OPTIMIZACIÓN. TAREA 6

OSCAR DALMAU

Especificaciones:

1. Use un metodo de optimización para resolver el problema de ajustar una mezcla de gaussianas a un histograma 3D. La función objetivo de este problema viene dada por:

$$\min_{\alpha^j,\mu^j} g(\alpha^j,\mu^j) = \sum_{c\in\Omega}[h^j(c) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j \exp(\frac{-||c-\mu_i^j||_2^2}{2\sigma^2})]^2, \tag{1}$$

   Donde:
   - $j \in \{1,2\}$, corresponden a fondo y objeto.
   - $c = [r,g,b]^\top$, con $r \in B_1 = \{1,...,b_1\}$, $g \in B_2 = \{1,...,b_2\}$, $b \in B_3 = \{1,...,b_3\}$ y b_1, b_2, b_3 son el número de bins en cada canal RGB (pueden elegir otro espacio de colores).
   - $\Omega = B_1 \times B_2 \times B_3$, donde $X \times Y := \{(x,y) : x \in X,\ y \in Y\}$ representa el producto cartesiano.
   - $h^j(r,g,b)$ es el histograma 3D de la clase j.
   - n es el número de elementos de la base radial.
   - $\alpha^j = [\alpha_1^j, \alpha_2^j, \ldots, \alpha_n^j]$ son los pesos de la combinación lineal de la base radial.
   - $\mu^j = [\mu_1^j, \mu_2^j, \ldots, \mu_n^j]$ son las medias o posiciones de los elementos de la base radial.
   - σ es un parámetro conocido.

   El problema (1) se puede resolver alternadamente hasta convergencia, es decir:

$$\begin{aligned}\alpha_{k+1}^j &= \arg\min_{\alpha^j\in\mathbb{R}^n} g(\alpha^j,\mu_k^j)\\ \mu_{k+1}^j &= \arg\min_{\mu^j\in\mathbb{R}^n} g(\alpha_{k+1}^j,\mu^j)\end{aligned}$$

2. En la carpeta en drive estará un código en Python para generar un histograma 3D. También podrán implementar su propia versión si así lo desean. Además, encontraran un PDF llamado "InstruccionesParaHistograma" donde están las instrucciones explicadas de forma detallada para el manejo de dicho código. También encontraran una carpeta llamada "Imágenes" donde

se encuentra varias imágenes, deberán realizar esta tarea para alguna de las imágenes almacenadas en esta carpeta.

3. El reporte podrá ser máximo de tres hojas.
4. Comparar resultados al realizar una segmentación (separar fondo y objeto de una imagen) al utilizar los histogramas de las clases "originales" contra los obtenidos al minimizar su función objetivo.

$$f(c;\alpha^j,\mu^j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j \exp(\frac{-||c-\mu_i^j||_2^2}{2\sigma^2})$$

$$F(c;\alpha^1,\mu^1) = \frac{f(c;\alpha^1,\mu^1)+\epsilon}{f(c;\alpha^1,\mu^1)+f(c;\alpha^2,\mu^2)+2\epsilon}$$

$$F(c;\alpha^2,\mu^2) = \frac{f(c;\alpha^2,\mu^2)+\epsilon}{f(c;\alpha^1,\mu^1)+f(c;\alpha^2,\mu^2)+2\epsilon}$$

Donde $\epsilon = 0{,}01$. Si $F(c;\alpha^1,\mu^1) < F(c;\alpha^2,\mu^2)$ asignar al color c la etiqueta 2, en caso contrario se le asigna la etiqueta 1. Donde: Etiqueta 1 $\rightarrow$ Rojo y Etiqueta 2 $\rightarrow$ Azul.

Mostrar la imagen resultante (en rojo y azul). Repetir de igual forma para las $h^j(c)$, lo que se comentó anteriormente para las $f^j(c;\alpha^j,\mu^j)$ es decir calcular:

$$H(c) = \frac{h^1(c)+\epsilon}{h^1(c)+h^2(c)+2\epsilon}$$

$$H(c) = \frac{h^2(c)+\epsilon}{h^1(c)+h^2(c)+2\epsilon}$$

y mostrar la imagen resultante (en rojo y azul).

Nota: Las $h^j(c)$ no depende de parámetros, es simplemente una tabla en 3D.