Расчет вероятности битовой ошибки при когерентном детектировании

2 октября 2014 г.

Аннотация

Рассматриваются методы расчета вероятности битовой ошибки при когерентном приеме для различных типов цифровой модуляции.

1 Сведения из теории, необходимые для семинара

Если x-случайная величина, а t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, то вероятность события $x < t$ представляет собой неубывающую непрерывную слева функцию от t, называемую *функцией распределения* $F(t)$ величины x [1]:

$$F(t) = P(x < t) \tag{1}$$

Функция $F(t)$ стремится к нулю при $t \to -\infty$ и к еденице при $t \to \infty$. Если $F(t)$ непрерывно дифференцируема $F'(t) = f(t)$, то

$$P(a \leq x < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt \tag{2}$$

Из (2) предельным переходом при $a \to -\infty$ получаем

$$P(x < b) = F(b) = \int_{-\infty}^{b} f(t)dt \tag{3}$$

Откуда предельным переходом при $b \to \infty$ находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1 \tag{4}$$

Функция $f(t)$ называется плотностью вероятности величины x. Известным примером плотности вероятности является гауссова *функция ошибок*:

$$f(t) = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2c^2}} \tag{5}$$

Рассматривая вместо x величину $(x - a)/c$, можно для этой величины получить плотность вероятности более простого вида:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \tag{6}$$

Соответствующая функция распределения имеет вид:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}\tau^2 d\tau} \tag{7}$$

Название “гауссова функция ошибок” основано на том, что, по Гауссу, плотность вероятности для случайных ошибок астрономических наблюдений выражается формулой (5). Для вычисления интеграла ошибок (6) при не слишком больших значениях t плотность $f(t)$ разлагают в бесконечный ряд

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2!2^2} - \frac{t^6}{3!2^3} + \dots\right) \tag{8}$$

и интегрируют

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(t - \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \frac{t^5}{2!2^2 \cdot 5} - \dots\right) \tag{9}$$

Для больших t имеется асимптотическое разложение, которое получается следующим образом. Имеем

$$1 - \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_t^\infty e^{-\frac{1}{2}\tau^2} d\tau \tag{10}$$

если положить $\tau^2/2 = x$ и $t^2/2 = u$, то интеграл примет вид:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_u^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx \tag{11}$$

Интегрируя по частям, найдем

$$\int\limits_u^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2} \int\limits_u^\infty e^{-x} x^{-\frac{3}{2}} dx = e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} - R_1 \tag{12}$$

где $-R_1$ - отрицательный остаточный член. Для того чтобы оценить R_1 сверху, интегрируем по частям еще раз:

$$R_1 = \frac{1}{2} \int\limits_u^\infty e^{-x} x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2} e^{-u} u^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \int_u^\infty e^{-x} x^{-\frac{5}{2}} dx < \frac{1}{2} e^{-u} u^{-\frac{3}{2}} \tag{13}$$

Если (12) подставить в (11), то получится искомая асимптотическая формула

$$\Phi(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \left(\frac{1}{t} - S_1\right) \tag{14}$$

$$0 < S_1 < \frac{1}{t^3}$$

Если необходимо ограничить остаток величиной $\frac{1}{t^5}$, то следует проинтегрировать R_1 по частям еще раз.

$$0 < S_1 < \frac{1}{t^3}$$

Точки перегиба кривой с уравнением (6) имеют абсциссы $t = \pm 1$, так как вторая производная

$$y'' = \frac{t^2 - 1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

С ростом t функция $f(t)$ очень быстро убывает. На интервал от -2 до $+2$ приходится более 95% общей площади, расположенной между кривой и осью абсцисс, на интервал от -3 до $+3$ около 99.7%, а на интервал от -4 до $+4$ - только немногоим менее 100%. Таким образом, для всех практических целей можно ограничиться интервалом от -3 до $+3$.

Все функции распределения, для которых плотности вероятности задаются формулой вида (5), называются *функциями нормального распределения*. Постоянная a указывает абсциссу точки максимума функции f(t), а постоянная c - расстояние между проекциями точки максимума и точки перегиба на ось абсцисс.