

Taller de Álgebra I

Clase 0 - Introducción

Resolviendo problemas con una computadora

La resolución de un problema en computación requiere de al menos los siguientes pasos:

- ▶ identificar y aislar el **problema** a resolver,
- ▶ pensar una descripción de la solución (**algoritmo**) para resolver el problema,
- ▶ implementar el algoritmo en un lenguaje de programación y en una plataforma determinada, obteniendo así un **programa** ejecutable.

Un **programa** es la descripción de un algoritmo en un **lenguaje de programación**.

- ▶ Es una descripción precisa, de modo tal que pueda ser ejecutada por una computadora.
- ▶ Un lenguaje de programación tiene una **sintaxis** y una **semántica** bien definidas.

Al programar, es importante preguntarse:

- ▶ si el programa implementa correctamente el algoritmo propuesto,
- ▶ si puede pasar que el programa no termine en algunos casos,
- ▶ cuánto va a tardar la ejecución,
- ▶ etc.

¿La computación es útil a la matemática?

Las computadoras permiten realizar cálculos muy rápidamente, y esto permite:

- ▶ hacer cuentas que llevarían años de manera manual,
- ▶ chequear todos los casos en un teorema,
- ▶ testear conjeturas,
- ▶ y más...

Además, **pensar algorítmicamente** permite atacar los problemas desde un punto de vista totalmente distinto y muchas veces nos lleva a organizar mejor las ideas.

Ejemplo: Queremos una fórmula para la cantidad de subconjuntos de un conjunto de n elementos. Hacemos un programa que los cuente y vemos los resultados:

- ▶ 0 elementos \rightarrow 1 subconjunto
- ▶ 1 elemento \rightarrow 2 subconjuntos
- ▶ 2 elementos \rightarrow 4 subconjuntos
- ▶ 3 elementos \rightarrow 8 subconjuntos

Ah... ¡es 2^n ! ¿Por qué?

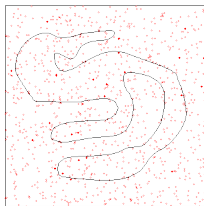
Estimaciones

Queremos calcular el área de la figura.



Estimaciones

Tiramos 1000 puntos al azar en un cuadrado que contiene a la figura y contamos cuántos caen adentro de la figura.



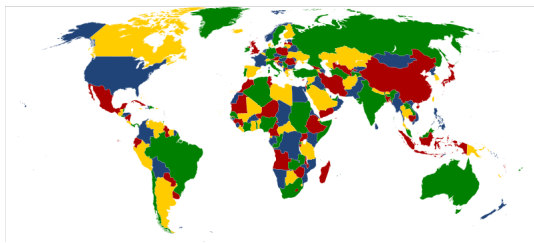
Por ejemplo, si caen 280 y el tamaño del cuadrado es de 100cm^2 , podemos estimar el área de la figura como

$$\frac{280}{1000} 100\text{cm}^2 = 28\text{cm}^2$$

Otros ejemplos de aplicaciones a la matemática

¿Cuántos colores hacen falta para colorear un mapa de tal manera que siempre dos regiones limítrofes tengan distintos colores?

Ejemplo: el mapa del mundo se puede colorear con 4 colores.



En 1852, Francis Guthrie le preguntó a su hermano matemático si 4 colores alcanzarían para cualquier mapa.

Ni el hermano de Guthrie, ni su profesor (Augustus de Morgan) ni otros matemáticos de la época pudieron demostrar que fuese así, ni encontrar un contraejemplo. La pregunta quedó planteada sin respuesta por mucho tiempo.

Otros ejemplos de aplicaciones a la matemática

Recién en 1977, Appel y Haken demostraron que era cierto, que 4 colores bastaban para cualquier mapa.

Pero la demostración de Appel y Haken dividió a la comunidad matemática. ¿Por qué?:

- ▶ Redujeron los mapas a unos 10.000 casos prototípicos.
- ▶ Luego, Appel y Haken probaron que en estos últimos 10.000 casos 4 colores bastaban... pero lo hicieron usando una computadora.

Un programa, decían los críticos de la computación entre los matemáticos, puede

- ▶ fallar al momento de la ejecución (algo que se descarta corriendo el mismo programa varias veces y en distintas máquinas),
- ▶ y mucho más importante: estar mal hecho (tener *bugs*).

Pero... ¿una persona, no puede equivocarse en una demostración escrita en papel?

En 2004, Georges Gonthier demostró *formalmente* el teorema de los cuatro colores. Lo hizo con una computadora (no sólo los 10.000 casos, sino todo el teorema), escribiendo la demostración en un lenguaje que sirve para verificar demostraciones: Coq.