Examen Parcial 2
Optimización I

Fecha: 18 de Mayo del 2021

Nombre: ______________________________

Nota Importante:

- **Escriba su nombre y numere cada hoja** usada para responder el examen.
- Por favor, **no mezclar las respuestas de diferentes preguntas** en la misma hoja.

Preguntas

1. [**4 puntos**] Sea

$$f(\mathbf{x}) \;=\; \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x} \tag{1}$$

donde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y postiva definida; $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Dado un punto inicial $\mathbf{x}_0$ y el siguiente esquema iterativo

$$\mathbf{x}_{k+1} \;=\; \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$$

con tamaño de paso exacto, ie,

$$\alpha_k \;=\; \arg\min_{\alpha>0} f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k)$$

con $\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{Q}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{b}$ y dirección $\mathbf{d}_k$ definida como sigue

$$\mathbf{d}_{k+1} \;=\; -\gamma_{k+1}\mathbf{g}_{k+1} + \mathbf{d}_k$$

para $k = -1, 0, 1, \cdots$; con $\mathbf{d}_{-1} = 0$, $\mathbf{d}_{k+1}^\top \mathbf{Q}\mathbf{d}_k = 0$ y $\gamma_0 = 1$.

a) Calcula γ_{k+1} en función de $\mathbf{g}_{k+1}$, $\mathbf{d}_k$ y $\mathbf{Q}$.

b) Verifica que $\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{g}_k + \alpha_k \mathbf{Q}\mathbf{d}_k$

c) Muestra que $\mathbf{g}_{k+1}^\top \mathbf{d}_{k-1} = 0$ y $\mathbf{g}_{k+1}^\top \mathbf{g}_k = 0$

2. [**3 puntos**]

a) Considere la siguiente actualización del algoritmo DFP

$$\mathbf{H}_{k+1}^{DFP} = \mathbf{H}_k + \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^\top}{\mathbf{s}_k^\top \mathbf{y}_k} - \frac{\mathbf{H}_k \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^\top \mathbf{H}_k}{\mathbf{y}_k^\top \mathbf{H}_k \mathbf{y}_k}$$

Muestra que si la matriz $\mathbf{H}_k$ es postiva definida, $\mathbf{g}_k \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{s}_k^\top \mathbf{y}_k > 0$ entonces $\mathbf{H}_{k+1}$ es postiva definida.

b) Sea el problema cuadrático

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x} \tag{2}$$

donde $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica y positiva definida. Considere la siguiente actualización

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k \tag{3}$$

$\alpha_k > 0$ es el tamaño de paso y $\mathbf{d}_k$ una dirección de descenso.

Una forma de calcular un tamaño de paso α_k se basa en el uso de la ecuación de la secante

$$\mathbf{Q}\mathbf{s}_k = \mathbf{y}_k \tag{4}$$

donde $\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$, $\mathbf{y}_k = \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k$, $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$. Para lo anterior, se propone usar la aproximación $\mathbf{Q} \approx \alpha \mathbf{I}$, de este modo el tamaño de paso se puede calcular como sigue

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha^*} \tag{5}$$

$$\alpha^* = \arg\min_{\alpha > 0} \|\alpha \mathbf{s}_k - \mathbf{y}_k\|^2 \tag{6}$$

Calcula α_{k+1} en función de $\mathbf{s}_k$ y $\mathbf{y}_k$. Si $\mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k$, exprese α_{k+1} en función de $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{g}_k$

3. [**3 puntos**] Considera el siguiente problema de optimización

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|^2 + \lambda \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 1)^2,$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es una matriz de $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ es un vector y λ es una constante positiva. El primer térmimo de la función de costo corresponde a mínimos cuadrados estándar. El segundo término promueve que las entradas x_i del vector $\mathbf{x}$ sean cercanas a ± 1.

a) Escriba el problema anterior como un problema de **míninos cuadrados no lineales**, i.e., de la siguiente forma

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|^2$$

para lo cual debe definir claramente quien es $\mathbf{r}(\mathbf{x})$

b) Calcular el Jacobiano de $\mathbf{r}(\mathbf{x})$

c) Describa el subproblema de mínimos cuadrados lineales que debe resolver en cada iteración del algoritmo Gauss-Newton que permite resolver el problema de **míninos cuadrados no lineales** del inciso a).