

PROYECTO FINAL

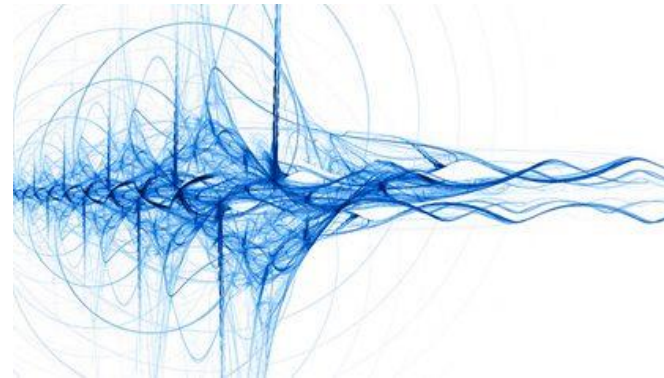
Análisis de Vibraciones

Maria Fernanda Villegas Loaiza

Daniel Rojas Chica

Nelson Esteban Hernández Soto

Santiago Restrepo Villa



Introducción

Las estructuras son una conformación de partes unidas entre si para formar un marco de soporte, es decir, un conjunto de materiales y uniones que trabajan en conjunto para mantenerse en pie y lograr cumplir el objetivo (funcionalidad) que tienen para lo que fueron construidas.

El análisis de vibraciones en estructuras permite obtener las frecuencias naturales y la respuesta a la excitación esperada. Hoy en día, pocas estructuras, pueden ser diseñadas sin llevar a cabo el análisis de vibraciones necesario, si su desempeño dinámico debe ser controlado.

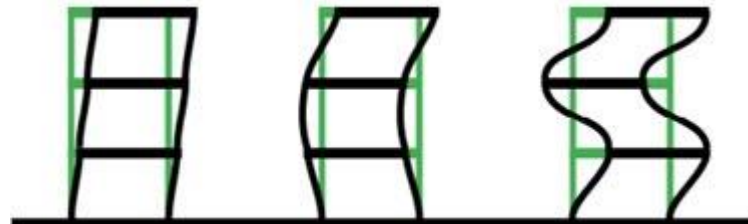
La vibración que se produce en la mayoría de las estructuras y sistemas dinámicos es indeseable. Esto es, no sólo por los movimientos resultantes, el ruido y los esfuerzos dinámicos que conducen a la fatiga y falla de la estructura; también, por las pérdidas de energía y la reducción de rendimiento que acompañan a las vibraciones.

Descripción del proyecto

La finalidad del siguiente proyecto es realizar el análisis completo de una estructura reticulada (pórtico) propuesta, a partir de la implementación de 3 métodos de análisis los cuales son:

- Implementación del método de rigideces para análisis de estructuras reticulares.
- Implementación de un método paso a paso para el análisis dinámico de estructuras reticulares bajo cargas dinámicas.
- Implementación de un método de análisis de balance de energía.

Estos 3 análisis se implementaron para un pórtico de 6 pisos, y fueron desarrollados a partir de un algoritmo en Matlab con base en la teoría que será explicada a lo largo del documento técnico.



OBJETIVOS

Objetivo General:

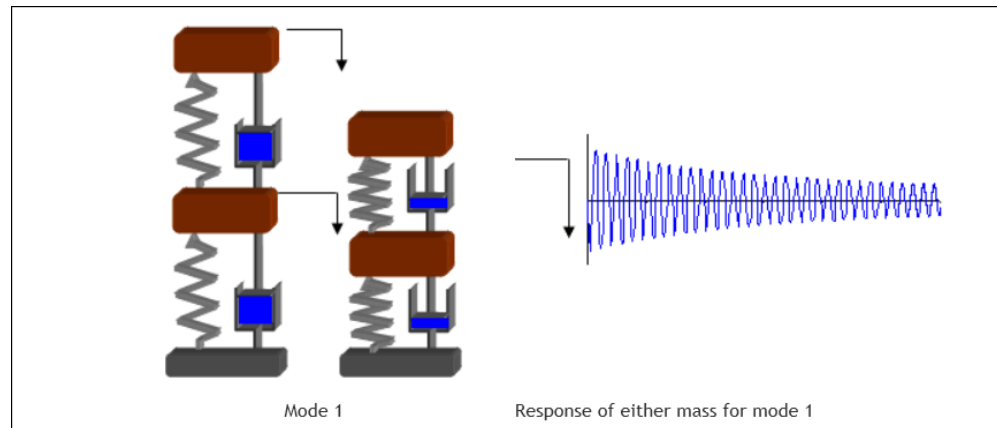
- ▶ Desarrollar un cuadro de referencia de los conceptos vistos a lo largo del curso en un proyecto práctico.

Objetivos Específicos:

- ▶ Implementación del método de rigideces para análisis de estructuras reticulares.
- ▶ Implementación de un método paso a paso para el análisis dinámico de estructuras reticulares bajo cargas dinámicas.
- ▶ Implementación de un método de análisis de balance de energía.

Análisis de vibraciones

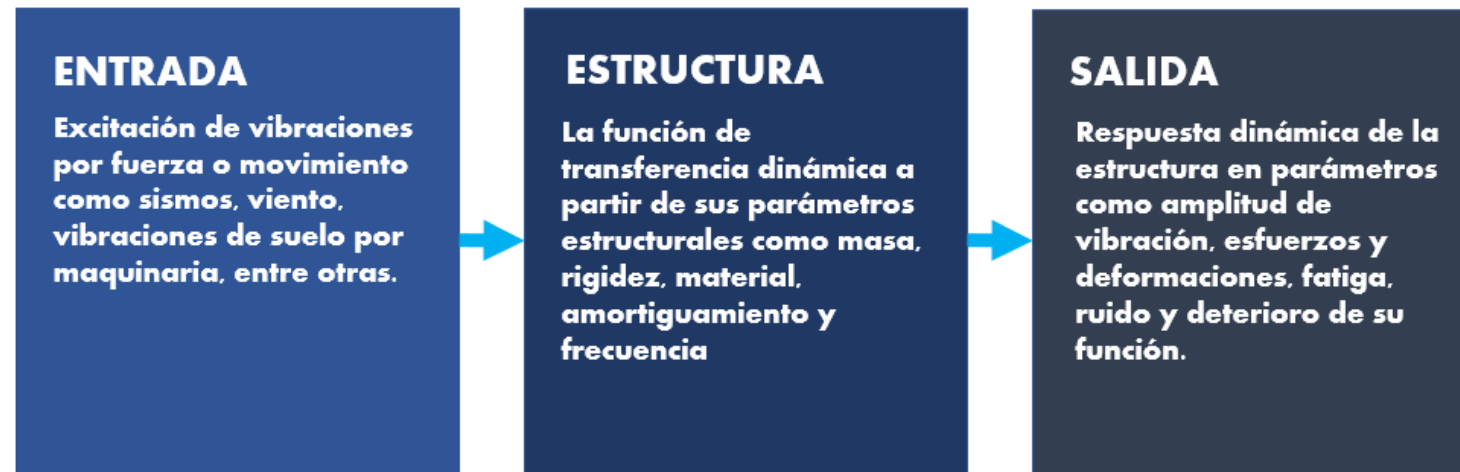
El análisis de vibraciones en estructuras permite obtener las frecuencias naturales y la respuesta a la excitación esperada. Las frecuencias naturales de la estructura deben determinarse ya que, si esta se excita en una de estas frecuencias, se produce el efecto de resonancia, con el resultado de altas amplitudes de vibración, esfuerzos y deformaciones dinámicos y niveles de ruido perceptibles. Debe evitarse la resonancia y diseñarse la estructura de modo que no se obtenga en condiciones normales, la estructura solo necesita ser analizada en el rango de frecuencia esperado de excitación.



Causas y efectos de la vibración estructural

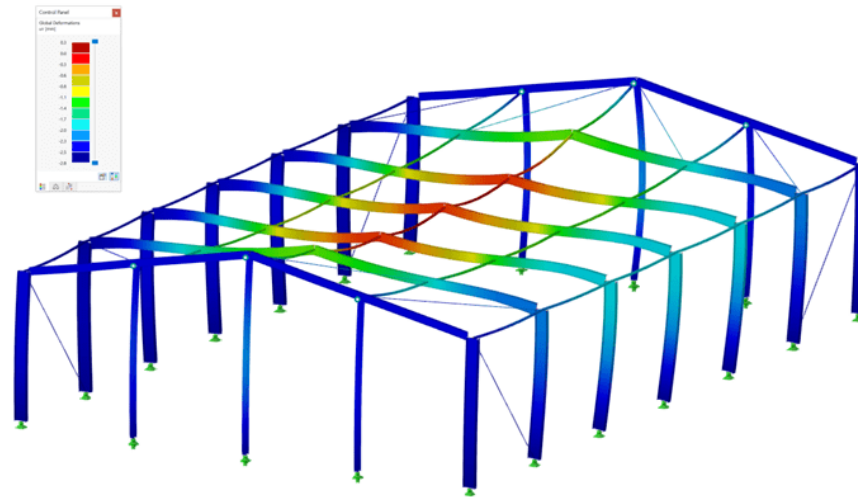
En la mayoría de las estructuras la vibración es indeseable, esto se debe a que la vibración crea esfuerzos y deformaciones dinámicas que pueden causar fatiga y falla de la estructura, corrosión por contacto entre los elementos en contacto y ruido en el ambiente, pudiendo perjudicar la función y la vida de la estructura o sus componentes.

Hay dos factores que controlan la amplitud y frecuencia de la vibración en una estructura: la excitación aplicada y la respuesta de la estructura a esa excitación particular.



FASE 1:

MÉTODO DE RIGIDECES PARA ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS



Descripción y planteamiento teórico del método

El método matricial de rigidez es un método de cálculo que se aplica a las estructuras hiperelásticas de barras con comportamiento elástico y lineal. Este método ha sido diseñado para realizar análisis computarizado de estructuras incluyendo aquellas estáticamente indeterminadas. El método matriz se basa en estimaciones de los componentes de las relaciones de rigidez para resolver las fuerzas a través de un ordenador.

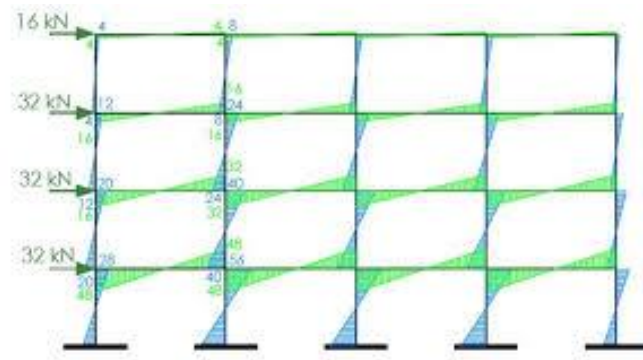
Los datos de la estructura de los que se tiene desconocimiento son las fuerzas y los desplazamientos que se pueden delimitar resolviendo esta ecuación. El método directo de la rigidez es el más habitual en los programas de cálculo de estructuras.

$$\begin{Bmatrix} F_1 + R_1 \\ F_2 + R_2 \\ \dots \\ F_n + R_n \end{Bmatrix}_G = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}_G \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_n \end{Bmatrix}_G$$

Sistema de pórticos planos:

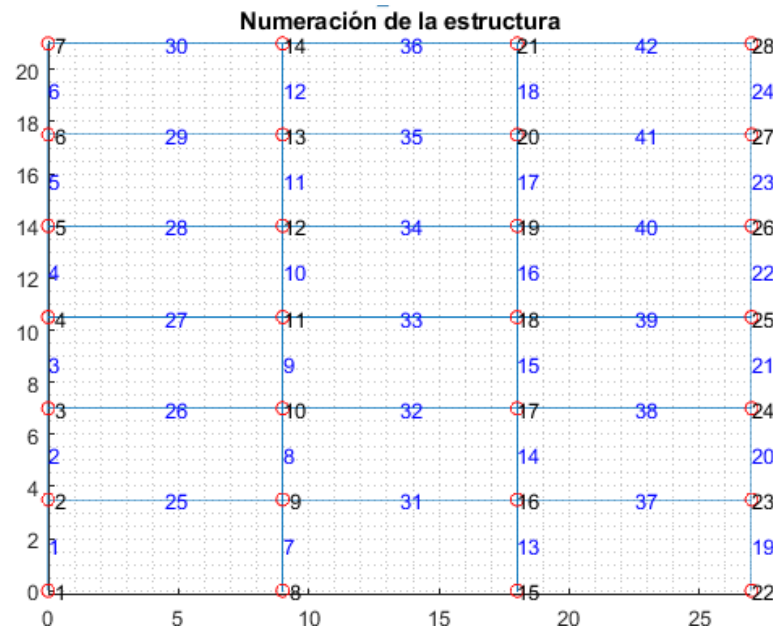
Es una estructura ensamblada por miembros rectos unidos entre si por conexiones rígidas y/o articuladas, que están sujetos a cargas y reacciones que se encuentran en el plano de la estructura. Bajo la acción de cargas externas, los miembros de un pórtico pueden estar sometidos a fuerzas axiales como los elementos tipo cercha, así como a momentos flectores y cortantes como los elementos tipo viga.

Al considerar que un elemento de pórtico plano puede estar sometido a fuerzas axiales (N), cortantes (V) y momentos (M), en cada nodo se establecen tres grados de libertad: 1. Traslación horizontal (U_x), 2. Traslación vertical U_y , 3. Rotación (r_z)



Ensamblaje de la matriz de rigidez

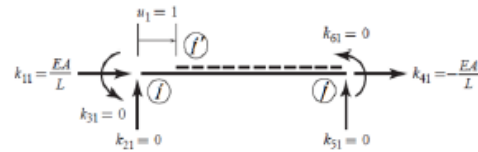
Considerando un pórtico cualquiera, con diferentes condiciones de carga y de apoyos, debido a las cargas externas aplicadas, este elemento se deformará y experimentará traslaciones horizontales, verticales y rotaciones, así como también fuerzas axiales, cortantes y momentos flectores en sus nodos extremos.



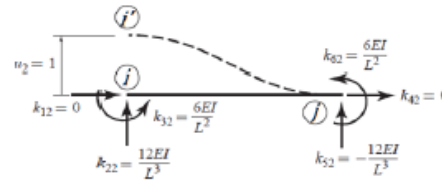
Ensamblaje de la matriz de rigidez

Aplicando las relaciones de rigidez que existen en cada uno de los gdl, se tiene para un elemento empotrado - empotrado:

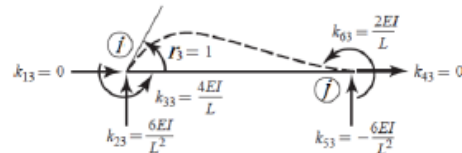
Para u_1 :



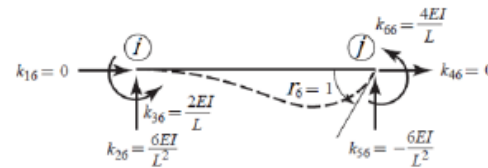
Para u_2 :



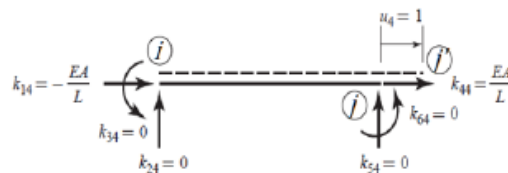
Para r_3 :



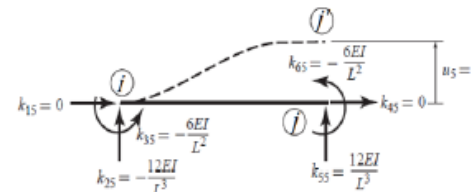
Para r_6 :



Para u_4 :



Para u_5 :



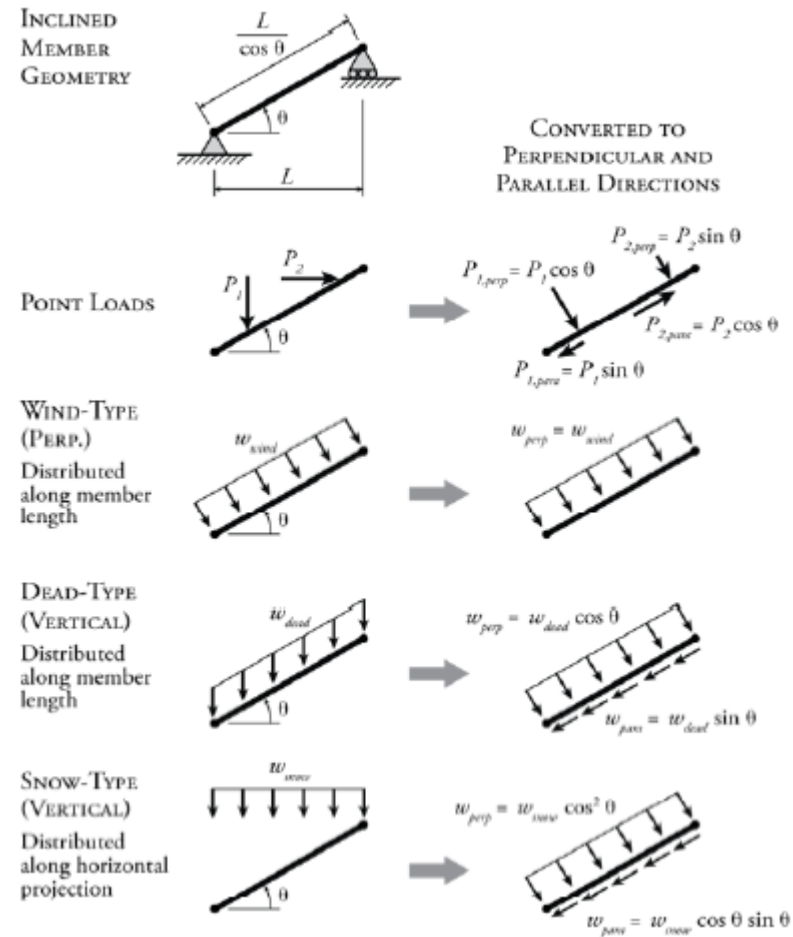
Ensamblaje de la matriz de rigidez

La matriz de rigidez en el sistema de coordenadas locales para un elemento prismático de un pórtico plano sin cargas en su longitud es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} N \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_e} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}}_{\mathbf{k}_e} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ r_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ r_6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_e}$$

Ensamblaje de la matriz de rigidez

Ahora, consideraremos las fuerzas y momentos que se generan en los extremos debido a las cargas externas aplicadas en la longitud del segmento. Los términos de f_e representan las Fuerzas de Empotramiento en los extremos de los elementos (Member Fixed-end forces). A diferencia de las vigas, en los elementos de pórtico las cargas pueden estar orientadas en cualquier dirección en el plano de la estructura. Por lo tanto, antes de calcular el vector de fuerzas de empotramiento, cualquier carga actuante en el elemento en una dirección inclinada deberá ser descompuesta en las componentes de los ejes locales x y y del elemento.



Ensamblaje de la matriz de rigidez

La matriz de rigidez en el sistema de coordenadas locales para un elemento prismático de un pórtico plano con cargas en su longitud es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} N \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_e} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}}_{\mathbf{k}_e} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ r_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ r_6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_e} + \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_e}$$

Ensamblaje de la matriz de rigidez

Transformación sistemas de coordenadas:

Cuando los miembros de una estructura están orientados en diferentes direcciones, se hace necesario transformar las relaciones de rigidez de cada miembro de su sistema de coordenadas local (xy) a un único sistema de coordenadas global (XY) seleccionado para toda la estructura. Las fuerzas y los desplazamientos en los nodos de los elementos se transforman también de lo local a lo global, y viceversa.

- La matriz T se conoce como la matriz de transformación o matriz de rotación.

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \theta = \frac{X_j - X_i}{L_e}$$

$$\sin \theta = \frac{Y_j - Y_i}{L_e}$$

$$L_e = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}$$

$$T^{-1} = T^T$$

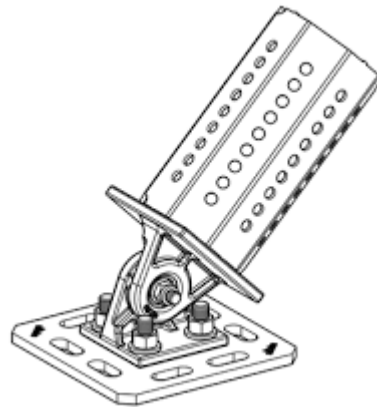
$$TT^T = I$$

Ensamblaje de la matriz de rigidez

Elementos articulados:

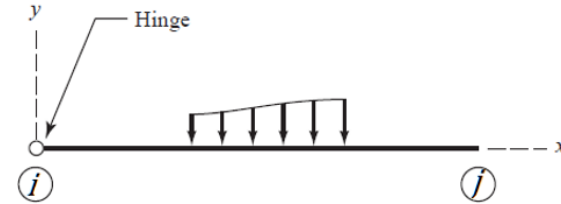
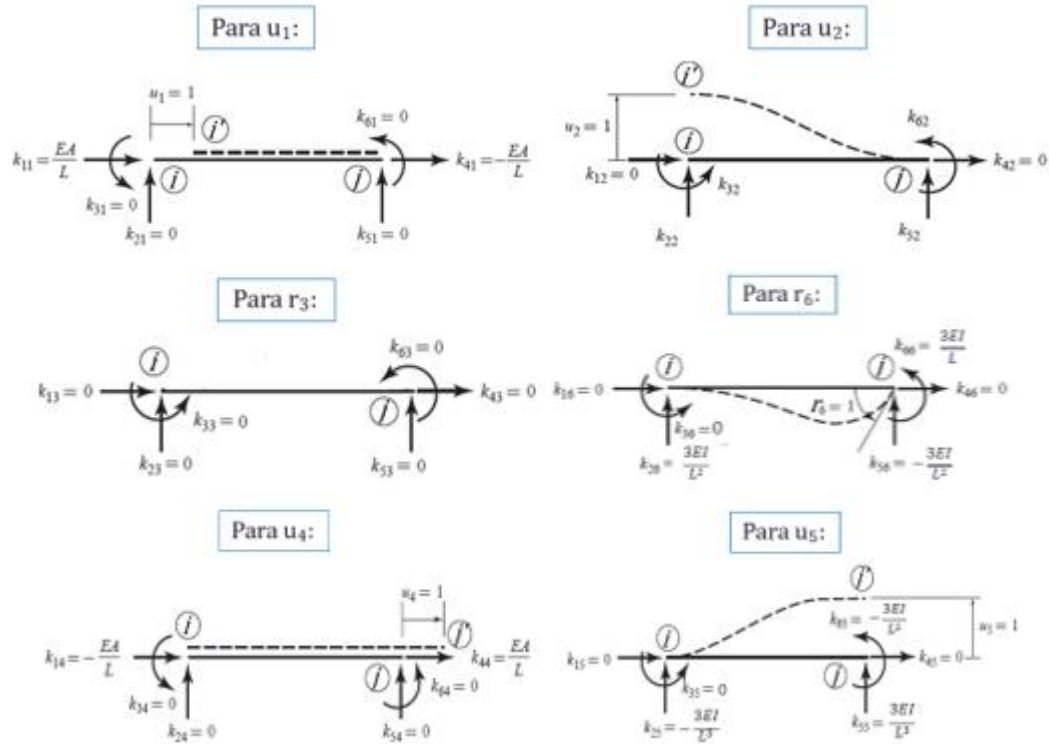
En el análisis anterior se supuso que cada miembro tipo frame estaba rígidamente conectado a los nodos en ambos extremos, lo que se conoce en la práctica como conexiones a resistentes a momento, sin embargo, existen casos de vigas o frames unidos mediante conexiones articuladas, conocidas como conexiones simples o a cortante, en las cuales el momento debe ser cero.

A continuación, se considerará el caso más común: los elementos unidos considerando rótulas (hinges) en sus extremos. Sin embargo, los conceptos presentados se pueden usar fácilmente para introducir los efectos de otros tipos de releases (por ejemplo, releases de fuerzas axiales y cortantes).



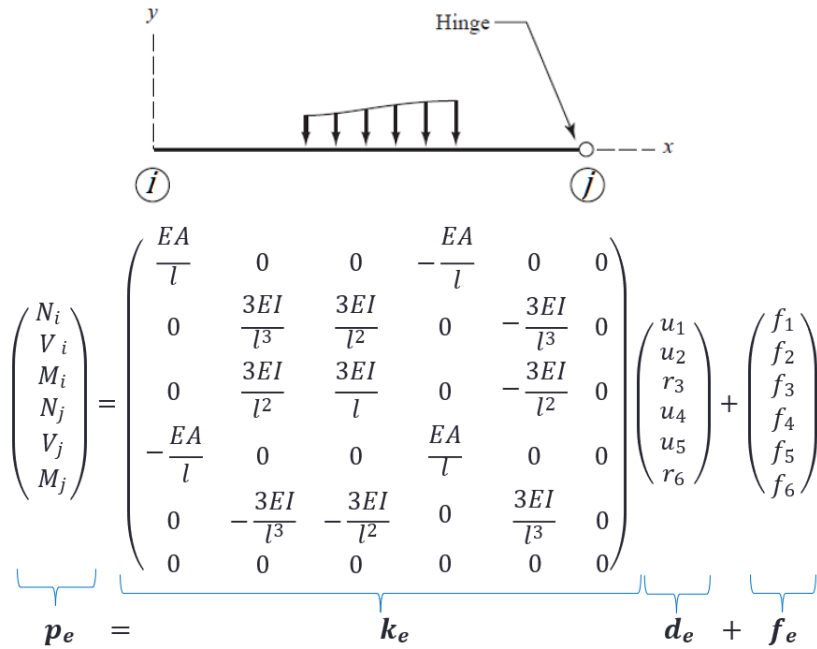
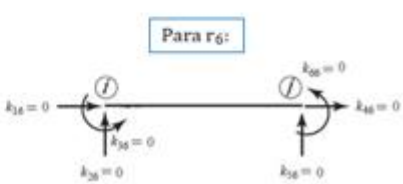
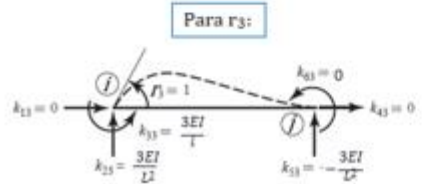
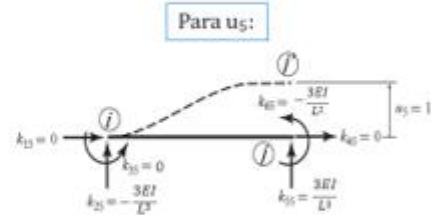
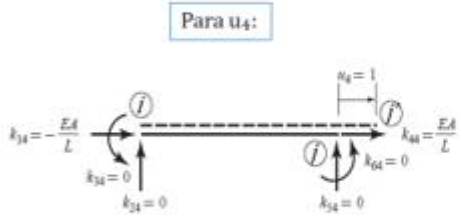
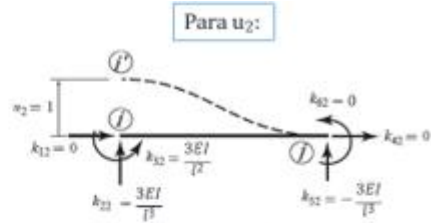
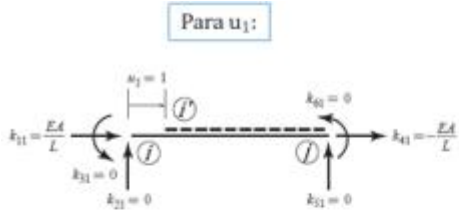
Ensamblaje de la matriz de rigidez

Articulado en el nodo i:



$$\underbrace{\begin{pmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V \\ M_j \end{pmatrix}}_{p_e} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{pmatrix}}_{k_e} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ r_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ r_6 \end{pmatrix}}_{d_e} + \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix}}_{f_e}$$

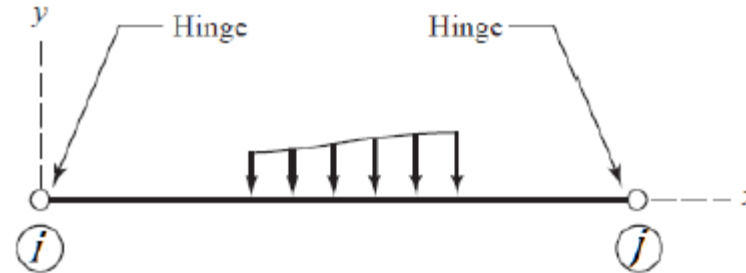
Articulado en el nodo j:



Ensamblaje de la matriz de rigidez

Articulado en ambos nodos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} N_i \\ V \\ M \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix}}_{\mathbf{p}_e} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{k}_e} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ r_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ r_6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_e} + \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}_e}$$



Ensamblaje de la matriz de rigidez

La matriz de rigidez total de un pórtico plano, K , tendrá tamaño $n \times n$, donde n es el número de gdl's (3 gdl por cada nodo). Por lo tanto, $n = 3 \cdot nnod$. Esta matriz se determina mediante el método de ensamblaje matricial con las matrices K_e obtenidas. Se puede hallar con un simple algoritmo:

- Crear una matriz K de ceros de tamaño $n \times n$,
- Obtener una matriz de correspondencias (matriz de conectividades) entre la numeración local y la numeración global de los grados de libertad.
- En cada posición (i, j) de la matriz K agregar las contribuciones K_e de cada elemento.

Los grados de libertad serán numerados siguiendo estas recomendaciones:

Número del grado de libertad horizontal del nodo i : $3i - 2$

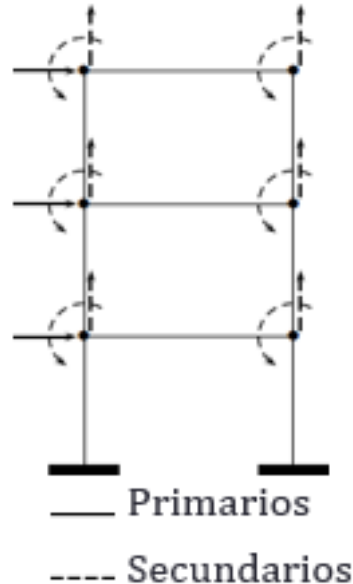
Número del grado de libertad vertical del nodo i : $3i - 1$

Número del grado de libertad rotacional del nodo i : $3i$

$$K_e = T_e^T k_e T_e$$

Condensación estática de la matriz de rigidez

Solamente es necesario un grado de libertad horizontal por piso (los dos extremos de cada viga se desplazarán una cantidad igual) y, por tanto, la condensación estática ha de realizarse a partir de una matriz de rigidez del pórtico K ensamblada según los grados de libertad que muestran en la imagen. El problema se puede simplificar aún más si se desprecian las deformaciones axiales de las columnas, lo cual implica considerar, como grados de libertad secundarios, solamente los giros en los nodos. (edificio de cortante).



Condensación estática de la matriz de rigidez

Para Columnas

-Se consideran 3 grados de libertad por nodo y se emplea:

$$k_e = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez en coordenadas globales para cada columna se obtiene de la manera usual:

$$K_e = T_e^T k_e T_e$$

Condensación estática de la matriz de rigidez

Para Vigas

Si se suprimen las deformaciones axiales, se trabaja con 2 grados de libertad por nodo y se emplea:

$$k_e = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez en coordenadas globales para cada columna se obtiene de la manera usual:

$$K_e = T_e^T k_e T_e$$

Procedimiento paso a paso

Método de rigideces

Dada la estructura reticular con sus apoyos, cargas, propiedades del material y secciones:

Datos de entrada:

Datos de los nodos:

- Enumerar todos los nodos del pórtico en el sistema global
- Enumerar los grados de libertad de cada nodo, teniendo en cuenta que el grado de libertad horizontal es $(3i-2)$, vertical es $(3i-1)$ y el rotacional $(3i)$. Obtener el número total de gdl (n)
- Obtener las coordenadas de los nodos

Datos de los elementos:

- Enumerar los elementos
- Determinar su nodo inicial i y su nodo final j . Se recomienda que $i < j$.
- Determinar las propiedades del material (E), área (A), inercia con respecto al eje centroidal (I), la longitud (L) de cada elemento y el tipo de cada elemento

Datos de los apoyos:

- Identificar los tipos de apoyos y los grados de libertad restringidos

Procedimiento paso a paso

Método de rigideces

Datos de las cargas:

- Identificar los tipos de cargas y los grados de libertad donde están siendo aplicadas

Matrices de correspondencias o de conectividades:

- Crear matriz LaG y matriz GaL

Proceso de cálculo:

Vector de fuerzas de empotramiento f_e de cada elemento en el sistema local:

- Obtener las fuerzas de empotramiento en los extremos de cada elemento con ayuda de las tablas de referencia o resolviendo las ecuaciones diferenciales.

Matriz de rigidez k_e de cada elemento en el sistema local:

- Crear la matriz k_e de cada elemento dependiendo del tipo de elemento que sea

Matriz de transformación de cada elemento:

- Calcular los cosenos y senos directores de cada elemento usando su ángulo θ o sus coordenadas.
- Con el cálculo anterior, obtener la matriz de transformación T_e

Matriz de rigidez K_e y vector F_e de cada elemento en el sistema global:

- Obtener la matriz de rigidez K_e de cada elemento.
- Obtener el vector de fuerzas de empotramiento F_e

Procedimiento paso a paso

Método de rigideces

Ensamblaje matricial:

- Crear una matriz K de ceros de tamaño $n \times n$
- En cada posición (i, j) de la matriz K agregar las contribuciones K_e de cada elemento
- Ensamblar el vector P , el vector D y el vector F

Calcular los desplazamientos y las reacciones

- Establecer los gdl restringidos (gdl conocidos) y no restringidos (gdl desconocidos)
- Obtener las submatrices
- Calcular los desplazamientos y las reacciones

Calcular las fuerzas internas en cada elemento

- Obtener los desplazamientos en el sistema local de cada elemento
- Aplicar la ecuación propuesta para calcular las fuerzas internas en cada elemento del pórtico

Chequear equilibrio estático en cada elemento

Procedimiento paso a paso

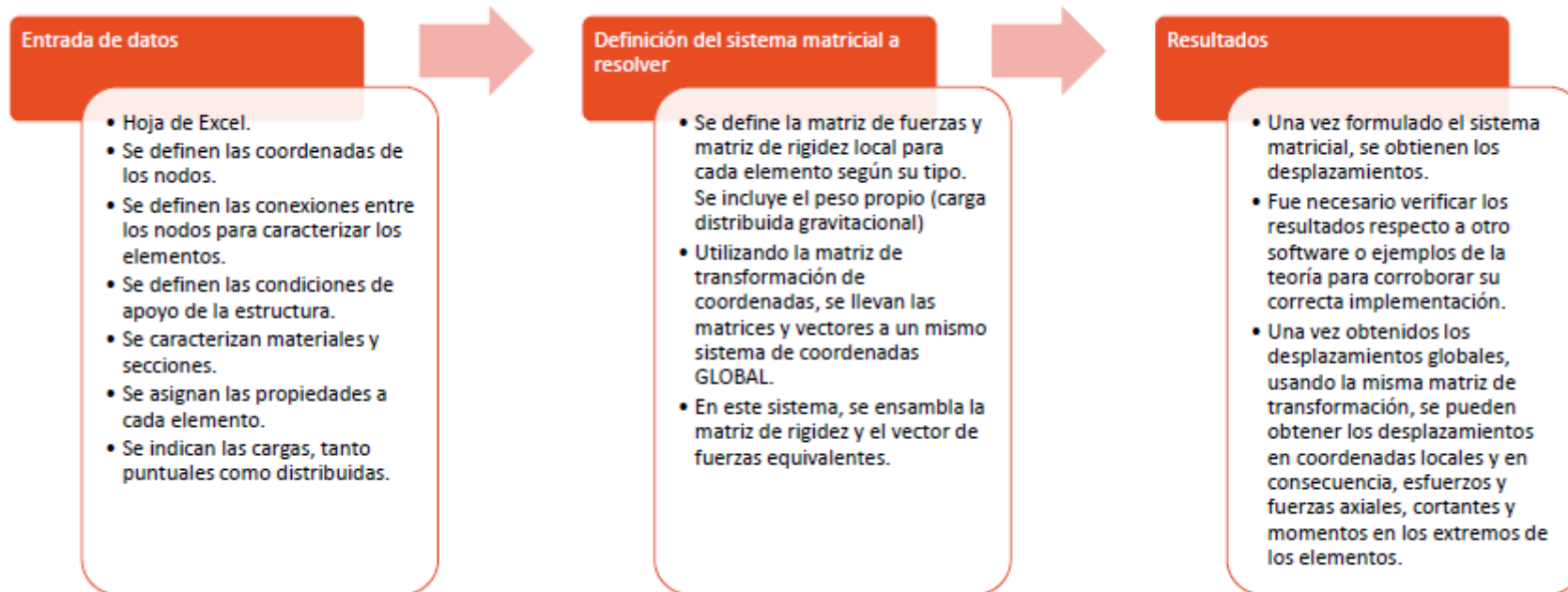
Método de rigideces

Datos de salida:

Desplazamientos horizontales, verticales y rotacionales de cada uno de los nodos

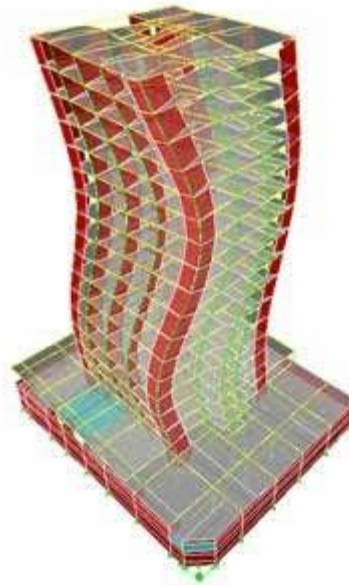
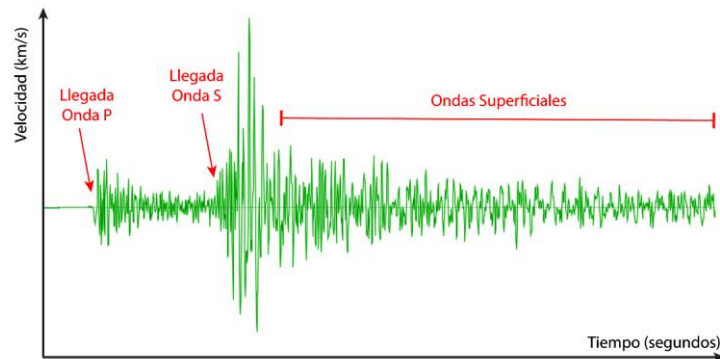
Reacciones en los apoyos

Fuerzas axiales, cortantes y momentos flectores de cada elemento de pórtico, con su respectivo signo. Con esta información se construyen los diagramas de N, V y M



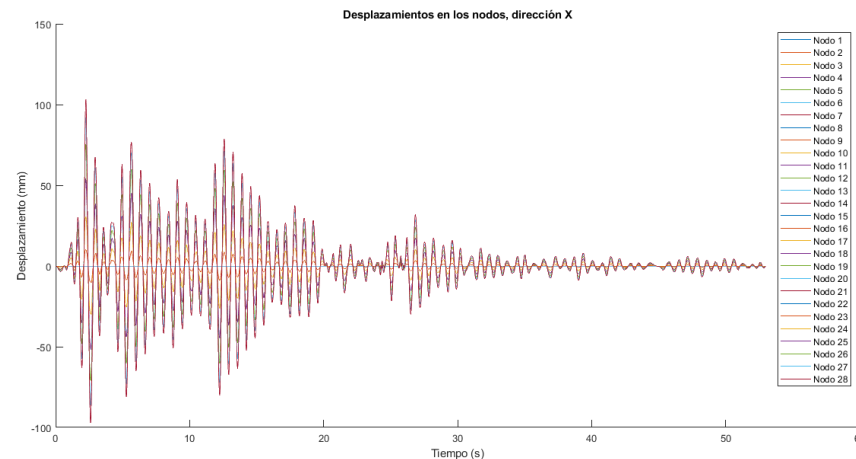
FASE 2:

5. MÉTODO PASO A PASO PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO DE ESTRUCTURAS RETICULARES BAJO CARGAS DINÁMICAS.



Descripción y planteamiento teórico del método

Para realizar el análisis dinámico se aplica el principio de Hamilton, el cual establece que la dinámica de un sistema físico está determinada por un problema variacional para un funcional basado en una sola función, la lagrangiana, que puede contener toda la información física relativa al sistema y las fuerzas que actúan sobre él. El problema variacional es equivalente y permite la derivación de las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema físico.



Análisis modal

- Solución de problemas de ruido y vibración:

Primero encontramos la fuente del problema usando mediciones de vibración bajo condiciones de operación. Si el problema es causado por la resonancia de la estructura (de hecho, una debilidad estructural), podemos realizar modificaciones al modelo dinámico y buscar alternativas para remediarlo.

- Optimización del diseño:

El análisis modal en los prototipos de las estructuras te permite optimizar el diseño mediante la simulación de la respuesta del prototipo y de esa manera hacer modificaciones al modelo dinámico.

- Monitoreo estructural:

Los parámetros modales pueden ser usados para monitorear las condiciones de las estructuras, como pueden ser imperfecciones o defectos; por ejemplo, el desarrollo de grietas; esto te permite modificar los parámetros modales de la estructura.

Análisis modal

Un modo de vibración es un patrón o forma característica en el que vibrará un sistema mecánico. La mayoría de los sistemas tienen muchos modos de vibración y es la tarea del análisis modal determinar la forma de esos modos. La cantidad de modos de vibración de la estructura se define por el número de grados de libertad que tenga la misma, y para cada uno de ellos, puede darse una respuesta acoplada o desacoplada. Los modos de vibrar se calculan desarrollando el siguiente determinante:

$$\det [\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}] = 0$$

Que se conoce como ecuación característica o ecuación de frecuencia. Esta ecuación tiene N raíces reales y positivas para ω_n^2 porque m y k, las matrices de masa y rigidez estructurales, son simétricas y positivas definidas

Las frecuencias naturales son necesarias en un análisis de vibración y también son importantes al elegir un paso de tiempo adecuado para un análisis de dinámica estructural. El subíndice n indica el número del modo, y el primer modo (n = 1) también se conoce como el modo fundamental.

Matriz de masa consistente

Las propiedades de la matriz de masa consistente son:

- Es una matriz simétrica
- Es definida como positiva
- Es invertible

Es importante resaltar que generalmente se emplea la matriz de masa concentrada o condensada, que agrupa arbitrariamente la masa en los nodos haciéndola una matriz diagonal incluso si no existen masas concentradas reales. Dicha matriz de masa concentrada se utiliza básicamente porque al ser una matriz diagonal, se emplean menos recursos computacionales, además solo tiene en cuenta la inercia traslacional (el cálculo de esta matriz de masa condensada también se incluye en el código).

Por lo tanto, para hallar la matriz de masa consistente se tiene en cuenta la contribución de la inercia traslacional y de la inercia Rotacional, para las vigas y también para las columnas:

Matriz de masa consistente

$$[M]^{(e)} = \frac{\gamma L}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \rho A$$

Matriz de masa
para el elemento
viga

$$[M]^{(e)} = \frac{\gamma L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\gamma L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de masa
para un elemento
bajo movimiento
axial

Por lo tanto, al superponer ambas contribuciones, se halla la matriz de masa del sistema:

$$[M]^{(e)} = \frac{\gamma L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Matriz de Amortiguamiento

La determinación de esta matriz de amortiguamiento es difícil en la práctica; según Bathe, las propiedades de amortiguamiento son dependientes de la frecuencia, por lo que generalmente esta matriz se asume como la siguiente combinación matemática, a la cual se le conoce como el amortiguamiento de Rayleigh:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$$

De esta ecuación, $\alpha[M]$ corresponde al amortiguamiento externo y $\beta[K]$ corresponde al amortiguamiento material o interno. Donde las constantes α y β se calculan mediante el siguiente sistema de ecuaciones y en base a los dos primeros modos de vibrar del sistema:

$$\alpha + \beta\omega_i^2 = 2\omega_i\zeta_i$$

Al asignar valores de relaciones de amortiguamiento, se puede resolver el sistema de ecuaciones:

$$\alpha = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}(\omega_2\zeta_1 - \omega_1\zeta_2) \quad \beta = \frac{2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}(\omega_2\zeta_2 - \omega_1\zeta_1)$$

Método de Newmark

Es un método implícito que permite encontrar la respuesta lineal en el tiempo de un sistema de múltiples grados de libertad ante una acción sísmica. Permite determinar los desplazamientos nodales en diferentes incrementos de tiempo para un sistema dinámico dado, cuyas ecuaciones base son las siguientes:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1 - \gamma) \Delta t] \ddot{u}_i + (\gamma \Delta t) \ddot{u}_{i+1}$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t) \dot{u}_i + [(0.5 - \beta)(\Delta t)^2] \ddot{u}_i + [\beta(\Delta t)^2] \ddot{u}_{i+1}$$

Casos Especiales:

1. Método de aceleración media constante ($\beta = 1/4$ y $\gamma = 1/2$).
2. Método de aceleración lineal ($\beta = 1/6$ y $\gamma = 1/2$).

Los parámetros β y γ definen la variación de la aceleración durante un paso de tiempo. La matriz de rigidez efectiva que es constante para el análisis lineal y está dada por:

$$\hat{k} = k + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} m$$

Método de Newmark

El vector de cargas efectiva que será variable para cada instante de tiempo de acuerdo con la variación y duración del sismo es:

$$\hat{p}_{i+1} = p_{i+1} + \left[\frac{1}{\beta(\Delta t)^2} m + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c \right] u_i + \left[\frac{1}{\beta \Delta t} m + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) c \right] \dot{u}_i + \left[\left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) m + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c \right] \ddot{u}_i$$

Finalmente, se calculan los desplazamientos, velocidades y aceleraciones para cada instante de tiempo $i+1$ de acuerdo a la duración del sismo:

$$u_{i+1} = \frac{\hat{p}_{i+1}}{k}$$

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (u_{i+1} - u_i) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{u}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{u}_i$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} (u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_i - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{u}_i$$

Análisis de balance de energía

El balance de energía se da cuando un objeto o un sistema de objetos que contienen una forma de energía pueden transformar esa forma en otra diferente. La Ley Fundamental de la Energía dice: “la energía ni se crea ni se destruye, sólo se transforma”.

El cálculo explícito del balance de energía para estructuras sujetas a la excitación sísmica es útil para evaluar la precisión con la que el equilibrio dinámico se logra en cada paso de tiempo.

El uso del concepto de balance de energía se presenta como método de análisis para este trabajo, evaluando una estructura inelástica simple excitadas por varios movimientos de tierra. Se muestra cómo el enfoque energético puede orientar al diseñador en apreciar el comportamiento no lineal de la estructura, la jerarquía de los mecanismos que ocurren en el tiempo, y la ductilidad requerimientos de los distintos componentes. Esto se logró usando un algoritmo de marcha en el tiempo incondicionalmente estable sin amortiguamiento algorítmico.

Análisis de balance de energía

Considerando la ecuación de movimiento, la cual se transforma en una ecuación de balance de energía, primero se premultiplica por la transpuesta del relativo vector de velocidad, $\{\dot{u}(t)\}^T$, y cada término se integra sobre el dominio del tiempo; por lo tanto, se obtiene:

$$\int \{\dot{u}(t)\}^T [M] \{d\dot{u}(t)\} + \int \{\dot{u}(t)\}^T [C] \{du(t)\} + \int \{du(t)\}^T \{F_s(t)\} = - \int \{du(t)\}^T [M] \{r\} \ddot{x}_g(t) + \int \{du(t)\}^T \{F_s\}$$

El primer término de la ecuación se puede integrar para producir una ecuación de balance de energía explícita para el sistema:

$$T_r(t) + D(t) + R(t) = I_r(t) + S(t)$$

Donde: $T_r(t) = \frac{1}{2} \{\dot{u}(t)\}^T [M] \{\dot{u}(t)\}$ Energía cinética relativa del sistema en el tiempo t

$D(t) = \int \{\dot{u}(t)\}^T [C] \{du(t)\}$ Energía disipada por amortiguamiento viscoso en el tiempo t

$R(t) = \int \{du(t)\}^T \{F_s(t)\}$ Energía absorbida en el tiempo t como resultado de deformaciones de elementos estructurales

$I_r(t) = - \int \{du(t)\}^T [M] \{r\} \ddot{x}_g(t)$ Energía sísmica relativa de entrada en el tiempo t

$S(t) = \int \{du(t)\}^T \{F_s\}$ Trabajo realizado por cargas aplicadas presísmica

Análisis de balance de energía

El término $R(t)$ se puede dividir en dos componentes:

$$R(t) = U(t) + H(t)$$

donde $U(t)$ es la energía de deformación elástica recuperable, y $H(t)$ es la energía disipada por el comportamiento histérico de los elementos estructurales.

Expresiones de energía discretizadas:

$$D(t) = D(t - \Delta t) + \frac{1}{2}(\{\dot{u}(t - \Delta t)\} + \{\dot{u}(t)\})^T [C]$$

$$(\{u(t)\} - \{u(t - \Delta t)\})$$

$$H(t) = H(t - \Delta t) + \frac{1}{2}(\{u(t)\} - \{u(t - \Delta t)\})^T$$

$$(\{F_s(t - \Delta t)\} + \{F_s(t)\})$$

$$I_s(t) = I_s(t - \Delta t) - \frac{1}{2}(\{u(t)\} - \{u(t - \Delta t)\})^T [M] \{\ddot{r}\}$$

$$(\ddot{x}_g(t - \Delta t) + \ddot{x}_g(t))$$

$$I_a(t) = I_a(t - \Delta t) + \frac{1}{2}(\{\ddot{u}_a(t)\} - \{\ddot{u}_a(t - \Delta t)\})^T [M] \{\ddot{r}\}$$

$$(x_g(t - \Delta t) + x_g(t))$$

$$S(t) = S(t - \Delta t) + (\{u(t)\} - \{u(t - \Delta t)\})^T \{F_s\}$$

Análisis de balance de energía

El error del balance de energía, $EBE(t)$, se puede calcular en cada paso de tiempo y se utiliza como criterio para indicar la precisión global lograda por un algoritmo dado. El error del balance de energía se puede normalizar en porcentaje de la siguiente manera:

$$EBE_{\%}(t) = \frac{|I_r(t) + S(t) - T_r(t) - D(t) - H(t)|}{|I_r(t)|} \times 100\%$$

Para la implementación en el caso particular nuestro el error encontrado en el balance de energía fue de 0, lo que indica el correcto uso del algoritmo, se debe tener en cuenta que este balance se empieza a revisar en el tercer paso (step 3) pero desde allí ya el balance da muy buenos resultados

Procedimiento paso a paso

Análisis dinámico

Datos de entrada:

Análisis modal:

- Considerar número de modos a tener en cuenta
- Caracterizar la matriz de rigidez que no considera los grados de libertad conocidos
- Caracterizar la matriz de masa que no considera los grados de libertad conocidos

Matriz de masa consistente:

- Seleccionar el tipo de estructura analizar, esto es, 'EE' (pórtico), 'RR' (cerca), 'RE' (rotula/empotrado), 'ER' (empotrado/rotula).
- Asignar las propiedades (área, peso específico, inercia y longitudes de los elementos), esto se hace desde el archivo de entrada de Excel.
- Asignar ancho aferente A_f y espesor para los elementos que reciben las masas de las losas, que son los elementos de los entrepisos, esto se hace desde el archivo de Excel.

Procedimiento paso a paso

Análisis dinámico

Matriz de amortiguamiento:

- Asignar un valor para el amortiguamiento, generalmente es del 5%.
- Discretizar las frecuencias de los primeros dos modos de vibrar del sistema, esto es w_1 y w_2 .

Método de Newmark:

- Seleccionar el caso especial del método de Newmark (esto es, seleccionar valores para β y γ).
- Indicar condiciones iniciales (desplazamiento, velocidad y aceleración).
- Seleccionar variación en el tiempo del sismo, Δt .

Proceso de cálculo:

Frecuencias angulares:

- Hallar los vectores y valores propios de la matriz de masa y rigidez discretizadas
- Obtener las frecuencias angulares en rad/s y en Hz
- Obtener el periodo en s
- Hallar y ordenar los modos de vibrar de la estructura según el orden hallado de las frecuencias

Procedimiento paso a paso

Análisis dinámico

Proceso de cálculo:

Matriz de masa consistente:

- Hallar matriz de masa considerando la Inercia Traslacional y la Inercia Rotacional (suma de las masas relacionadas a ambas).
- Obtener la matriz de masas de losa asociadas a los elementos de entrepiso.
- Ensamblar la matriz de masa consistente, esto es sumar las dos matrices anteriores con la matriz de masa global.

Participación modal:

- Obtener la participación de la masa para cada uno de los modos de vibrar.

Matriz de amortiguamiento:

- Ensamblar la matriz de amortiguamiento en $\text{kN}\cdot\text{s}/\text{m}$, con α_0 , α_1 , matriz de masa y matriz de rigidez.
- Discretizar la matriz de amortiguamiento para los grados de libertad desconocidos.

Procedimiento paso a paso

Análisis dinámico

Proceso de cálculo:

Método de Newmark:

- Cálculo de la matriz de rigidez efectiva

Para cada paso de tiempo i del sismo se calcula:

- Vector de cargas efectivo (se toman las aceleraciones del sismo).
- Desplazamiento para el instante de tiempo $i+1$.
- Velocidad para el instante de tiempo $i+1$.
- Aceleración para el instante de tiempo $i+1$.
- Repetir este procedimiento para cada instante de tiempo.

Datos de salida:

Matriz de masa consistente del sistema, Modos de vibrar, Matriz de amortiguamiento del sistema, Respuesta ante un sismo con una variación en el tiempo y aceleraciones definidas.

Bibliografía

- Hurtado, Jorge E. (2021). Análisis matricial de estructuras. Curso con MATLAB. Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales.
- Davalos, Cesar E (2022) Apuntes y diapositivas de clase - curso Análisis de Vibraciones, Universidad Nacional de Colombia.
- Timoshenko, Stephen; Godier J. N. (1951). McGraw-Hill, ed. Theory of elasticity.
- Ortiz Berrocal, Luis (1991). McGraw-Hill, ed. Resistencia de Materiales. Aravaca (Madrid). ISBN 84-7651-512-3.
- Ghali, A. and Neville, A.M. (2017). Structural Analysis: A unified classical and matrix approach. 7th edition. CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Uribe-Escamilla, Jairo. (2002). Análisis de estructuras. 2nd edición. Ecoe Ediciones.
- Easley, Joe and Wass, Anthony. (2011). Analysis of Structures: An introduction including numerical methods. John Wiley & Sons, Ltd.
- Nagarajan, P. (2019). Matrix Methods of Structural Analysis. CRC Press, Taylor & Francis Group.

Bibliografía

- Kassimali, A. (2012). Matrix Analysis of Structures. 2nd edición. Cengage Learning.
- Hurtado Gomez, Jorge E (2002). Introducción a la Dinámica de Estructuras. Universidad Nacional de Colombia, Manizales.
- García Reyes, Luis Enrique (1994). Dinámica Estructural Aplicada al diseño Sísmico. Ediciones Uniandes.
- Asociación Colombiana de Ingeniería Sísmica, AIS (2010). Reglamento Colombiano de Construcción Sismo Resistente, NSR-10.
- Chopra, A. (2015). Dynamics of structures. Pearson Higher, 4ta edition.
- Xu, Z.D, et al. (2016). Intelligent Vibration Control in Civil Engineering Structures. Academic Press.
- Constantinou, et al (1998). Passive energy dissipation systems for structural design and retrofit. MCEER.
- Daryl L. Logan. A First Course in the Finite Element Method. Fourth Edition. University of Wisconsin-Platteville.

¡GRACIAS!