Métodos Cerrados

Los métodos cerrados necesitan dos valores iniciales para la raíz, la cual se encuentra dentro de un intervalo predeterminado por un límite inferior y otro superior.

Estos métodos convergen porque se acercan a la raíz a medida de que avanzan las iteraciones.

- Si $f(x_l)$ y $f(x_u)$ tienen signos opuestos, entonces existe un número impar de raíces en el intervalo.
- Si $f(x_l)$ y $f(x_u)$ tienen el mismo signo, entonces no hay raíces o existe un número par de ellas en el intervalo.

Método de Bisección

Es un método de búsqueda incremental, en el que el intervalo siempre se divide a la mitad.

Si $f(x)$ es real y continua en el intervalo que va desde x_l hasta x_u y $f(x_l)$ y $f(x_u)$ cambian de signo, entonces en $f(x_l)f(x_u) < 0$ hay al menos un raíz real entre x_l y x_u. En otras palabras:

$$Si\ f(x_l) \cdot f(x_u) < 0 \Rightarrow \exists x_r \in [x_l, x_u]\ /\ f(x_r) = 0$$

Algoritmo

1. Elegir valores para x_l y x_u, de manera que encierren la raíz que que se cumpla $f(x_l)f(x_u) < 0$.
2. Se aproxima x_r mediante:
$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$
3. Se verifica lo siguiente:
    1. Si $f(x_l)f(x_r) < 0$, entonces $x_u = x_r$ y se vuelve al paso 2.
    2. Si $f(x_l)f(x_r) > 0$, entonces $x_l = x_r$ y se vuelve al paso 2.
    3. Si $f(x_l)f(x_r) = 0$, entonces se termina el cálculo

Tabla

i	x_l	x_u	$f(x_l)$	$f(x_u)$	x_r	$f(x_r)$

Iteraciones por margen de error

$$n = ent(\frac{\ln(x_u - x_l) - \ln(\epsilon)}{\ln(2)})$$

Estimación de error

$$\epsilon_a = |\frac{x_r^{nuevo} - x_r^{anterior}}{x_r^{nuevo}}| \cdot 100$$

Métodos Abiertos

Los algoritmos se basan en fórmulas que requieren únicamente un solo valor de inicio, el cual no necesariamente encierran la raíz.

Estos métodos aveces divergen o se alejan de la raíz a medida de que avanzan los cálculos.

Punto Fijo

Se debe reescribir la ecuación $f(x) = 0$ de tal modo que x esté a un lado de la ecuación. Dando como resultado:

$$x = g(x)$$

La ecuación va iterando en base al resultado anterior, de modo que que:

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

Teorema

Si α es la solución de la ecuación $x_{i+1} = g(x_i)$, y además $\alpha \in I$, entonces se cumple **de manera jerárquica** qué:

1. $g(x)$ y $g'(x)$ son continuas en I
2. $|g'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$
3. $x \in I$ (El intervalo I debe estar dentro de x. x se obtiene por el punto 2.)

Tabla

i	x_i	$g(x_i)$	$g'(x_i)$
0	x_0	-	-
1			

Iteraciones por margen de error

$$\epsilon \leq \frac{M^n}{1-M}|\Delta x|, con$$
$$\epsilon = x_i - x_n$$
$$\Delta x = x_1 - x_0$$
$$M = g'(x + \epsilon)$$

Estimación de error

$$\epsilon_a = |\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}| \cdot 100$$

Newton-Raphson

Si el valor inicial de la raíz es x_i, entonces se traza una recta tangente al punto $(x_i, f(x_i))$.

Dado el hecho de que para obtener la recta tangente a un punto se necesita la derivada, y que para obtener la intersección con el eje x debe cumplir que $f(x_i) = 0$. Entonces, la ecuación dada es:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

En caso de querer encontrar un punto máximo o un punto mínimo, entonces es posible realizar lo siguiente:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$$

Tabla

i	x_i	x_{i+1}
0	x_0	-
1		

Raíces de Polinomios

Forma general de una ecuación polinomial:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_n x^n$$

Recordar qué:

- En una ecuación grado n hay n raíces reales o complejas
- Si n es impar, existe al menos una solución real

Interpolación Lineal

La idea de la interpolación polinomial es encontrar un polinomio $P(x)$, tal que $P[x_i] = f(x_i)$

Esto, tomando en cuenta que el conjunto de polinomios de grado n, es en realidad un espacio vectorial de dimensión $n + 1$.

Con esto, se dará un palo ordenado de la siguiente manera:

$$\begin{gathered} P(x_o) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ P(x_i) = y_i \end{gathered}$$

o también puede estar escrito así:

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_i
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_i

Se resuelve con la siguiente matriz

1	x_0	x_0^2	x_0^n	y_0
1	x_1	x_1^2	x_1^n	y_1
1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	x_n	x_n^2	x_n^n	y_n

Interpolación de Newton

$$\begin{gathered} b_0 = f(x_0) \\ b_1 = f[x_1, x_0] \\ \cdots \\ b_n = f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0] \end{gathered}$$

i	x_i	$f(x_i)$	Primero	Segundo	Tercero
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

Polinomio de Lagrange

$$L_i(x) = \prod_{j=0}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},\ j \neq i$$