0579	0.384	1.507	0.406	1.594	3.407	0.2935	0.762	1.121	5.693	0.329	1.671
15	0.775	0.816	0.223	0.9490	1.0537	0.406	1.492	0.428	1.572	3.472	0.2880	0.755	1.207	5.737	0.348	1.652
16	0.750	0.788	0.212	0.9523	1.0501	0.427	1.478	0.448	1.552	3.532	0.2831	0.749	1.285	5.779	0.364	1.636
17	0.728	0.762	0.203	0.9551	1.0470	0.445	1.465	0.466	1.534	3.588	0.2787	0.743	1.359	5.817	0.379	1.621
18	0.707	0.738	0.194	0.9576	1.0442	0.461	1.454	0.482	1.518	3.640	0.2747	0.738	1.426	5.854	0.392	1.608
19	0.688	0.717	0.187	0.9599	1.0418	0.477	1.443	0.497	1.503	3.689	0.2711	0.733	1.490	5.888	0.404	1.596
20	0.671	0.697	0.180	0.9619	1.0396	0.491	1.433	0.510	1.490	3.735	0.2677	0.729	1.548	5.922	0.414	1.586
21	0.655	0.679	0.173	0.9638	1.0376	0.504	1.424	0.523	1.477	3.778	0.2647	0.724	1.606	5.950	0.425	1.575
22	0.640	0.662	0.167	0.9655	1.0358	0.516	1.415	0.534	1.466	3.819	0.2618	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566
23	0.626	0.647	0.162	0.9670	1.0342	0.527	1.407	0.545	1.455	3.858	0.2592	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557
24	0.612	0.632	0.157	0.9684	1.0327	0.538	1.399	0.555	1.445	3.895	0.2567	0.712	1.759	6.031	0.452	1.548
25	0.600	0.619	0.153	0.9696	1.0313	0.548	1.392	0.565	1.435	3.931	0.2544	0.709	1.804	6.058	0.459	1.541
Más de 25	$\frac{3}{\sqrt{n}}$	$\frac{3}{\sqrt{n}}$	—	—	—	*	†	*	†	—	—	—	—	—	—	—

Ejemplo 1. Se desea que el tiempo de operaciones bancarias hechas en la ventanilla rápida de un banco sea inferior a 60 segundos. Los datos de muestra correspondientes al mes anterior se presentan en la Tabla 2, en la que también se incluyen las medias de muestra diaria y los alcances.

Tabla 2. Tiempo de operación bancaria en diferentes días del mes.

Día	Tiempo de transacción (segundos)						Media	Alcance
Lun	63	55	56	53	61	64	58.7	11
Mar	60	63	60	65	61	66	62.5	6
Mié	57	60	61	65	66	62	61.8	9
Jue	58	64	60	61	57	65	60.8	8
Vie	79	68	65	61	74	72	69.7	18
Lun	55	66	62	63	56	52	59.0	14
Mar	57	61	58	64	55	63	59.7	9
Mié	58	51	61	57	66	59	58.7	15
Jue	65	66	62	68	61	67	64.8	7
Vie	73	66	61	70	72	78	70.0	17
Lun	57	63	56	64	62	59	60.2	8
Mar	66	63	65	59	70	61	64.0	11
Mié	63	53	69	60	61	58	60.7	16
Jue	68	67	59	58	65	59	62.7	10
Vie	70	62	66	80	71	76	70.8	18
Lun	65	59	60	61	62	65	62.0	6
Mar	63	69	58	56	66	61	62.2	13
Mié	61	56	62	59	57	55	58.3	7
Jue	65	57	69	62	58	72	63.8	15
Vie	70	60	67	79	75	68	69.8	19
							$\sum \bar{x} = 1,260.2$	$\Sigma R = 238$

Solución. Debido a que se desconoce la verdadera media del proceso (μ), utilizará, en su lugar, la media de la muestra. Pero, ¿cuál de las 20 muestras diarias deberá usar? Cada media contiene información proveniente solamente de seis observaciones, pero cuenta con un total de 120 observaciones disponibles. Se toma en cuenta toda esta información al utilizar la *gran media*, que puede calcularse de dos maneras equivalentes:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n * k} = \frac{\sum \bar{x}}{k} = \frac{1,260.2}{20} = 63.0$$

Utilizando las ecuaciones del límite central, y el valor tabulado de $d_2=2.534$, tendremos:

$$LCS = \bar{x} + \frac{3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} = 63.0 + \frac{3(238/20)}{2.534(\sqrt{6})} 68.7$$

$$LCI = \bar{x} - \frac{3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} = 63.0 - \frac{3(238/20)}{2.534(\sqrt{6})} = 57.3$$

Ahora si representamos gráficamente LC, LCS, LCI y los valores diarios de \bar{x} , para obtener el diagrama de \bar{x} de la Figura 2. La gráfica indica que todos los viernes, el tiempo promedio de servicio se sale por encima del LCS (esto debido a que el cajero esta tomando un curso de superación profesional los viernes). Para lograr nuestro objetivo, excluyamos los datos correspondientes a las cuatro observaciones extremas de los viernes y elaboramos de nuevo el diagrama de control a partir $k = 16$ muestras diarias. Para dicha diagrama la línea central y los límites de control están dados por:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n * k} = \frac{5,879}{6(16)} = 61.2$$

$$LCS = 61.2 + \frac{3(10.3)}{2.534(\sqrt{6})} = 66.2$$

$$LCI = 61.2 - \frac{3(10.3)}{2.534(\sqrt{6})} = 56.2$$

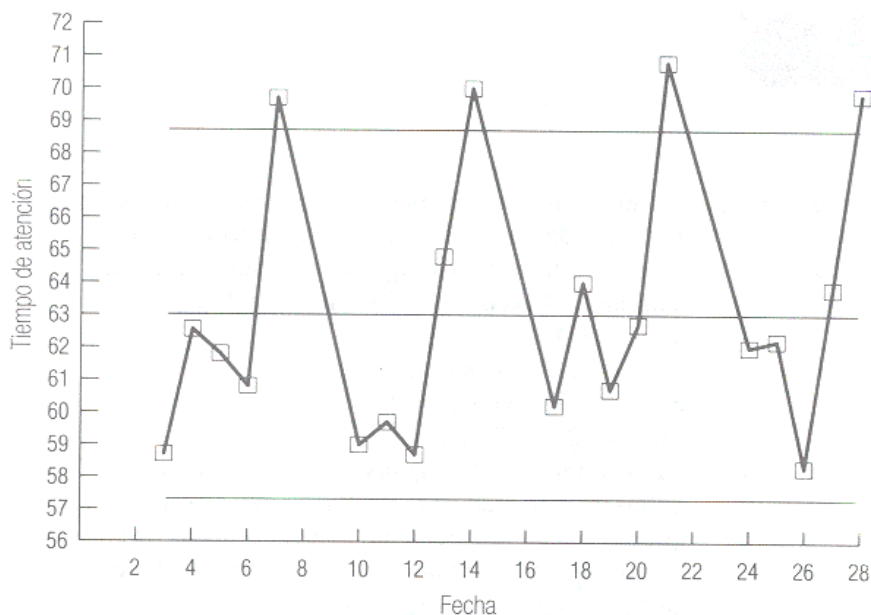


Figura 2. Diagrama de media para el ejemplo empleado.

De la Figura 3 se puede observar que el proceso está bajo control. Sin embargo, con una gran media de 61.2 segundo, incluso el cajero experimentando no está cumpliendo con el objetivo de menos de 60 segundos. Estar bajo control no significa que un proceso esté cumpliendo con sus objetivos. Se comparan los datos obtenidos del proceso con las

especificaciones dadas. Límite Inferior de Especificaciones (LIE). Límite Superior de Especificaciones (LSE).

Si los límites superior e inferior del proceso se encuentran dentro del rango establecido por los límites de las especificaciones, significa que el proceso analizado satisface completamente el objetivo.

Si uno o ambos límites del proceso se encuentran fuera del rango establecido por las especificaciones, límite superior e inferior, significa que la diferencia entre los límites inferiores y/o superiores (del proceso y las especificaciones) representan los productos defectuosos que se obtienen con nuestro proceso.

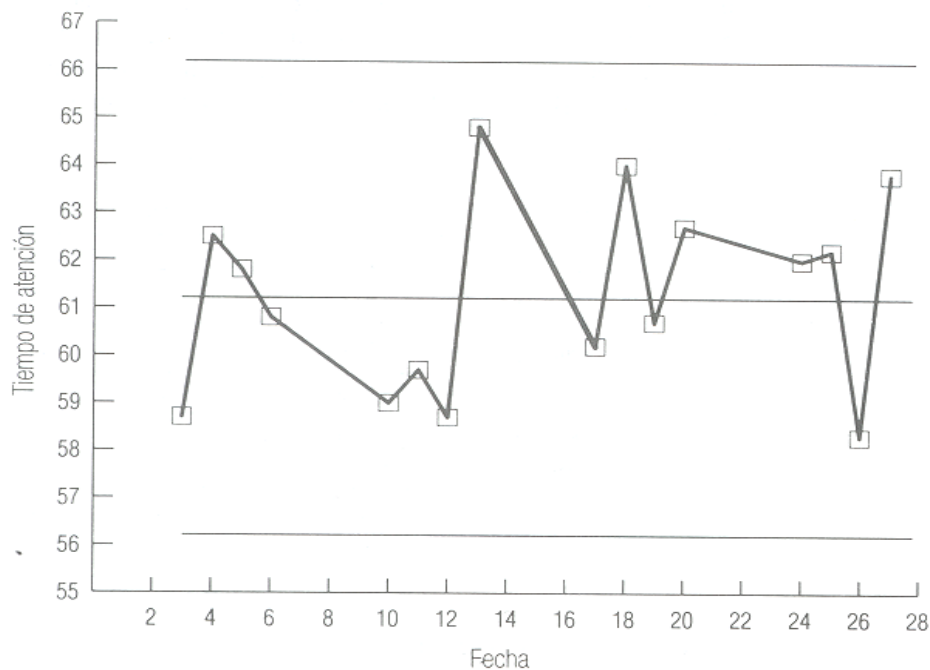


Figura 3. Diagrama de media para el ejemplo en el cual se excluyen los datos extremos (los viernes).

Cuando se presenta este caso se pueden tomar diferentes medidas, como pueden ser:

1. Cambiar el proceso por uno que sea capaz de satisfacer completamente las especificaciones. **2.** Buscar mercados alternos en los que se puedan vender los productos defectuosos a menor precio. **3.** Reprocesar los productos defectuosos. *Con la información obtenida en los pasos anteriores se puede calcular la 'Capacidad o Habilidad Potencial del Proceso' (HP) que nos permitirá saber si el proceso que aplicamos es capaz de satisfacer o no las especificaciones.*

La forma de calcular la Capacidad Potencial es la siguiente:

$$CP = \frac{LSE - LIE}{6\sigma} \geq 1.0$$

Si la Capacidad Potencial obtenida mayor a uno, significa que nuestro proceso sí es capaz de satisfacer a nuestro objetivo (cliente). *Otra forma de analizar nuestro proceso es comparando la Capacidad del Proceso (CP) con la Capacidad Potencial (HP) de la siguiente manera.*

1. Si Capacidad Potencial es superior a la habilidad potencial, el proceso es capaz de satisfacer más (mejor) al cliente y deben, por lo tanto acoplarse las medias del proceso y de especificaciones para lograrlo. 2. Si CP es igual a HP, el proceso satisface adecuadamente las especificaciones del cliente. 3. Si CP es inferior a HP, el proceso no es capaz de satisfacer las especificaciones del cliente.

Anomalías en las gráficas de control

Se considera que existen anomalías en las gráficas de control cuando:

1. Existen puntos fuera de los límites de control. 2. Existen 7 puntos consecutivos a un mismo lado de la línea central. 3. Existen 7 puntos consecutivos ascendiendo o descendiendo. 4. Existen 7 puntos consecutivos alternando ascensos y descensos 5. Existen 2 de 3 puntos consecutivos demasiada cerca de uno de los límites de control (inferior o superior). 6. Cuando el 75% de los datos se encuentra alrededor del límite central de control. 7. Cuando uno de los puntos se encuentra extremadamente cerca de los límites de control (casi tocándolo).

Diagramas de control para atributos: Diagramas de P (proporción)

En el área de control estadístico de procesos, una variable cuantitativa que solamente puede tomar dos valores se conoce como *atributo*. Es importante de recordar que la calidad es cumplir con los requisitos, no debería sorprenderle saber que el atributo que más se estudia en control estadístico de procesos es el de la conformidad o no conformidad de las unidades producidas con respecto a las especificaciones del proceso.

El gráfico *P* sirve para detectar artículos defectuosos cuando se están analizando variables por atributos, nos proporcionará la fracción o porcentaje de artículos defectuosos en la población que se encuentra bajo estudio.

Los pasos para obtener el gráfico *P*. 1. Definir la característica de calidad (atributo) que se desea analizar. Olor, sabor, medida específica, etc. 2. Controlar las condiciones del proceso. Eliminar las variables asignables o atribuibles del proceso. 3. Tomar un número K de muestras. El tamaño de la muestra debe de ser variable, es decir las muestras no son del mismo tamaño. El número de muestras no debe ser menor a 20, y cada muestra debe tener por lo menos 50 elementos. 4. Tabular resultados de acuerdo a la siguiente Tabla 3.

Tabla 3. Tabla de los resultados

# de muestra	Tamaño de muestra (n)	# de productos defectuosos (Np)	Fracción de defectuosos (p), $p = Np/n$
1	n_1	Np_1	P_1
2	n_2	Np_2	P_2
...
K	n_k	Np_k	P_k

5. Cálculo de la proporción media de defectuosos (promedio) del tamaño de las k muestras:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k \hat{p}_i}{k}$$

Donde, \hat{p} = proporción muestral, la cual para un proceso bajo control debe de estar en el intervalo, $p \pm 3\sigma_p$, donde p es la proporción media de defectuosos del proceso, y

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}$$

y se valora $\sigma_{\hat{p}}$ mediante

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{k}}$$

6. Se genera un rango alrededor de la media de $\pm 20\%$. **a)** Si todas las muestras se encuentran dentro de este rango, continuamos con el paso 7. **b)** Si solamente una de las muestras no se encuentra dentro de este rango, dicha muestra se elimina y se vuelve al paso número 5. **c)** Si más de una muestra se encuentra fuera del rango establecido, entonces a partir del paso. 7 todo se hará de manera independiente para cada muestra.

7. Cálculo de los valores promedio. Posteriormente se calcula la media (promedio) de la fracción de defectuosos (p). $P = np_i / n_i$.

8. Cálculo de los límites de control del proceso. El siguiente paso es el cálculo de los límites de control de nuestro proceso.

Dado que se está realizando el análisis de los atributos (se tiene o no se tiene) se utiliza una distribución binomial para calcular los límites de control. Los cuales están dados por:

Límite superior de Control (LSC), Límite Central de Control (LCC) y límite Inferior de Control (LIC):

El eje del *diagrama de p* se localiza en $\bar{\hat{p}}$, y los límites superior e inferior de control son

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\hat{p}} + 3\hat{\sigma}_p & LSC &= \bar{\hat{p}} + 3\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \\ LIC &= \bar{\hat{p}} - 3\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} & \text{y } LCC &= p \end{aligned}$$

9. Graficar y comparar el proceso con los límites de especificaciones. Observar el comportamiento del proceso de acuerdo con la gráfica y sacar conclusiones.

Ejemplo 2. Un fabricante de bolígrafos muestrea al azar 400 plumas al día y prueba a cada una para examinar si es aceptable el flujo de la tinta. Las proporciones diarias de los bolígrafos, considerados defectuosos durante un periodo de 40 días, se presenta en la Tabla 4. Construya un diagrama de control para la proporción \hat{P} de defectuosos en muestras de $n = 400$ bolígrafos, seleccionados del proceso.

Tabla 4. Proporciones de defectuosos en muestras de $n = 400$ bolígrafos.

Día	Proporción	Día	Proporción	Día	Proporción	Día	Proporción
1	0.0200	11	0.0100	21	0.0300	31	0.0225
2	0.0125	12	0.0175	22	0.0200	32	0.0175
3	0.0225	13	0.0250	23	0.0125	33	0.0225
4	0.0100	14	0.0175	24	0.0175	34	0.0100
5	0.0150	15	0.0275	25	0.0225	35	0.0125
6	0.0150	16	0.0200	26	0.0150	36	0.0300
7	0.0200	17	0.0225	27	0.0200	37	0.0200
8	0.0175	18	0.0100	28	0.0250	38	0.0150
9	0.0200	19	0.0175	29	0.0150	39	0.0150
10	0.0250	20	0.0200	30	0.0175	40	0.0225

Solución: La estimación de la proporción de defectuosos del proceso es el promedio de las $k = 40$ proporciones muestrales de la Tabla 4. Por lo tanto, el eje de la gráfica de control se localiza en

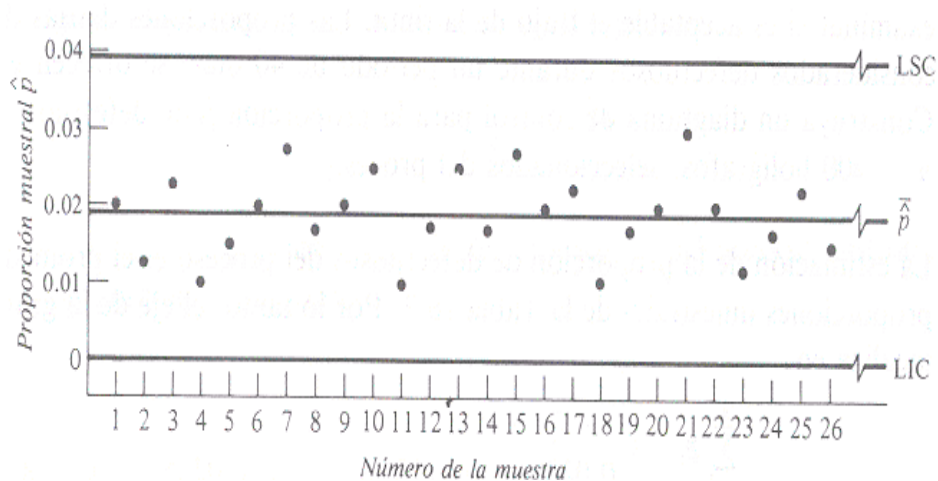
$$\bar{\hat{p}} = \frac{\sum_{i=1}^k P_i}{k1} = \frac{0.0200 + 0.0125 + \dots + 0.0225}{40} = \frac{0.7600}{40} = 0.019$$

Una estimación de σ_p , la desviación estándar de las proporciones muestrales, es

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} = \sqrt{\frac{(0.019)(0.981)}{400}} = 0.00683$$

y $3\hat{\sigma}_p = (3)(0.00683) = 0.0205$. Por lo tanto, los límites superior e inferior de control para la gráfica p se encuentran en: $LSC = 0.0190 + 0.0205 = 0.0395$, y $LIC = 0.0190 - 0.0205 = -0.0015$. O bien, ya que p no puede ser negativa, $LIC = 0$.

Se presenta la gráfica de control \hat{P} en la Figura 4. Cabe recalcar que las 40 proporciones muestrales están dentro de los límites de control. Si una proporción muestral, observada en algún momento en el futuro, está fuera de los límites de control, será una advertencia para el fabricante de un posible aumento en el valor de



la proporción de defectuosos en el proceso.

Figura 4. Gráfica de la proporción de defectuosos para los bolígrafos.

Diagramas de control para nP

El gráfico np sirve para detectar la fracción de artículos defectuosos cuando se están analizando variables por atributos, nos proporcionará la fracción o porcentaje de artículos defectuosos en la población que se encuentra bajo estudio.

Los pasos para obtener el gráfico np son los siguientes. **1.** Definir la característica de calidad (atributo) que se desea analizar. **2.** Controlar las condiciones del proceso. Eliminar todas las variables asignables o atribuibles del proceso. **3.** Tomar un número K de muestras. Las muestras deben de ser de tamaño constante, es decir todas las muestras son del mismo tamaño. El número de muestras no debe ser menor a 20, y cada muestra debe tener por lo menos 50 elementos. **4.** Tabular resultados de acuerdo a la Tabla 5. **5.** Cálculo de la proporción media de ítems defectuosos de todas las k muestras.

$$\bar{np} = \frac{\sum nP}{k_n}$$

Tabla 5. Tabulación de los resultados correspondientes al ejemplo 2.

Número de muestra (i)	Tamaño de muestra (n)	Número de productos defectuosos (Np)	Fracción de defectuosos (p): [p = Np/p]
1	n ₁	Np ₁	P ₁
2	n ₂	Np ₂	P ₂
·	·	·	·
K	n _k	Np _k	p _k

6. Cálculo de los Límites de Control del Proceso. Dado que se está realizando el análisis de los atributos (se tiene o no se tiene) se utiliza una distribución binomial para calcular los límites de control. Los cuales están dados por: Límite superior de Control (LSC), Límite Central de Control (LCC) y Límite Inferior de Control (LIC).

$$LSC = np + 3\sqrt{np(1-p)}$$

$$LC = np$$

$$LIC = np - 3\sqrt{np(1-p)}$$

7. Graficar. A continuación se realiza la gráfica, en la cual se marcan los límites de control y en relación a ellos se grafica el número de defectuosos de cada una de las muestras. **8.** Comparar el proceso con los límites de especificaciones. Observar el comportamiento del proceso de acuerdo con la gráfica y sacar conclusiones.

Gráfica de control para la variación del proceso: diagrama de R

Al igual que es importante mantener el valor medio de una variable de calidad cerca del centro del intervalo de especificación, es deseable controlar la variación del proceso. Cuanta más pequeña sea la variancia de las mediciones de la calidad, tanto mayor será la posibilidad de que las mediciones estén dentro de los límites especificados.

Se supervisa la variación de cada variable de la calidad en un proceso al transportar la amplitud de la muestra **R** a una gráfica. El diagrama **R** se construye esencialmente igual que el de la media. Se localiza una recta central en el valor estimado de μ_R , y los límites de control se ubican $3\sigma_R$ arriba y debajo de μ_R . La estimación de μ_R es \bar{R} , la media de las amplitudes (o rangos) de las k muestras utilizadas para construir la gráfica de media. El cálculo de eje central, y los límites de control,

$$\hat{\mu}_R = \bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^k R_i}{k}$$

$$LSC = \hat{\mu}_R + 3\hat{\sigma}_R \quad \text{y} \quad LIC = \hat{\mu}_R - 3\hat{\sigma}_R$$

Se reducen así a uno solo,

$$LSC = D_4 \bar{R} \quad \text{y} \quad LIC = D_3 \hat{R}$$

Los valores de D_4 y D_3 , basados en un muestreo de una población distribuida normalmente, se dan en la Tabla 1 para diferentes valores de n .

Ejemplo 3. Trazar un diagrama de R basado en los datos de la Tabla 1.

Solución. En el ejemplo anterior se halló que $\bar{R} = 0.0235$. Para un tamaño muestral $n = 3$, la Tabla 1 da $D_3 = 0$ y $D_4 = 2.575$. Por lo tanto, el eje para la gráfica de control se localiza en $\bar{R} = 0.0235$, y los límites superior e inferior de control son

$$LSC = D_4 \bar{R} = (2.575)(0.0235) = 0.0605$$

$$LIC = D_3 \bar{R} = (0)(0.0235) = 0$$

El diagrama de R aparece en la Figura 5. Se evalúa la gráfica de R de la Figura 5 en la misma manera que la de \bar{x} . La amplitud muestral R , calculada para muestras sacadas periódicamente, debe variar alrededor del eje central \bar{R} de manera aleatoria y estar dentro de los límites de control cuando el proceso está bajo control. Una amplitud muestral que quede fuera de los límites de control se tomará como una advertencia de un posible cambio en la variación del proceso.

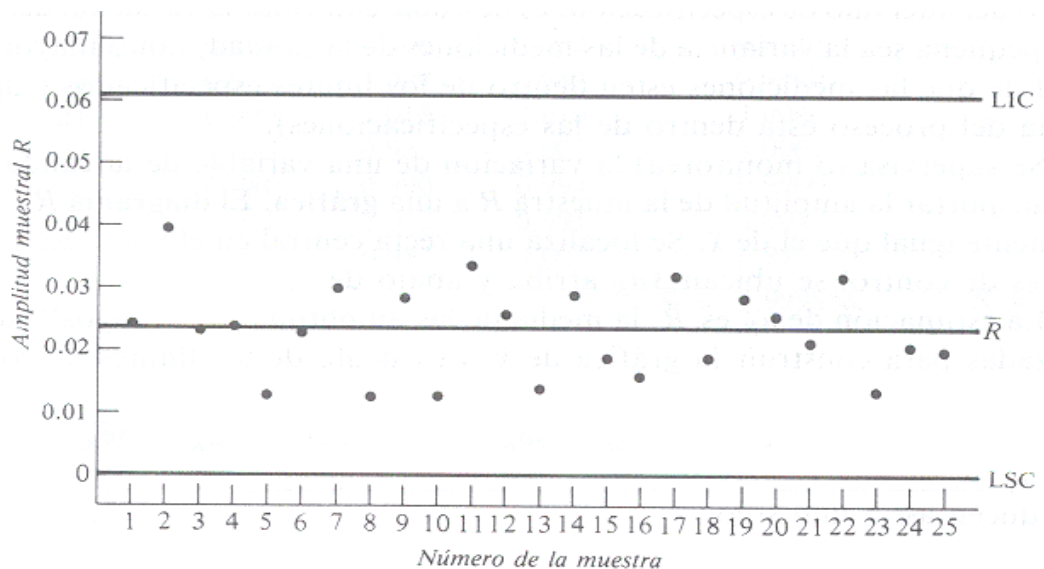


Figura 5. Diagrama de R para los diámetros de artículo defectuosos.

Gráfica de control para el número de defectuosos por unidad: diagrama de C

Una medida importante de calidad para algunos productos es el número de defectos por unidad producida. Un fabricante de textiles califica muchas veces como defectos las irregularidades que aparecen en un producto tejido. Ya que el precio de venta final del material depende de su calidad, el fabricante quiere reducir a un mínimo el número de defectos por yarda cuadrada de material. Entonces querrá conocer el número de defectos por yarda cuadrada cuando el proceso está bajo control.

El número de defectos por unidad de área, volumen, peso o por un solo artículo, denotado normalmente por el símbolo c , se controla a intervalos de tiempo iguales utilizando un *diagrama de c*. En la mayoría de las aplicaciones se puede aproximar la distribución de probabilidad de c mediante una distribución de probabilidad de Poisson, la cual tiene una propiedad muy especial. Su variancia σ^2 es igual a su media μ ; es decir,

$$\sigma_c^2 = \mu_c \quad \text{y} \quad \sigma_c = \sqrt{\mu_c}$$

Por lo tanto, el número de defectos c por unidad tendrían que localizarse en el intervalo $\mu_c \pm 3\sigma_c$ o bien $\mu_c \pm 3\sqrt{\mu_c}$.

Para construir una gráfica de c , muestreamos el proceso mientras éste se encuentra bajo control y se registra el valor de c para por lo menos $k = 25$ puntos en el tiempo.

Se estima la media del proceso μ_c por la media muestral:

$$\hat{\mu} = \bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i}{k}$$

y se calcula la desviación estándar del proceso σ_c con: $\hat{\sigma}_c = \sqrt{\bar{c}}$. El eje de la gráfica c se ubica en c , y los límites superior e inferior son: $LSC = \hat{\mu}_c + 3\hat{\sigma}_c = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}$ y

$$LIC = \hat{\mu}_c - 3\hat{\sigma}_c = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}.$$

Ejemplo 4. Un auditor examina semanalmente el sistema de facturación de una compañía. La inspección se realiza comparando las facturas reales con las entradas de computadora para todos los asientos que aparecen en diez páginas de la impresión de computadora. Se registró el número c de entradas incorrectas en diez páginas semanales de impresión durante 40 semanas. Los datos Figuran en la Tabla 6. Emplee los datos para trazar una gráfica de c para el proceso de auditoría.

Tabla 6. Datos correspondientes a sistema de facturación.

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	1	3	2	0	0	1	4	2	1	1
Semana	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	1	0	1	1	3	2	1	1	0	3

Semana	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	0	2	1	0	1	1	2	2	1	0
Semana	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	1	2	0	3	1	1	2	0	1	0

Solución. El valor de \bar{c} , calculando para los datos obtenidos durante $k =$ semanas, es:

$$\hat{\mu} = \bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i}{k} = \frac{49}{40} = 1.225$$

Entonces el eje se encuentra en el centro = 1.225, y los límites superior e inferior de control se hallan en

$$LSC = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 1.225 + 3\sqrt{1.225} = 4.55$$

y

$$LIC = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 1.22 - 3\sqrt{1.225} = -2.10$$

o puesto que c no puede ser negativo, $LIC = 0$.

La gráfica de c para los datos, junto con los valores ubicados de c se indican en la Figura 6. Obsérvese que los $k = 40$ valores de c están dentro de los límites superior e inferior de control, algo que esperaríamos si el proceso estuviera controlado.

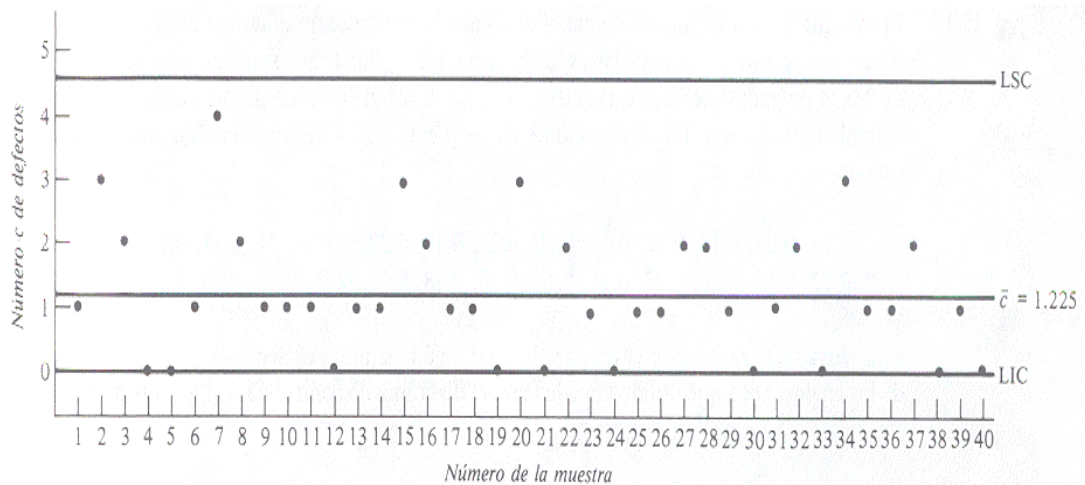


Figura 6. Gráfica de c para el número de elementos defectuosos.

Muestreo de aceptación

Los productos manufacturados que salen de un proceso de producción se dividen normalmente en grupos de artículos, llamados *lotes*. Suponga que cada artículo de un lote tiene que satisfacer ciertas especificaciones y que, por lo tanto, se puede clasificar como *defectuoso* o *no defectuoso*. Es deseable recibir lotes que contengan una fracción, p muy baja de defectuosos. A fin de reducir el riesgo de enviar lotes con una fracción alta de defectuosos, mediante un *plan de muestreo para aceptación de lotes considerado artículos defectuoso* que desempeña un papel como un filtro. Similarmente, se diseña el plan de muestreo mencionando a fin de permitir pasar por la malla los lotes con una baja fracción de defectuosos, y rechazar los lotes con una alta fracción de artículos con defectos. El resultado es un mejoramiento de la calidad del producto que sale finalmente del medio de filtro.

Los fabricantes utilizan los planes de muestreo para aceptación de lotes tanto para seleccionar la materia prima que entra como el producto elaborado que sale. Se indica en la Figura 7 una representación gráfica de la selección de materias primas que entran.

En un plan de muestreo para aceptación de lotes, se selecciona una muestra aleatoria de n artículos de cada lote. Se inspecciona cada artículo y se registra el número, x , de defectuosos en la muestra: **1.** Si x es menor que o igual a un *número de aceptación* a , se acepta el lote. **2.** Si x es superior a un *número de aceptación* a , se rechaza el lote. **3.** Si $a_1 < x \leq a_2$ se muestrean n_2 unidades adicionales. Sea x_2 el número total de piezas defectuosas de la muestra combinada de $n_1 + n_2$ unidades: (1) Si $x_2 \leq a_2$, se acepta el lote. (2) si $x_2 > a_2$, el lote se rechaza.

Entonces, cada plan de muestreo se identifica mediante dos números, el tamaño de la muestra n y el número de aceptación a .

Como se puede imaginar, el análisis de los esquemas de nuestro doble es considerablemente más complicado que el análisis de los esquemas del muestreo simple. Aunque los esquemas del muestreo doble son más poderosos y utilizados con más amplitud en la práctica, deberemos restringir nuestro análisis al muestreo simple. Esto le permitirá aprender los conceptos sin quedarse atorado en los detalles.

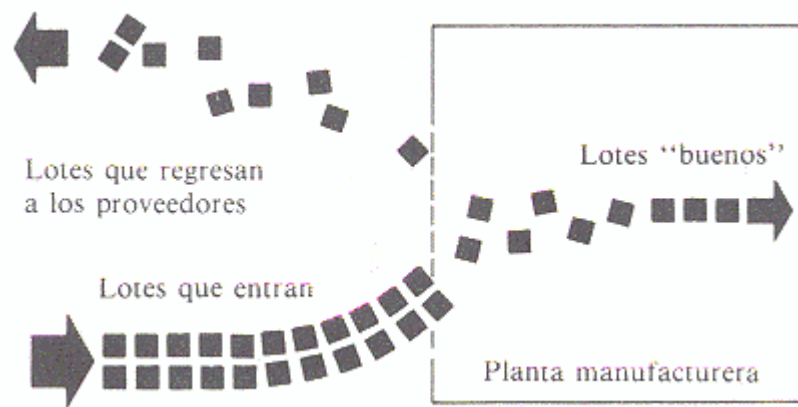


Figura 7. Tamizado de lotes por separación de defectuosos.

Ejemplo 5. Un plan de muestreo para aceptar lotes utiliza una muestra aleatoria de tamaño $n = 25$, con un número de aceptación $a = 1$. Determinar la probabilidad de que se acepte un lote que contenga una fracción $p = 0.05$ de defectuosos. Después calcule la probabilidad de aceptar un lote según $P = 0.1, 0.2, 0.5, 0.7, 0$ y 1.0 .

Solución. Si se supone que el número N de artículos en el lote es relativamente grande respecto el tamaño muestral n , el número de defectuosos x en una muestra aleatoria de $n = 25$ artículos tiene la distribución de probabilidad binomial:

$$P(X) = C_x^n P^x q^{n-x}, \quad q = 1 - P$$

Ya que el número de aceptación para el plan de muestreo es $a = 1$, se aceptará un lote si $x = 0$ o bien 1 , y se rechazará si $x = 2, 3, \dots, 25$. Por lo tanto, la probabilidad de aceptar un lote con una fracción de defectuosos p es: $P(x = 0 \text{ o bien } 1) = P(0) + P(1) = C_0^{25} P^0 q^{25} + C_1^{25} P^1 q^{24}$. $\sum P(x) = P(0) + P(1) + \dots + P(a)$, donde x varía de 0 hasta la a . para $n = 5, 10, 15, 20$, y 25 . Empleando la tabla para $n = 25$, obtenemos los siguientes probabilidades. $P(\text{aceptación de lote}) = P(0) + P(1)$. $P(\text{de aceptar cuando } P = 0.05) = 0.642$. Similarmente, las probabilidades de aceptación de lotes cuando la fracción de defectuosos, P , es $0.1, 0.2, 0.5$ y 0.7 como lo que sigue. $P(\text{de aceptar cuando } p = 0.1) = 0.271$. $P(\text{de aceptar cuando } p = 0.5) = 0.000$. $P(\text{de aceptar cuando } p = 0.2) = 0.027$. $P(\text{de aceptar cuando } p = 0.7) = 0.000$.

Cuando el lote no contiene defectuosos, es decir, $P = 0$, la probabilidad de aceptar el lote es siempre $P(\text{de aceptar cuando } P = 0) = 1$. Al contrario, si todos los artículos en un lote son defectuosos, la probabilidad de aceptar el lote siempre es $P(\text{de aceptar cuando } P = 1.0) = 0$. Una gráfica de la probabilidad de aceptación un lote contra la fracción de defectuosos, p , en el mismo se llama *curva de característica de operación* para un plan de muestreo. Tal curva para el plan de muestreo del ejemplo, se presenta en la Figura 8.

La curva característica de operación para un plano de muestreo define completamente las características del tamizado, por que señala la probabilidad de aceptar lotes con cualquier

probabilidad, p . Por ejemplo, la curva característica de operación de la Figura 8. indica que la probabilidad de aceptar un lote con solamente 5% de defectuosos es alta, 0.642. Al aumentar la fracción P de defectuosos en un lote, la probabilidad de aceptar lotes que contengan 20% de defectuosos es sólo 0.027, y la probabilidad de aceptar lotes con 50% o más de defectuosos es 0.000.

Si fuera el fabricante, desearía que la probabilidad de aceptar lotes con una pequeña fracción de defectuosos, p , fuera alta. Normalmente, un fabricante especifica que la fracción de defectuosos de un lote tiene que ser menor que cierto valor P_o . Esta fracción se llama *nivel de calidad aceptable (NCA)* para el plan.

El nivel de calidad aceptable (NCA) es un límite superior P_o para la fracción de defectuosos que el fabricante está dispuesto a aceptar.

La probabilidad de rechazar lotes buenos, es decir, lotes para los cuales $P = P_1$, se llama *riesgo del fabricante* y se define como la probabilidad de rechazar un lote cuando la fracción de defectuosos del mismo es igual a P_o , el NCA: Riesgo del productor = $1 - P(\text{de aceptar cuando } P = P_o)$.

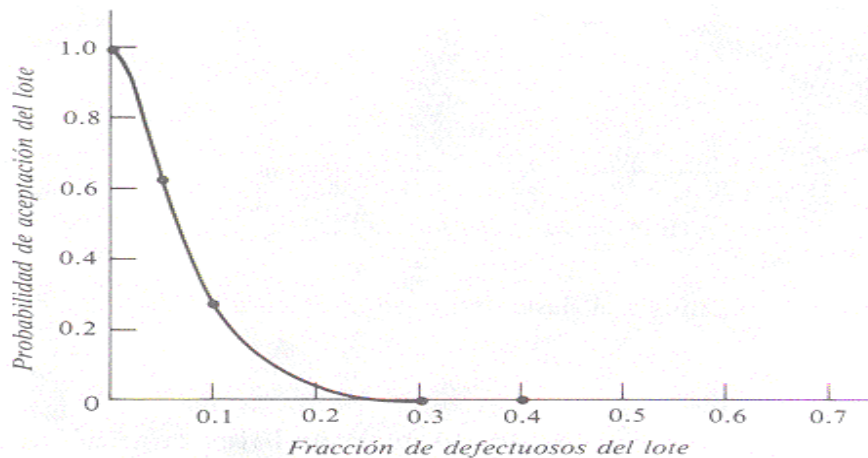


Figura 8. Curva característica de cooperación ($n = 25$, $a = 1$) para el ejemplo.

El contraste, el comprador del producto desearía que fuera pequeña la probabilidad de aceptar lotes malos. El consumidor pensará en algún valor de P_1 , normalmente mayor que P_o , y desearía aceptar lotes solamente si la fracción de defectuosos p es menor que P_1 . La probabilidad de aceptación de lotes, dado que $P = P_1$, se llama *riesgo del consumidor*. El riesgo del consumidor es la probabilidad de aceptar lotes cuando la fracción de defectuosos, P , es igual a P_1 . El riesgo del productor para $NCA = P_0 = 0.05$ y el riesgo del consumidor para $P_1 = 0.10$, se muestran en la curva característica de operación de la Figura 9.

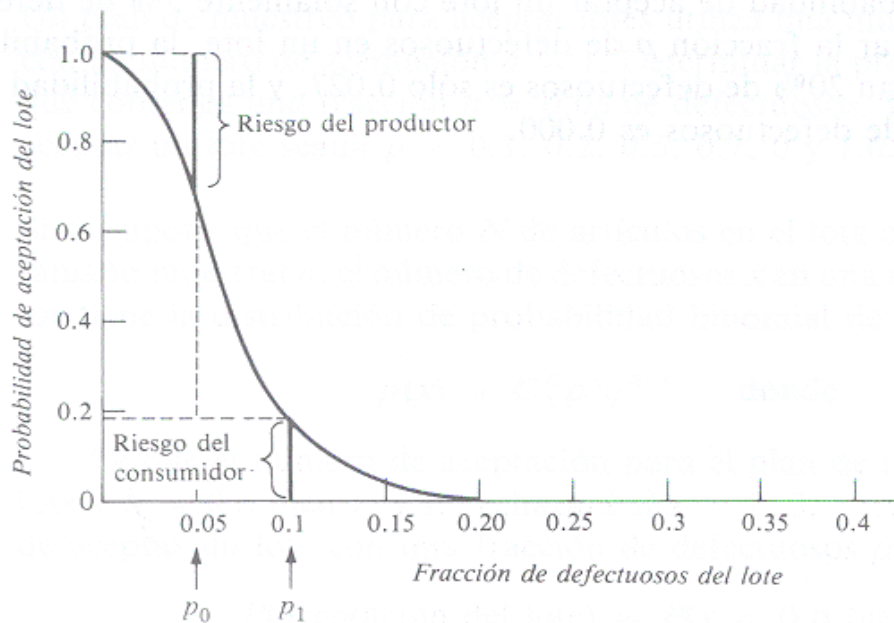


Figura 9. Curva característica de operación que indica el riesgo del productor para NCA.

Planes de muestreo doble y secuencial por aceptación de lotes

El plan de muestreo para aceptar lotes considerado defectuosos que se han descrito, se denomina *plan de muestreo simple*, es decir, la decisión de aceptar o de rechazar un lote se base en el número de defectuosos de una sola muestra de n observaciones, seleccionada del lote. Otros planes de muestreo proporcionan la misma protección que un plan de muestreo simple a menor costo. Uno de ellos es el *plan de muestreo doble*.

Un plan de muestreo simple llega a una de dos decisiones, basándose en el número de defectuosos en una muestra aleatoria de n artículos de cada lote: se acepta, o bien, se rechaza el lote, o se pospone la decisión y se toma una segunda muestra. Así para el plan de muestreo doble, selecciona n_1 artículo de cada lote. Si el número x_1 en la muestra de n_1 es mayor que o igual a un número de aceptación a_1 , se acepta el lote. Si es igual a o mayor que un número de rechazo r_1 , se rechaza el lote. Si X_1 cae entre a_1 y r_1 , no se emite ningún juicio y se saca una segunda muestra n_2 artículos del lote, registrado el número X_2 de defectuosos en esta segunda muestra. Si el número total de defectuosos $x = (X_1 + X_2)$ en la muestra de $n = (n_1 + n_2)$ es menor que o igual a un número de aceptación a_2 , se acepta el lote. De otra manera se rechaza dicho lote.

Los planes de muestreo múltiple son similares a los planes de muestreo doble, sólo que necesitan tres o más etapas de muestreo, y en cada una se toma la decisión de aceptar el lote, rechazarlo o seguir con el muestreo. El plan de muestreo múltiple llevado hasta lo último se llama *plan de muestreo secuencial*. Este plan de muestreo es una extensión del concepto incluido en un plan de muestreo múltiple. Un plan de muestreo secuencial selecciona artículos de un lote, uno por uno, y la decisión de aceptar el lote, de rechazarlo o de sacar otro artículo se toma después de cada selección. Así, el plan da un número de aceptación a_1 y un número de rechazo r_1 para la primera sección. **1.** Si el primer artículo es $\leq a_1$, se acepta el lote. **2.** Si es el primer artículo es $\geq r_1$, se rechaza el lote y se saca un segundo artículo del lote.

Muestreo de aceptación por variables

Para la mayoría de los planes de muestreo para aceptación de lotes es necesario un muestreo por defectuosos, pero a veces, es más apropiado tomar una decisión de rechazar o aceptar un lote, basándose en el valor medio de una variable de calidad.

La decisión de aceptar o rechazar un lote, basándose en una variable continua x , es esencialmente la prueba de una hipótesis acerca de la media del proceso, utilizando la media muestral como estadística de prueba. Suponga que una buena calidad está asociada

a valores pequeños de μ_x . Entonces el productor querrá tener una alta probabilidad de

aceptar un lote cuando μ_x es menor que cierto valor μ_0 es el *nivel de calidad aceptable* (NCA) para el plan de muestreo. Si se supone que n es grande, la región de rechazo para una prueba de $H_0: \mu = \mu_0$, contra la hipótesis alterna, $H_a: \mu > \mu_0$, es, para $\alpha = 0.05$,

$$\bar{x} > \mu_0 + z_{0.05} \sigma_{\bar{x}}$$

o bien,

$$\bar{x} > \mu_0 + 1.645 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Si \bar{x} es menor que o igual a $\mu_0 + 1.645 \sigma \sqrt{n}$, se acepta el lote. De otra manera, se

rechaza el mismo. Una gráfica de la probabilidad β de aceptar un lote en función de μ_x , es la curva característica de operación para el plan de muestreo. Señala la probabilidad de

aceptar un lote para valores dados de μ_x .

Los consumidores querrán aceptar lotes con un pequeño valor de μ_x , digamos $\mu_x = \mu_1$. por

lo tanto, el riesgo del consumidor se define como la probabilidad de aceptar lotes con $\mu_x = \mu_1$ (Figura 10). El riesgo del productor es la probabilidad de rechazar lotes cuando $\mu = \mu_0$, es decir, cuando μ_x es igual al nivel de calidad aceptable (NCA). Se puede observar que la aceptación de lotes por variables es muy similar al muestreo de aceptación de lotes por defectuosos. La única diferencia es que los planes de muestreo para este último utilizan el número x de defectuosos en una muestra de n artículos para decidir si se acepta o se rechaza el lote.

Conclusiones

Existe una dualidad y dicotomía permanente entre dos elementos esenciales. Estos son la cantidad y la calidad de todos los ítems, procedimientos, objetos, programas, producción de cualquier forma e incluso los fenómenos y los procesos naturales como el estado del medio ambiente, la cantidad y la calidad de las especies tanto benignos como dañinos para nosotros, y el número y la naturaleza de las interacciones entre las entidades vivas. En el área de la producción de los ítems por el hombre, no basta solamente generar cantidades

cuantiosas, sino analizar la calidad de los mismos, ya que el objetivo es la optimización de la producción con mira hacia la mejora continua de la calidad de vida humana. En el medio ambiente, también existe este fenómeno, ya que la madre sabia de la naturaleza “*analiza y determina*” la relación entre el costo y el beneficio en la producción versus calidad de los producidos. Este punto, incluso forma la medula central de la ecología evolutiva. El cosmos o el orden, precisamente, ejemplifican la noción de la estética, ya que el equilibrio de más de 15 mil millones de años atestigua a esta armonía permanente. Este balance se logra cuando hay un orden entre la cantidad y la calidad de los ítems naturales. Nosotros podemos aprender humildemente de este escenario evolutivo y utilizar la herramienta adecuada para definir, y cuantificar la calidad y buscar a través de control de calidad y toma de acciones correctivas la mejora continua.

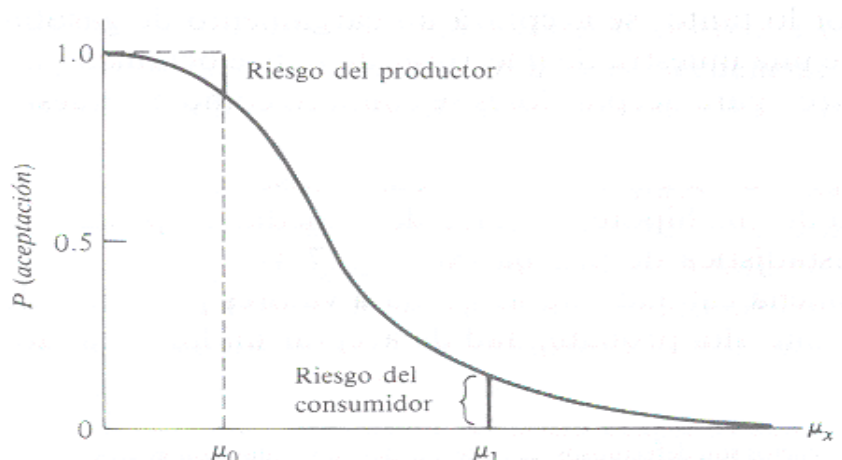


Figura 10. Curva característica de operación para el muestreo por variables.

Referencias

- Badii, M.H., A. E. Flores, R. foroughbakhch & H. Quiróz. 2000. Fundamentos de muestreo. Pp. 129-144. In: Fundamentos y Perspectivas de Control Biológico, M.H. Badii, A.E. Flores y L.J. Galán (eds.). UANL, Monterrey.
- Badii, M.H., A.R. Pazhakh, J.L. Abreu & R. Foroughbakhch. 2004. Fundamentos del método científico. InnOvacíOnes de NegOciOs 1(1): 89–107.
- Badii, M.H., J. Castillo & A. Wong. 2006. Diseños de distribución libre. InnOvacíOnes de NegOciOs, 3(1): 141-174.
- Badii, M.H. & J. Castillo (eds.). 2007. Técnicas Cuantitativas en la Investigación. UANL, Monterrey.
- Badii, M.H., J. Castillo, R. Rositas & G. Ponce. 2007a. Experimental designs. Pp. 335-348. In: M.H. Badii & J. Castillo (eds.). Técnicas Cuantitativas en la Investigación. UANL, Monterrey.
- Badii, M.H., J. Castillo, F. Gorjón & R. Foroughbakhch. 2007b. Completely randomized designs. Pp. 307-334. In: M.H. Badii & J. Castillo (eds.). Técnicas Cuantitativas en la Investigación. UANL, Monterrey.
- Badii, M.H., J. Castillo, K. Cortes & H. Quiroz. 2007c. Análisis de clusters. Pp. 15-36. In: M. H. Badii & J. Castillo (eds.). Técnicas Cuantitativas en la Investigación. UANL, Monterrey.

- Badii, M.H., J. Castillo, J.N. Barragán & A. E. Flores. 2007d. Análisis discriminante. Pp. 119-136. In: M.H. Badii & J. Castillo (eds.). Técnicas Cuantitativas en la Investigación. UANL, Monterrey.
- Badii, M.H., J. Castillo, J. Rositas & G. Alarcón. 2007e. Uso de un método de pronóstico en investigación. Pp. 137-155. In: M.H. Badii & J. Castillo (eds.). Técnicas Cuantitativas en la Investigación. UANL, Monterrey.
- Badii, M.H., R. Ramírez & J. Castillo. 2007g. Papel de estadística en la investigación científica. InnOvaciOnes de NegOciOs, 4(1): 81-114.
- Box, G.E.P., W.G. Hunter, y T.S. Hunter, 1978. Statistics for experimenters: Data analysis and model building. Nueva York: Wiley.
- Johnston, J. 1977. Econometric Methods. 2ª ed. Nueva York: Mc Graw-Hill.
- Ott, L. 1989. An introduction to Statistical Methods and Data Analysis. 3a ed. Boston: PWS-KENT.
- Ott, L., R.F. Larson y W. Mendenhall, 1987. Statistics: A Tool for the Social Sciences. 4a ed. Boston: PWS-KENT.
- Pierce, D.A. 1980. A Survey of recent developments in seasonal adjustment. The American Statistician 34: 125-134.
- Pignatiello, J.J. y J.S. Ramberg, 1985. Discussion. Journal of Quality Technology 17:198-206.
- Shoemaker, A.C. y R.N. Kacker, 1988. A Methodology for planning experiments in robust product and process design. Quality and Reliability Engineering International 4: 95-103.
- Taguchi, G. 1980. Introduction to Off-Line Quality Control. Tokyo: Japanese Standards Association.
- Warner, S.L. 1965. Randomized Response: A Survey Technique for Eliminating Evasive Answer Bias. Journal of the American Statistical Association. 60: 63-69.

***Acerca de los Autores**

M.H. Badii, Profesor investigador, UANL, San Nicolás, N.L., México, mhbadiiz@gmail.com
A. Guillen, Profesor investigador, UANL, San Nicolás, N.L., México, aguillen77@yahoo.com
J.L. Abreu, Profesor investigador, UANL; San Nicolás, N.L., México, spentamex@gmail.com