Examen Parcial 2
Optimización I

Fecha: 26 de Mayo del 2020

Nombre: ______________________________

Nota Importante:

- **Escriba su nombre y numere cada hoja** usada para responder el examen.
- Por favor, **no mezclar las respuestas de diferentes preguntas** en la misma hoja.
- **El examen esta formado por las preguntas 1, 2 y 3 a), b) y c)**
- El **inciso d) de la pregunta 3 es opcional** y podrá alcanzar hasta un punto adicional si resuelve esta pregunta.
- En caso de alcanzar más de 10 puntos, la puntuación adicional se considerará en la nota final, de forma proporcional.

Preguntas

1. [**3 puntos**] Usando solamente $f(x-h)$, $f(x)$ y $f(x+2h)$:

   a) Determine una aproximación de la primera derivada de orden $O(h)$.

   b) Determine una aproximación de la primera derivada de orden $O(h^2)$.

2. [**4 puntos**] Se desea minimizar la siguiente funcional con respecto a y:

$$J[y] \;=\; \int_a^b f(t, y, y', y'')dt \tag{1}$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$y(a) = y_a \qquad y(b) = y_b \tag{2}$$
$$y'(a) = \tilde{y}_a \qquad y'(b) = \tilde{y}_b \tag{3}$$

Supongamos que $\hat{y}(t)$ resuelve el problema anterior y sea $\eta(t)$ un variación independiente de $\epsilon \approx 0$

$$y(t) = \hat{y}(t) + \epsilon\eta(t)$$

donde $y(t)$ satisfase las condiciones de frontera mencionadas arriba, i.e. las condiciones (2)-(3).

a) Muestre que

$$\eta(a) = \eta(b) = \eta'(a) = \eta'(b) = 0$$

b) Usando las igualdades anteriores, verifique que la Ecuación de Euler Lagrange del problema de minimización de (1) con las condiciones (2)-(3) es

$$f_y - \frac{d}{dt}f_{y'} + \frac{d^2}{dt^2}f_{y''} \;=\; 0$$

Sugerencia: Utilice la condición de optimalidad de

$$J(\epsilon) \;:=\; J[\hat{y} + \epsilon\eta] \tag{4}$$

c) Basado en el resultado anterior y lo estudiado en clases, escriba (sin demostración) cual debe ser la Ecuación de Euler Lagrange correspondiente al funcional

$$J[y] \;=\; \int_a^b f(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})dt \tag{7}$$

(sujeto a las condiciones de frontera apropiadas)

d) Un problema típico del cálculo variacional es el problema de minima superficie, el cual se puede formular como sigue

$$\min_z J[z] \tag{8}$$

$$J[z] := \int_{\Omega}\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy \tag{9}$$

donde Ω es el cuadrado unitario $[0,1]\times[0,1]$. Escriba la ecuación de Euler Lagrange correspondiente a este problema.

3. [**3 puntos**] Sea

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x} \tag{22}$$

donde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y postiva definida; $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Dado un punto inicial $\mathbf{x}_0$ y el siguiente esquema iterativo

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$$

con tamaño de paso exacto, ie,

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha>0} f(\mathbf{x}_k + \alpha\mathbf{d}_k)$$

con $\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{Q}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{b}$ y dirección $\mathbf{d}_k$ definida como sigue

$$\mathbf{d}_{k+1} = -\gamma_{k+1}\mathbf{g}_{k+1} + \mathbf{d}_k$$

para $k = -1, 0, 1, \cdots$; con $\mathbf{d}_{-1} = 0$, $\mathbf{d}_{k+1}^\top \mathbf{Q}\mathbf{d}_k = 0$ y $\gamma_0 = 1$.

a) Calcula γ_{k+1} en función de $\mathbf{g}_{k+1}$, $\mathbf{d}_k$ y $\mathbf{Q}$.

b) Verifica que $\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{g}_k + \alpha_k \mathbf{Q}\mathbf{d}_k$

c) Muestra que $\mathbf{g}_{k+1}^\top \mathbf{d}_{k-1} = 0$ y $\mathbf{g}_{k+1}^\top \mathbf{g}_k = 0$

d) [**opcional**] Muestre que $\mathbf{d}_{k+1}$ es una dirección de descenso, para $k > -1$.