EXAMEN PARCIAL II. OPTIMIZACIÓN

Fecha: 24 de Mayo del 2019

Nombre: ______________________________

Nota Importante:

- Escriba su nombre y numere cada hoja usada para responder el examen.
- Por favor, no mezclar las respuestas de **diferentes preguntas** en la misma hoja.
- Subir las soluciones al Moodle
- **Favor de dejar el examen escrito en mi pichonera!**

Preguntas:

(1) [**3 puntos**] Calcule aproximaciones de la primera derivada de una función $f(x)$ en función de

a): $f(x-h)$ y $f(x+2h)$.
b): $f(x-2h)$, $f(x-h)$, $f(x+h)$ y $f(x+2h)$.

(2) [**5 puntos**] Se desea minimizar la siguiente funcional con respecto a y:

$$J[y] = \int_a^b f(t, y, y', y'')dt \tag{1}$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$y(a) = y_a \qquad y(b) = y_b \tag{2}$$

$$y'(a) = \tilde{y}_a \qquad y'(b) = \tilde{y}_b \tag{3}$$

Supongamos que $\hat{y}(t)$ resuelve el problema anterior, es decir,

$$\hat{y} = \arg\min_y J[y] \tag{4}$$

sujeto a las condiciones (2)-(3), y sea $\eta(t)$ un variación independiente de $\epsilon \approx 0$, es decir,

$$y(t) = \hat{y}(t) + \epsilon\eta(t)$$

donde $y(t)$ también satisfase las condiciones de frontera mencionadas arriba, condiciones (2)-(3).

a): Muestre que

$$\eta(a) = \eta(b) = \eta'(a) = \eta'(b) = 0$$

b): Usando las igualdades anteriores, verifique que la Ecuación de Euler Lagrange del problema de minimización de (1) con las condiciones (2)-(3) es

$$f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} + \frac{d^2}{dt^2} f_{y''} \quad = \quad 0$$

Sugerencia: Utilice la condición de optimalidad de

$$J(\epsilon) \quad := \quad J[\hat{y} + \epsilon\eta] \tag{5}$$

c): Basado en el resultado anterior y lo estudiado en clases, escriba (sin demostracion) cual debe ser la Ecuacion de Euler Lagrange correspondiente al funcional

$$J[y] \quad = \quad \int_a^b f(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) dt \tag{6}$$

(sujeto a las condiciones de frontera apropiadas)

d): Un problema típico del cálculo variacional es el problema de minima superficie, el cual se puede formular como sigue

$$\min_z J[z] \tag{7}$$

donde

$$J[z] \quad := \quad \int_\Omega \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \tag{8}$$

y Ω es el cuadrado unitario $[0,1] \times [0,1]$.

Escriba la ecuación de Euler Lagrange correspondiente a este problema.

(3) [**2 puntos**] Una manera de obtener la aproximación de la inversa del Hessiano del método Cuasi Newton BFGS es mediante la solución del siguiente problema de optimización con restricciones:

$$\begin{aligned} H_{k+1} \quad = \quad & \arg\min_H \|H - H_k\|^2 \\ & \text{sujeto a: } \; H^T = H \\ & \qquad\qquad H \, y_k = s_k \end{aligned}$$

donde $H_k^T = H_k$, $\|A\| = \|W^{1/2} A W^{1/2}\|_F$ con $W s_k = y_k$ y $W^T = W$.

Las condiciones de optimalidad del problema anterior conducen a resolver el siguiente sistema de ecuaciones para las incógnitas H, Λ, λ

$$\begin{aligned} 2W(H - H_k)W - \Lambda - \lambda y_k^T &= 0 & (9)\\ H^T &= H & (10)\\ \Lambda^T &= -\Lambda & (11)\\ Hy_k &= s_k & (12) \end{aligned}$$

donde H_k y W satisfacen

$$\begin{aligned} H_k^T &= H_k & (13)\\ Ws_k &= y_k & (14)\\ W^T &= W & (15) \end{aligned}$$

Escriba H en función de H_k, s_k, y_k resolviendo el sistema (9)-(12) con respecto a H y conociendo que H_k y W satisfacen (13)-(15).