Расчет вероятности битовой ошибки при когерентном детектировании

3 октября 2014 г.

Аннотация

Рассматриваются методы расчета вероятности битовой ошибки при когерентном приеме для различных типов цифровой модуляции.

1 Сведения из теории, необходимые для семинара

Если x-случайная величина, а t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, то вероятность события $x < t$ представляет собой неубывающую непрерывную слева функцию от t, называемую *функцией распределения* $F(t)$ величины x [1]:

$$F(t) = P(x < t) \tag{1}$$

Функция $F(t)$ стремится к нулю при $t \to -\infty$ и к еденице при $t \to \infty$. Если $F(t)$ непрерывно дифференцируема $F'(t) = f(t)$, то

$$P(a \leq x < b) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(t)dt \tag{2}$$

Из (2) предельным переходом при $a \to -\infty$ получаем

$$P(x < b) = F(b) = \int\limits_{-\infty}^b f(t)dt \tag{3}$$

Откуда предельным переходом при $b \to \infty$ находим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1 \tag{4}$$

Функция $f(t)$ называется плотностью вероятности величины x. Известным примером плотности вероятности является гауссова *функция ошибок*:

$$f(t) = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2c^2}} \tag{5}$$

Рассматривая вместо x величину $(x-a)/c$, можно для этой величины получить плотность вероятности более простого вида:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \tag{6}$$

Соответствующая функция распределения имеет вид:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}\tau^2 d\tau} \tag{7}$$

Название “гауссова функция ошибок” основано на том, что, по Гауссу, плотность вероятности для случайных ошибок астрономических наблюдений выражается формулой (5). Для вычисления интеграла ошибок (6) при не слишком больших значениях t плотность $f(t)$ разлагают в бесконечный ряд

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2!2^2} - \frac{t^6}{3!2^3} + \dots\right) \tag{8}$$

и интегрируют

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(t - \frac{t^3}{2\cdot 3} + \frac{t^5}{2!2^2\cdot 5} - \dots\right) \tag{9}$$

Для больших t имеется асимптотическое разложение, которое получается следующим образом. Имеем

$$1 - \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_t^\infty e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau \tag{10}$$

если положить $\tau^2/2 = x$ и $t^2/2 = u$, то интеграл примет вид:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_u^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx \tag{11}$$

Интегрируя по частям, найдем

$$\int\limits_u^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2} \int\limits_u^\infty e^{-x} x^{-\frac{3}{2}} dx = e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} - R_1 \tag{12}$$

где $-R_1$ - отрицательный остаточный член. Для того чтобы оценить R_1 сверху, интегрируем по частям еще раз:

$$R_1 = \frac{1}{2} \int\limits_u^\infty e^{-x} x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2} e^{-u} u^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} \int_u^\infty e^{-x} x^{-\frac{5}{2}} dx < \frac{1}{2} e^{-u} u^{-\frac{3}{2}} \tag{13}$$

Если (12) подставить в (11), то получится искомая асимптотическая формула

$$\Phi(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \left(\frac{1}{t} - S_1\right) \tag{14}$$

$$0 < S_1 < \frac{1}{t^3}$$

Если необходимо ограничить остаток величиной $\frac{1}{t^5}$, то следует проинтегрировать R_1 по частям еще раз.

$$0 < S_1 < \frac{1}{t^3}$$

Точки перегиба кривой с уравнением (6) имеют абсциссы $t = \pm 1$, так как вторая производная

$$y'' = \frac{t^2 - 1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

С ростом t функция $f(t)$ очень быстро убывает. На интервал от -2 до $+2$ приходится более 95% общей площади, расположенной между кривой и осью абсцисс, на интервал от -3 до $+3$ около 99.7%, а на интервал от -4 до $+4$ - только немногоим менее 100%. Таким образом, для всех практических целей можно ограничиться интервалом от -3 до $+3$.

Все функции распределения, для которых плотности вероятности задаются формулой вида (5), называются *функциями нормального распределения*. Постоянная a указывает абсциссу точки максимума функции f(t), а постоянная c - расстояние между проекциями точки максимума и точки перегиба на ось абсцисс.

В программной среде MATLAB есть две функции для вычисления интеграла ошибок. Функция erf(x) вычисляет значение определенного интеграла

$$\mathrm{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t e^{-\tau^2} d\tau.$$

Функция erfc(x)

$$\mathrm{erfc}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_t^\infty e^{-\tau^2} d\tau = 1 - \mathrm{erf}(t).$$

Пользуясь функцией erf(x) можно получить значение $\Phi(t)$. Для этого можно воспользоваться следующими соотношениями.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}).$$

здесь Эйлерова Гамма-функция [1] $\Gamma(z+1)$ для $z+1>0$ (или, в случае комплексного аргумента z, для $Re\,[z+1]>0$) задается формулой:

$$\Gamma(z+1) = \int\limits_0^\infty x^z e^{-x} dx \tag{15}$$

После подстановки пределов интегрирования 0 и ∞ и в предположении, что $z>0$, находим:

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z+1) \tag{16}$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{erf}(\frac{t}{\sqrt{2}}).$$

2 Расчет вероятности битовой ошибки для BPSK

При использовании бинарной фазовой модуляции в канале с аддитивной гаусовой помехой сигнал на выходе коррелятора можно рассматривать как случайную величину с нормальным законом распределения, с мат. ожиданием $\pm E$ и дисперсией c^2. Вероятность ошибочного детектирования символа

$$P_s = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{(t+E)^2}{2c^2}} dt \tag{17}$$

Замена переменной $u = \frac{t+E}{c\sqrt{2}}$, $dt = c\sqrt{2}du$ позволяет перейти к интегралу

$$P_s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{E}{c\sqrt{2}}}^\infty e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{E}{c\sqrt{2}}\right) \tag{18}$$

Для модуляции BPSK вероятность ошибки бита и вероятность ошибки символа совпадают.

Список литературы

[1] Б.Л. ван дер Варден, Математическая статистика. М.,ИЛ, 1960.

[2] Пестряков В.Б., Шумоподобные сигналы в системах передачи информации. - М., “Советское Радио” , 1973.

[3] Скляр Б., Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. - “Вильямс”, 2007.