UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

Escuela Profesional de Ingeniería Estadística e Informatica

Método de Gauss-Jordan

Integrantes:
Lizbeth Estefany Caceres Tacora
Ronaldo Carlos Mamani Mena
Carlos Paolo Fontanil Barrera

Puno - Perú
2025

1. Introducción

El método de eliminación de Gauss-Jordan es una variante del método de Gauss. La diferencia principal es que, en lugar de resolver el sistema con sustitución hacia atrás, lleva la matriz aumentada a una forma escalonada reducida por filas mediante operaciones elementales. Esta mejora fue propuesta por el ingeniero alemán Wilhelm Jordan. Mientras que el método de Gauss obtiene el sistema equivalente en forma escalonada, el método de Gauss-Jordan lo lleva un paso más allá, simplificando aún más la matriz para obtener directamente la solución del sistema.

2. Solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de reducción de Gauss-Jordan

En esta parte el lector hallará la solución de sistemas de ecuaciones lineales usando el Método de Gauss-Jordan. El tema se presenta en cuatro secciones:

- A) Sistemas con solución única
- B) Sistemas con infinidad de soluciones
- C) Sistemas sin solución
- D) Sistemas homogéneos

3) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a - b &= -6 \\ b + c &= 3 \\ c + 2d &= 4 \\ 2a - 3d &= 5 \end{aligned}$$

Solución.

Escribiendo la matriz aumentada del sistema y reduciendo de acuerdo a la operación indicada tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_3+R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_4+R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 37 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 31 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 37 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{aligned} a &= 31 \\ b &= 37 \\ c &= -34 \\ d &= 19 \end{aligned}$$

Figura 1: A) Sistema con solución única

5) Obtener la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$3x - 2y + 3z = 5$$
$$2x + 4y - z = 2$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 16 & -9 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{16}R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{6R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{16} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

La última matriz está en su forma escalonada reducida, ya no se puede reducir más, de donde obtenemos:

$$x + \tfrac{5}{8}z = \tfrac{3}{2}$$
$$y - \tfrac{9}{16}z = -\tfrac{1}{4}$$

despejando x, y

$$x = \tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{8}z$$
$$y = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{16}z$$

luego x, y dependen de z, si $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$x = \tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{8}t$$
$$y = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{9}{16}t \ ; \quad t \in \mathbb{R}.$$
$$z = t$$

Es decir, el sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones ya que para cada valor de t habrá un valor para x, y, z.

Figura 2: B) Sistema con infinidad de soluciones

Por ejemplo, si $t = 0$ entonces $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{1}{4}$, $z = 0$, es una solución para el sistema de ecuaciones.

Si $t = 1$ entonces $x = \frac{7}{8}$, $y = \frac{5}{16}$, $z = 1$, es otra solución para el sistema de ecuaciones.

Si $t = -4$ entonces $x = 4$, $y = -\frac{5}{2}$, $z = -4$, también es solución para el sistema de ecuaciones.

Así una vez más, remarcamos, el sistema tiene una infinidad de soluciones.

Figura 3: Ejemplo intermedio del proceso de reducción

9) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$x + 8y - 5z = 3$$
$$3x - 2y + 3z = 1$$
$$2x + 3y - z = 4$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2R_1+R_3]{-3R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & -26 & 18 & -8 \\ 0 & -13 & 9 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -13 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

No hay necesidad de seguir reduciendo, del segundo renglón se tiene $0x + 0y + 0z = -4$ que da la igualdad $0 = -4$ (¡contradicción!), por lo tanto, el sistema no tiene solución.

Figura 4: C) Sistema sin solución

D) SISTEMAS HOMOGENEOS

Un sistema de ecuaciones lineales se dice HOMOGENEO si cada una de las ecuaciones está igualada a cero es decir

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n = 0$$

Los sistemas homogéneos SIEMPRE tienen solución ya que

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots\cdots = x_n = 0$$

es solución del sistema, ésta solución es llamada la *solución trivial*, así un sistema homogéneo de ecuaciones lineales tiene solución única o tiene una infinidad de soluciones.

13) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x - 3y + z = 0$$
$$x + y - z = 0$$
$$4x + 2y + 3z = 0$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-4R_1+R_3]{-2R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3R_3+R_2}$$

Figura 5: D) Sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-R_2+R_1]{2R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -29 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{29}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-17R_3+R_1]{18R_3+R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $x = y = z = 0$, el sistema tiene solución única, la solución trivial.

Figura 6: E) Sistema homogéneo

3. Utilizando el método de Gauss-Jordan en la función de presión arterial

Para ilustrar cómo se utiliza el **Método de Gauss-Jordan** para resolver un sistema de ecuaciones con las incógnitas **pulsaciones** (P) y **tiempo de actividad física** (T), consideramos el siguiente sistema de ecuaciones, que modela la relación entre la presión arterial, las pulsaciones y el tiempo de actividad física.

3.1. Sistema de Ecuaciones

El sistema de ecuaciones que modela la relación entre las variables es el siguiente:

$$2P + T = 340$$

$$3P - T = 450$$

Donde:
- P: pulsaciones por minuto.
- T: tiempo de actividad física en minutos.

Aunque en la realidad, la relación entre las pulsaciones y el tiempo de actividad física con respecto a la presión arterial no es lineal, para fines prácticos y de simplificación, podemos aproximar la relación mediante funciones lineales.

Estas incógnitas tienen restricciones, tales como:
Las pulsaciones (P) tienen un rango delimitado que va desde 100 hasta 190 pulsaciones por minuto, ya que, según la especialista, el rango de pulsaciones adecuadas varía dependiendo de la condición física y la edad de la persona.
El tiempo de actividad física (T) está delimitado entre 20 minutos y 180 minutos, ya que, según las recomendaciones de la OMS, el tiempo de actividad física saludable debe estar dentro de este rango.

Figura 7: La frecuencia cardíaca y el entrenamiento ¿cómo se calcula, qué valores son adecuados?.

Fuente: Vitónica, 2008

De la misma forma en cuanto a los posibles valores que pueden llegar a darase para la presion arterial con respecto a estas dos variables tenemos el siguiente cuadro:

TENSIÓN ARTERIAL	TAS (mmHg)		TAD (mmHg)
Óptima	<120	y	<80
Normal	<130	y	<85
Normal elevada	130-139	o	85-89
Estadio 1 de hipertensión	140-159	o	90-99
Estadio 2 de hipertensión	160-179	o	100-109
Estadio 3 de hipertensión	>179	o	>109

TAS: Tensión arterial sistólica
TAD: Tensión arterial diastólica

Figura 8: Clasificación de la hipertensión arterial según el JNC 1997.

Fuente: Report of the Joint National Committee, 1977

Paso 1: Representación Matricial

El sistema de ecuaciones se representa en forma aumentada como:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 340 \\ 3 & -1 & | & 450 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Hacer que el Primer Pivote Sea 1

Dividimos la primera fila entre 2:

$$\text{Fila 1} = \frac{1}{2} \times \text{Fila 1}$$

Resultado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & | & 170 \\ 3 & -1 & | & 450 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Eliminar el Primer Elemento de la Segunda Fila

Restamos 3× la primera fila de la segunda fila:

$$\text{Fila } 2 = \text{Fila } 2 - 3 \times \text{Fila } 1$$

Resultado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & | & 170 \\ 0 & -2{,}5 & | & -60 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Hacer que el Segundo Pivote Sea 1

Dividimos la segunda fila entre $-2{,}5$:

$$\text{Fila } 2 = \frac{1}{-2{,}5} \times \text{Fila } 2$$

Resultado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & | & 170 \\ 0 & 1 & | & 24 \end{bmatrix}$$

Paso 5: Eliminar el Segundo Valor de la Primera Fila

Restamos 0,5× la segunda fila de la primera fila:

$$\text{Fila } 1 = \text{Fila } 1 - 0{,}5 \times \text{Fila } 2$$

Resultado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 158 \\ 0 & 1 & | & 24 \end{bmatrix}$$

3.2. Solución Final

Las soluciones para las incógnitas x_1 y x_2 son:

$$x_1 = 158 \quad \text{y} \quad x_2 = 24$$

3.3. Interpretación de los Resultados

Variable x_1

- **Valor de** $x_1 = 158$. Este valor podría interpretarse como una cantidad importante dependiendo del contexto (por ejemplo, pulsaciones, calorías, o alguna medida relevante en el problema).

Variable x_2

- **Valor de** $x_2 = 24$. Este valor puede representar una cantidad de minutos, unidades, o una variable relacionada con la actividad física u otra métrica según el contexto.

Análisis del Valor $x_2 = 24$ minutos

Rango saludable: Según la OMS, el tiempo recomendado de actividad física para adultos está entre **20 y 180 minutos** diarios.
Interpretación:

- El valor obtenido ($x_2 = 24$ minutos) está **dentro del rango recomendado**.
- Este tiempo puede corresponder a una sesión corta de actividad física moderada, como una caminata rápida.

- Se considera un mínimo saludable, aunque podrían recomendarse sesiones más largas para mayores beneficios.

Relación entre x_1 y x_2

Aunque el modelo es una simplificación lineal, los valores obtenidos:

- Satisfacen el sistema original de ecuaciones planteado:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 340 \\ 3x_1 - x_2 = 450 \end{cases}$$

- Pueden representar una relación proporcional entre dos variables relacionadas con salud, economía o rendimiento físico, dependiendo del caso.

Limitaciones del modelo

- **Simplicidad:** El sistema de ecuaciones asume una relación lineal entre variables, lo que no siempre representa la realidad.
- **Falta de contexto:** No se proporciona el significado específico de x_1 y x_2, lo que limita la interpretación precisa.
- **Factores externos:** No se consideran otros factores importantes como edad, estado físico, condiciones médicas, etc.

3.4. Código Python en texto plano

```
def gj(m):
 n=len(m)
 for j in range(n):
  if m[j][j]==0:
   try:m[j],m[next(i for i in range(j+1,n)if m[i][j]!=0)]=m[next(i for i in range(j+1,n)if m[i][j]!=
   except:raise ValueError("No solución única")
  m[j]=[x/m[j][j]for x in m[j]]
  for i in range(n):
   if i!=j:m[i]=[a-m[i][j]*b for a,b in zip(m[i],m[j])]
 return [round(r[-1],6)for r in m]

try:
 n=int(input("N incógnitas: "))
 m=[list(map(float,input(f"E{i+1}: ").split()))for i in range(n)]
 if any(len(r)!=n+1 for r in m):raise ValueError("Tamaño incorrecto")
 r=input("¿Restringir valores? (s/n): ").lower()=="s"
 rest=[tuple(map(float,input(f"x{i+1} min,max: ").split(",")))if r else None for i in range(n)]
 s=gj(m)
 print("Solución:",*[f"x{i+1}={v}"for i,v in enumerate(s)])
 if r:
  for i,(v,t)in enumerate(zip(s,rest)):
   if t and not(t[0]<=v<=t[1]):print(f"error x{i+1}={v} fuera de [{t[0]},{t[1]}]")
except Exception as e:print(f"Error: {e}")
```

4. Método de Gauss-Jordan con Validación de Rango

4.1. Descripción General

Este documento presenta un algoritmo para resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de eliminación Gauss-Jordan. Este procedimiento transforma la matriz aumentada del sistema en una forma escalonada reducida para encontrar las soluciones. Además, el algoritmo incluye una validación para verificar si los resultados se encuentran dentro de rangos definidos por el usuario, lo cual es útil en contextos prácticos donde ciertas variables deben estar dentro de límites específicos.

4.2. Algoritmo Explicado Paso a Paso

1. **Lectura de datos:** Se ingresa la matriz aumentada de tamaño $n \times (n+1)$, que contiene los coeficientes del sistema y los términos independientes.
2. **Selección del pivote:** Si el pivote $m[j][j]$ es 0, se intercambia con una fila inferior que tenga un valor distinto de cero en esa columna.
3. **Normalización:** La fila del pivote se divide por su valor para que se convierta en 1.
4. **Eliminación:** Se hacen ceros los valores de la columna actual en todas las demás filas usando operaciones fila.
5. **Obtención de soluciones:** Se extraen los valores de la última columna (una vez que la matriz está en forma reducida) y se redondean a 6 cifras decimales.
6. **Validación (opcional):** Si el usuario lo solicita, se comprueba que cada solución se encuentre dentro de un rango definido por él.

4.3. Pseudocódigo Detallado

Listing 1: Pseudocódigo del algoritmo Gauss-Jordan

```
Inicio

1. Leer n      n mero de inc gnitas

2. Para i desde 0 hasta n-1 hacer
    Leer fila i de la matriz aumentada m[i]     n+1 n meros reales
FinPara

3. Para j desde 0 hasta n-1 hacer
    Si m[j][j] == 0 entonces
        Buscar fila i > j tal que m[i][j] != 0
        Si existe, intercambiar m[j] con m[i]
        Si no, terminar con mensaje: "No soluci n  nica "
    FinSi

    pivote     m[j][j]
    Dividir toda la fila j entre el pivote

    Para i desde 0 hasta n-1 hacer
        Si i != j entonces
            Restar a fila i: m[i] = m[i] - m[i][j] * m[j]
    FinPara

FinPara

4. Guardar soluciones redondeadas

5. Preguntar al usuario si desea aplicar restricciones

6. Si s  , leer los rangos y verificar que cada valor est  dentro del rango
    Si no lo est , mostrar advertencia

Fin
```

4.4. Lógica de los Bucles en Python

A continuación, se muestra la lógica básica del proceso en un fragmento de código Python más compacto:

Listing 2: Lógica simplificada de los bucles

```
for j in range(n):
    if m[j][j] == 0:
        # Buscar fila con valor diferente de 0 en columna j y cambiar
    m[j] = [x / m[j][j] for x in m[j]]
    for i in range(n):
        if i != j:
            m[i] = [a - m[i][j] * b for a, b in zip(m[i], m[j])]
```

4.5. Ejemplo

Sistema a resolver:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Después de aplicar el método:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Resultado:

$$x = 3, \quad y = 2$$

4.6. Validación de Rango

Si el usuario define que:

$$x \in [2, 3{,}5], \quad y \in [1{,}5, 2{,}5]$$

La solución es válida. Si no se cumple, el algoritmo mostrará una advertencia como:
ADVERTENCIA: $x = 3{,}8$ fuera del rango $[2,\ 3{,}5]$

4.7. Conclusión

El método de Gauss-Jordan es una herramienta robusta para resolver sistemas de ecuaciones lineales de manera sistemática y determinista. La implementación descrita no solo resuelve el sistema, sino que también incorpora validaciones útiles para aplicaciones prácticas. Este enfoque resulta especialmente valioso cuando se trabaja con restricciones o condiciones de frontera, comunes en ingeniería, ciencias aplicadas y economía.

5. Bibliografía

- Fiallos Moreno, L. (2018). *Método de Gauss-Jordan para la resolución de sistemas lineales* (Master's thesis, ESPOL).
- Espinosa, J. B., Morales, L. B., Valladares, I. R., & Badillo, C. Z. (2004). *Solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss–Jordan*.
- National Cancer Institute. (s.f.). *Presión arterial.* https://www.cancer.gov/espanol/publicaciones/diccionarios/diccionario-cancer/def/presion-arterial
- Vitónica. (2008, enero 17). *La frecuencia cardíaca y el entrenamiento: ¿cómo se calcula, qué valores son adecuados?* https://www.vitonica.com/spinning/la-frecuencia-cardiaca-y-el-entrenamiento-como-se-calcula-que-valores-son-adecuados