Examen Parcial I. Optimización

Fecha: 2 de Abril del 2019
Nombre: ______________________________

Nota Importante:

- Escriba su nombre y numere cada hoja usada para responder el examen.
- Por favor, no mezclar las respuestas de **diferentes preguntas** en la misma hoja.
- **El examen esta formado por las preguntas 1 y 2**
- No necesita comentar el código que se solicita en la pregunta 1, **(recuerde subir el código)**
- La pregunta 3 es opcional y podrá alcanzar hasta un punto adicional si resuelve esta pregunta.
- En caso de alcanzar más de 10 puntos, la puntuación adicional se considerará para el próximo examen.
- **Favor de dejar el examen escrito en mi pichonera!**

Preguntas:

1. [**6 puntos**] Sea

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x} \tag{1}$$

donde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica y postiva definida; $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Dado un punto inicial $\mathbf{x}_0$ y el siguiente esquema iterativo

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$$

con tamaño de paso exacto, ie,

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha>0} f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k)$$

con $\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{Q}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{b}$ y dirección $\mathbf{d}_k$ definida como sigue

$$\mathbf{d}_{k+1} = -\gamma_{k+1}\mathbf{g}_{k+1} + \mathbf{d}_k$$

para $k = -1, 0, 1, \cdots$; con $\mathbf{d}_{-1} = 0$, $\mathbf{d}_{k+1}^T \mathbf{Q}\mathbf{d}_k = 0$ y $\gamma_0 = 1$.

a) Calcula γ_{k+1} en función de $\mathbf{g}_{k+1}$, $\mathbf{d}_k$ y $\mathbf{Q}$.

b) Verifica que $\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{g}_k + \alpha_k \mathbf{Q}\mathbf{d}_k$

c) Muestra que $\mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{d}_{k-1} = 0$ y $\mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{g}_k = 0$

d) Muestre que $\mathbf{d}_{k+1}$ es una dirección de descenso, para $k > -1$.

e) Implemente el algoritmo anterior en Python (**Nota**: subir código).

f) Ejecute la implementacion anterior para $n = 100$, $\mathbf{x}_0 = 0$, $\mathbf{b} = 1$ un vector de unos y $\mathbf{Q}$ una matriz diagonal con entradas $q_{ii} = i^2$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Muestre las gráficas (k, f_k) y $(k, \|\mathbf{g}_k\|)$, $k = 0, 1, ...$ donde $f_k = f(\mathbf{x}_k)$ y $\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$.

2. [**4 puntos**] Definamos la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $n > 1$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T \mathbf{Q}\mathbf{z} \tag{2}$$

donde $\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T, y]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ y

$$y \stackrel{def}{=} \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i} \in \mathbb{R} \tag{3}$$

$$\mathbf{Q} \stackrel{def}{=} \mathbf{1}\mathbf{1}^T - \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} \tag{4}$$

con $\mathbf{1}$ denotamos un vector de unos, y con $\mathbf{I}$ la matriz identidad.

a) Halla el punto crítico $\mathbf{x}^*$ de $f(\mathbf{x})$ tal que $x_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

b) Verifica que el punto crítico anterior es un mínimo

c) Calcula el valor $f(\mathbf{x}^*)$

3. [**1 punto** adicional] Se desea resolver la ecuación

$$x^2 - a \quad = \quad 0 \tag{5}$$

donde $a, x \in \mathbb{R}$ y $a > 0$. El método de Newton se puede escribir como sigue

$$x_{k+1} \quad = \quad \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right). \tag{6}$$

Suponga que el proceso iterativo anterior converge:

a) A qué valor converge?

b) Cuál es el orden de convergencia y verifíquelo?