Examen Parcial I. Optimización

Fecha: 16 de Marzo del 2021
Nombre: ______________________________

Nota Importante:

- Escriba su nombre y numere cada hoja usada para responder el examen.
- Por favor, no mezclar las respuestas de **diferentes preguntas** en la misma hoja.

Problemas

Problema 1

[**4 puntos**]

a) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Definamos la función $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ como sigue

$$g(\boldsymbol{x}) \quad = \quad f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{D}\boldsymbol{x})$$

donde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Muestra que la función $g(\boldsymbol{x})$ es convexa.

b) Muestra que la función $h(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2$, con $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, es convexa

Problema 2

[**4 puntos**]

Sea la función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida a continuación

$$f(\boldsymbol{x}) \quad = \quad \frac{1}{2}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}\|^2,$$

con $\lambda > 0$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ y $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ una matriz de rango completo.

a) $f(\boldsymbol{x})$ es una función convexa?. Fundamente su respuesta

b) Calcula y clasifica los puntos críticos de $f(\boldsymbol{x})$. Argumente su respuesta

Problema 3

[**2 puntos**]

Sea $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}$ donde $\boldsymbol{Q} \succ 0$, i.e., $\boldsymbol{Q}$ es positiva definida. Si se usa un algoritmo de búsqueda en línea con tamaño de paso exacto, muestra que se satisface la siguiente condición de Goldstein:

$$f(\boldsymbol{x}_{k+1}) \quad \leq \quad f(\boldsymbol{x}_k) + c\alpha_k \nabla f(\boldsymbol{x}_k)^T \boldsymbol{d}_k$$

donde $0 < c < \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{d}_k$ es la dirección de descenso en el punto $\boldsymbol{x}_k$ y α_k es el tamaño de paso exacto.