Tarea 11: Introducción al Cálculo Variacional

Optimización I

Maestría en Computación
Centro de Investigación en Matemáticas

Esteban Reyes Saldaña
esteban.reyes@cimat.mx

10 de mayo de 2021

Ejercicio 1

Usa la ecuación de Euler-Lagrange para buscar los extremos de las siguientes funcionales

$$J[y] = \int_a^b (xy' + (y')^2)dx, \quad (1)$$

$$J[y] = \int_a^b (1+x)(y')^2 dx. \quad (2)$$

Solución. Recordemos que la **Ecuación de Euler-Lagrange** está dada por

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \quad (3)$$

Ahora,

(i) observemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'} &= x + 2y' \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) &= 1 + 2y'' \end{aligned}$$

Así que, por la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\begin{aligned} 1 + 2y'' &= 0 \\ y'' &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Integrando ambos lados de esta ecuación dos veces y por el teorema fundamental del cálculo, obtenemos,

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{1}{2} \\ \int\left(\int y'' dx\right) dx &= \int\left(\int y'' - \frac{1}{2} dx\right) dx \\ \int y' dx &= -\frac{1}{2}\int x + c dx \end{aligned}$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + c_1 x + c_2.$$

(ii) observemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y'} &= 2(1+x)y' \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) &= 2(1+x)y'' + 2y' \end{aligned}$$

Así que, por la ecuación de Euler-Lagrange y asumiento que $y' \neq 0$,

$$\begin{aligned} 2(1+x)y'' + 2y' &= 0 \\ \frac{y''}{y'} &= -\frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

Sea $v(y(x)) = y'(x)$, luego

$$\frac{v'}{v} = -\frac{1}{1+x}$$

Integrando ambos lados de esta ecuación respecto a x y por el teorema fundamental del cálculo, obtenemos,

$$log(v) = -log(1+x)+c$$

aplicando la función exponencial de ambos lados de esta última ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} v &= e^{-log(1+x)+c} \\ v &= c_1\frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

sustituyendo $v = y'$,

$$\begin{aligned} y' &= e^{-log(1+x)+c} \\ y' &= \frac{c_1}{1+x} \end{aligned}$$

integrando ambos lados de la ecuación con respecto a x, tenemos

$$y = c_1 log(x+1)+c_2.$$

Ejercicio 2

Derivar las ecuaciones de Euler Lagrange usando el Método de Lagrange de

$$\int_x\int_y F(x,y,f_x,f_y)dxdy \qquad (4)$$

$$\int_x\int_y F(x,y,u,v,u_x,v_x,u_y,v_y)dxdy. \qquad (5)$$

donde $f,u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \\ u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} \\ v_x &= \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Solución.

(i) Sea Ω el dominio de integración y $\hat{\Omega}$ la curva límite de Ω. Además

$$h(x,y) = \epsilon\eta(x,y)$$

con $\eta(x,y) = 0$ para todo $(x,y)\in\hat{\Omega}$. Se introduce la variación

$$W(x,y) := f(x,y)+h(x,y) = f(x,y)+\epsilon\eta(x,y).$$

Sea

$$I(\epsilon) = \int_x\int_y F(x,y,W,W_x,W_y)dxdy. \qquad (6)$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial\epsilon} &= \eta(x,y) = \eta \\ \frac{\partial W_x}{\partial\epsilon} &= \frac{\partial}{\partial\epsilon}\eta(x,y) = \eta_x \\ \frac{\partial W_y}{\partial\epsilon} &= \frac{\partial}{\partial\epsilon}\eta(x,y) = \eta_y. \end{aligned}$$

Luego, diferenciando respecto a ϵ y usando regla de la cadena

$$\begin{aligned} I'(\epsilon) &= \int_x\int_y \frac{\partial F}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial W_x}\frac{\partial W_x}{\partial\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial W_y}\frac{\partial W_y}{\partial\epsilon}dxdy \\ &= \int_x\int_y \frac{\partial F}{\partial W}\eta + \frac{\partial F}{\partial W_x}\eta_x + \frac{\partial F}{\partial W_y}\eta_y dxdy. \end{aligned}$$

Para $\epsilon = 0$ se tiene que

$$0 = \int_x\int_y \frac{\partial F}{\partial W}\eta + \frac{\partial F}{\partial W_x}\eta_x + \frac{\partial F}{\partial W_y}\eta_y dxdy.$$

Ahora, por el Teorema de Green, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_x\int_y \eta\left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial f_y}\right)\right]dxdy \\ &\quad + \int_{\hat{\Omega}}\eta\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\frac{y}{ds} - \frac{\partial F}{\partial f_y}\frac{x}{ds}\right)ds. \end{aligned}$$

utilizando el hecho que $\eta(x,y) = 0$ sobre el límite del conjunto de integración obtenemos

$$\int_x\int_y \eta\left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial f_y}\right)\right]dxdy = 0.$$

Como $\eta \neq 0$ para Ω, entonces la función $f(x,y)$ debe cumplir

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial f_y}\right) = 0. \qquad (7)$$

(ii) Procedemos de forma similar al caso (i). Sean

$$\begin{aligned} W(x,y) &= u(x,y)+\epsilon_1\eta(x,y) \\ Z(x,y) &= v(x,y)+\epsilon_2\theta(x,y). \end{aligned}$$

Luego, si $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2]^T$,

$$I(\epsilon) = \int_x \int_y F(x, y, W, Z, W_x, Z_x, W_y, Z_y) dxdy$$

por lo que, derivando respecto a cada entrada tenemos

$$\nabla I(\epsilon) = \begin{bmatrix} \int_x \int_y \frac{\partial F}{\partial W}\eta + \frac{\partial F}{\partial u_x}\eta_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\eta_y dxdy \\ \int_x \int_y \frac{\partial F}{\partial W}\theta + \frac{\partial F}{\partial u_x}\theta_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\theta_y dxdy \end{bmatrix}$$

Evaluando en $\epsilon = [0, 0]^T$ y aplicando el Teorema de Green, llegamos a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial v_y} &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Ejercicio 3

Obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange de

$$\int_x \int_y (f - g)^2 + \lambda ||\nabla f||^2 dxdy \tag{9}$$

$$\int_x \int_y (p - q - p_x u - q_x v)^2 + \lambda(||\nabla u||^2 + ||\nabla v||^2) dxdy \tag{10}$$

donde $f, u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $p, q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones dadas.

Para resolver estos dos problemas, se utilizarán los resultados obtenidos en el **Ejercicio 2**.

(i) Notemos que

$$||\nabla f||^2 = f_x^2 + f_y^2$$

Así que

$$\begin{aligned} &\int_x \int_y (f - g)^2 + \lambda ||\nabla f||^2 dxdy \\ = &\int_x \int_y (f - g)^2 + \lambda(f_x^2 + f_y^2) dxdy. \end{aligned}$$

Aquí

$$F(x, y, f_x, f_y) = (f - g)^2 + \lambda(f_x^2 + f_y^2)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial f} &= 2(f - g) \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial f_x} &= \frac{\partial}{\partial x} 2\lambda f_x \\ &= 2\lambda f_{xx} \\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial f_y} &= \frac{\partial}{\partial y} 2\lambda f_y \\ &= 2\lambda f_{yy} \end{aligned}$$

utilizando la ecuación (7), tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial f_y}\right) \\ &= 2(f - g) - 2\lambda(f_{xx} + f_{yy}) \\ &= 2(f - g) - 2\lambda(f_{xx} + f_{yy}). \end{aligned}$$

la **Ecuación de Euler-Lagrange** está dada por

$$(f - g) - \lambda(f_{xx} + f_{yy}) = 0.$$

(ii) Notemos, de nuevo que

$$||\nabla u||^2 + ||\nabla v||^2 = u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2$$

Así que

$$\begin{aligned} &\int_x \int_y (p - q - p_x u - q_x v)^2 + \lambda(||\nabla u||^2 + ||\nabla v||^2) dxdy \\ = &\int_x \int_y (p - q - p_x u - q_x v)^2 + \lambda(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) dxdy. \end{aligned}$$

Aquí

$$\begin{aligned} F(x, y, u, v, u_x, v_y, u_y, v_y) &= (p - q - p_x u - q_x v)^2 \\ &\quad + \lambda(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= -2p_x(p - q - p_x u - q_x v) \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} &= \frac{\partial}{\partial x} 2\lambda u_x \\ &= 2\lambda u_{xx} \\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y} &= \frac{\partial}{\partial y} 2\lambda u_y \\ &= 2\lambda u_{yy} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial v} &= -2q_x(p-q-p_xu-q_xv)\\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v_x} &= \frac{\partial}{\partial x}2\lambda v_x\\ &= 2\lambda u_{xx}\\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial v_y} &= \frac{\partial}{\partial y}2\lambda v_y\\ &= 2\lambda v_{yy}\end{aligned}$$

utilizando las ecuaciones (8), tenemos

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}\\ &= -2p_x(p-q-p_xu-q_xv) - 2\lambda(u_{xx}+u_{yy}).\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial v_y}\\ &= -v.\end{aligned}$$

Por lo que las **Ecuación de Euler-Lagrange** están dadas por

$$\begin{aligned}p_x(p-q-p_xu-q_xv) + \lambda(u_{xx}+u_{yy}) &= 0\\ q_x(p-q-p_xu-q_xv) + \lambda(u_{xx}+u_{yy}) &= 0.\end{aligned}$$