Aplicaciones de la EDP de onda infinita

Ondas longitudinales: la velocidad del sonido y más

Esteban Hernández Ramírez

4 de abril de 2022

Universidad del Rosario: Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología

Contenido

Contenido

Ondas transversales vs Ondas longitudinales

Existen **dos** tipos de ondas, aunque una **misma** *ecuación de onda*.

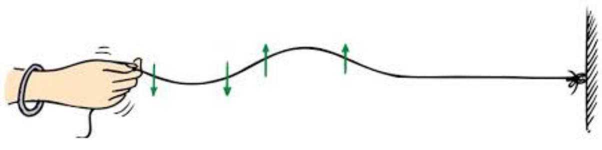

Figura 1: Propagación de una onda **transversal:**
la amplitud y el desplazamiento de la onda son **perpenticulares**.

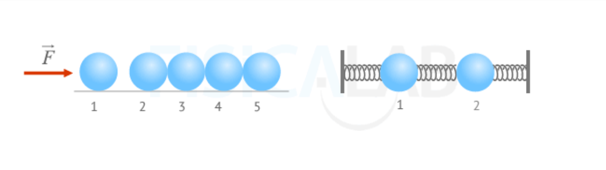

Figura 2: Propagación de una onda **longitudinal:**
la amplitud y el desplazamiento de la onda son **paralelos**.

¿Qué es el sonido?

Sabemos que...

- *sonido* $\Longrightarrow$ transporte de *energía* sin transporte de *materia*.
- *sonido* $\Longleftarrow$ ondas *mecánicas* que se propagan a través de un medio *elástico* sólido, líquido o gaseoso.
- *sonido* $\Longrightarrow$ una velocidad finita.
- *sonido* $\Longleftarrow$ vibración de particulas.

¿Qué tipo de *onda* es el *sonido*?

Contenido

Objetivos

1. Derivar la **ecuación de onda** para *ondas* **longitudinales**:
   - Equivalencia entre la onda longitudinal y el sistema masa-resorte.
   - El sistema masa-resorte "continuo" está governado por una ecuación de onda.
2. El **sonido** se modela naturalmente por medio una **ecuación de onda**:
   - La presión genera un desplazamiento sobre un volumen de aire fijo.
3. Conexión entre las **ondas longitudinales** y el **sonido** por medio de la **ecuación de onda**:
   - La *constante de propagación* para la ecuación de onda del sonido reemplaza a la constante de la ecuación de onda del sistema masa-resorte.

Equivalencia: onda longitudinal y sistema masa-resorte

La manera más fácil de ilustrar la equivalencia entre el concepto de **onda longitudinal** y el **sistema masa-resorte** es mediante un diagrama...

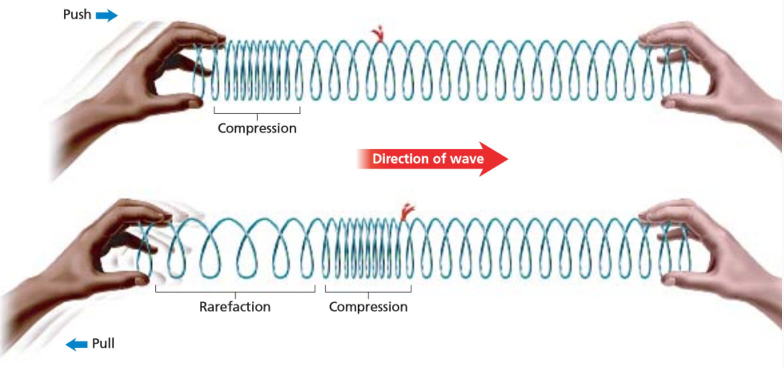

Figura 3: Equivalencia entre la **onda longitudinal** y el **sistema masa-resorte**

Derivando la ecuación de onda: sistema masa/resorte

Considere un sistema compuesto por $k + 1$ **masas iguales**: $k \in \mathbb{N}$.

Además, suponga que las masas están linealmente interconectadas entre sí por **resortes idénticos**, con una constante de rigidez k.

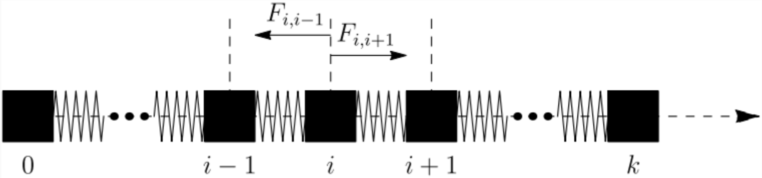

Figura 4: sistema de $k + 1$ masas iguales unidas por medio de resortes idénticos.

Asumamos, sin perdida de generalidad, que las 0-**ésima** y k-**ésima** masas están fijas, mientras que el resto se mueven libremente sobre el eje-x.

Derivando la ecuación de onda: segunda ley de Newton

Sea $u_i(t)$ el *desplazamiento de la i-ésima masa* desde su posición de equilibrio, x_i, en el tiempo t. Definido para todo i: $0 \leq i \leq k$.

Segunda ley de Newton
El producto de la masa y aceleración de un cuerpo es igual a la fuerza neta aplicada sobre ese cuerpo:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

De acuerdo a esta ley, para la *i-ésima* masa se sigue que:

$$F_{i,i+1} - F_{i,i-1} = m \cdot u_i^{''}, \tag{1}$$

donde $F_{i,j}$ denota el *empuje* que la *j-ésima* masa ejerce sobre la *i-ésima* masa, mientras que m es la masa.

Por simplicidad, asumimos que sobre cada masa unicamente las masas inmediatamente adyacentes ejercen una fuerza sobre ella.

Derivando la ecuación de onda: ley de Hook

Ahora bien, para desplazamientos lo suficientemente pequeños de una masa, empujada por un resorte, se cumple lo siguiente:

Ley de Hook
La fuerza es proporcional al desplazamiento:

$$\vec{F} = -k \cdot u.$$

En este caso, conviene escribirla así: el signo 'menos' se debe a que el vector de fuerzas apunta en la dirección opuesta al eje-u, mientras que k es el parámetro de rigidez del resorte (como en la figura 4).

Luego, podemos reescribir la ecuación 1, para la *i-ésima* masa, como:

$$\begin{aligned} m \cdot u_i'' &= F_{i,i+1} - F_{i,i-1} & & 1 \le i \le k-1 \\ &= k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1}) & ; \qquad & u_0 = 0 \\ &= k(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), & & u_k = 0 \end{aligned}$$

Derivando la ecuación de onda: infinitas masas

Hasta ahora, tenemos un sistema de $(k-1)$ ecuaciones diferenciales.

Ahora, suponga que $k \to \infty$, es decir, que tenemos infinitas masas.

Continuidad
Asumiendo que las masas en su posición de equilibrio están separadas a una misma distancia h entre sí, entonces

$$k \to \infty \qquad \text{es equivalente a} \qquad h \to 0.$$

De esta manera, la posición de equilibrio de la i-ésima masa se convierte en una variable continua.

No en vano, podemos considerar que

$$u_i(t) \equiv u(t, x_i),$$

pues cada masa está caracterizada por su posición de equilibrio.

Derivando la ecuación de onda: segmento de una barra rígida

Cuando $h \to 0$ el vector de desplazamientos,

$$< \ u_1(t), \ u_2(t), \ \ldots \ , \ u_{k-1}(t) \ >,$$

se convierte en una función de dos variables $u(t, \ x)$: *el desplazamiento de una sección transversal de una barra solida que en el tiempo* t *tiene posición de equilibrio* x.

En ese caso, las masas del sistema "continuo" tendrían que ser: $m = \rho S h$, donde ρ es la *densidad* de la barra solida, S es el área de la *sección transversal* de la barra y $h \to 0$.

La *rígidez* de la barra, k, está descrita por la ley física:

$$k = \frac{ES}{h},$$

donde E denota la constante **Young's modulus**.

Derivando la ecuación de onda: series de Taylor

Entonces, cuando $h \to 0$, podemos reescribir:

$$\begin{aligned} u_i'' &= \frac{k\,(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})}{m} \\ &= \frac{E}{\rho} \cdot \frac{(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})}{h^2} \\ &= u_{tt}(t, x_i) \end{aligned}$$

Por otro lado,

las series de taylor de $u_{i+1},\ u_i,\ u_{i-1}$ al rededor de $h = 0$ son:

- $u(t,\ x_i + h) = u(t,\ x_i) + u_x'(t,\ x_i)h + \dfrac{1}{2!}u_{xx}'(t,\ x_i)h^2 + O(h^3)$
- $u(t, x_i) = u(t, x_i) + 0$
- $u(t,\ x_i - h) = u(t,\ x_i) - u_x'(t,\ x_i)h + \dfrac{1}{2!}u_{xx}'(t,\ x_i)h^2 - O(h^3)$

Derivando la ecuación de onda: ecuación de onda

Con la expansiones de taylor anteriores, se tiene que

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = u_{xx}(t, x_i) + O(h)$$

Por lo tanto

$$\lim_{h \to 0} u_i'' = u_{tt}(t, x_i)$$

y

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{E}{\rho} \cdot \frac{(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})}{h^2} \right) = \frac{E}{\rho} \cdot u_{xx}(t, x_i)$$

Ecuación de onda para sistema masa-resorte

$$u_{tt}(t,\ x_i) = c^2 u_{xx}(t,\ x_i) \qquad con \qquad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

El razonamiento anterior, únicamente tiene sentido cuando consideramos **condiciones iniciales**.

Ecuación de onda con condiciones iniciales: sistema masa-resorte

$$u_{tt}(t,\ x_i) = c^2 u_{xx}(t,\ x_i) \qquad \textit{con} \qquad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

$$u(0,\ x) = f(x) \qquad y \qquad u_t(0,\ x) = g(x).$$

Opcionalmente, si quisieramos fijar los "extremos de la barra", podemos especificar **condiciones de frontera**:

$$u(t,\ 0) = h(x) = u(t,\ \ell).$$

Modelamiento del sonido: propósito

La idea es ver que el sonido es una **onda longitudinal**, en términos de **posición** y **presión/densidad**.

Para esto, vale la pena tener en cuenta los siguientes aspectos:

- el **sonido** puede propagarse a través de *sólidos*, *líquidos* y *gases*. Aunque, aquí solamente estudiaremos su propagación a través del *aire*.
- en el *aire* las moléculas se **empujan** y se **halan** las unas a las otras. Generando así una suerte de sistema **masa-resorte** como el de arriba.

En ese orden de ideas, nuestro objetivo principal será conseguir el **análogo** a la *constante de propagación* $c = \sqrt{E/\rho}$, del sistema **masa-resorte**, para las ondas de **sonido** en el *aire*.

Modelamiento: naturaleza unidimensional de la onda sonora

Para enfatizar la naturaleza unidimensional de la onda, consideramos un tubo de aire contenido dentro de un contenedor cilindrico, con un area de sección transversal dada, S.

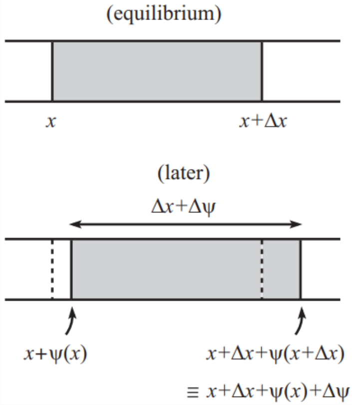

Figura 5: Desplazamiento respecto a su posición de equilibrio

Contenido

Simulación en MATLAB