2. MÉTODOS NUMÉRICOS

2.1. Método de la Bisección de Bolzano

Este método consiste en localizar una solución generando una sucesión de intervalos de tamaño decreciente en cada iteración. Cómo se llega a asegurar que existe la raíz, cómo se obtiene la misma y cómo se implementa el método se muestra a continuación.

Por el teorema del valor intermedio o teorema de Bolzano se sabe que dada una función f que es continua en un intervalo $[a, b]$ y dado un cierto valor real, L, de forma que se cumpla que $f(a) \leq L \leq f(b)$, entonces existe un valor real $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = L$. Es decir, se asegura que en una función continua se alcanzan todos los valores intermedios.

Por tanto, si se tiene una función continua de forma que $f(a)$ y $f(b)$ tengan distinto signo, es decir, que se cumpla que $f(a) * f(b) < 0$, por el teorema del valor intermedio se tiene que para todo número L perteneciente al intervalo $[f(a), f(b)]$ va a existir un cierto valor c tal que $f(c) = L$. Pero tal y como está definida la función, el valor 0 pertenece al intervalo $[f(a), f(b)]$, luego en particular existirá un valor r tal que $f(r) = 0$, es decir corta al eje OX, y por tanto r es la raíz buscada.

Una vez que se ha asegurado la existencia de la raíz, se implementa el método específico para encontrarla. El método numérico consiste en ir dividiendo el intervalo a la mitad en cada paso de la iteración, es decir, en cada paso se calcula el punto medio del intervalo,

$$c_k = (a_k + b_k)/2 \qquad (1)$$

y por tanto en cada iteración se dan tres posibles casos.

- Si $f(c) = 0$, entonces c es la raíz buscada
- Si $f(a) * f(c) < 0$, entonces se sigue buscando la raíz con el método en el intervalo $[a, c]$.
- Si $f(c) * f(b) < 0$, entonces se sigue buscando la raíz con el método en el intervalo $[c, b]$.

De esta forma se obtiene la siguiente sucesión de intervalos $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ y donde se cumple que $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \ldots \leq a_n \leq c_n = r \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$.

Como se puede comprobar después de varias iteraciones y con suficiente esfuerzo se puede encontrar siempre una raíz con la exactitud deseada. Comparado con otros métodos, el método de bisección converge más bien despacio

Efectivamente por el teorema de la convergencia del método de la bisección, si $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión de puntos medios de los subintervalos generados por el método de la bisección, entonces existe $r \in [a, b]$ tal que $f(r) = 0$ y $|r - c_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$, $n = 0,1, \ldots$, y en particular la sucesión $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a la raíz r, es decir $lim_{n\to\infty} c_n = r$.

Se puede finalmente calcular el número de veces n que se ha de aplicar el método para garantizar que el punto medio c_n es una aproximación a la raíz con un error menor que un cierto δ mediante la fórmula

$$n = \left(\frac{ln(b-a) - ln(\delta)}{ln(2)}\right) \qquad (2)$$

Ejemplo 1.- Hallar la solución de la siguiente ecuación no lineal mediante el Método de Bisección de Bolzano. Búsquese la raíz en el intervalo [0,2] con un error inferior a 1e-6.

$$x \cdot \text{seno}(x) - 1 = 0$$

Solución.- En la hoja de cálculo Excel se va a generar una tabla de iteraciones con diversas columnas, se ponen en el rango “B6:I6” los encabezados de las columnas, así “k” es el número de iteraciones; “ak” es el valor de a en cada nuevo subintervalo, “bk” es el valor de b en cada nuevo subintervalo, “ck” es el punto medio de cada subintervalo hallado, y que será finalmente el valor de la raíz, “f(a)” que es el valor de la función en el punto “ak”, “f(b)” que es el valor de la función en el punto “bk”, “f(c)” que es el valor de la función en el punto “ck” y finalmente “|.|” que contendrá los errores cometidos en cada aproximación a la raíz.

Se introducen los valores del problema y así en la celda “C7” se introduce el valor de a en el intervalo original es decir, 0 y en la celda “D7” se introduce el valor de b en el intervalo original, es decir, 2. En la celda “E7” se halla el punto medio de a y b de acuerdo a la ecuación (1), y se introduce la fórmula “=(C7+D7)/2”.

En las celdas "F7", "G7" y "H7", se introducen los valores calculados de $f(a)$, $f(b)$ y $f(c)$, mediante las fórmulas "=C7*SENO(C7)-1", "=D7*SENO(D7)-1", y "=E7*SENO(E7)-1".

Una vez calculado el punto medio y el valor f(c), hay que comprobar en que caso de los tres posibles se está. Para ello en la celda "C8", de la columna "ak" se introduce la siguiente fórmula "=SI(O(Y(F7>0;H7<0);Y(F7<0;H7>0));C7;E7)" que se corresponde con el segundo caso, es decir cuando $f(a) * f(c) < 0$. De forma análoga se introduce en la celda "D8", de la columna "bk" la fórmula "=SI(O(Y(G7>0;H7<0);Y(G7<0;H7>0));D7;E7)" que se corresponde con el tercer caso, es decir cuando $f(b) * f(c) < 0$. Y de esta forma queda confirmado el siguiente subintervalo.

Se continúa de esta forma hasta comprobar que el error que está en la columna I, y cuya fórmula en Excel es "=ABS(E8-E7)", es menor que el solicitado. Además se sabe por la ecuación (2) que el número de iteraciones ha de ser 21.

Los resultados obtenidos están en la figura 1.

Método de la Bisección de Bolzano

f(x)=x*sen(x)-1 Intervalo [0,2]

k	ak	bk	ck	f(a)	f(b)	f(c)	|.|
0	0,0000000	2,0000000	1,0000000	-1,0000000	0,8185949	-0,1585290	
1	1,0000000	2,0000000	1,5000000	-0,1585290	0,8185949	0,4962425	0,5000000
2	1,0000000	1,5000000	1,2500000	-0,1585290	0,4962425	0,1862308	0,2500000
3	1,0000000	1,2500000	1,1250000	-0,1585290	0,1862308	0,0150510	0,1250000
4	1,0000000	1,1250000	1,0625000	-0,1585290	0,0150510	-0,0718266	0,0625000
5	1,0625000	1,1250000	1,0937500	-0,0718266	0,0150510	-0,0283617	0,0312500
6	1,0937500	1,1250000	1,1093750	-0,0283617	0,0150510	-0,0066428	0,0156250
7	1,1093750	1,1250000	1,1171875	-0,0066428	0,0150510	0,0042080	0,0078125
8	1,1093750	1,1171875	1,1132813	-0,0066428	0,0042080	-0,0012165	0,0039063
9	1,1132813	1,1171875	1,1152344	-0,0012165	0,0042080	0,0014960	0,0019531
10	1,1132813	1,1152344	1,1142578	-0,0012165	0,0014960	0,0001398	0,0009766
11	1,1132813	1,1142578	1,1137695	-0,0012165	0,0001398	-0,0005383	0,0004883
12	1,1137695	1,1142578	1,1140137	-0,0005383	0,0001398	-0,0001993	0,0002441
13	1,1140137	1,1142578	1,1141357	-0,0001993	0,0001398	-0,0000297	0,0001221
14	1,1141357	1,1142578	1,1141968	-0,0000297	0,0001398	0,0000550	0,0000610
15	1,1141357	1,1141968	1,1141663	-0,0000297	0,0000550	0,0000127	0,0000305
16	1,1141357	1,1141663	1,1141510	-0,0000297	0,0000127	-0,0000085	0,0000153
17	1,1141510	1,1141663	1,1141586	-0,0000085	0,0000127	0,0000021	0,0000076
18	1,1141510	1,1141586	1,1141548	-0,0000085	0,0000021	-0,0000032	0,0000038
19	1,1141548	1,1141586	1,1141567	-0,0000032	0,0000021	-0,0000006	0,0000019
20	1,1141567	1,1141586	1,1141577	-0,0000006	0,0000021	0,0000007	0,0000010
21	1,1141567	1,1141577	1,1141572	-0,0000006	0,0000007	0,0000001	0,0000005

Figura 1. Resolución mediante el Método de la Bisección de Bolzano