Examen Parcial I. Optimización

Fecha: 17 de Marzo del 2020
Nombre: ______________________________

Nota Importante:

- Escriba su nombre y numere cada hoja usada para responder el examen.
- Por favor, no mezclar las respuestas de **diferentes preguntas** en la misma hoja.
- **El examen esta formado por las preguntas 1, 2 y 3 a), b)**
- El inciso c) de la pregunta 3 es opcional y podrá alcanzar hasta un punto adicional si resuelve esta pregunta.
- En caso de alcanzar más de 10 puntos, la puntuación adicional se considerará para el próximo examen.

Preguntas:

1. [**3 puntos**]

   a) [**1.5 puntos**] Determine los valores de a y b si $\sqrt{x^2+1} = ax + b + o(x)$, cuando $x \to 0$ y compruebe el resultado.

   b) [**1.5 puntos**] Muestra que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^3$ entonces $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x) + O(h^2)$ cuando $h \to 0$.

2. [**3 puntos**] Definamos la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $n > 1$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T\mathbf{Q}\mathbf{z} \tag{1}$$

donde $\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T, y]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ y

$$y \stackrel{def}{=} \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i} \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$\mathbf{Q} \stackrel{def}{=} \mathbf{1}\mathbf{1}^T - \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} \tag{3}$$

con $\mathbf{1}$ denotamos un vector de unos, y con $\mathbf{I}$ la matriz identidad.

a) [**1 punto**] Halla el punto crítico $\mathbf{x}^*$ de $f(\mathbf{x})$ tal que $x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n.$

b) [**1 punto**] Verifica que el punto crítico anterior es un mínimo

c) [**1 punto**] Calcula el valor $f(\mathbf{x}^*)$

3. [**4 puntos**] Sea la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como sigue

$$f(\mathbf{x}) \quad = \quad \frac{1}{2}\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2 \tag{4}$$

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz de rango completo y $m > n$. Sea además la actualización o método de búsqueda en línea

$$\mathbf{x}_{k+1} \quad = \quad \mathbf{x}_k - \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}_k)$$

donde $\mathbf{x}_0$ es un punto inicial conocido y el tamaño de paso $\alpha_k \in \mathbb{R}$ se calcula mediante

$$\alpha_k \quad = \quad \arg\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{1}{2}\|\nabla f(\mathbf{x}_k - \alpha \nabla f(\mathbf{x}_k))\|_2^2$$

a) [**2 puntos**] Calcula α_k en función de la matriz $\mathbf{A}$ y $\mathbf{g}_k \overset{def}{=} \nabla f(\mathbf{x}_k)$.

b) [**2 puntos**] Si al usar el método de busqueda en línea anterior el mínimo $\mathbf{x}^*$ de (4) se obtiene en la primera iteración, es decir, si

$$\mathbf{x}^* \quad = \quad \arg\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}),$$

y $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}^*$, muestre que α_0 es un eigenvalor de $(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}$.

c)** [**1 punto** adicional] Muestra que

$$\frac{1}{\lambda_M} \leq \alpha_k \leq \frac{1}{\lambda_m}$$

donde λ_m, λ_M son el eigenvalor menor y mayor respectivamente de la matriz $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.