



Universidad del
Rosario

Resolviendo problemas de Cauchy

Realizado por:
Esteban Hernández Ramírez

En el curso:
Ecuaciones diferenciales parciales

Trabajo presentado a
PhD. Luz Myriam Echeverry Navarro.

Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología
Matemática Aplicadas y Ciencias de la Computación
Universidad del Rosario
Noviembre 24 de 2021

1. La fórmula de d'Alembert resuelve el problema de Cauchy

Considere el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= F(x, t) & -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 < t \\ u_t(x, 0) &= g(x) \end{aligned} \quad (1)$$

La fórmula de d'Alembert es la siguiente fórmula explícita:

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + \frac{1}{2c} \iint_{\Delta} F(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (2)$$

Notemos que la ecuación 2 está definida para cualquier $-\infty < x < \infty$ y $0 < t$.

Ahora bien, sabemos que el siguiente **operador diferencial** es, en efecto, un **operador lineal**:

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Esto significa que el problema de Cauchy 1 está caracterizado por una ecuación **NO homogénea**.

No en vano, el **principio de superposición** garantiza que la solución al problema de Cauchy con $f(x) = 0 = g(x)$:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= F(x, t) & -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) &= 0 & 0 < t, \\ u_t(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

siempre puede combinarse linealmente con una solución del problema de Cauchy de **ecuación homogénea**:

$$L[U] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad y \quad f(x), g(x) \text{ arbitrarias.}$$

Para, de esta manera, construir una solución al problema de Cauchy **NO homogéneo** original, con valores iniciales, $f(x)$ y $g(x)$, arbitrarios.

No en vano, para $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$, la ecuación 2, que es la candidata a solución, se vuelve:

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \iint_{\Delta} F(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (4)$$

Así que, demostrar que la ecuación 2 es solución al problema de Cauchy 1, se reduce a verificar que la función 4 es solución al problema de Cauchy “simplificado”, 3. Por lo tanto, demostraremos esto último.

Para empezar, tomemos

$$v(x, t) = \frac{1}{2c} \iint_{\Delta} F(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Ahora bien, Δ es el **dominio de influencia** de la solución, el cual es el triángulo de vértice (x, t) y base el intervalo $[x - ct, x + ct]$ sobre el eje- x . Así que las variables de integración ξ y τ varían en los intervalos $[0, t]$

(la altura del triángulo) y $[x - c(t - \tau), x - c(t + \tau)]$ (la base del triángulo), respectivamente.

Así, podemos reescribir la función $v(x, t)$, especificando sus límites de integración, como:

$$v(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{\Delta} F(\xi, \tau) d\xi d\tau = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

No obstante, es fácil notar que $v(x, 0) = 0$, pues un triángulo de altura cero tiene un área de tamaño cero. \square

Ahora bien, el **Teorema Fundamental del Cálculo** establece que:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{a(t)}^{b(t)} G(s, t) ds \right] = \left[G(b(t), t) \cdot b'(t) - G(a(t), t) \cdot a'(t) \right] + \int_{a(t)}^{b(t)} G_t(s, t) ds.$$

Así que, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} v_t(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi d\tau \right] \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi d\tau \right] \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^t \left[c \cdot F(x + c(t - \tau), \tau) - (-c) \cdot F(x - c(t - \tau), \tau) + \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^t [c \cdot F(x + c(t - \tau), \tau) - (-c) \cdot F(x - c(t - \tau), \tau)] d\tau + \frac{1}{2c} \int_0^t \left[\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [F(x + c(t - \tau), \tau) + F(x - c(t - \tau), \tau)] d\tau + \frac{1}{2c} \int_0^t \left[\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [F(x + c(t - \tau), \tau) + F(x - c(t - \tau), \tau)] d\tau + \frac{1}{2c} \int_x^x F(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [F(x + c(t - \tau), \tau) + F(x - c(t - \tau), \tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Así que

$$v_t(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t [F(x + c(t - \tau), \tau) + F(x - c(t - \tau), \tau)] d\tau.$$

No en vano, es fácil notar que $v_t(x, 0) = 0$, ya que los límites de integración son iguales para $t = 0$. \square

En este mismo orden de ideas,

$$\begin{aligned} v_{tt}(x, t) &= \frac{1}{2} \left\{ F(x, t) + F(x, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} [F(x + c(t - \tau), \tau) + F(x - c(t - \tau), \tau)] d\tau \right\} \\ &= F(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^t c F_x(x + c(t - \tau), \tau) + (-c) F_x(x - c(t - \tau), \tau) d\tau \\ &= F(x, t) + \frac{c}{2} \int_0^t F_x(x + c(t - \tau), \tau) - F_x(x - c(t - \tau), \tau) d\tau \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
v_x(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi d\tau \right] \\
&= \frac{1}{2c} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi d\tau \right] \\
&= \frac{1}{2c} \int_0^t \left[F(x+c(t-\tau), \tau) - F(x-c(t-\tau), \tau) + \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau \\
&= \frac{1}{2c} \int_0^t [F(x+c(t-\tau), \tau) - F(x-c(t-\tau), \tau)] d\tau + \frac{1}{2c} \int_0^t \left[\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t [F(x+c(t-\tau), \tau) - F(x-c(t-\tau), \tau)] d\tau + \frac{1}{2c} \int_0^t \left[\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t [F(x+c(t-\tau), \tau) - F(x-c(t-\tau), \tau)] d\tau + \frac{1}{2c} \int_x^x F(\xi, \tau) d\xi d\tau \\
&= \frac{1}{2c} \int_0^t [F(x+c(t-\tau), \tau) - F(x-c(t-\tau), \tau)] d\tau.
\end{aligned}$$

Mientras que,

$$\begin{aligned}
v_{tt}(x, t) &= \frac{1}{2} \left\{ F(x, t) - F(x, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} [F(x+c(t-\tau), \tau) + F(x-c(t-\tau), \tau)] d\tau \right\} \\
&= \frac{1}{2c} \int_0^t F_x(x+c(t-\tau), \tau) - F_x(x-c(t-\tau), \tau) d\tau.
\end{aligned}$$

De esta manera, se comprueba que:

$$\begin{aligned}
v_{tt} - c^2 v_{xx} &= F(x, t) + \frac{c}{2} \int_0^t F_x(x+c(t-\tau), \tau) - F_x(x-c(t-\tau), \tau) d\tau - c^2 \left(\frac{1}{2c} \int_0^t F_x(x+c(t-\tau), \tau) - F_x(x-c(t-\tau), \tau) d\tau \right) \\
&= F(x, t). \quad \square
\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que la función

$$v(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

satisface que

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = F(x, t), \quad v(x, 0) = 0 \quad y \quad v_t(x, 0) = 0.$$

Y de paso, también hemos demostrado que la *fórmula 2 de d'Alembert* es solución al *problema de Cauchy 1*. ■

Remark: note que, durante toda la demostración anterior, hemos asumido que $F, F_x \in C(\mathbb{R})$. No obstante, basta solamente con estas hipótesis para que los argumentos anteriores sean validos, por lo que la demostración sigue siendo lo suficientemente general.

2. Página 73. Ejercicio 3.3

Consideremos la ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden:

$$u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 0 \quad (5)$$

2.1. Forma canónica de la ecuación

La parte principal de la ecuación 5 es

$$u_{xx} + 4u_{xy},$$

de modo que, los coeficientes

$$a = 1$$

$$2b = 4$$

$$c = 0.$$

son independientes del punto (x, y) . Por lo tanto, su discriminante

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - ac \\ &= (2)^2 - (1)(0) \\ &= 4 \\ &> 0 \end{aligned}$$

nos dice que la ecuación 5 es una ecuación **hiperbólica** en todo el plano. No en vano, en clase demostramos que es posible transformar la ecuación 5 a una ecuación hiperbólica en **forma estándar**,

$$L[w] = w_{\xi\eta} + l_1(w) = G(\xi, \eta) \quad \text{con } l_1 \text{ un operador lineal,}$$

mediante un cambio de variables apropiado, $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$, por medio del **operador lineal**:

$$\begin{aligned} L[w] &= Aw_{\xi\xi} + 2Bw_{\xi\eta} + Cw_{\eta\eta} + Dw_{\xi} + Ew_{\eta} + Fw \quad \text{con} \quad \begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\ B &= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \\ C &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2. \end{aligned} \end{aligned}$$

Así que, en realidad, buscamos un cambio de variables $\xi(x, y)$ y $\eta(x, y)$, tal que

$$\begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0, \\ C &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 0. \end{aligned}$$

Mientras que, no exigimos ninguna otra condición sobre B , a parte de que $B \neq 0$. De esta manera, garantizamos que este coeficiente puede factorizarse para incluirlo en la parte lineal $l_1(w)$ o en el término de amortiguamiento, $G(\xi, \eta)$.

No en vano, dado $a \neq 0$, podemos reescribir a A de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\ &= \frac{1}{a} \left(a\xi_x + \xi_y \left(b + \sqrt{b^2 - ac} \right) \right) \left(a\xi_x + \xi_y \left(b - \sqrt{b^2 - ac} \right) \right) \end{aligned}$$

Así que,

$$\left(a\xi_x + \xi_y \left(b + \sqrt{b^2 - ac} \right) \right) = 0 \quad \vee \quad \left(a\xi_x + \xi_y \left(b - \sqrt{b^2 - ac} \right) \right) = 0$$

Ahora bien, Estas dos ecuaciones pueden ser resueltas mediante el método de las características, para encontrar las formas de $\xi(x,y)$ y $\eta(x,y)$, de la siguiente manera: la ecuación

$$\left(a \xi_x + \xi_y \left(b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right)\right) = 0$$

es una **ecuación diferencial parcial cuasi-lineal de primer orden**, sobre la función incognita $\xi(x,y)$. No obstante, podemos indentificar los coeficientes que acompañan a cada una de las derivadas parciales, ξ_x y ξ_y : a y $(b \pm \sqrt{b^2 - ac})$, respectivamente. Luego, por la regla de la cadena se sigue que

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = \left(b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right) \quad y \quad \frac{d\xi}{dt} = 0.$$

Por lo cual, sabemos que la función ξ es constante sobre las líneas características. Mientras que las características son solución de la ecuación

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{(b \pm \sqrt{b^2 - ac})}{a}$$

Luego, reemplazando los valores de $a = 1$, $b = 2$ y $c = 0$ de la ecuación 5, en la ecuación anterior, nos queda que:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(b \pm \sqrt{b^2 - ac})}{a} \\ &= (2 \pm 2), \end{aligned}$$

continuando de esta forma, tomamos la parte positiva, de manera que

$$\frac{dy}{dx} = 4 \quad \implies \quad y = 4x + C.$$

Por lo cual, podemos tomar $\xi(x,y)$ como:

$$\xi = 4x - y.$$

De modo que

$$\xi_x = 4 \quad \xi_y = -1.$$

Ahora bien, podríamos seguir un razonamiento similar al anterior para encontrar la forma de $\eta(x,y)$, sin embargo, no es necesario: hemos escogido a $\xi(x,y)$ de manera apropiada y basta solo con que la transformación de coordenadas sea invertible para que el cambio de variables conserve la clasificación hiperbólica de la ecuación. De hecho, $\eta(x,y)$ quedó libre. Sin embargo, debemos escogerlo de tal manera que el jacobiano,

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix},$$

sea distinto de cero.

Para esto, y también para facilitar los cálculos podemos tomar $\eta = y$, de modo que $\eta_x = 0$ y $\eta_y = 1$.

Con lo cual

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Por lo tanto, hemos conseguido un cambio de variable invertible, que a su vez, conserva la clasificación (hiperbólica) de la ecuación original, y que nos va a permitir reescribir la ecuación 5 en su forma estándar.

Finalmente, todo está listo para reescribir la ecuación 5 en términos de las nuevas variables, ξ y η , en su forma estándar: tomemos $w(\xi, \eta) = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$.

Entonces tenemos que

$$u_x = w_\xi \cdot \xi_x + w_\eta \cdot \eta_x = 4w_\xi$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (4w_\xi)_x = 4(w_\xi)_x \\ &= 4(w_{\xi\xi} \cdot \xi_x + w_{\xi\eta} \cdot \eta_x) \\ &= 16w_{\xi\xi}. \end{aligned}$$

Mientras que,

$$\begin{aligned} u_{xy} &= (4w_\xi)_y = 4(w_\xi)_y \\ &= 4(w_{\xi\xi} \cdot \xi_y + w_{\xi\eta} \cdot \eta_y) \\ &= -4w_{\xi\xi} + 4w_{\xi\eta}. \end{aligned}$$

Con lo anterior, podemos reescribir la parte principal de la ecuación 5 en términos de las nuevas variables como:

$$\begin{aligned} u_{xx} + 4u_{xy} &= (16w_{\xi\xi} + 4(-4w_{\xi\xi} + 4w_{\xi\eta})) \\ &= (16w_{\xi\xi} - 16w_{\xi\xi} + 16w_{\xi\eta}) \\ &= 16w_{\xi\eta}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación 5 puede reescribirse como:

$$u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 16w_{\xi\eta} + 4w_\xi = 0.$$

La forma canónica de la ecuación 5 es

$$w_{\xi\eta} + \frac{1}{4}w_\xi = 0. \quad (6)$$