1 Лаб. работа. Расчет рекурсивного цифрового фильтра по аналоговому прототипу

1.1 Цель работы

Расчет и анализ цифрового рекурсивного фильтра нижних частот с использованием аналогового прототипа.

1.2 Последовательность выполнения

Расчет аналогового прототипа (фильтр Баттерворта или Чебышева 2-го порядка), численное моделирование процесса фильтрации с помощью метода Эйлера решения диф. уравнения. Выбор шага по времени для численного метода и интервала дискретизации для цифрового фильтра. Расчет цифрового рекурсивного фильтра с помощью билинейного преобразования. Построение и сравнение частотных характеристик аналогового прототипа и цифрового фильтра для различных значений частоты дискретизации. Сравнение выходных сигналов аналогового и цифрового фильтров. Выводы.

1.3 Фильтр Баттерворта второго порядка

Передаточная функция аналогового фильтра Баттерворта 2-го порядка может быть представлена в виде:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \tag{1}$$

Дифференциально уравнение:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \sqrt{2}\frac{dy}{dt} + y(t) = x(t) \tag{2}$$

Пусть на вход фильтра поступает сигнал:

$$x(t) = cos(0.1t) + cos(2t) + 2.0 \tag{3}$$

Для получения выходного сигнала используем метод Эйлера численного решения диф. уравнения. Для этого введем замену:

$$z(t) = \frac{dy}{dt} \tag{4}$$

Получим систему из двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} & = z(t) \\ \frac{dz}{dt} & = x(t) - \sqrt{2}z(t) - y(t) \end{cases} \tag{5}$$

Численная схема решения в соответствии с методом Эйлера:

$$\begin{cases} y_{n+1} & = y_n + \frac{dy}{dt}\Delta t = y_n + z_n \Delta t \\ z_{n+1} & = z_n + \frac{dz}{dt}\Delta t = z_n + \left[x_n - \sqrt{2}z_n - y_n\right]\Delta t \end{cases} \tag{6}$$

1.4 Расчет цифрового фильтра с помощью билинейного преобразования

Переход от непрерывного представления (1) к дискретному производится путем формальной замены комплексной переменной s на билинейную форму от z:

$$s \to \gamma \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \tag{7}$$

Здесь γ - параметр, определяющий соотношение между шкалой аналоговых частот Ω и шкалой дискретных частот ω.

$$\Omega = \gamma \,\mathrm{tg}(\pi \frac{\omega}{\omega_d}) \tag{8}$$

Подставляя (7) в (1), получаем:

$$H(z) = \frac{1}{\gamma^2 \frac{(1-z^{-1})^2}{(1+z^{-1})^2} + \gamma \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} = \frac{(1+z^{-1})^2}{\gamma^2(1-z^{-1})^2 + \gamma\sqrt{2}(1-z^{-1})(1+z^{-1}) + (1+z^{-1})^2} = \tag{9}$$

$$\frac{z^{-2} + 2z^{-1} + 1}{\gamma^2(z^{-2} - 2z^{-1} + 1) + \gamma\sqrt{2}(1 - z^{-2}) + (z^{-2} + 2z^{-1} + 1)} \tag{10}$$

$$\frac{z^{-2} + 2z^{-1} + 1}{z^{-2}(\gamma^2 - \gamma\sqrt{2} + 1) + z^{-1}(2 - 2\gamma^2) + (\gamma^2 + \sqrt{2}\gamma + 1)} \tag{11}$$

Введем обозначения:

$$A = (\gamma^2 - \gamma\sqrt{2} + 1) \tag{12}$$

$$B = (2 - 2\gamma^2) \tag{13}$$

$$C = (\gamma^2 + \sqrt{2}\gamma + 1) \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

Передаточная функция цифрового фильтра:

$$H(z) = \frac{z^{-2} + 2z^{-1} + 1}{Az^{-2} + Bz^{-1} + C} \tag{16}$$

Уравнение фильтрации:

$$y_n = \frac{1}{C}\left(x_{n-2} + 2x_{n-1} + x_n - Ay_{n-2} - By_{n-1}\right) \tag{17}$$

2 Частотные характеристики фильтров

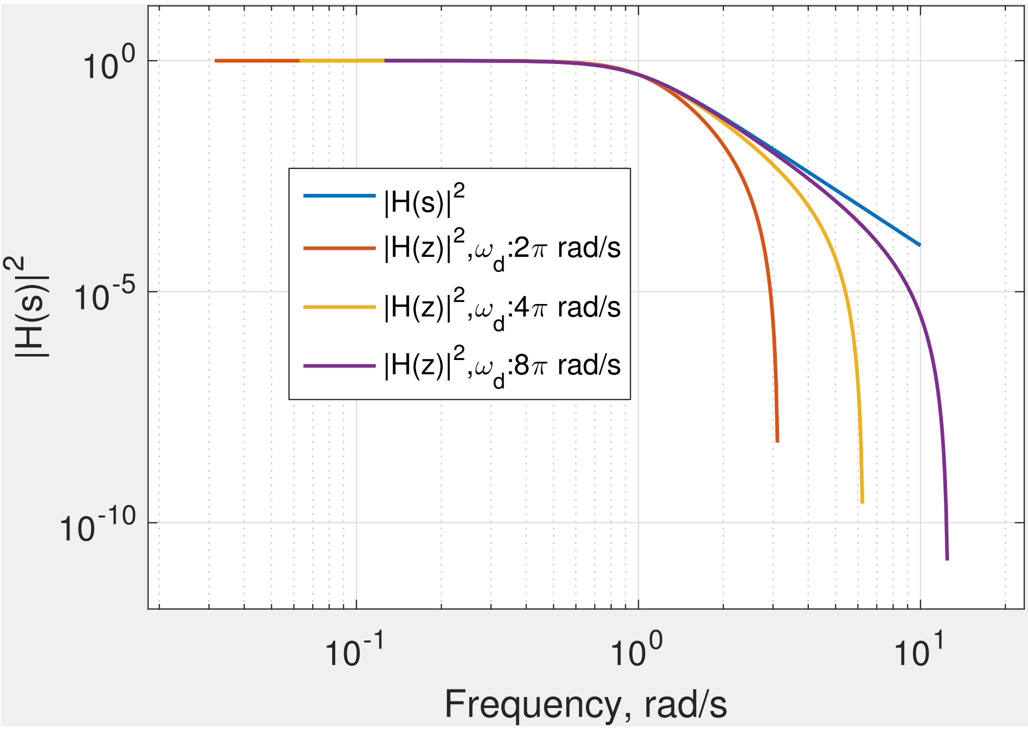

Рис. 1: Частотные характеристики фильтров

3 Выходной сигнал аналогового прототипа и цифрового фильтра для различных частот дискретизации

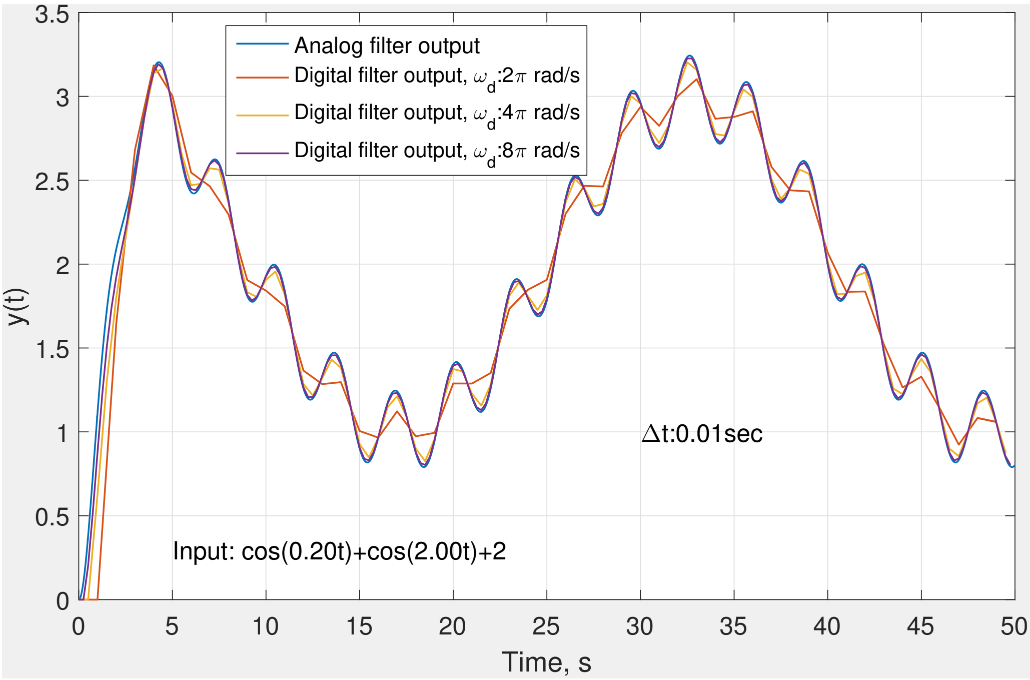

Рис. 2: Результаты фильтрации

4 Выводы

-