

# Tarea 2. Análisis de Componentes Principales

Aprendizaje de Máquina I

February 11, 2021

**Descripción.** Implementar un método de compresión de imágenes basado en PCA.

1. Obtención de la muestra: dado un conjunto de imágenes  $\{I\}_{i=1,2,\dots,M}$  de las cuales seleccione  $m$  parches (subimágenes al azar) de dimensión  $(l, l)$  pixeles de los canales algún canal de color seleccionado también al azar.
2. Arregle la muestra acorde a la matriz de dimensión  $(m, n)$ , con  $n = l \times l$ :

$$X = \begin{bmatrix} x_1^\top \\ x_2^\top \\ \vdots \\ x_m^\top \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde  $x_i^\top$  es el  $i$ -ésimo parche formateado como vector (renglón tras renglón) al cual se le restó la media por columnas (datos centrados).

3. Calcule los componentes principales de  $X$ .
4. Sean  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ , con  $\lambda_i \geq \lambda_j$  para  $i < j$ , los eigenvalores de  $X^\top X$  y las columnas de  $U = [u_1, u_2, \dots, u_m]$  los eigenvectores correspondientes. Entonces seleccione los primeros  $K$  eigenvectores  $\{u_k\}_{k=1,2,\dots,K}$  tal que

$$K = \arg \inf_k \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \geq \theta \sum_{i=1}^m \lambda_i \right) \quad (2)$$

la suma de los  $K$  primeros eigenvalores seleccionados corresponden a al menos la fracción  $\theta$  (con  $0 < \theta \leq 1$ ) de la suma de todos los eigenvalores.

5. Construya la matriz de transformación:

$$\tilde{U} = [u_1, u_2, \dots, u_K] \quad (3)$$

6. Para un conjunto de imágenes de prueba  $\{J\}_{i=1,2,\dots,N}$  calcule los coeficientes en el espacio comprimido para cada bloque no superpuesto de  $(l, l)$ :

$$\beta_i = \tilde{U}x_i, \quad \text{para todo parche } i \text{ en cada imagen de } \{J\}. \quad (4)$$

7. Reconstruya cada imagen, parche por parche, usando los coeficientes  $\beta$ .

$$\tilde{x}_i = \tilde{U}^\top \beta_i, \quad \text{para todo parche } i \text{ en cada imagen de } \{J\}. \quad (5)$$

8. Muestre figuras con ejemplos de parches, imágenes de prueba  $J$ , sus reconstrucciones  $\tilde{J}$  para distintas selecciones de  $\theta$ .
9. Genere una gráfica de error absoluto promedio (MAE) vs  $\theta$ ; donde

$$MAE_\theta = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mu_p \left| J_i(p) - \tilde{J}_i^{(\theta)}(p) \right| \quad (6)$$

donde  $p$  indica la posición de un pixel, y  $\tilde{J}_i^{(\theta)}$  es la reconstrucción de la imagen  $J_i$  cuando se seleccionan la fracción de eigenvectores correspondientes a  $\theta$

#### Valores de parámetros sugeridos:

$M = 10, N = 3, l = \{16, 32\}, m = 1000$ , dimensiones de las imágenes:  $512 \times 512 \times 3$ .

#### Entrega de la tarea

La tarea se entrega como el fuente del notebook de jupyterlab (.pynb) con la última ejecución.

**Enviar la tarea** a aprendizaje.maquina@cimat.mx. Con asunto: “Tarea *número\_de\_tarea*. grupo *nombre\_del\_curso\_inscrito*”. Ejemplo: Tarea 2. grupo Aprendizaje Automático I

**Fecha de entrega:** 18 de febrero 2021 a las 12pm (límite).

**Penalización por retraso:** la calificación de la tarea se multiplicará por  $0.9^n$  donde  $n \geq 0$  son los días de retraso.

#### Material de apoyo

Notas del curso en internet