Ejercicio 19.2-2

En un periodo, un cliente llega a una instalación de servicio con probabilidad de $\frac{1}{2}$. Si encuentra dos personas en ella (incluso la que es atendida en ese momento), el cliente potencial se retira y nunca regresa; si hay una o menos, entra y se convierte en un cliente real.

El administrador de la instalación dispone de dos tipos de configuraciones de servicio. Al principio de cada periodo debe decidir cuál de las dos usará. Si utiliza la configuración "lenta" con un costo de 3 dólares y hay clientes presentes durante el periodo, el cliente que llega será atendido y se irá con probabilidad de $\frac{3}{5}$. Si utiliza la configuración "rápida" con un costo de 9 dólares y hay clientes presentes durante el periodo, un cliente que llega será atendido y se irá con probabilidad $\frac{4}{5}$.
La probabilidad de que llegue más de un cliente o se sirva más de uno en un periodo es cero. La ganancia es de \$50 por cliente atendido.

(a) Formule este problema como un proceso de decisión de Markov. Identifique estados y decisiones. En cada combinación de estado y decisión, encuentre el costo inmediato neto esperado (reste la ganancia por servir al cliente) en que se incurre durante ese periodo.

Consideremos los siguientes pasos de un proceso de decisión Markoviano:

1. Se observa el estado i de una cadena de Markov de estado discreto luego de cada transición. Los posibles estados son: $i = 0, 1, \dots, M$.

2. Luego de cada observación, se escoge una decisión k del conjunto de K decisiones posibles $(k = 1, 2, \dots, K)$

3. Si la decisión $d_1 = k$ se toma en el estado i, se incurre en un costo inmediato el cual es el valor esperado C_{ik}.

4. La decisión $d_1 = k$ en el estado i determina cuáles serán las probabilidades de la siguiente transición desde el estado i. Sean estas probabilidades de transición $p_{ij}(k)$ para $j = 0, 1, \dots, M$.

5. La especificación de las decisiones en los estados respectivos $(d_0, d_1, \dots, d_M)$ prescribe una política para el proceso de decisión Markoviano.

6. El objetivo es encontrar una política óptima para un criterio de costo que considera el costo inmediato y los costos subsecuentes que resultan de la evolución del proceso.

(a) Sean los estados $i = 0, 1, 2$ el número de clientes en la instalación. Hay dos posibles acciones cuando la instalación tiene uno o dos clientes.

- Sea 1 la decisión de usar la configuración lenta.
- Sea 2 la decisión de usar la configuración larga.
- Sea C_{ij} el costo immediato esperado neto de tomar la decisión j en el estado i.

Entonces:

- $C_{11} = C_{21}$

Probabilidad

$$C_{11} = 3 - \frac{3}{5} \times 50$$

Costos

$$\boxed{C_{11} = -27}$$

- $C_{12} = C_{22}$

$$C_{12} = 9 - \frac{4}{5} \times 50$$

$$\boxed{C_{12} = -31}$$

- $\boxed{C_{01} = 3}$
- $\boxed{C_{02} = 9}$

(b) Identifique todas las políticas (determinísticas estacionarias). Para cada una, elabore la matriz de transición y la expresión del costo neto esperado (a largo plazo) por periodo en términos de las probabilidades de estado estable desconocidas ($\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_M$).

- En el estado 0, la configuración escogida no afecta las probabilidades de transición, así que sería mejor escoger la configuración lenta cuando no hay clientes en línea.

- Por lo tanto, existen cuatro posibles políticas estacionarias. (R_i para $i = 1,2,3,4$)

i	$d_i(R_1)$	$d_i(R_2)$	$d_i(R_3)$	$d_i(R_4)$
1	1	1	2	2
2	1	2	1	2

Política R_1:

Matriz de Transición:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Costo promedio esperado:

$$C_1 = 3\pi_0 - 27\pi_1 - 27\pi_2$$

Política R_2:

Matriz de Transición:

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{array}$$

Costo promedio esperado:

$$C_2 = 3\pi_0 - 27\pi_1 - 31\pi_2$$

Política R_3:

Matriz de Transición:

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 2 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}$$

Costo promedio esperado:

$$C_3 = 3\pi_0 - 31\pi_1 - 27\pi_2$$

Política R_4:

Matriz de Transición:

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 2 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}$$

Costo promedio esperado:

$$C_4 = 3\pi_0 - 31\pi_1 - 31\pi_2$$

Ahora se calculará π_0, π_1, π_2 para cada política:

- <u>Política R_1:</u>

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$(\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{3}{10}\pi_1 \\ \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{5}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{5}\pi_1 + \frac{2}{5}\pi_2 \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \end{cases}$$

Despejando para igualar el lado izquierdo de las primeras tres ecuaciones a cero:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{2}\pi_0 + \frac{3}{10}\pi_1 \\ 0 = \frac{1}{2}\pi_0 - \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{5}\pi_2 \\ 0 = \frac{1}{5}\pi_1 - \frac{3}{5}\pi_2 \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \end{cases}$$

Según los resultados obtenidos en Google Colab:

$$\begin{cases} \pi_0 = 0.3103 \\ \pi_1 = 0.5172 \\ \pi_2 = 0.17241 \end{cases}$$

Así que el costo promedio es:

$$C_1 = 3(0.3103) - 27(0.5172) - 27(0.17241)$$

$$C_1 = -17.68$$

- <u>Política R_2:</u>

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$(\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{3}{10}\pi_1 \\ \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{4}{5}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{5}\pi_1 + \frac{1}{5}\pi_2 \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \end{cases}$$

Despejando para igualar las primeras tres ecuaciones a 0.

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{2}\pi_0 + \frac{3}{10}\pi_1 \\ 0 = \frac{1}{2}\pi_0 - \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{4}{5}\pi_2 \\ 0 = \frac{1}{5}\pi_1 - \frac{4}{5}\pi_2 \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \end{cases}$$

Según los resultados de Google Colab:

$$\begin{cases} \pi_0 = 0.3243 \\ \pi_1 = 0.5405 \\ \pi_2 = 0.1351 \end{cases}$$

El costo promedio es:

$$C_2 = 3\pi_0 - 27\pi_1 - 31\pi_2$$

$$C_2 = 3(0.3243) - 27(0.5405) - 31(0.1351)$$

$$C_2 = -17.80$$

- Política R_3:

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \end{cases}$$

$$(\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{2}{5}\pi_1 \\ \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{5}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{10}\pi_1 + \frac{2}{5}\pi_2 \\ 1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases}$$

Despejar:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{2}\pi_0 + \frac{2}{5}\pi_1 \\ 0 = \frac{1}{2}\pi_0 - \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{5}\pi_2 \\ 0 = \frac{1}{10}\pi_1 - \frac{3}{5}\pi_2 \\ 1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases}$$

Resultado según Google Colab:

$\pi_0 = 0.4067$

$\pi_1 = 0.5085$

$\pi_2 = 0.085$

Costo promedio.

$C_3 = 3\pi_0 - 31\pi_1 - 27\pi_2$

$C_3 = 3(0.4067) - 31(0.5085) - 27(0.085)$

$C_3 = -16.83$

- Política R4:

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \end{cases}$$

$$(\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{2}{5}\pi_1 \\ \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{5}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{10}\pi_1 + \frac{2}{5}\pi_2 \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \end{cases}$$

Despejando:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{2}\pi_0 + \frac{2}{5}\pi_1 \\ 0 = \frac{1}{2}\pi_0 - \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{3}{5}\pi_2 \\ 0 = \frac{1}{10}\pi_1 - \frac{3}{5}\pi_2 \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \end{cases}$$

Resultados según Google Colab:

$\pi_0 = 0.40678$

$\pi_1 = 0.508475$

$\pi_2 = 0.08474$

Costo promedio:

$C_4 = 3\pi_0 - 31\pi_1 - 31\pi_2$

$C_4 = 3(0.40678) - 31(0.508475) - 31(0.08474)$

$C_4 = -17.16$

Por lo tanto, con la política R_2 se incurre en un costo menor.

Es decir, se debe usar la configuración lenta cuando no haya clientes o cuando solo haya un cliente y la configuración rápida cuando haya dos clientes.

Ejercicio 19.3-1

- Reconsidere el problema 19.2-2

(a) Formule um modelo de programación lineal para encontrar la política óptima.

COSTOS

$$\min \; 3y_{01} + 9y_{02} + 3y_{11} + 9y_{12} + 28y_{21} + 34y_{22}$$

Sujeto a:

$$\begin{cases} y_{01} + y_{02} + y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} = 1 \\ y_{01} + y_{02} - \left(\frac{1}{2}y_{01} + \frac{1}{2}y_{02} + \frac{3}{10}y_{11} + \frac{2}{5}y_{12}\right) = 0 \\ y_{11} + y_{12} - \left(\frac{1}{2}y_{01} + \frac{1}{2}y_{02} + \frac{1}{2}y_{11} + \frac{1}{2}y_{12} + \frac{3}{5}y_{21} + \frac{4}{5}y_{22}\right) = 0 \\ y_{21} + y_{22} - \left(\frac{2}{10}y_{11} + \frac{1}{10}y_{12} + \frac{2}{5}y_{21} + \frac{1}{5}y_{22}\right) = 0 \end{cases}$$

y $\quad y_{ik} \geq 0$ para $i = 0, 1, 2$ y $k = 1, 2$