

Расчет вероятности битовой ошибки при когерентном детектировании

26 сентября 2014 г.

Аннотация

Рассматриваются методы расчета вероятности битовой ошибки при когерентном приеме для различных типов цифровой модуляции.

1 Сведения из теории, необходимые для семинара

Если x -случайная величина, а t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, то вероятность события $x < t$ представляет собой неубывающую непрерывную слева функцию от t , называемую *функцией распределения* $F(t)$ величины x [?]:

$$F(t) = P(x < t) \quad (1)$$

Функция $F(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow -\infty$ и к единице при $t \rightarrow \infty$. Если $F(t)$ непрерывно дифференцируема $F'(t) = f(t)$, то

$$P(a \leq x < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt \quad (2)$$

Из (??) предельным переходом при $a \rightarrow -\infty$ получаем

$$P(x < b) = F(b) = \int_{-\infty}^b f(t) dt \quad (3)$$

Откуда предельным переходом при $b \rightarrow \infty$ находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1 \quad (4)$$

Функция $f(t)$ называется плотностью вероятности величины x . Известным примером плотности вероятности является гауссова *функция ошибок*:

$$f(t) = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2c^2}} \quad (5)$$

Рассматривая вместо x величину $(x-a)/c$, можно для этой величины получить плотность вероятности более простого вида:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (6)$$

Соответствующая функция распределения имеет вид:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau \quad (7)$$

Название “гауссова функция ошибок” основано на том, что, по Гауссу, плотность вероятности для случайных ошибок астрономических наблюдений выражается формулой (??). Для вычисления интеграла ошибок (??) при не слишком больших значениях t плотность $f(t)$ разлагают в бесконечный ряд

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2!2^2} - \frac{t^6}{3!2^3} + \dots \right) \quad (8)$$

и интегрируют

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(t - \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \frac{t^5}{2!2^2 \cdot 5} - \dots \right) \quad (9)$$

Для больших t имеется асимптотическое разложение, которое получается следующим образом. Имеем

$$1 - \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau \quad (10)$$

если положить $\tau^2/2 = x$ и $t^2/2 = u$, то интеграл примет вид:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx \quad (11)$$

Интегрируя по частям, найдем

$$\int_u^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \int_u^\infty e^{-x} x^{-\frac{3}{2}} dx = e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} - R_1 \quad (12)$$

где $-R_1$ - отрицательный остаточный член. Для того чтобы оценить R_1 сверху, интегрируем по частям еще раз:

$$R_1 = \frac{1}{2} \int_u^\infty e^{-x} x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2} e^{-u} u^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \int_u^\infty e^{-x} x^{-\frac{5}{2}} dx < \frac{1}{2} e^{-u} u^{-\frac{3}{2}} \quad (13)$$

Если (??) подставить в (??), то получится искомая асимптотическая формула

$$\Phi(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \left(\frac{1}{t} - S_1 \right) \quad (14)$$

$$0 < S_1 < \frac{1}{t^3}$$

Если необходимо ограничить остаток величиной $\frac{1}{t^5}$, то следует проинтегрировать R_1 по частям еще раз.

$$0 < S_1 < \frac{1}{t^3}$$

Точки перегиба кривой с уравнением (??) имеют абсциссы $t = \pm 1$, так как вторая производная

$$y'' = \frac{t^2 - 1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

С ростом t функция $f(t)$ очень быстро убывает. На интервал от -2 до $+2$ приходится более 95% общей площади, расположенной между кривой и осью абсцисс, на интервал от -3 до $+3$ около 99.7%, а на интервал от -4 до $+4$ - только немногим менее 100%. Таким образом, для всех практических целей можно ограничиться интервалом от -3 до $+3$.

Все функции распределения, для которых плотности вероятности задаются формулой вида (??), называются *функциями нормального распределения*. Постоянная a указывает абсциссу точки максимума функции $f(t)$, а постоянная c - расстояние между проекциями точки максимума и точки перегиба на ось абсцисс.

В программной среде MATLAB есть две функции для вычисления интеграла ошибок. Функция $\text{erf}(x)$ вычисляет значение определенного интеграла

$$\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau.$$

Функция $\text{erfc}(x)$

$$\text{erfc}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-\tau^2} d\tau = 1 - \text{erf}(t).$$

Пользуясь функцией $\text{erf}(x)$ можно получить значение $\Phi(t)$. Для этого можно воспользоваться следующими соотношениями.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

здесь Эйлерова Гамма-функция [?] $\Gamma(z+1)$ для $z+1 > 0$ (или, в случае комплексного аргумента z , для $\text{Re}[z+1] > 0$) задается формулой:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty x^z e^{-x} dx \quad (15)$$

После подстановки пределов интегрирования 0 и ∞ и в предположении, что $z > 0$, находим:

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z) \quad (16)$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \text{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

Список литературы

- [1] Б.Л. ван дер Варден, Математическая статистика. М.,ИЛ, 1960.
- [2] Пестряков В.Б., Шумоподобные сигналы в системах передачи информации. - М., "Советское Радио", 1973.
- [3] Скляр Б., Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. - "Вильямс", 2007.