Оптимальное распознавание и обнаружение сигналов

1 октября 2014 г.

Аннотация

Рассматриваются общие принципы построения алгоритмов обнаружения сигналов на фоне аддитивной помехи. Вводятся понятия вероятности обнаружения, функции риска и отношения правдоподобия.

1 Элементы теории принятия решений

Будем предполагать, что алгоритм обнаружения располагает данными $x_1, x_2, \ldots, x_k$ представляющими отсчеты сигнала на интервале времени T. После обработки принимается решение о наличии сигнала (гипотеза Γ_s) или об отсутствии сигнала (гипотеза Γ_0). Следуя [2] введем обозначения: $P(\Gamma_s/0) = P_{fa}$ - условная вероятность ошибочного решения о наличии сигнала при его отсутствии (вероятность ложного срабатывания, False Alarm Probability). $P(\Gamma_0/s) = P_{los}$-условная вероятность ошибочного решения об отсутствии сигнала при его наличии. Для каждого из ошибочных решений устанавливается цена, определяющая вредные последствия: r_{los}-цена пропуска сигнала. r_{fa}-цена ложного срабатывания. Произведение вероятности ошибочного решения на его цену принято называть риском. Сумма всех рисков, соответствующих ошибочным решениям, определяет средний риск ρ. В задаче обнаружения единственного сигнала средний риск определяется выражением:

$$\rho = P_{fa} r_{fa} + P_{los} r_{los} \tag{1}$$

Принятие решения о наличии сигнала сопровождается минимальным средним риском ρ^*, если выполняется условие.

$$l(x) = \frac{f_s(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{f_n(x_1, x_2, \ldots, x_k)} > \Pi \tag{2}$$

где $\Pi = r_{los} P(s) / r_{fa} P(0)$ - порог. $P(s)$ - априорная вероятность наличия сигнала. $P(0)$ - априорная вероятность отсутствия сигнала. Если априорные вероятности и цены нежелательных решений равны, то порог $\Pi = 1$.

2 Обнаружение сигнала с неизвестной амплитудой

Многомерная плотность распределения гауссового шума [2]:

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{K/2} c^K} \exp\left(-\frac{1}{2c^2} \sum_{n=1}^{K} x_n^2\right) \tag{3}$$

Плотность распределения смеси гауссового шума и полезного сигнала $a_s s_n$:

$$f_s(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{K/2} c^K} \exp\left(-\frac{1}{2c^2} \sum_{n=1}^{K} (x_n - a_s s_n)^2\right) \tag{4}$$

Отношение правдоподобия

$$
\begin{aligned}
l(x) = \frac{f_s(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{f_n(x_1, x_2, \ldots, x_k)} &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2c^2}\sum\limits_{n=1}^{K}(x_n - a_s s_n)^2\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2c^2}\sum\limits_{n=1}^{K}x_n^2\right)} \\
\exp\left(\frac{1}{2c^2}\sum_{n=1}^{K}(-x_n^2 + 2a_s s_n x_n - a_s^2 s_n^2) + \frac{1}{2c^2}\sum_{n=1}^{K}x_n^2\right) &= \\
\exp\left(\frac{1}{2c^2}\sum_{n=1}^{K}(2a_s s_n x_n - a_s^2 s_n^2)\right) = \exp\left(\frac{1}{2c^2}\sum_{n=1}^{K}2a_s s_n x_n - \frac{1}{2c^2}\sum_{n=1}^{K}a_s^2 s_n^2\right) &= \\
\exp\left(\frac{1}{c^2}\sum_{n=1}^{K}a_s s_n x_n - \frac{E_s}{2c^2}\right)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Для принятия решения о наличии сигнала в соответствии с критерием минимума функции риска должно выполняться условие.

$$\exp\left(\frac{1}{c^2}\sum_{n=1}^{K}a_s s_n x_n - \frac{E_s}{2c^2}\right) > \Pi \tag{6}$$

После логарифмирования обеих частей неравенства

$$\frac{1}{c^2}\sum_{n=1}^{K}a_s s_n x_n - \frac{E_s}{2c^2} > \ln \Pi \tag{7}$$

Пусть априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала равны $P(0) = P(s) = 0.5$, дополнительно пусть последствия обоих неправильных решений ведут к одной стоимости $r_{los} = r_{fa}$, тогда решающее правило

$$\sum_{n=1}^{K}a_s s_n x_n > \frac{E_s}{2} \tag{8}$$

Список литературы

[1] Б.Л. ван дер Варден, Математическая статистика. М.,ИЛ, 1960.

[2] Пестряков В.Б., Шумоподобные сигналы в системах передачи информации. - М., “Советское Радио” , 1973.

[3] Скляр Б., Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. - “Вильямс”, 2007.