

## **PROYECTO FINAL**

**ASIGNATURA:** ANALISIS DE VIBRACIONES

**PRESENTADO POR:**

Maria Fernanda Villegas  
Daniel Rojas Chica  
Nelson Esteban Hernández Soto  
Santiago Restrepo Villa

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA**

PROGRAMA DE INGENIERIA CIVIL – ESPECIALIZACION EN ESTRUCTURAS  
SEDE MANIZALES

### **1. INTRODUCCIÓN**

Más del 85% de la población colombiana se localiza en zona de convergencia de placas tectónicas, expuesta a una amenaza sísmica entre intermedia y alta. La amenaza sísmica no constituye un riesgo si no es acompañada por edificaciones vulnerables. Es sabido que el daño parcial o colapso de las construcciones durante y después de un sismo es la mayor causa de víctimas, disturbios sociales y pérdidas económicas. [NSR-10]. Es por esto por lo que se convierte en una necesidad indispensable el diseñar y construir las edificaciones con un desempeño capaz de resistir grandes sollicitaciones sísmicas (grandes vibraciones), sin presentar daños en los elementos estructurales, y por ende nunca llegar al colapso.

Las estructuras son una conformación de partes unidas entre si para formar un marco de soporte, es decir, un conjunto de materiales y uniones que trabajan en conjunto para mantenerse en pie y lograr cumplir el objetivo (funcionalidad) que tienen para lo que fueron construidas. En los últimos años, con la llegada y el uso de nuevos materiales relativamente ligeros y con un mayor conocimiento de sus propiedades la carga estructural, la masa de las estructuras construidas para cumplir una determinada función ha disminuido.

El análisis de vibraciones en estructuras permite obtener las frecuencias naturales y la respuesta a la excitación esperada. Hoy en día, pocas estructuras, pueden ser diseñadas sin llevar a cabo el análisis de vibraciones necesario, si su desempeño dinámico debe ser controlado. La vibración que se produce en la mayoría de las estructuras y sistemas dinámicos es indeseable. Esto es, no sólo por los movimientos resultantes, el ruido y los esfuerzos dinámicos que conducen a la fatiga y falla de la estructura; también, por las pérdidas de energía y la reducción de rendimiento que acompañan a las vibraciones.

El nivel de vibración en una estructura se puede atenuar reduciendo la excitación o la respuesta de la estructura a esa excitación o ambas. En la etapa de diseño, es posible reducir la fuerza de excitación o el movimiento. La respuesta estructural se puede alterar cambiando la masa o la rigidez de la estructura, moviendo la fuente de excitación a otra ubicación o aumentando el amortiguamiento en la estructura.

La finalidad del siguiente proyecto es realizar el análisis completo de una estructura reticulada (pórtico) propuesta, a partir de la implementación de 3 métodos de análisis los cuales son:

- Implementación del método de rigideces para análisis de estructuras reticulares.
- Implementación de un método paso a paso para el análisis dinámico de estructuras reticulares bajo cargas dinámicas.
- Implementación de un método de análisis de balance de energía.

Estos 3 análisis se implementaron para un pórtico de 6 pisos, y fueron desarrollados a partir de un algoritmo en Matlab con base en la teoría que será explicada a lo largo del siguiente documento.

## **2. OBJETIVOS**

### **2.1 Objetivo General**

- Desarrollar un cuadro de referencia de los conceptos vistos a lo largo del curso en un proyecto práctico.

### **2.2 Objetivos específicos**

- Implementación del método de rigideces para análisis de estructuras reticulares.
- Implementación de un método paso a paso para el análisis dinámico de estructuras reticulares bajo cargas dinámicas.
- Implementación de un método de análisis de balance de energía.

## **3. MARCO TEORICO**

### **Análisis de Vibraciones**

Se denomina vibración a la propagación de ondas elásticas produciendo deformaciones y tensiones sobre un medio continuo (o posición de equilibrio). En su forma más sencilla, una vibración se puede considerar como un movimiento repetitivo alrededor de una posición de equilibrio. La posición de "equilibrio" es a la que llegará cuando la fuerza que actúa sobre él sea cero. Este tipo de movimiento no involucra necesariamente deformaciones internas del cuerpo entero, a diferencia de una vibración.

El análisis de vibraciones consiste en el estudio del tipo la propagación de ondas elásticas en un material homogéneo y la determinación de los efectos producidos y el modo de propagación. Las vibraciones pueden ser medidas y caracterizadas midiendo la oscilación o desplazamiento alternante de ciertos puntos al paso de una onda elástica.

El análisis de vibraciones en estructuras permite obtener las frecuencias naturales y la respuesta a la excitación esperada. Las frecuencias naturales de la estructura deben determinarse ya que, si esta se excita en una de estas frecuencias, se produce el efecto de resonancia, con el resultado de altas amplitudes de vibración, esfuerzos y deformaciones dinámicos y niveles de ruido perceptibles. Debe evitarse la resonancia y diseñarse la estructura de modo que no se obtenga en condiciones normales, la estructura solo necesita ser analizada en el rango de frecuencia esperado de excitación.

### **Vibración estructural**

Las cargas dinámicas pueden aparecer de diversas formas. Hay dos parámetros que pueden caracterizar a tales cargas: su magnitud y su contenido de frecuencias. Estas cargas dinámicas se pueden reemplazar con cargas estáticas cuando su contenido de frecuencias es bajo si se compara con la frecuencia natural de la estructura en las que se aplican. A veces se las llama análisis o cargas cuasi estáticas para recordar que se está efectivamente pronosticando el efecto de las cargas dinámicas que se tratan como su equivalente estático. La mayoría de las cargas medioambientales (viento, movimientos sísmicos, oleaje, transporte) se pueden reemplazar por sus equivalentes cuasi estáticos.

Ha habido muchos casos de sistemas que fallan, o no alcanzan los objetivos de rendimiento, sea por resonancia, fatiga o vibración excesiva de uno u otro componente. Debido a los graves efectos que las vibraciones no deseadas pueden tener sobre los sistemas dinámicos, es esencial que el análisis de vibraciones estructurales se lleve a cabo como parte inherente de su diseño; buscando eliminar la vibración o, al menos, reducirlo tanto como sea posible.

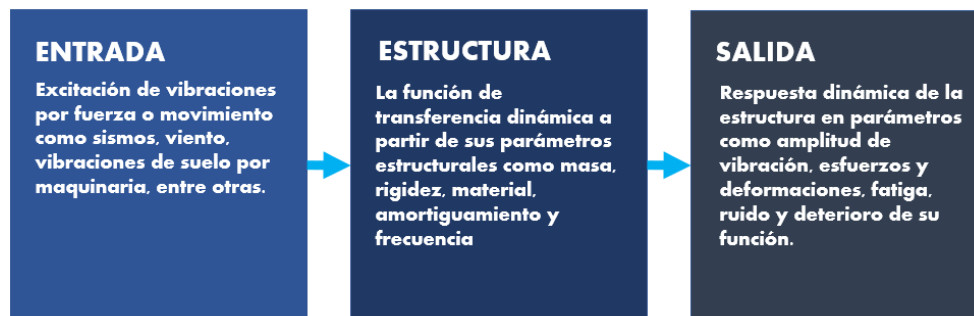
Es más sencillo analizar y modificar una estructura en su etapa de diseño de lo que es modificar una estructura con características de vibración indeseables después de haber sido construida. Un diseño y análisis cuidadoso es necesario para evitar la resonancia o un rendimiento dinámico no deseado. Es indispensable un análisis meticuloso para predecir todos los efectos de estos cambios, ya sea en la etapa de diseño o en una modificación de una estructura existente.

### Causas y efectos de la vibración estructural

En la mayoría de las estructuras la vibración es indeseable, esto se debe a que la vibración crea esfuerzos y deformaciones dinámicas que pueden causar fatiga y falla de la estructura, corrosión por contacto entre los elementos en contacto y ruido en el ambiente, pudiendo perjudicar la función y la vida de la estructura o sus componentes.

Hay dos factores que controlan la amplitud y frecuencia de la vibración en una estructura: la excitación aplicada y la respuesta de la estructura a esa excitación particular.

Cambiar **la excitación** o las características dinámicas de la estructura cambiará la vibración estimulada. La excitación surge de fuentes externas como la vibración del suelo o de su cimentación, vientos cruzados, olas y corrientes, terremotos y fuentes internas a la estructura tales como cargas en movimiento y motores y maquinaria giratorios o alternativos; **la respuesta** de la estructura a la excitación depende del método de aplicación, la ubicación de la fuerza o movimiento excitante, y las características dinámicas de la estructura como sus frecuencias naturales y el nivel de amortiguamiento inherente.



## 4. MÉTODO DE RIGIDECES PARA ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

### 4.1 Descripción y planteamiento teórico del método (Pórtico plano).

Los métodos matriciales consisten en reemplazar la estructura continua real por un modelo matemático de elementos estructurales finitos. Luego, calculando las propiedades elásticas de cada uno de los elementos, se ensamblan las propiedades estructurales del conjunto y se procede a resolver. El método matricial de rigidez es un método de cálculo que se aplica a las estructuras hiperelásticas de barras con comportamiento elástico y lineal. Este método ha sido diseñado para realizar análisis computarizado de estructuras incluyendo aquellas estáticamente indeterminadas. El método matriz se basa en estimaciones de los componentes de las relaciones de rigidez para resolver las fuerzas a través de un ordenador. El método de rigidez directa es la implementación más habitual del método de los elementos finitos. Las propiedades del material son recopiladas en una sola ecuación matricial que dirige el comportamiento interno de la estructura. Los datos de la estructura de los que se tiene desconocimiento son las fuerzas y los

desplazamientos que se pueden delimitar resolviendo esta ecuación. El método directo de la rigidez es el más habitual en los programas de cálculo de estructuras.

El método consiste en asignar a la estructura de barras un objeto matemático, llamado matriz de rigidez, que relaciona los desplazamientos de un conjunto de puntos de la estructura, llamados nodos, con las fuerzas exteriores que es necesario aplicar para lograr esos desplazamientos (las componentes de esta matriz son fuerzas generalizadas asociadas a desplazamientos generalizados). La matriz de rigidez relaciona las fuerzas nodales equivalentes y desplazamientos sobre los nodos de la estructura, mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{Bmatrix} F_1 + R_1 \\ F_2 + R_2 \\ \dots \\ F_n + R_n \end{Bmatrix}_G = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}_G \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_n \end{Bmatrix}_G$$

Donde:  $F_i$  son las fuerzas nodales equivalentes asociadas a las fuerzas exteriores aplicadas sobre la estructura;  $R_i$  son las reacciones hiperestáticas inicialmente desconocidas sobre la estructura;  $\delta_i$  los desplazamientos nodales incógnita de la estructura y  $n$  el número de grados de libertad de la estructura. La energía de deformación elástica también puede expresarse en términos de la matriz de rigidez mediante la relación:

$$E_{def} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta} \cdot [\mathbf{K}(\boldsymbol{\delta})] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} \delta_i \delta_j$$

El método matricial requiere asignar a cada barra elástica de la estructura una matriz de rigidez, llamada matriz de rigidez elemental que dependerá de sus condiciones de enlace extremo (articulación, nudo rígido, etc.), la forma de la barra (recta, curvada, etc.) y las constantes elásticas del material de la barra (módulo de elasticidad longitudinal y módulo de elasticidad transversal). A partir del conjunto de matrices elementales mediante un algoritmo conocido como acoplamiento que tiene en cuenta la conectividad de unas barras con otras se obtiene una matriz de rigidez global, que relaciona los desplazamientos de los nudos con las fuerzas equivalentes sobre los mismos.

Igualmente, a partir de las fuerzas aplicadas sobre cada barra se construye el llamado vector de fuerzas nodales equivalentes que dependen de las acciones exteriores sobre la estructura. Junto con estas fuerzas anteriores deben considerarse las posibles reacciones sobre la estructura en sus apoyos o enlaces exteriores (cuyos valores son incógnitas). Después se construye un sistema lineal de ecuaciones, para los desplazamientos y las incógnitas. El número de reacciones y desplazamientos incógnitas depende del número de nodos: es igual a  $3N$  para problemas bidimensionales, e igual a  $6N$  para un problema tridimensional. Este sistema siempre puede ser dividido en dos subsistemas de ecuaciones desacoplados que cumplen:

- Subsistema 1. Que agrupa todas las ecuaciones lineales del sistema original que solo contienen desplazamientos incógnita.
- Subsistema 2. Que agrupa al resto de ecuaciones, y que una vez resuelto el subsistema 1 y substituido sus valores en el subsistema 2 permite encontrar los valores de las reacciones incógnita.

Una vez resuelto el subsistema 1 que da los desplazamientos, se substituye el valor de estos en el subsistema 2 que es trivial de resolver. Finalmente, a partir de las reacciones, fuerzas nodales equivalentes y desplazamientos se encuentran los esfuerzos en los nudos o uniones de las barras a partir de los cuales

pueden conocerse los esfuerzos en cualquier punto de la estructura y por tanto sus tensiones máximas, que permiten dimensionar adecuadamente todas las secciones de la estructura.

#### 4.1.1 Sistema de pórticos planos:

Es una estructura ensamblada por miembros rectos unidos entre si por conexiones rígidas y/o articuladas, que están sujetos a cargas y reacciones que se encuentran en el plano de la estructura. Bajo la acción de cargas externas, los miembros de un pórtico pueden estar sometidos a fuerzas axiales como los elementos tipo cercha, así como a momentos flectores y cortantes como los elementos tipo viga. Por esta razón, las relaciones de rigidez para elementos de pórticos (frame element) pueden obtenerse convenientemente combinando las relaciones de rigidez para elementos de vigas y de cerchas.

Al considerar que un elemento de pórtico plano puede estar sometido a fuerzas axiales (N), cortantes (V) y momentos (M), en cada nodo se establecen tres grados de libertad: 1. Traslación horizontal ( $U_x$ ), 2. Traslación vertical  $U_y$ , 3. Rotación ( $r_z$ )

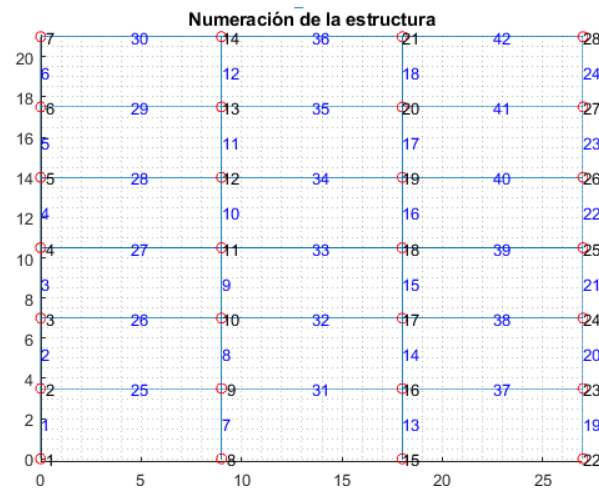


Imagen 1 – Numeración de la estructura a analizar

#### 4.1.2 Ensamblaje de la Matriz de rigidez:

##### 4.1.2.1 Matriz de rigidez de un elemento de un pórtico (Empotrado).

El término (i, j) de una matriz de rigidez equivale a la fuerza que se debe aplicar en el grado de libertad i cuando el grado de libertad j es objeto de un desplazamiento unitario, mientras los demás grados de libertad permanecen restringidos. Los elementos de su diagonal son siempre positivos; si ellos son negativos o cero, es porque la estructura es inestable. Es una matriz singular, simétrica, semidefinida positiva y usualmente rala. Al eliminar los gdl restringidos, K se convierte en Kdd; dicha matriz es simétrica y definida positiva y usualmente invertible.

**Det (Kdd) = 0** (matriz singular) cuando:

- La estructura no está bien restringida y por lo tanto ella tiene un movimiento rígido.
- La estructura es inestable.

**Det (Kdd)  $\approx$  0** (matriz mal condicionada – ill-conditioned matrix) cuando:

- Existen elementos demasiados rígidos en comparación a otros elementos.

Considerando un pórtico cualquiera, con diferentes condiciones de carga y de apoyos, debido a las cargas externas aplicadas, este elemento se deformará y experimentará traslaciones horizontales, verticales y rotaciones, así como también fuerzas axiales, cortantes y momentos flectores en sus nodos extremos. Aplicando las relaciones de rigidez que existen en cada uno de los gdl, se tiene:

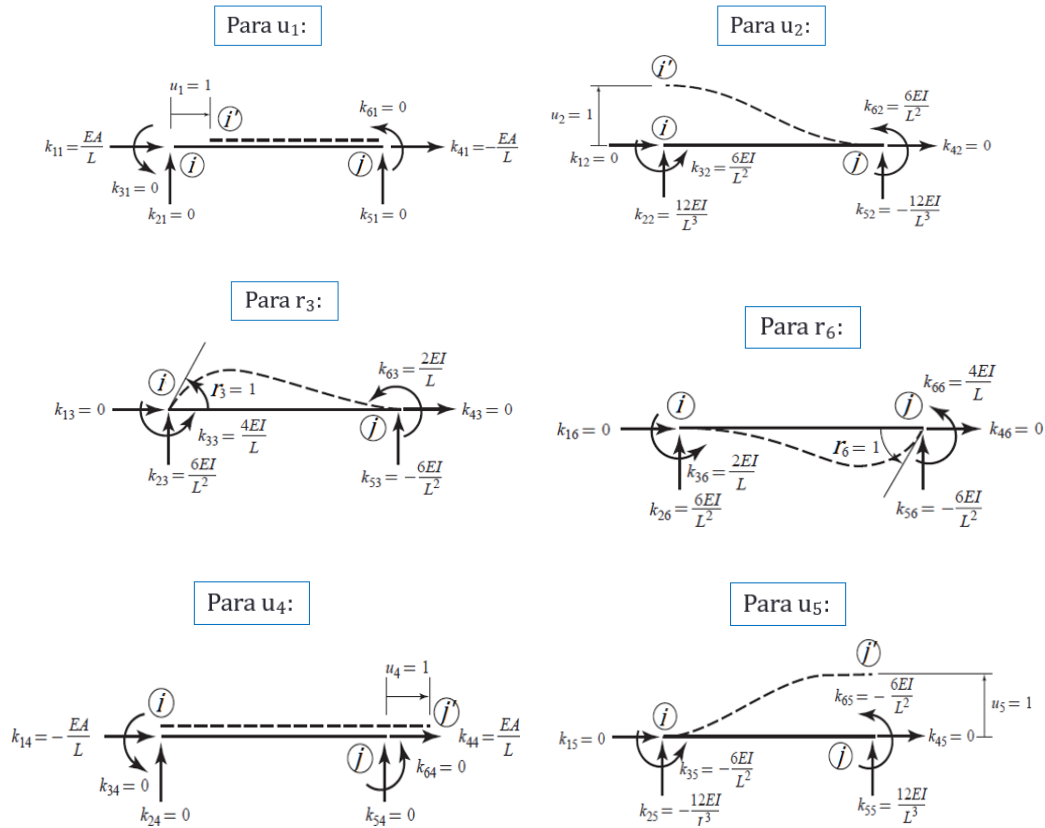


Imagen 2 – Grados de libertad del elemento

Al superponer todas esas contribuciones, podemos obtener la matriz de rigidez en el sistema de coordenadas locales para un elemento (e) prismático de un pórtico plano sin cargas en su longitud.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} N \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_e} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}}_{\mathbf{k}_e} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ r_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ r_6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_e}$$

Matriz de rigidez en el sistema de coordenadas locales para un elemento sin cargas en su longitud

Ahora, consideraremos las fuerzas y momentos que se generan en los extremos debido a las cargas externas aplicadas en la longitud del segmento. Los términos de *fe* representan las Fuerzas de Empotramiento en los extremos de los elementos (Member Fixed-end forces). A diferencia de las vigas, en los elementos de pórtico las cargas pueden estar orientadas en cualquier dirección en el plano de la estructura. Por lo tanto, antes de calcular el vector de fuerzas de empotramiento, cualquier carga actuante en el elemento en una dirección inclinada deberá ser descompuesta en las componentes de los ejes locales *x* y *y* del elemento.

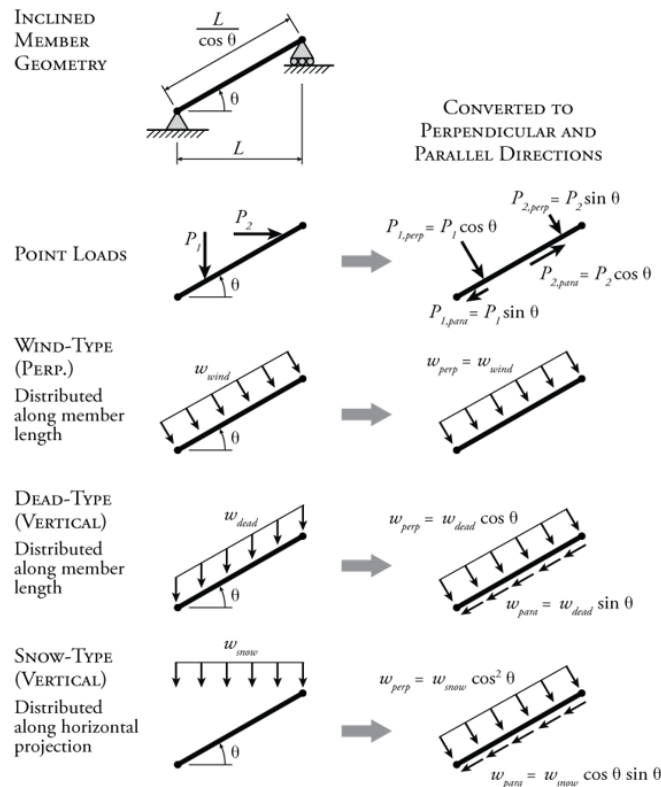


Imagen 3 – Cargas distribuidas en marcos

Luego de que se descomponen las cargas en las componentes de los ejes locales del elemento, ya se puede calcular el vector de fuerzas de empotramiento en los extremos de los elementos. Este vector depende del tipo de cargas que actúen en la longitud del elemento (e) y puede ser obtenido al aplicar diferentes métodos analíticos, como por ejemplo el de la Doble Integración, o métodos numéricos para la resolver las ecuaciones diferenciales:

$$w(x) = EI \frac{d^4 v}{dx^4} \quad N(x) = EA \frac{d\delta}{dx}$$

Esto ha permitido obtener herramientas de ayuda, especialmente tablas, en las cuales se presentan las fuerzas de empotramiento para diferentes tipos de carga con el fin de resumir este paso en el análisis matricial de pórticos. Al superponer todas esas contribuciones, podemos obtener la matriz de rigidez en el sistema de coordenadas locales para un elemento (e) prismático tipo frame con cargas en su longitud.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} N \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_e} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}}_{\mathbf{k}_e} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ r_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ r_6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_e} + \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_e}$$

*Matriz de rigidez en el sistema de coordenadas locales para un elemento con cargas en su longitud*

#### 4.1.2.2 Transformación de sistemas de coordenadas.

Cuando los miembros de una estructura están orientados en diferentes direcciones, se hace necesario transformar las relaciones de rigidez de cada miembro de su sistema de coordenadas local (xy) a un único sistema de coordenadas global (XY) seleccionado para toda la estructura. Las fuerzas y los desplazamientos en los nodos de los elementos se transforman también de lo local a lo global, y viceversa. Las relaciones de rigidez de los miembros expresadas en el sistema de coordenadas global se combinan para establecer las relaciones de rigidez de toda la estructura. La transformación de las matrices de rigidez se explicará más adelante.

##### 4.1.2.2.1 Matriz de transformación para pórticos planos.

La matriz  $\mathbf{T}$  se conoce como la matriz de transformación o matriz de rotación.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Matriz de transformación para pórticos planos*

Donde los cosenos y senos directores pueden ser calculados usando las coordenadas de los nodos inicial y final del elemento analizado:

$$\cos \theta = \frac{X_j - X_i}{L_e} \quad \sin \theta = \frac{Y_j - Y_i}{L_e} \quad L_e = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}$$

Recordar que la matriz  $\mathbf{T}$  es ortogonal, es decir, la inversa de la matriz transformación es igual a su transpuesta:

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T \quad \mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{I}$$



### 4.1.3 Matriz de rigidez de un elemento de un pórtico (Articulado).

En el análisis anterior se supuso que cada miembro tipo frame estaba rígidamente conectado a los nodos en ambos extremos, lo que se conoce en la práctica como conexiones a resistentes a momento, sin embargo, existen casos de vigas o frames unidos mediante conexiones articuladas, conocidas como conexiones simples o a cortante, en las cuales el momento debe ser cero.

Los efectos de estos miembros se pueden añadir al método matricial de la rigidez directa, modificando las relaciones locales de rigidez de los elementos tipo frame deducidas anteriormente para tener en cuenta dichos releases. A continuación, se considerará el caso más común: los elementos unidos considerando rótulas (hinges) en sus extremos. Sin embargo, los conceptos presentados se pueden usar fácilmente para introducir los efectos de otros tipos de releases (por ejemplo, releases de fuerzas axiales y cortantes).

#### 4.1.3.1 Articulado en el nodo i.

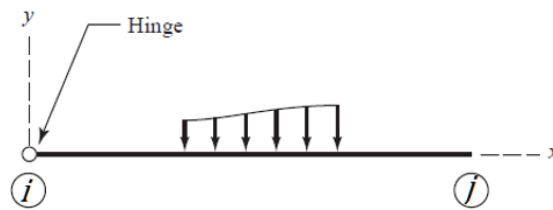


Imagen 4 - Miembro Articulado en el nodo inicial.

Se tienen entonces los siguientes diagramas para los 6 diferentes grados de libertad:

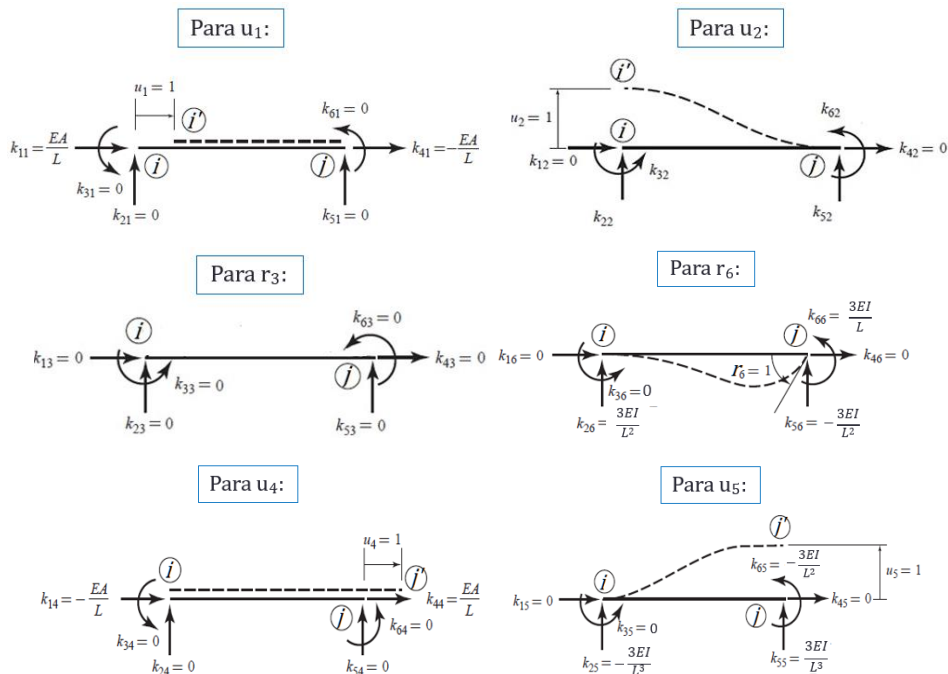


Imagen 5 – Grados de libertad del elemento

Al superponer todas esas contribuciones, podemos obtener la matriz de rigidez en el sistema de coordenadas locales para un elemento tipo frame con articulación en su nodo i:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_e} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{pmatrix}}_{\mathbf{k}_e} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ r_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ r_6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_e} + \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_e}$$

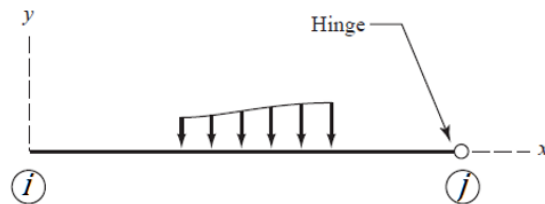
*Matriz de rigidez en el sistema de coordenadas locales para un elemento con articulación en el nodo i.*

El vector  $\mathbf{f}_e$  para este tipo de elementos debe calcularse asumiendo un elemento con el nodo i articulado y el nodo j empotrado. Se pueden seguir empleando las tablas de ayuda para el cálculo de fuerzas de empotramiento, pero se deben hacer las siguientes modificaciones:

$$\mathbf{f}_e = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 - \frac{3}{2L}f_3 \\ 0 \\ f_4 \\ f_5 + \frac{3}{2L}f_3 \\ f_6 - \frac{1}{2}f_3 \end{pmatrix}$$

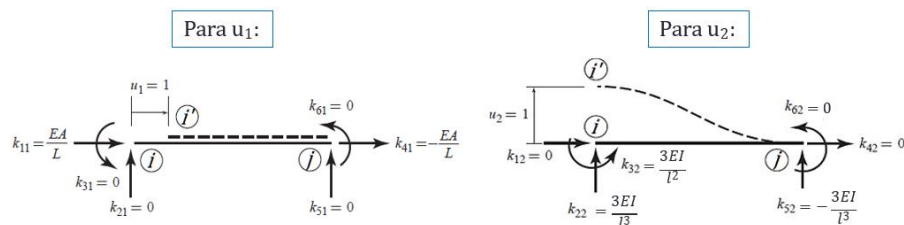
Donde los  $f_i$  se determinan de acuerdo con el tipo de carga según las tablas de ayuda adjuntas, que resuelven las ecuaciones diferenciales ya planteadas.

#### 4.1.3.2 Articulado en el nodo j.



*Imagen 6 - Miembro Articulado en el nodo final.*

Se tienen entonces los siguientes diagramas para los 6 diferentes grados de libertad:



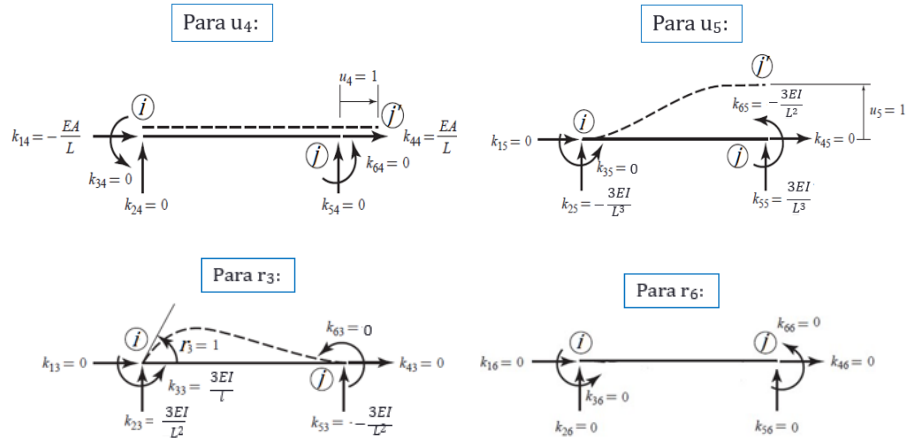


Imagen 7 – Grados de libertad del elemento

Al superponer todas esas contribuciones, podemos obtener la matriz de rigidez en el sistema de coordenadas locales para un elemento tipo frame con articulación en su nodo  $j$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_e} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{k}_e} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ r_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ r_6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_e} + \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_e}$$

Matriz de rigidez en el sistema de coordenadas locales para un elemento con articulación en el nodo  $j$

El vector  $\mathbf{f}_e$  para este tipo de elementos debe calcularse asumiendo un elemento con el nodo  $i$  empotrado y el nodo  $j$  articulado. Se pueden seguir empleando las tablas de ayuda para el cálculo de fuerzas de empotramiento, pero se deben hacer las siguientes modificaciones:

$$\mathbf{f}_e = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 - \frac{3}{2L}f_6 \\ f_3 - \frac{1}{2}f_6 \\ f_4 \\ f_5 + \frac{3}{2L}f_6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde los  $f_i$  se determinan de acuerdo con el tipo de carga según las tablas de ayuda adjuntas, que resuelven las ecuaciones diferenciales ya planteadas.

#### 4.1.3.3 Articulado en ambos nodos.

Al liberar los momentos en ambos extremos, la matriz de rigidez solo tiene en cuenta la contribución de la rigidez axial. Por lo tanto, la matriz de rigidez de un elemento frame con dos hinges se convierte en la de un elemento de cercha plana:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} N_i \\ V \\ M \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_e} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{k}_e} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ r_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ r_6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_e} + \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_e}$$

*Matriz de rigidez en el sistema de coordenadas locales para un elemento con articulación en ambos nodos.*

El vector  $\mathbf{f}_e$  para este tipo de elementos debe calcularse asumiendo un elemento con el nodo i empotrado y el nodo j articulado. Se pueden seguir empleando las tablas de ayuda para el cálculo de fuerzas de empotramiento, pero se deben hacer las siguientes modificaciones:

$$\mathbf{f}_e = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 - \frac{1}{l}(f_3 + f_6) \\ 0 \\ f_4 \\ f_5 + \frac{1}{l}(f_3 + f_6) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde los  $f_i$  se determinan de acuerdo con el tipo de carga según las tablas de ayuda adjuntas, que resuelven las ecuaciones diferenciales ya planteadas.

#### 4.1.4 Matriz de rigidez de un pórtico.

Matriz de rigidez de un elemento de pórtico plano en el sistema global:

$$\mathbf{T}_e^T \mathbf{T}_e \mathbf{P}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e \mathbf{D}_e$$

Llegamos entonces a la relación entre las fuerzas y desplazamientos nodales del elemento expresadas en el sistema global:

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{D}_e$$

Donde  $\mathbf{K}_e$  es la matriz de rigidez del elemento expresada en coordenadas globales.

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{T}_e$$

La matriz de rigidez total de un pórtico plano,  $K$ , tendrá tamaño  $n \times n$ , donde  $n$  es el número de gdl's (3 gdl por cada nodo). Por lo tanto,  $n = 3 \text{ nnod}$ . Esta matriz se determina mediante el método de ensamblaje matricial con las matrices  $K_e$  obtenidas. Se puede hallar con un simple algoritmo:

- Crear una matriz  $K$  de ceros de tamaño  $n \times n$ ,
- Obtener una matriz de correspondencias (matriz de conectividades) entre la numeración local y la numeración global de los grados de libertad.
- En cada posición  $(i, j)$  de la matriz  $K$  agregar las contribuciones  $K_e$  de cada elemento.

Los grados de libertad serán numerados siguiendo estas recomendaciones:

Número del grado de libertad horizontal del nodo  $i$ :  $3i - 2$

Número del grado de libertad vertical del nodo  $i$ :  $3i - 1$

Número del grado de libertad rotacional del nodo  $i$ :  $3i$

Matriz de rigidez  $K$  de una estructura:

$$P = KD + F$$

donde:

- $P$  -> Vector de fuerzas nodales externas ( $n \times 1$ )
- $K$  -> Matriz de rigidez de la estructura ( $n \times n$ )
- $D$  -> Vector de grados de libertad de la estructura ( $n \times 1$ )
- $n$  -> Número de grados de libertad
- $F$  -> Vector de Fuerzas de empotramiento en los nodos de la estructura

#### 4.1.5 Vector de fuerzas de empotramiento en el sistema global:

Al calcular el vector  $f$  (con las tablas de ayuda, por ejemplo) se obtienen las fuerzas de empotramiento de los elementos en el sistema local. Luego, se deben expresar en el sistema global para solucionar todo el pórtico plano.

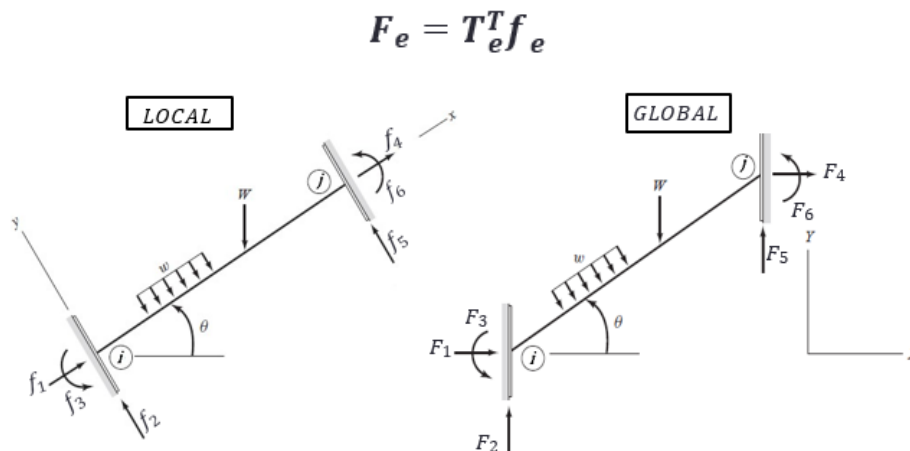


Imagen 7 – Vector de fuerzas en coordenadas locales y globales.

#### 4.1.6 Fuerzas de empotramiento en los nodos de la estructura

Los términos de  $\mathbf{F}$  representan las fuerzas que se generarían en los grados de libertad de la estructura debido a las cargas externas, si todos los nodos de la estructura estuvieran empotrados. Comúnmente, se conocen como Fuerzas de Empotramiento en los nodos de la estructura (Structure Fixed-joint forces). Este vector depende del tipo de cargas que actúen en la longitud de cada elemento (e) y se determina mediante el ensamblaje matricial de los vectores  $\mathbf{f}_e$

Los negativos de  $\mathbf{F}$  se conocen como las Fuerzas Nodales Equivalentes  $\mathbf{F}_q = -\mathbf{F}$  Reciben este nombre porque al aplicar las fuerzas de empotramiento de los nodos de la estructura en sentido contrario, se obtienen los mismos desplazamientos nodales que los obtenidos con las cargas reales de la estructura.

#### 4.1.7 Cálculo de desplazamientos y reacciones:

Se calculan a partir de las siguientes expresiones:

$$D_b = K_{bb}^{-1} (P_b - K_{ba}D_a - F_b)$$

$$P_a = K_{aa}D_a + K_{ab}D_b + F_a$$

Donde:

- $\mathbf{a}$  -> Grados de libertad conocidos (habitualmente los restringidos)
- $\mathbf{b}$  -> Grados de libertad desconocidos (los libres)
- $\mathbf{D}_a$  -> Desplazamientos de los gdl conocidos -> Habitualmente son iguales a cero
- $\mathbf{D}_b$  -> Desplazamientos de los gdl desconocidos -> Incógnitas!
- $\mathbf{P}_a$  -> Fuerzas de los gdl conocidos -> Reacciones y cargas aplicadas en los apoyos
- $\mathbf{P}_b$  -> Fuerzas de los gdl desconocidos -> Incluye las fuerzas nodales externas
- $\mathbf{K}_{aa}$  -> Relaciona los gdl conocidos entre sí
- $\mathbf{K}_{bb}$  -> Relaciona los gdl desconocidos entre sí
- $\mathbf{K}_{ab}, \mathbf{K}_{ba}$  -> Relaciones cruzadas entre los gdl conocidos y desconocidos  $\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{K}_{ba}^T$
- $\mathbf{F}_a$  -> Fuerzas de empotramiento en los gdl conocidos -> En los apoyos
- $\mathbf{F}_b$  -> Fuerzas de empotramiento en los gdl desconocidos

Primero se hallan los desplazamientos desconocidos usando la primera ecuación y luego se hallan las reacciones con la segunda.

#### 4.1.8 Cálculo de la respuesta interna en los elementos:

Después de resolver el sistema, se extraen los  $\mathbf{D}_e$  y se regresan al sistema local:

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{T}_e \mathbf{D}_e$$

Y se calculan las fuerzas internas de cada elemento:

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e + \mathbf{f}_e$$

Donde la matriz de rigidez local de la ecuación anterior deberá ser la matriz de rigidez asociada al tipo de elemento que se le quiera calcular las fuerzas interna.

## 4.2 Matriz de rigidez de un edificio con diafragma rígido sometido a cargas laterales

### 4.2.1 Condensación estática de la matriz de rigidez:

En el análisis de edificios con diafragma rígido resulta conveniente separar los efectos de los desplazamientos laterales de los correspondientes a rotaciones y movimientos verticales. Este procedimiento se llama condensación estática, que consiste en reducir el tamaño de un sistema de ecuaciones mediante la “eliminación” de ciertos grados de libertad. Las fuerzas asociadas a los grados de libertad diferentes a los desplazamientos laterales se consideran nulas y se debe suponer que las vigas no sufren deformación axial (diafragma rígido).

Solamente es necesario un grado de libertad horizontal por piso (los dos extremos de cada viga se desplazarán una cantidad igual) y, por tanto, la condensación estática ha de realizarse a partir de una matriz de rigidez del pórtico  $K$  ensamblada según los grados de libertad que muestran en la imagen 8. El problema se puede simplificar aún más si se desprecian las deformaciones axiales de las columnas, lo cual implica considerar, como grados de libertad secundarios, solamente los giros en los nodos. (edificio de cortante).

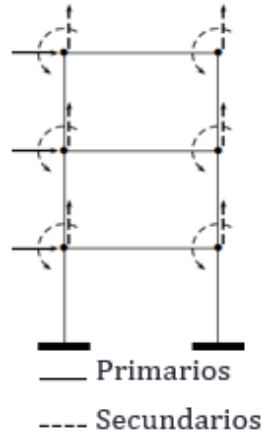


Imagen 8 – Grados de libertad por piso.

La formación de la matriz de rigidez con los grados de libertad mostrados en la figura anterior implica que:

- **Para columnas:** Se consideran 3 grados de libertad por nodo y se emplea:

$$k_e = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez en coordenadas globales para cada columna se obtiene de la manera usual:

$$K_e = T_e^T k_e T_e$$

- **Para vigas:** Si se suprimen las deformaciones axiales, se trabaja con 2 grados de libertad por nodo y se emplea:

$$k_e = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez en coordenadas globales para cada columna se obtiene de la manera usual:

$$K_e = T_e^T k_e T_e$$

Si  $\theta = 0$ , la matriz  $T = I$  y la viga está orientada de forma horizontal, por lo que:

$$K_e = k_e$$

Luego de obtener las matrices de rigidez de cada elemento en coordenadas globales, se procede con el procedimiento de ensamblaje matricial aplicado para pórticos a fin de obtener la matriz  $K$ . Partiendo de la ecuación básica  $P = KD$ , se hace una partición según dos tipos de gdl: los Principales (p) y los Secundarios (s).

$$\begin{pmatrix} P_p \\ P_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_p \\ D_s \end{pmatrix}$$

$$P_p = K_{pp}D_p + K_{ps}D_s$$

$$P_s = K_{sp}D_p + K_{ss}D_s$$

Despejando los desplazamientos de los grados de libertad secundarios:

$$D_s = -K_{ss}^{-1}K_{sp}D_p + K_{ss}^{-1}K_{ps}P_p$$

Sustituyendo en la ecuación anterior se tiene entonces:

$$P_p = (K_{pp} - K_{ps}K_{ss}^{-1}K_{sp})D_p + K_{ps}K_{ss}^{-1}P_s$$

Al considerar un análisis netamente de fuerzas laterales, las fuerzas asociadas a los gdl secundarios se anulan y, por lo tanto:

$$P_p = (K_{pp} - K_{ps}K_{ss}^{-1}K_{sp})D_p$$

$$P_p = K_C D_p$$

Donde  $K_C$  se conoce como la matriz condensada del pórtico plano según los gdl principales:

$$K_C = K_{pp} - K_{ps}K_{ss}^{-1}K_{sp}$$



La condensación implica un debilitamiento de la matriz  $KPP$ . Esta última, a su vez, representa la interacción de los gdl principales entre sí. Con referencia a la definición de la matriz  $KC$ , los términos representan la fuerza en el piso  $i$  cuando en el piso  $j$  tiene lugar un desplazamiento unitario, manteniendo todos los demás desplazamientos y todos los giros iguales a cero. Esto indica que  $KPP$  se obtendría con un modelo de edificio en el cual las vigas tuviesen rigidez infinita a flexión, puesto que así los giros en los nodos son también nulos. Este modelo se denomina viga de cortante.

La formación de la matriz de rigidez del edificio completo con tres gdl por piso requiere transferir la rigidez de cada pórtico de su sistema local al global del edificio, que normalmente tiene como origen el centro de masa ( $\mu$ ) de coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  donde se aplica la resultante de las fuerzas inerciales. Considerando el diafragma de un piso  $j$ . Analizando el pórtico  $i$  con matriz condensada  $KCi$  y un vector de fuerzas horizontales  $Fhi$  distribuidas a lo alto del edificio.

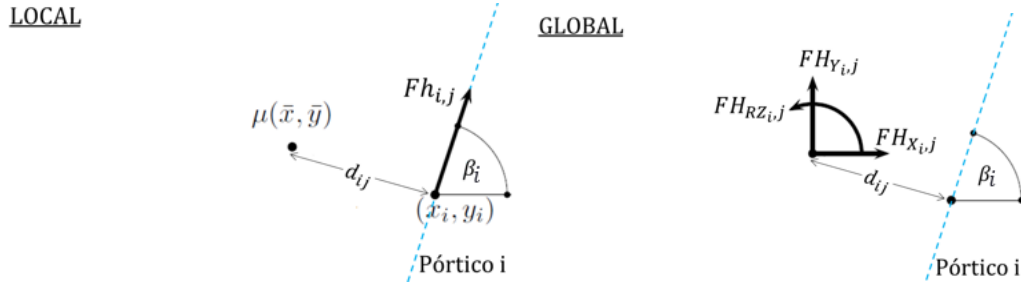


Imagen 9 – Coordenadas globales y locales.

La fuerza horizontal que desarrolla el pórtico  $i$  en el piso  $j$  es  $Fhij$ . En el sistema global, sus componentes equivalen a:

$$\begin{pmatrix} FH_{xij} \\ FH_{yij} \\ FH_{Rzij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_i \\ \sin \beta_i \\ (x_i - \bar{x}) \sin \beta_i - (y_i - \bar{y}) \cos \beta_i \end{pmatrix} (Fh_{i,j})$$

donde  $dij$  es la distancia del pórtico  $i$  al centro de gravedad del piso  $j$ :

$$d_{ij} = (x_i - \bar{x}) \sin \beta_i - (y_i - \bar{y}) \cos \beta_i$$

Para un pórtico  $i$  de  $m$  pisos se tendría:

$$FH_i = A_i^T Fh_i$$

donde  $Ai$  es la matriz de transformación de las fuerzas horizontales del pórtico  $i$  al centro de gravedad del diafragma de cada piso del edificio.

$$A_i^T = \begin{pmatrix} \cos \beta_i & 0 & \dots & 0 \\ \sin \beta_i & 0 & \dots & 0 \\ d_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \cos \beta_i \\ 0 & \dots & 0 & \sin \beta_i \\ 0 & \dots & 0 & d_{im} \end{pmatrix}$$

La contribución del pórtico  $i$  a la matriz de rigidez global, que tiene tamaño  $3m \times 3m$ , sería:

$$\Delta K_{C_i} = A^T K_C A_i$$

donde  $K_{C_i}$  es la matriz de rigidez condensada del pórtico  $i$ . La ecuación anterior asume que el pórtico tiene los mismos  $np$  pisos que el edificio. “De no ser así, la matriz condensada del pórtico se embebe en una matriz  $K_{C_i}$  de tamaño  $np \times np$  que la contenga en los pisos a los que el pórtico contribuya y con ceros en las posiciones restantes” La matriz de rigidez del edificio  $K_T$ , que tiene tamaño  $3np \times 3np$ , se obtiene al superponer las contribuciones de todos los pórticos (ensamblaje):

$$K_T = \sum \Delta K_{C_i}$$

Al aplicar las cargas sísmicas ( $FH$ ) como fuerzas horizontales sobre el centro de masa de la losa, se obtienen unos movimientos ( $U$ ) de dicho centro de masa.

$$U = K_T^{-1} FH$$

Luego de calcular el vector  $U$ , se pueden obtener los desplazamientos principales, los desplazamientos secundarios, las reacciones y las fuerzas internas en cada pórtico.

#### **4.3 Procedimiento paso a paso de la implementación del método:**

Dada la estructura reticular con sus apoyos, cargas, propiedades del material y secciones:

##### **4.3.1 Datos de entrada:**

Datos de los nodos:

- Enumerar todos los nodos del pórtico en el sistema global
- Enumerar los grados de libertad de cada nodo, teniendo en cuenta que el grado de libertad horizontal es  $(3i-2)$ , vertical es  $(3i-1)$  y el rotacional  $(3i)$ . Obtener el número total de gdl ( $n$ )
- Obtener las coordenadas de los nodos

Datos de los elementos:

- Enumerar los elementos
- Determinar su nodo inicial  $i$  y su nodo final  $j$ . Se recomienda que  $i < j$ .
- Determinar las propiedades del material ( $E$ ), área ( $A$ ), inercia con respecto al eje centroidal ( $I$ ), la longitud ( $L$ ) de cada elemento y el tipo de cada elemento

Datos de los apoyos:

- Identificar los tipos de apoyos y los grados de libertad restringidos

Datos de las cargas:

- Identificar los tipos de cargas y los grados de libertad donde están siendo aplicadas

Matrices de correspondencias o de conectividades:

- Crear matriz  $LaG$  y matriz  $GaL$

#### 4.3.2 Proceso de cálculo:

Vector de fuerzas de empotramiento  $f_e$  de cada elemento en el sistema local:

- Obtener las fuerzas de empotramiento en los extremos de cada elemento con ayuda de las tablas de referencia o resolviendo las ecuaciones diferenciales.

Matriz de rigidez  $k_e$  de cada elemento en el sistema local:

- Crear la matriz  $k_e$  de cada elemento dependiendo del tipo de elemento que sea

Matriz de transformación de cada elemento:

- Calcular los cosenos y senos directores de cada elemento usando su ángulo  $\theta$  o sus coordenadas.
- Con el cálculo anterior, obtener la matriz de transformación  $T_e$

Matriz de rigidez  $K_e$  y vector  $F_e$  de cada elemento en el sistema global:

- Obtener la matriz de rigidez  $K_e$  de cada elemento.
- Obtener el vector de fuerzas de empotramiento  $F_e$

Ensamblaje matricial:

- Crear una matriz  $K$  de ceros de tamaño  $n \times n$
- En cada posición  $(i, j)$  de la matriz  $K$  agregar las contribuciones  $K_e$  de cada elemento
- Ensamblar el vector  $P$ , el vector  $D$  y el vector  $F$

Calcular los desplazamientos y las reacciones

- Establecer los gdl restringidos (gdl conocidos) y no restringidos (gdl desconocidos)
- Obtener las submatrices
- Calcular los desplazamientos y las reacciones

Calcular las fuerzas internas en cada elemento

- Obtener los desplazamientos en el sistema local de cada elemento
- Aplicar la ecuación propuesta para calcular las fuerzas internas en cada elemento del pórtico

Chequear equilibrio estático en cada elemento

#### 4.3.3 Datos de salida:

Desplazamientos horizontales, verticales y rotacionales de cada uno de los nodos

Reacciones en los apoyos

Fuerzas axiales, cortantes y momentos flectores de cada elemento de pórtico, con su respectivo signo. Con esta información se construyen los diagramas de  $N$ ,  $V$  y  $M$

## 5. MÉTODO PASO A PASO PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO DE ESTRUCTURAS RETICULARES BAJO CARGAS DINÁMICAS.

Para realizar el análisis dinámico se aplica el principio de Hamilton, el cual establece que la dinámica de un sistema físico está determinada por un problema variacional para un funcional basado en una sola función, la lagrangiana, que puede contener toda la información física relativa al sistema y las fuerzas que actúan sobre él. El problema variacional es equivalente y permite la derivación de las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema físico.

### 5.1. Análisis modal:

El modelo matemático basado en estos parámetros es un modelo lineal que da una descripción completa del comportamiento lineal de la estructura. Un análisis modal es entonces un tipo de método experimental que determina las características de un sistema dinámico y define el modelo dinámico de una estructura.

#### 5.1.1. Aplicaciones:

- Solución de problemas de ruido y vibración:  
Primero encontramos la fuente del problema usando mediciones de vibración bajo condiciones de operación. Si el problema es causado por la resonancia de la estructura (de hecho, una debilidad estructural), podemos realizar modificaciones al modelo dinámico y buscar alternativas para remediarlo.
- Optimización del diseño:  
El análisis modal en los prototipos de las estructuras te permite optimizar el diseño mediante la simulación de la respuesta del prototipo y de esa manera hacer modificaciones al modelo dinámico.
- Monitoreo estructural:  
Los parámetros modales pueden ser usados para monitorear las condiciones de las estructuras, como pueden ser imperfecciones o defectos; por ejemplo, el desarrollo de grietas; esto te permite modificar los parámetros modales de la estructura.
- Verificar modelos analíticos:  
Podemos usar los modelos analíticos en la etapa inicial de diseño de aviones, aeronaves espaciales y otros vehículos. Estos modelos usualmente obtenidos desde la técnica de elemento finito son usados para la simulación y optimización. Una vez que ya hemos creado un prototipo de la estructura se hace un análisis modal y se compara el modelo resultante con el modelo analítico. Esta comparación nos permite verificar o mejorar el modelo analítico.

Por lo tanto, se concluye que el análisis modal aplicado a una estructura es el estudio de sus modos de vibración y las frecuencias a las que estos tienen lugar. Todas las estructuras tienden a vibrar naturalmente de acuerdo a sus modos de vibración, siempre y cuando estas no se encuentren bajo acciones externas que den lugar a lo que se conoce como vibraciones forzadas.

El movimiento de una estructura está dado por la segunda ley de Newton, la cual tiene en cuenta todos los parámetros de dicha estructura y además del sismo que sobre ella actúa. La ecuación del movimiento general está dada por:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_s(u) = p(t)$$

Y al someter la estructura a una excitación sísmica, la ecuación es:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t)$$

Un modo de vibración es un patrón o forma característica en el que vibrará un sistema mecánico. La mayoría de los sistemas tienen muchos modos de vibración y es la tarea del análisis modal determinar la forma de esos modos. La cantidad de modos de vibración de la estructura se define por el número de grados de libertad que tenga la misma, y para cada uno de ellos, puede darse una respuesta acoplada o desacoplada.

Los modos de vibrar se calculan desarrollando el siguiente determinante:

$$\det [\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}] = 0$$

Que se conoce como ecuación característica o ecuación de frecuencia. Esta ecuación tiene N raíces reales y positivas para  $\omega_n^2$  porque m y k, las matrices de masa y rigidez estructurales, son simétricas y positivas definidas

Las frecuencias naturales son necesarias en un análisis de vibración y también son importantes al elegir un paso de tiempo adecuado para un análisis de dinámica estructural.

La N raíces,  $\omega_n^2$ , de la ecuación característica, determinan las N frecuencias naturales de vibración del sistema  $\omega_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), dispuestas por convención en secuencia de menor a mayor ( $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N$ ). Estas raíces de la ecuación característica se conocen también como valores propios, valores característicos o valores normales.

En correspondencia a las N frecuencias de vibración natural  $\omega_n$  de un sistema de varios grados de libertad, existen N vectores independientes  $\phi_n$ , que son conocidos como los modos naturales de vibración, o las formas naturales de los modos de vibración. Estos vectores también se denominan vectores propios, vectores característicos o modos normales. El término natural se utiliza para calificar cada una de estas propiedades de vibración, a fin de enfatizar el hecho de que éstas son propiedades naturales de la estructura en vibración libre, y que sólo dependen de sus propiedades de masa y rigidez. El subíndice n indica el número del modo, y el primer modo ( $n = 1$ ) también se conoce como el modo fundamental.

### 5.1.2. Matriz de masa consistente:

Las propiedades de la matriz de masa consistente son:

- Es una matriz simétrica
- Es definida como positiva
- Es invertible

Es importante resaltar que generalmente se emplea la matriz de masa concentrada o condensada, que agrupa arbitrariamente la masa en los nodos haciéndola una matriz diagonal incluso si no existen masas concentradas reales. Dicha matriz de masa concentrada se utiliza básicamente porque al ser una matriz diagonal, se emplean menos recursos computacionales, además solo tiene en cuenta la inercia traslacional (el cálculo de esta matriz de masa condensada también se incluye en el código).

La matriz de masa consistente hace una representación más precisa de las propiedades inerciales de la estructura y además produce frecuencias naturales mayores o iguales que las exactas; además utilizando un número suficiente de elementos se pueden obtener resultados muy precisos.

Por lo tanto, para hallar la matriz de masa consistente se tiene en cuenta la contribución de la inercia traslacional y de la inercia Rotacional, para las vigas y también para las columnas:

$$[M]^{(e)} = \frac{\gamma L}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \gamma = \rho A$$

Matriz de masa para el elemento viga

$$[M]^{(e)} = \frac{\gamma L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\gamma L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de masa para un elemento bajo movimiento axial

Imagen 10 – Construcción de la matriz de masa

Por lo tanto, al superponer ambas contribuciones, se halla la matriz de masa del sistema:

$$[M]^{(e)} = \frac{\gamma L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Para el presente proyecto, aunque se ha modelado y analizado como un pórtico en 2D, se tuvo en cuenta la contribución de masa de las losas, esto de manera que dicha masa estuviera igualmente aplicada a cada nodo de cada losa, específicamente en los grados de libertad traslacionales.

### 5.1.3. Matriz de amortiguamiento (método de rayleigh):

El proceso mediante el cual la amplitud de la vibración libre disminuye de manera constante se denomina amortiguamiento que da como resultado frecuencias circulares naturales que son más pequeñas que las de los sistemas no amortiguados; los desplazamientos máximos también son menores cuando se produce amortiguamiento.

La determinación de esta matriz de amortiguamiento es difícil en la práctica; según Bathe, las propiedades de amortiguamiento son dependientes de la frecuencia, por lo que generalmente esta matriz se asume como la siguiente combinación matemática, a la cual se le conoce como el amortiguamiento de Rayleigh:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

De esta ecuación,  $\alpha[M]$  corresponde al amortiguamiento externo y  $\beta[K]$  corresponde al amortiguamiento material o interno.

Donde las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  se calculan mediante el siguiente sistema de ecuaciones y en base a los dos primeros modos de vibrar del sistema:

$$\alpha + \beta\omega_i^2 = 2\omega_i\zeta_i$$

Donde:

- $\omega_i$ : son las frecuencias naturales circulares halladas en el análisis modal
- $\zeta_i$ : son las relaciones de amortiguamiento

Por lo tanto, al asignar valores de relaciones de amortiguamiento, se puede resolver el sistema de ecuaciones:

$$\alpha = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\omega_2\zeta_1 - \omega_1\zeta_2) \quad \beta = \frac{2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\omega_2\zeta_2 - \omega_1\zeta_1)$$

Las cuales dependen de las frecuencias de los dos primeros modos de vibrar del sistema.

## 5.2. Integración temporal (método de newmark):

El Método de Newmark es un método implícito que permite encontrar la respuesta lineal en el tiempo, de un sistema de múltiples grados de libertad ante una acción sísmica. Estos procedimientos permiten determinar los desplazamientos nodales en diferentes incrementos de tiempo para un sistema dinámico dado, cuyas ecuaciones base son las siguientes:

$$\begin{aligned}\dot{u}_{i+1} &= \dot{u}_i + [(1 - \gamma) \Delta t] \ddot{u}_i + (\gamma \Delta t) \ddot{u}_{i+1} \\ u_{i+1} &= u_i + (\Delta t) \dot{u}_i + [(0.5 - \beta)(\Delta t)^2] \ddot{u}_i + [\beta(\Delta t)^2] \ddot{u}_{i+1}\end{aligned}$$

Los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$  definen la variación de la aceleración durante un paso de tiempo y determinan las características de estabilidad y precisión del método. Donde se dan dos casos especiales:

1. Método de aceleración media constante ( $\beta = 1/4$  y  $\gamma = 1/2$ ).
2. Método de aceleración lineal ( $\beta = 1/6$  y  $\gamma = 1/2$ ).

La ecuación de movimiento que se busca resolver para un instante de tiempo  $i + 1$ , es:

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + (fs)_{i+1} = p_{i+1}$$

En la cual,  $fs = Ku$  representa la fuerza restauradora, y  $P$  representa las aceleraciones inducidas por el sismo teniendo en cuenta el incremento de tiempo  $\Delta t$  de las mismas.

La aplicación sucesiva de estas 3 ecuaciones fundamentales con  $i = 0, t_1, t_2, \dots$  permite conocer la respuesta de desplazamientos ( $u_{i+1}$ ), velocidades ( $\dot{u}_{i+1}$ ) y aceleraciones ( $\ddot{u}_{i+1}$ ) en cada instante de tiempo  $i = t_1, t_2, \dots$

Para los sistemas lineales es posible modificar la formulación original de Newmark para permitir la resolución de las ecuaciones iniciales sin iteración. Por lo tanto, resulta una matriz de rigidez efectiva que es constante para el análisis lineal y está dada por:

$$\hat{k} = k + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} m$$

Además, resulta un vector de cargas efectiva que será variable para cada instante de tiempo de acuerdo con la variación y duración del sismo:

$$\begin{aligned}\hat{p}_{i+1} = p_{i+1} + \left[ \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} m + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c \right] u_i + \left[ \frac{1}{\beta \Delta t} m + \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) c \right] \dot{u}_i \\ + \left[ \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) m + \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c \right] \ddot{u}_i\end{aligned}$$

El desplazamiento en el tiempo  $i+1$  se calcula de la siguiente manera:

$$u_{i+1} = \frac{\hat{p}_{i+1}}{k}$$

De la misma manera, se puede calcular la velocidad y la aceleración con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\dot{u}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (u_{i+1} - u_i) + \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{u}_i + \Delta t \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} (u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_i - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{u}_i\end{aligned}$$

Finalmente, se observa que el método de Newmark solo es estable si se cumple que:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}}$$

Por lo tanto, para el método de la aceleración media constante ( $\beta = 1/4$  y  $\gamma = 1/2$ ) esa condición se convierte en:

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \infty$$

Esta consideración implica que este método es estable para cualquier  $\Delta t$  sin importar su magnitud, sin embargo, es exacta sólo si  $\Delta t$  es lo suficientemente pequeño.

Por otro lado, para el segundo método de la aceleración lineal ( $\beta = 1/6$  y  $\gamma = 1/2$ ), la condición implica que es estable cuando:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq 0.551$$

Sin embargo, como en el caso del método de la diferencia central, esta condición tiene poca importancia en el análisis de los sistemas de 1GDL debido a que es necesario utilizar un paso de tiempo mucho más corto que  $0.551T_n$  si se desea obtener una representación exacta de la excitación y la respuesta.



## 6. MÉTODO DE ANÁLISIS DE BALANCE DE ENERGÍA

El balance de energía se da cuando un objeto o un sistema de objetos que contienen una forma de energía pueden transformar esa forma en otra diferente; por ejemplo, un vehículo que consume combustible transforma la energía de este en adquirir velocidad, es decir, energía cinética. La Ley Fundamental de la Energía dice: “la energía ni se crea ni se destruye, sólo se transforma”. Esto significa que, conociendo la masa y la velocidad de un vehículo, podríamos calcular la cantidad de combustible que ha consumido. Un objeto que está a una cierta altura contiene energía potencial. Al soltarlo va aumentando su velocidad según va cayendo. La máxima velocidad del objeto se produce justo antes de chocar con el suelo, cuando la energía potencial es nula. Es decir, a cada altura, la energía potencial que ha perdido se ha transformado en energía cinética.

El cálculo explícito del balance de energía para estructuras sujetas a la excitación sísmica es útil para evaluar la precisión con la que el equilibrio dinámico se logra en cada paso de tiempo. El uso del concepto de balance de energía se presenta como método de análisis para este trabajo, evaluando una estructura inelástica simple excitadas por varios movimientos de tierra. Se muestra cómo el enfoque energético puede orientar al diseñador en apreciar el comportamiento no lineal de la estructura, la jerarquía de los mecanismos que ocurren en el tiempo, y la ductilidad requerimientos de los distintos componentes. esto se logró usando un algoritmo de marcha en el tiempo incondicionalmente estable sin amortiguamiento algorítmico.

Se considera que una estructura puede sobrevivir a un gran terremoto si su capacidad estructural de absorción de energía es mayor que la energía sísmica de entrada. Por lo tanto, la mayoría de las estructuras están diseñados para desarrollar acción inelástica, en componentes críticos, que controlan la cantidad de energía sísmica almacenada en los sistemas La energía sísmica de entrada impartida a una estructura. es igual a la suma de la energía cinética, la elástica energía de tensión, la energía disipada por la acción histerética de los elementos estructurales, y la energía disipada por otros mecanismos que no ceden.

### 6.1 Descripción y planteamiento teórico del método

Las ecuaciones diferenciales gobernantes del movimiento a ser resueltas para un sistema MDOF no lineal general sometido a la traslación base del movimiento del suelo de un terremoto está dada por

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + \{F_s(t)\} = -[M]\{r\}\ddot{x}_g(t) + \{F_s\}$$

Donde  $[M]$  es la matriz de masa global;  $[C]$  es la matriz global de amortiguamiento viscoso que da cuenta de todos los suplementos mecanismos de disipación de energía que no sean histeréticos inelásticos comportamiento de los elementos estructurales;  $\{u(t)\}$ ,  $\{\dot{u}(t)\}$  y  $\{\ddot{u}(t)\}$  son los vectores del desplazamiento global, la velocidad y la aceleración, respectivamente, relativos a la base móvil en el tiempo  $t$ ;  $\{F_s(t)\}$  es el vector de fuerza de restauración no lineal global en el tiempo  $t$ , generada por las propiedades histeréticas de la estructura;  $\{r\}$  es un vector que acopla la dirección del entrada de movimiento del suelo con la dirección del desplazamiento;  $\ddot{x}_g(t)$  es la aceleración del suelo en el tiempo  $t$ ; y  $\{F_s\}$  es el vector de carga estática presísmica.

Para transformar la ecuación inicial en una ecuación de balance de energía, primero se premultiplica por la transpuesta del relativo vector de velocidad,  $\{\dot{u}(t)\}^T$ , y cada término se integra sobre el dominio del tiempo.

$$\int \{\dot{u}(t)\}^T [M] \{\ddot{u}(t)\} dt + \int \{\dot{u}(t)\}^T [C] \{\dot{u}(t)\} dt + \int \{\dot{u}(t)\}^T \{F_s(t)\} dt = - \int \{\dot{u}(t)\}^T [M] \{r\} \ddot{x}_g(t) dt + \int \{\dot{u}(t)\}^T \{F_s\} dt$$

Usando las relaciones diferenciales entre el desplazamiento, velocidad y aceleración, la variable tiempo puede ser reemplazada en la ecuación anterior a favor de las variables de desplazamiento y velocidad. Se tiene entonces lo siguiente

$$\int \{\dot{u}(t)\}^T [M] \{d\dot{u}(t)\} + \int \{\dot{u}(t)\}^T [C] \{du(t)\} + \int \{du(t)\}^T \{F_r(t)\} = - \int \{du(t)\}^T [M] \{r\} \ddot{x}_g(t) + \int \{du(t)\}^T \{F_s\}$$

El primer término de la ecuación se puede integrar para producir una ecuación de balance de energía explícita para el sistema.

$$T_r(t) + D(t) + R(t) = I_r(t) + S(t)$$

Donde:

$$T_r(t) = \frac{1}{2} \{\dot{u}(t)\}^T [M] \{\dot{u}(t)\}$$

$$D(t) = \int \{\dot{u}(t)\}^T [C] \{du(t)\}$$

$$R(t) = \int \{du(t)\}^T \{F_r(t)\}$$

$$I_r(t) = - \int \{du(t)\}^T [M] \{r\} \ddot{x}_g(t)$$

$$S(t) = \int \{du(t)\}^T \{F_s\}$$

Físicamente los componentes de la ecuación tienen los siguientes sentidos:

- $T_r(t)$  Energía cinética relativa del sistema en el tiempo  $t$
- $D(t)$  Energía disipada por amortiguamiento viscoso en el tiempo  $t$
- $R(t)$  Energía absorbida en el tiempo  $t$  como resultado de deformaciones de elementos estructurales
- $I_r(t)$  Energía sísmica relativa de entrada en el tiempo  $t$
- $S(t)$  Trabajo realizado por cargas aplicadas presísmica

El término  $R(t)$  se puede dividir en dos componentes

$$R(t) = U(t) + H(t)$$

donde  $U(t)$  es la energía de deformación elástica recuperable, y  $H(t)$  es la energía disipada por el comportamiento histerético de los elementos estructurales.

### Expresiones de energía discretizadas:

La energía cinética en un tiempo dado  $t$  se puede obtener directamente del vector de velocidad relativa instantánea  $\{\dot{u}(t)\}$ . Todas las otras cantidades de energía, sin embargo, necesitan integración a través del dominio del tiempo. Usando la reglase los trapecios, las expresiones de energía continua se pueden implementar en el código de Matlab usando las siguientes expresiones de energía discretizadas.

$$\begin{aligned}
D(t) &= D(t - \Delta t) + \frac{1}{2}(\{\dot{u}(t - \Delta t)\} + \{\dot{u}(t)\})^T [C] \\
&\quad (\{u(t)\} - \{u(t - \Delta t)\}) \\
H(t) &= H(t - \Delta t) + \frac{1}{2}(\{u(t)\} - \{u(t - \Delta t)\})^T \\
&\quad (\{F_r(t - \Delta t)\} + \{F_r(t)\}) \\
I_r(t) &= I_r(t - \Delta t) - \frac{1}{2}(\{u(t)\} - \{u(t - \Delta t)\})^T [M] \{r\} \\
&\quad (\ddot{x}_g(t - \Delta t) + \ddot{x}_g(t)) \\
I_a(t) &= I_a(t - \Delta t) + \frac{1}{2}(\{\ddot{u}_a(t)\} - \{\ddot{u}_a(t - \Delta t)\})^T [M] \{r\} \\
&\quad (x_g(t - \Delta t) + x_g(t)) \\
S(t) &= S(t - \Delta t) + (\{u(t)\} - \{u(t - \Delta t)\})^T \{F_s\}
\end{aligned}$$

El error del balance de energía, EBE(t), se puede calcular en cada paso de tiempo y se utiliza como criterio para indicar la precisión global lograda por un algoritmo dado. El error del balance de energía se puede normalizar en porcentaje de la siguiente manera:

$$EBE_r(t) = \frac{|I_r(t) + S(t) - T_r(t) - D(t) - H(t)|}{|I_r(t)|} \times 100\%$$

Para la implementación en el caso particular nuestro el error encontrado en el balance de energía fue de 0, lo que indica el correcto uso del algoritmo, se debe tener en cuenta que este balance se empieza a revisar en el tercer paso (step 3) pero desde allí ya el balance da muy buenos resultados.

## 7. PROCEDIMIENTO PASO A PASO DE LA IMPLEMENTACION DEL METODO DINAMICO Y BALANCE DE ENERGIA.

Dada la estructura reticular con sus apoyos, cargas, propiedades del material y secciones:

### 7.1 Datos de entrada:

Análisis modal:

- Considerar número de modos a tener en cuenta
- Caracterizar la matriz de rigidez que no considera los grados de libertad conocidos
- Caracterizar la matriz de masa que no considera los grados de libertad conocidos

Matriz de masa consistente:

- Seleccionar el tipo de estructura analizar, esto es, 'EE' (pórtico), 'RR' (cerca), 'RE' (rotula/empotrado), 'ER' (empotrado/rotula).
- Asignar las propiedades (área, peso específico, inercia y longitudes de los elementos), esto se hace desde el archivo de entrada de Excel.
- Asignar ancho aferente Af y espesor para los elementos que reciben las masas de las losas, que son los elementos de los entrepisos, esto se hace desde el archivo de Excel.

Matriz de amortiguamiento:

- Asignar un valor para el amortiguamiento, generalmente es del 5%.
- Discretizar las frecuencias de los primeros dos modos de vibrar del sistema, esto es  $w_1$  y  $w_2$ .

Método de Newmark:

- Seleccionar el caso especial del método de Newmark (esto es, seleccionar valores para  $\beta$  y  $\gamma$ ).
- Indicar condiciones iniciales (desplazamiento, velocidad y aceleración).
- Seleccionar variación en el tiempo del sismo,  $\Delta t$ .

## 7.2 Proceso de cálculo:

Frecuencias angulares:

- Hallar los vectores y valores propios de la matriz de masa y rigidez discretizadas
- Obtener las frecuencias angulares en rad/s y en Hz
- Obtener el periodo en s
- Hallar y ordenar los modos de vibrar de la estructura según el orden hallado de las frecuencias

Matriz de masa consistente:

- Hallar matriz de masa considerando la Inercia Traslacional y la Inercia Rotacional (suma de las masas relacionadas a ambas).
- Obtener la matriz de masas de losa asociadas a los elementos de entrepiso.
- Ensamblar la matriz de masa consistente, esto es sumar las dos matrices anteriores con la matriz de masa global.

Participación modal:

- Obtener la participación de la masa para cada uno de los modos de vibrar.

Matriz de amortiguamiento:

- Ensamblar la matriz de amortiguamiento en  $kN*s/m$ , con  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ , matriz de masa y matriz de rigidez.
- Discretizar la matriz de amortiguamiento para los grados de libertad desconocidos.

Método de Newmark:

- Cálculo de la matriz de rigidez efectiva

Para cada paso de tiempo  $i$  del sismo se calcula:

- Vector de cargas efectivo (se toman las aceleraciones del sismo).
- Desplazamiento para el instante de tiempo  $i+1$ .
- Velocidad para el instante de tiempo  $i+1$ .
- Aceleración para el instante de tiempo  $i+1$ .
- Repetir este procedimiento para cada instante de tiempo.

## 7.3 Datos de salida:

Matriz de masa consistente del sistema, Modos de vibrar, Matriz de amortiguamiento del sistema, Respuesta ante un sismo con una variación en el tiempo y aceleraciones definidas.

## 8. RESULTADOS Y GRAFICOS.

Todos los datos de entrada están disponibles a cambios en el Excel adjunto, ya sea agregar o quitar elementos del pórtico, cambiar cargas, modificar el contenido espectral del sismo, propiedades del material, entre otros datos que se pueden modificar.

### 8.1 Fase 1

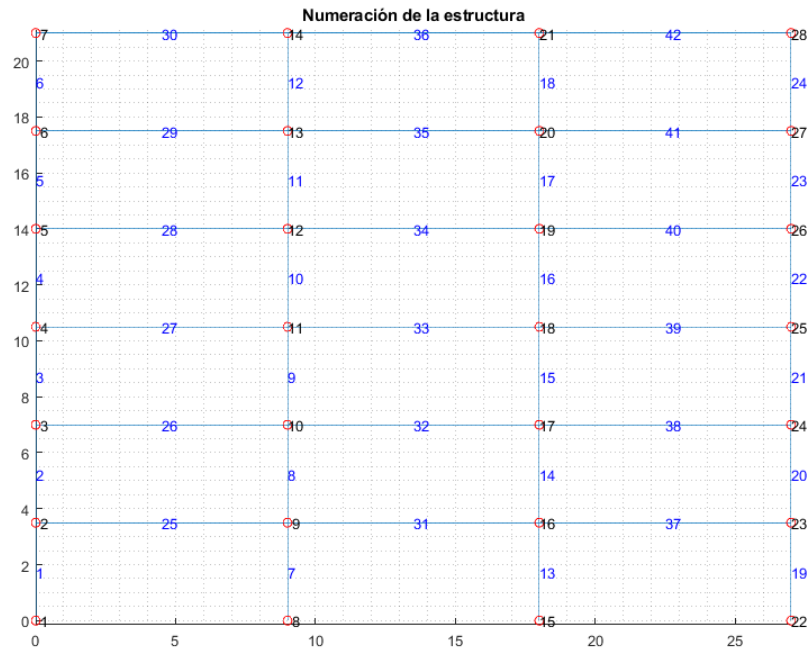


Imagen 11 – Numeración de la estructura a analizar

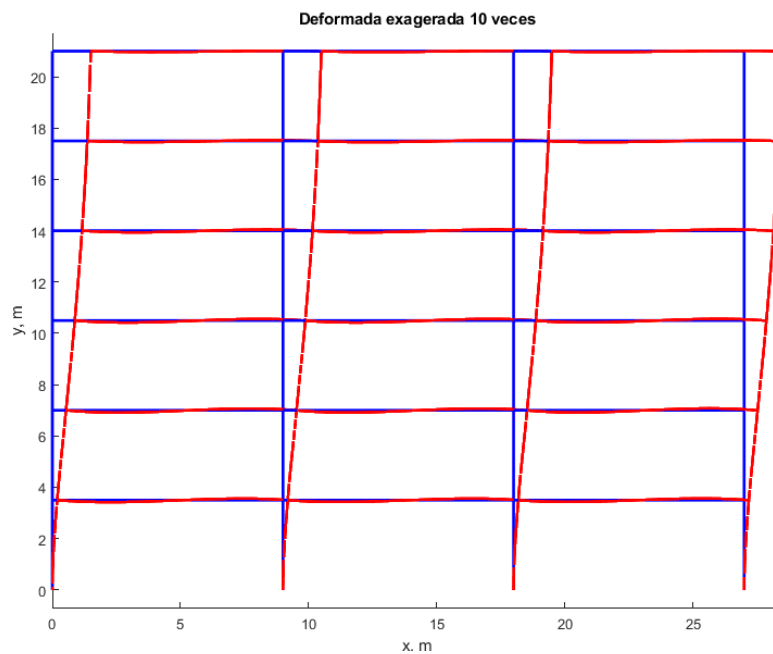


Imagen 12 – Deformada exagerada 10 veces, a partir del método de rigideces

8.2 Fase 2.

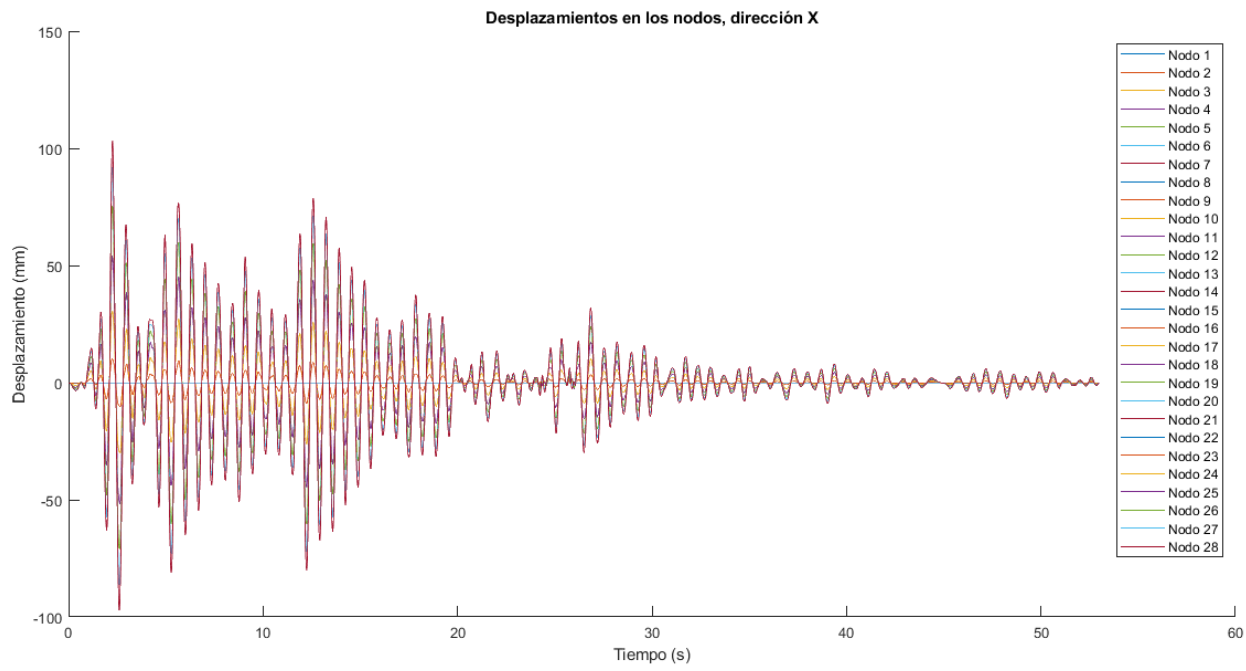


Imagen 13 – Desplazamiento de los nodos en dirección X.

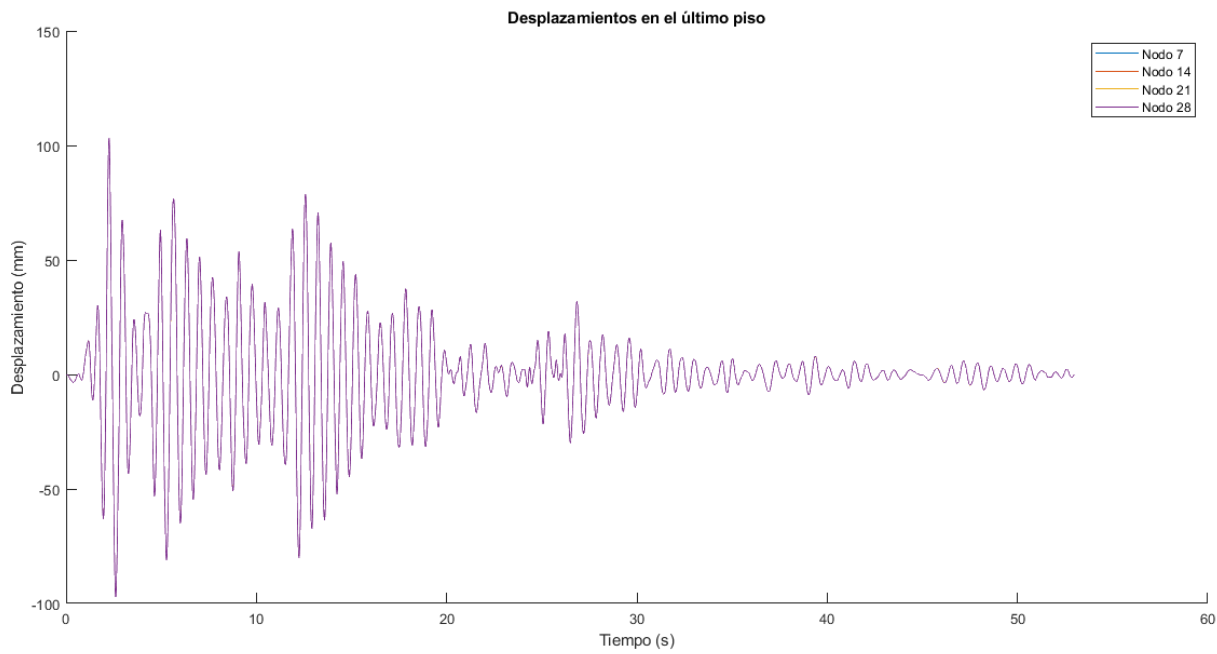


Imagen 14 – Desplazamiento en el último piso.

8.3 Fase 3.

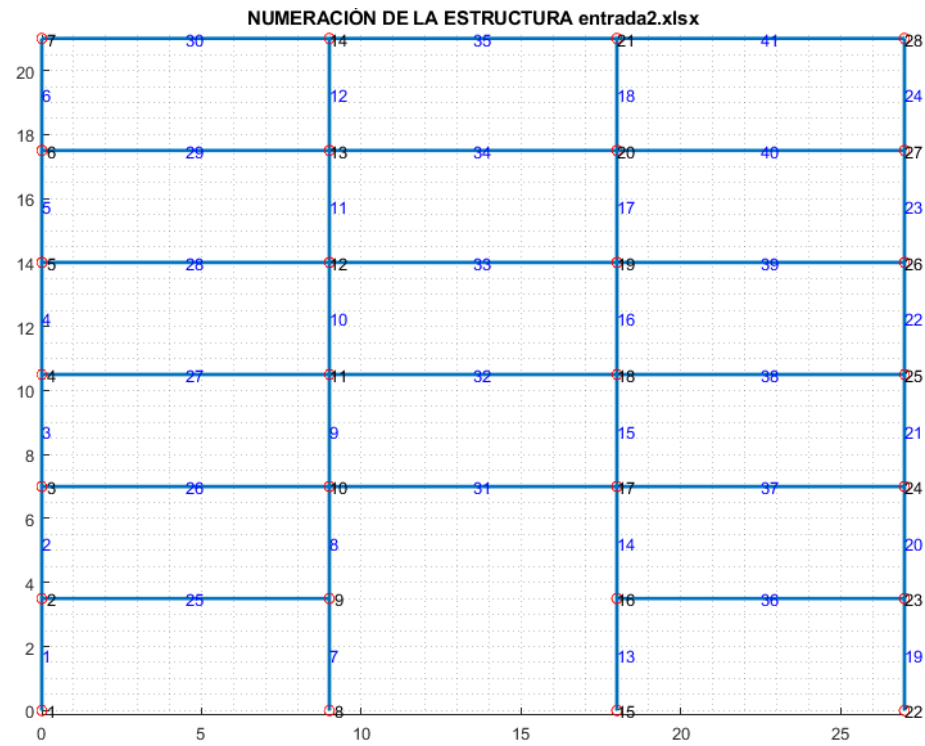


Imagen 15 – Numeración de la estructura a analizaren fase 3 del proyecto.

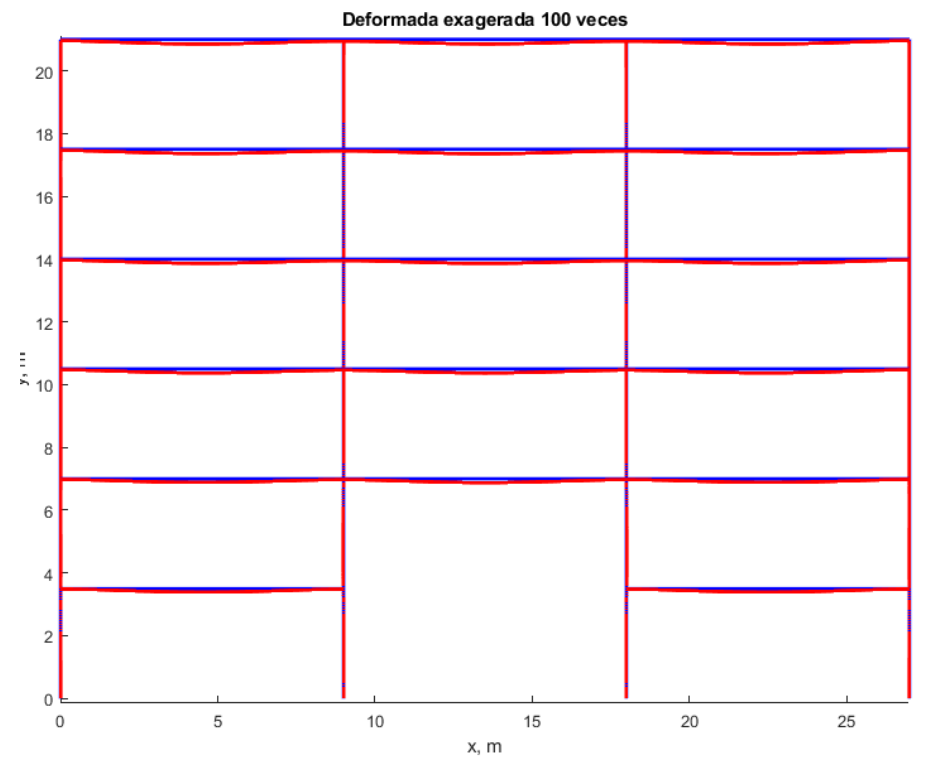
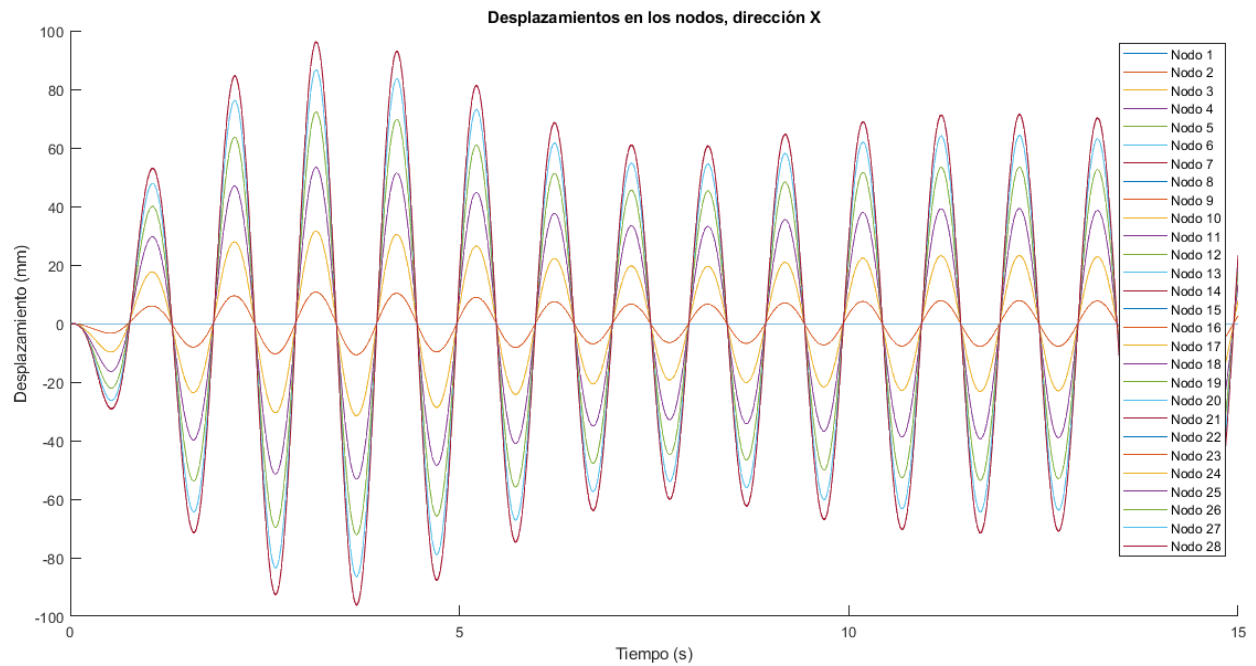
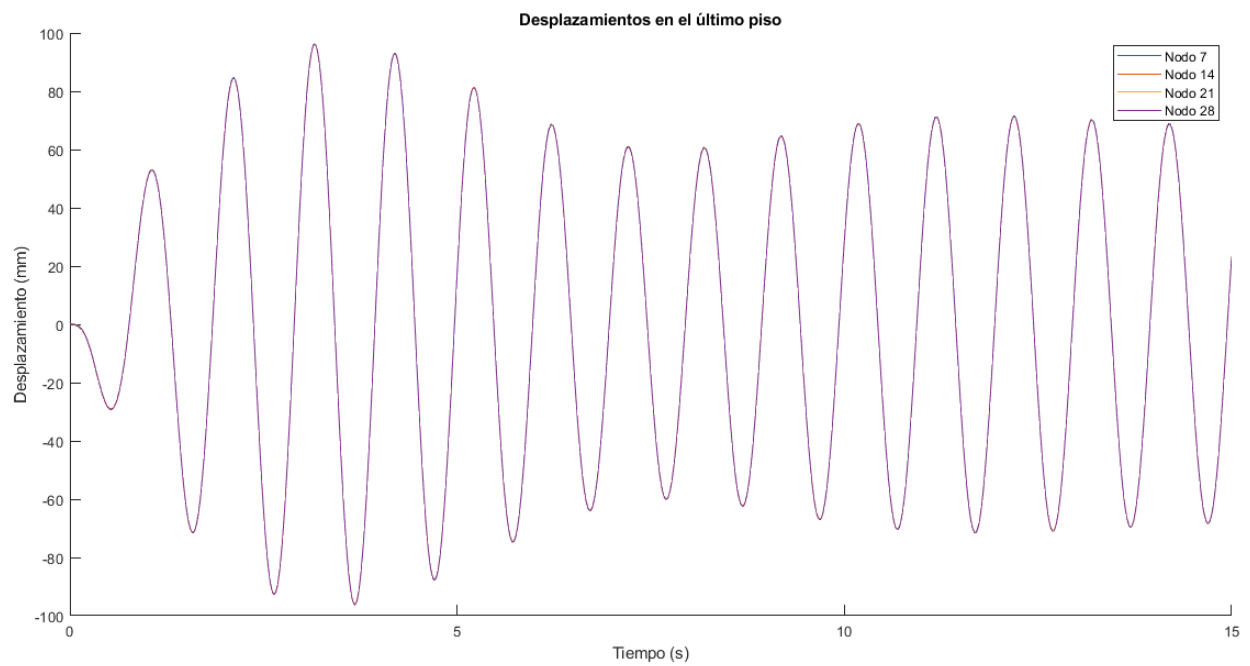


Imagen 16 – Deformada exagerada 10 veces, a partir de la fase 3



*Imagen 17 – Desplazamiento de los nodos en dirección X (Función armónica)*



*Imagen 18 – Desplazamiento en el último piso.*



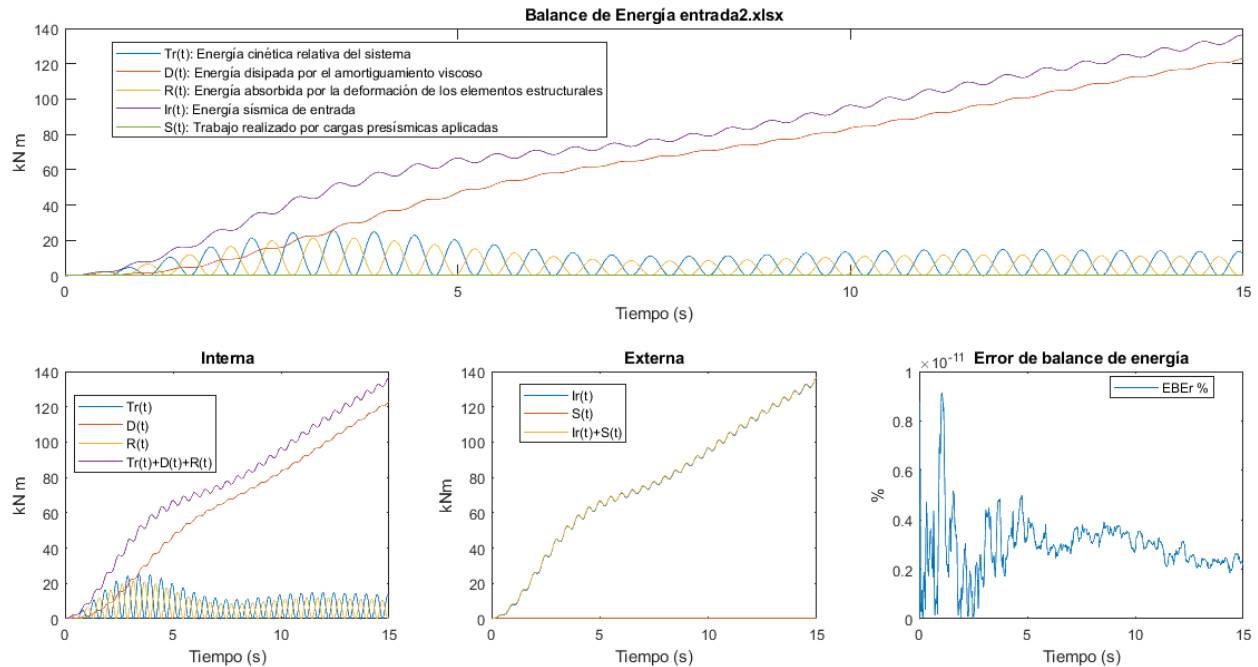


Imagen 19 – Comprobación balance de energía.

## 9. FUENTES BIBLIOGRÁFICAS.

- Hurtado, Jorge E. (2021). *Análisis matricial de estructuras. Curso con MATLAB. Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales.*
- Davalos, Cesar E (2022) *Apuntes y diapositivas de clase – curso Análisis de Vibraciones, Universidad Nacional de Colombia*
- Timoshenko, Stephen; Godier J. N. (1951). McGraw-Hill, ed. *Theory of elasticity.*
- Ortiz Berrocal, Luis (1991). McGraw-Hill, ed. *Resistencia de Materiales. Aravaca (Madrid). ISBN 84-7651-512-3.*
- Ghali, A. and Neville, A.M. (2017). *Structural Analysis: A unified classical and matrix approach. 7th edition. CRC Press, Taylor & Francis Group.*
- Uribe-Escamilla, Jairo. (2002). *Análisis de estructuras. 2nd edición. Ecoe Ediciones*
- Easley, Joe and Wass, Anthony. (2011). *Analysis of Structures: An introduction including numerical methods. John Wiley & Sons, Ltd*

- *Nagarajan, P. (2019). Matrix Methods of Structural Analysis. CRC Press, Taylor & Francis Group.*
- *Kassimali, A. (2012). Matrix Analysis of Structures. 2nd edición. Cengage Learning.*
- *Hurtado Gomez, Jorge E (2002). Introducción a la Dinámica de Estructuras. Universidad Nacional de Colombia, Manizales.*
- *García Reyes, Luis Enrique (1994). Dinámica Estructural Aplicada al diseño Sísmico. Ediciones Uniandes.*
- *Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, AIS (2010). Reglamento Colombiano de Construcción Sismo Resistente, NSR-10.*
- *Chopra, A. (2015). Dynamics of structures. Pearson Higher, 4ta edition,*
- *Xu, Z.D, et al. (2016). Intelligent Vibration Control in Civil Engineering Structures. Academic Press.*
- *Constantinou, et al (1998). Passive energy dissipation systems for structural design and retrofit. MCEER.*
- *Daryl L. Logan. A First Course in the Finite Element Method. Fourth Edition. University of Wisconsin–Platteville.*