Université de Strasbourg

Optimisation non-linéaire

Cours de Licence 3 - année universitaire 2020-2021

Cours dispensé par Yannick PRIVAT

Institut de Recherche Mathématique Avancée (IRMA)
Université de Strasbourg
email : yannick.privat@unistra.fr

Préambule

Ce cours présente les bases théoriques et numériques de l'optimisation Vous trouverez, dans le premier chapitre quelques outils généraux (algèbre linéaire, calcul différentiel). Le second chapitre est dédié à l'analyse des problèmes d'optimisation en dimension finie, qu'il s'agisse du vocabulaire de l'optimisation, des questions d'existence ou unicité des solutions, de l'obtention de conditions d'optimalité pour l'optimisation sans puis avec contrainte(s). Quelques algorithmes numériques sont également présentés. Le troisième et dernier chapitre est consacré à la programmation dynamique, une famille de problèmes d'optimisation sous contraintes que l'on rencontre fréquemment lorsque l'on cherche à résoudre les problèmes appliqués à l'économie, la finance ou l'actuariat (par exemple, l'affectation optimale des ressources au cours du temps).

Divers exercices accompagnent le présent document afin d'assimiler les notions étudiées en cours.

Ce polycopié est volontairement succinct. Sa lecture ne peut exempter d'une présence assidue en cours.

Table des matières

I. Boîte à outils

I.1 Introduction à l'optimisation

Dans ce cours, on s'intéresse au problème suivant

$$\inf_{x \in K} f(x) \tag{I.1}$$

où $K \subset \mathbb{R}^n$ et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, appelée **fonction coût** ou **critère**.

- Si $K = \mathbb{R}^n$, on dit que (I.1) est un problème d'optimisation **sans contrainte**.
- Si $K \subsetneq \mathbb{R}^n$, on dit que (I.1) est un problème d'optimisation **sous contrainte**.
- Puisque $\dim \operatorname{vect} K < +\infty$, on dit que (I.1) est un problème d'optimisation en dimension finie.

Remarquons que ce formalisme englobe tous les problèmes d'optimisation, y compris les problèmes de maximisation puisque maximiser une quantité revient à minimiser son opposé :

$$\sup_{x \in K} f(x) = -\inf_{x \in K} -f(x)$$

Nous adopterons la convention suivante : si l'on veut indiquer que la valeur du minimum est atteinte, on écrira

$$\min_{x \in K} f(x)$$

tandis que l'on utilisera la notation "inf" quand on ne sait pas *a priori* si la valeur de la borne inférieure est, ou non atteinte.

Enfin, rappelons que toute partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure, caractérisée de la façon suivante :

Proposition I.1.1. Suites minimisantes

Soit X, une partie minorée non vide de $\mathbb{R}$.
Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $m = \inf\{x, x \in X\}$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X \mid m \leq x < m + \varepsilon$;

(iii) m est un minorant de X et il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, appelée "suite minimisante" convergeant vers m.

En conséquence, voici les questions qu'il sera naturel de se poser lorsque vous rencontrerez un problème d'optimisation :

- Ce problème possède t-il une solution ?

- *1^er^ cas de figure.*
  Si ce problème possède une solution, on cherchera à la caractériser (par exemple, est-elle unique ?) ou mieux, à la déterminer lorsque ce sera possible. On exploitera pour cela les conditions nécessaires d'optimalité (aux premier et deuxième ordres).
- *2^ème^ cas de figure.*
  Si ce problème ne possède pas de solution, on cherchera à exhiber une suite minimisante, i.e. une suite d'éléments de l'ensemble K convergeant vers $\inf\{f(x), x \in K\}$.
- Enfin, on se posera la question, lorsque l'on ne sait pas déterminer explicitement les solutions du problème d'optimisation, du choix de méthodes numériques adaptées pour déterminer le minimum et ses minimiseurs.

Exemple I.1.2

Déterminer le parallélépipède rectangle de volume maximal parmi ceux dont la surface extérieure vaut 6. En introduisant a, b et c, les longueurs des côtés du parallélépipède, on se ramène à la résolution du problème

$$\left\{\begin{array}{l} \sup V(a,b,c) = abc \\ ab + ac + bc = 3, \\ a \geq 0,\ \ b \geq 0,\ \ c \geq 0. \end{array}\right.$$

Il s'agit donc d'un problème d'optimisation dans $\mathbb{R}^3$ sous contrainte.

Exemple I.1.3 Modèle de régression linéaire

On cherche une relation linéaire entre deux variables x et y, où x est la variable explicative déterministe et y la variable expliquée aléatoire. Typiquement, y représente les frais d'entretien d'une voiture que l'on cherche à expliquer en fonction du kilométrage x. La modèle s'écrit :

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon,$$

où ε est une perturbation aléatoire centrée et de variance σ inconnue. A partir de n observations (x_i, y_i), on cherche à estimer α et β en minimisant la somme des résidus :

$$\inf_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i - y_i)^2.$$

ce qui correspond à chercher (α,β) de telle sorte que la variance σ soit minimale (ou plus précisément l'estimateur de la variance). On cherche donc à minimiser la fonction :

$$f(\alpha,\beta) = \left\| A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} - b \right\|^2, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \in M_{n,2}(\mathbb{R}), \quad b = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

sur $K = \mathbb{R}^2$.

I.2 Autour des espaces vectoriels normés

I.2.1 Ouverts et fermés

Définition I.2.1. Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

Le produit scalaire de deux éléments x et y de $\mathbb{R}^n$ est le nombre réel

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

La norme euclidienne associée d'un vecteur de $x \in \mathbb{R}^n$ est le nombre positif

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Remarque I.2.2

Rappelons que le produit scalaire vérifie les propriétés :

(i) [symétrie] $\forall (x,y) \in [\mathbb{R}^n]^2$, $(x,y) = (y,x)$

(ii) [linéarité] $\forall (x,y) \in [\mathbb{R}^n]^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$

(iii) [définie positivité] $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(x,x) \geq 0$ et $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

et une norme vérifie les propriétés :

(i) [homogénéité] $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(ii) [inégalité triangulaire] $\forall (x,y) \in [\mathbb{R}^n]^2$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(iii) [séparation] $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Définition I.2.3. Boule ouverte

La boule ouverte de centre $\omega \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$ désigne l'ensemble des éléments x de l'espace vectoriel tels que $\|x - \omega\| < r$. On la note indifféremment $\mathbb{B}_o(\omega, r)$ ou $\mathbb{B}(\omega,r)$.

Exemple I.2.4 Boule unité

Dans le cas particulier où $\omega = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $r = 1$, on dit que $\mathbb{B}(\omega,r)$ est la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

- Si $n = 1$ et $x \in \mathbb{R}$, alors $\|x\| = |x|$ et l'équation cartésienne de la boule unité est donc $|x| < 1$, autrement dit, il s'agit du segment $]-1,1[$.
- Si $n = 2$ et $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, alors $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et l'équation cartésienne de la boule unité est donc $x_1^2 + x_2^2 < 1$. On reconnaît donc l'équation du disque de centre O, l'origine du repère et de rayon 1, privé du cercle de centre O et rayon 1.

Définition I.2.5. Ouvert/Fermé de $\mathbb{R}^n$

Un ensemble $\mathcal{O}$ est appelé **ouvert** si, pour tout point $x \in \mathcal{O}$, on peut trouver une boule ouverte de centre x, incluse dans l'ensemble $\mathcal{O}$.
Un fermé se définit comme le complémentaire d'un ouvert dans l'ensemble considéré.

Une boule ouverte est un ouvert. Cela se conçoit assez bien géométriquement. Les ensembles $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$ sont les seuls ensembles de $\mathbb{R}^n$ à la fois ouverts et fermés.

Proposition I.2.6. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient x et y, deux éléments de $\mathbb{R}^n$. On a

$$|(x,y)| \leq \|x\| \|y\|$$

et l'égalité a lieu si, et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration. La fonction polynômiale $P : t \mapsto \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t(x,y) + t^2\|y\|^2$ est toujours positive, donc de discriminant négatif. □

I.2.2 Projection en dimension finie

Définition I.2.7. Ensemble convexe

Un ensemble K inclus dans $\mathbb{R}^n$ est dit **convexe** si pour tout $(x,y) \in K^2$, et pour tout $\theta \in [0,1]$, on a $\theta x + (1-\theta)y \in K$.

Proposition I.2.8. Projection sur un convexe fermé non vide

Soit K, un ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $x \in \mathbb{R}^n$. Il existe un unique élément $P_K(x) \in K$ tel que

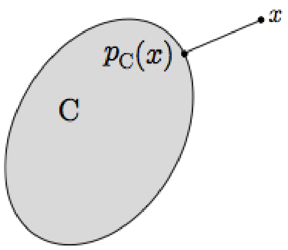
$$\|x - P_K(x)\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|.$$

$P_K(x)$ est appelé projeté de x sur K. Cet élément est caractérisé par la condition :

$$(x - P_K(x), y - P_K(x)) \leq 0, \quad \forall y \in K$$

L'application $P_K : x \to P_K(x)$ est appelée opérateur de projection et est contractante :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^n, \quad \|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x - y\|$$



Démonstration. Elle sera donnée en cours. Elle repose de façon cruciale sur l'identité du parallélogramme, qui s'écrit :

$$\forall (x,y) \in [\mathbb{R}^n]^2, \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

□

Exemple I.2.9 Projection sur un pavé

Soit $K = \prod_{j=1}^{n} [a_i,b_i]$. Alors on montre que $P_K(x) = y$ avec $y_i = \min(\max(a_i,x_i),b_i)$.

I.3 Analyse matricielle.

Définition I.3.1.

(i) Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. La matrice transposée $A^\top \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ vérifie :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (Ax,y)_{\mathbb{R}^m} = (x,A^\top y)_{\mathbb{R}^n}.$$

On a également : $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$, $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

(ii) $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique dsi $A^\top = A$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles.

(iii) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. A est dite positive (resp. définie positive) si $(Ax,x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (resp. $(Ax,x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). On note $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices positives (resp. définies positives).

(iv) $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A s'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $Ax = \lambda x$.

Théorème I.3.2. Théorème spectral

Une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée à valeurs propres réelles, notées $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_n|$.

Proposition I.3.3. Matrices symétriques définies positives

Une matrice symétrique réelle A est définie positive si, et seulement si toutes les valeurs propres sont strictement positives. Et, dans ce cas, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \min_{1\leq i\leq n} \lambda_i \|x\|^2 \leq (Ax,x) \leq \max_{1\leq i\leq n} \lambda_i \|x\|^2.$$

Proposition I.3.4. Critère de Sylvester

Une matrice symétrique est définie positive si, et seulement si les déterminants des mineurs principaux [a] sont strictement positifs.

[a] autrement dit les déterminants d'une sous-matrice obtenue en extrayant les lignes et colonnes de mêmes indices.

Pour plus de précisions, on pourra se référer à la section A-1.

Définition I.3.5. Norme (subordonnée) d'une matrice

La norme (subordonnée à la norme euclidienne) d'une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est le nombre positif

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Elle vérifie de plus les propriétés suivantes

(i) $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|,$

(ii) $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R}), B \in M_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$

D'un point de vue pratique, il existe une caractérisation simple de la norme d'une matrice A.

Proposition I.3.6.

Pour toute matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, on a $\|A\| = \sqrt{\lambda_n(A^\top A)}$. Si A symétrique réelle, on a $\|A\| = |\lambda_n(A)|$.

I.4 Calcul différentiel

Soit $f : (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \to \mathbb{R}$ avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition I.4.1. Gradient, matrice hessienne

(i) On note $C^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions dont les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k sont toutes continues sur Ω.

(ii) Le gradient d'une fonction $f \in C^1(\Omega)$ est défini par :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

(iii) La matrice Hessienne d'une fonction $f \in C^2(\Omega)$ au point $x \in \Omega$, notée indifféremment $\nabla^2 f(x)$ ou $\operatorname{Hess} f(x)$ est définie par

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1 x_1} f(x) & \cdots & \partial_{x_1 x_n} f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_n x_1} f(x) & \cdots & \partial_{x_n x_n} f(x) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

C'est une matrice symétrique (d'après le théorème de Schwarz).

Remarque I.4.2

Dans ce cours, nous faisons le choix d'énoncer les résultats d'optimisation sous des hypothèses fortes (f est C^1 ou C^2) qui peuvent être en général affinées (remplacées par exemple par f différentiable ou deux fois différentiable).

Théorème I.4.3. Formule de Taylor-Young

On suppose que Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(i) Si $f \in C^1(\Omega)$ et $x \in \Omega$ alors

$$f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x),h) + o(\|h\|).$$

(ii) Si $f \in C^2(\Omega)$ et $x \in \Omega$, alors

$$f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x),h) + \frac{1}{2}(\nabla^2 f(x)h,h) + o(\|h\|^2).$$

Remarque I.4.4 Autre écriture possible

En posant $y = x + h$, on peut réécrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 de la façon suivante :

$$f(y) = f(x) + (\nabla f(x),y-x) + \frac{1}{2}(\nabla^2 f(x)(y-x),(y-x)) + o(\|y-x\|^2).$$

Théorème I.4.5. Formule de Taylor-Lagrange

Si f est C^1 dans une boule ouverte $\mathbb{B}$ centrée en x et si $h \in \mathbb{R}^n$ est tel que $x+h \in \mathbb{B}$, alors

$$\exists \theta \in]0,1[\quad | \quad f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x+\theta h),h).$$

Théorème I.4.6. Règle de la chaîne

Soit f, une application C^1 en $a \in \Omega$ et x_1, $\ldots$, x_n, n applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables en $t_0 \in \mathbb{R}$ telles que $(x_1(t_0),\ldots,x_n(t_0)) = a$. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(t) = f(x_1(t),\ldots,x_n(t))$, alors F est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) x_i'(t_0).$$

Remarque I.4.7

On pourrait remplacer $x_i'(t_0)$ par $\frac{dx_i}{dt}(t_0)$ dans la formule ci-dessus. On utilise des dérivées droites car x_i ne dépend que d'une variable, ce qui n'est pas le cas de f.

Exemple I.4.8

Testons la règle de la chaîne sur un exemple. On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$ définies par

$$f(x,y) = -x^3 + y^2, \quad x_1(t) = e^t, \quad x_2(t) = t^2.$$

On introduit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g = f \circ (x_1,x_2)$, de sorte que

$$g(t) = f(e^t,t^2) = -e^{3t} + t^4, \quad g'(t) = -3e^{3t} + 4t^3.$$

Vérifions que l'on obtient la même expression de $g'(t)$ lorsque l'on utilise la règle de la chaîne. Notons que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y, \quad x_1'(t) = e^t, \quad x_2'(t) = 2t.$$

et en utilisant la règle de la chaîne, on obtient

$$\begin{aligned} g'(t) &= x_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x_1(t),x_2(t)) + x_2'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x_1(t),x_2(t)) \\ &= e^t.(-3e^{2t}) + 2t.(2t^2) = -3e^{3t} + 4t^3. \end{aligned}$$

On retrouve (sans surprise) l'expression de $g'(t)$ obtenue à l'aide d'un calcul direct.

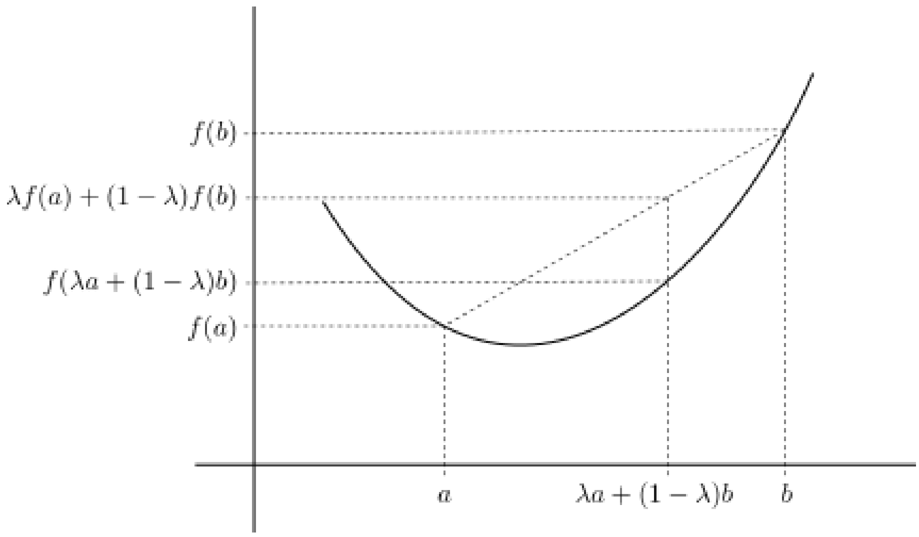
I.5 Fonctions convexes

Définition I.5.1. Fonction convexe

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe non vide. Une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ est dite convexe si

$$\forall (x,y) \in K^2, \forall \theta \in [0,1], \quad f(\theta x + (1-\theta)y) \leqslant \theta f(x) + (1-\theta) f(y).$$

f est dite strictement convexe si l'inégalité est stricte dès que $x \neq y$ et $\theta \in]0,1[$.



Proposition I.5.2.

Soit U, un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On a équivalence entre

(i) f est convexe sur U

(ii) $\forall (x,y) \in U^2$, $f(y) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$,

(iii) $\forall (x,y) \in U^2$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geqslant 0$, [$\nabla f$ monotone]

On a les mêmes équivalences avec inégalité stricte si $x \neq y$ dans le cas strictement convexe.

Définition I.5.3. Fonction α-convexe

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe non vide. Une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ est dite α-convexe si

$$\forall (x,y) \in K^2, \forall \theta \in [0,1], \quad f(\theta x + (1-\theta)y) \leqslant \theta f(x) + (1-\theta) f(y) - \alpha \frac{\theta(1-\theta)}{2} ||x-y||^2.$$

Proposition I.5.4.

f est α-convexe si, et seulement si $g(x) = f(x) - \frac{\alpha}{2}\|x\|^2$ est convexe

Théorème I.5.5.

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est C^1, alors on a équivalence entre

(i) f est α-convexe sur $\mathbb{R}^n$

(ii) $\forall (x, y) \in [\mathbb{R}^n]^2$, $f(y) \geqslant f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{\alpha}{2}||y - x||^2$

(iii) $\forall (x, y) \in [\mathbb{R}^n]^2$, $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x\rangle \geqslant \alpha||y - x||^2$ [∇f elliptique]

Il existe d'autres caractérisations de la convexité fort utiles lorsque les fonctions considérées sont C^2.

Théorème I.5.6.

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est C^2, alors on a équivalence entre

(i) $(\forall x \in \mathbb{R}^n, \nabla^2 f(x)$ est semi-définie positive$) \iff f$ est convexe,

(ii) $(\forall x \in \mathbb{R}^n, \nabla^2 f(x)$ est définie positive$) \implies f$ est strictement convexe,

(iii) $(\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad (\nabla^2 f(x)h, h) \geqslant \alpha\|h\|^2) \iff f$ est α-convexe.

Remarque I.5.7

Il est notable que la réciproque de (ii)est fausse (considérer par exemple $f(x) = x^4$).

I.6 Exercices du chapitre

Analyse matricielle

Exercice I.1 Calculer les normes des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice I.2 Pour quelles valeurs de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la matrice suivante est définie positive :

$$A = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{bmatrix}$$

Exercice I.3 Montrer que $\|A\| = \|A^\top\|$ pour toute matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Calcul différentiel

Exercice I.4 Calculer le gradient et la matrice Hessienne des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = x^3 + 3xe^y, \quad g(x,y) = x(\ln x + y^2), \quad h(x,y,z) = e^{x-y}\sin z.$$

Préciser leurs domaines de définition.

Exercice I.5 *(Dérivation composée)* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une fonction C^1 telle que

$$f(tx,ty) = tf(x,y) \quad \text{pour tout } (x,y,t) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Montrer que pour tout $(x,y,t) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$f(x,y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty).$$

(ii) En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera tels que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x,y) = \alpha x + \beta y$.

Exercice I.6 Calculer le gradient et la matrice hessienne de la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1,\ldots,x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

par deux méthodes (calcul direct, développement de Taylor).

Exercice I.7

(i) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $(a,h) \in [\mathbb{R}^n]^2$. Montrer que $\phi : t \to f(a+th)$ est $C^1(\mathbb{R})$. Calculer la dérivée de ϕ.

(ii) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que le gradient de f est orthogonal aux courbes de niveaux $C_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \lambda\}$.
Indication : on introduira $x : t \in \mathbb{R} \to x(t) \in C_\lambda$ une paramétrisation de la courbe de niveau.

Exercice I.8 Dessiner les courbes de niveaux et le gradient de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}(Ax,x)$, avec $A \in S_2^{++}(\mathbb{R})$ (commencez par le cas où A est diagonale).

Convexité

Exercice I.9 Montrer que les ensembles suivants sont convexes.

(i) L'hyperplan $H = \{x \in \mathbb{R}^n, (a,x) = b\}$, avec $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$.

(ii) La boule de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$: $\mathbb{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x-a\| \leqslant r\}$

(iii) la partie positive de l'espace $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n,\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$

Exercice I.10 *(Somme et max fonctions convexes)* Soient $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ m fonctions convexes sur U partie convexe de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la somme et le maximum de ces fonctions sont convexes :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x), \quad g(x) = \max_{1\leqslant i\leqslant m} f_i(x).$$

Exercice I.11

(i) Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $f_a : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y$. Pour quelles valeurs de a, la fonction f_a est-elle convexe ? Et α-convexe ?

(ii) Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la fonction F définie par

$$F(x,y) = -x^4 - y^4 + axy$$

est-elle concave ? Et strictement concave ?

Exercice I.12 *(Composition de fonctions convexes)*

(i) Soient $f : U \to [a,b]$ une fonction convexe sur $U \subset \mathbb{R}^n$ convexe et $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Montrer que $\phi \circ f$ est convexe sur U.

(ii) Soit $\alpha > 1$. Montrer que la fonction $x \to \|x\|^\alpha$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

II.

Optimisation non-linéaire

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse des problèmes d'optimisation en dimension finie et tout particulièrement à la prise en compte de contraintes. Voici un exemple de problème que nous chercherons à résoudre.

Exemple II.0.1 Portefeuille d'actions

Soit A, B et C trois titres d'un portefeuille. On note r_A, r_B et r_C leur rentabilité moyenne (espérance) et σ_A, σ_B, σ_C leur volatilité (écart type). Soit x, y, z le poids respectifs investis dans chaque titre. On a donc $x+y+z=1$ avec $x,y,z \geq 0$. On souhaite une rentabilité plus grande en moyenne que α, c'est à dire :

$$xr_A + yr_B + zr_C \geq \alpha,$$

et on souhaite minimiser le risque (variance) :

$$f(x,y,z) = x^2\sigma_A^2 + y^2\sigma_B^2 + z^2\sigma_C^2.$$

On cherche donc à résoudre le problème :

$$\inf_{(x,y,z)\in K} f(x,y,z), \qquad K = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3, x+y+z=1, xr_A + yr_B + zr_C \geq \alpha\right\}$$

où f est convexe et K est convexe.

Un problème d'optimisation est la donnée :

- d'une fonction critère/objectif/coût $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, représentant le coût, le bénéfice, l'énergie ou le temps, que l'on souhaite optimiser.
- d'un ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ représentant l'ensemble des états admissibles (tenant compte des contraintes du problème).

Puisque maximiser une fonction est équivalent à minimiser sont opposé [1], nous ne nous intéresserons dans ce qui suit qu'à la résolution de problèmes de minimisation.

Définition II.0.2. Minimum local/global

(i) f admet un minimum local en $\bar{x} \in K$ si

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x \in K, \quad ||x-\bar{x}|| \leqslant \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \geqslant f(\bar{x}).$$

(ii) f admet un minimum global en $\bar{x} \in K$ si : $\forall x \in K, \quad f(x) \geqslant f(\bar{x})$.

1. On rappelle que $\sup_K f = -\inf_K(-f)$.

II.1 Existence et unicité de mimina

Consiérons le problème d'optimisation

$$\inf_{x \in K} f(x).$$

Par caractérisation de l'infimum, il existe toujours une suite minimisante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \inf_{x\in K} f(x)$$

La question est de savoir quand est-ce que cet infimum est atteint (et devient un minimum), autrement dit : existe-t-il $x^* \in K$ tel que

$$\inf_{x\in K} f(x) = f(x^*) \ ?$$

Définition II.1.1. Fonction coercive

Une fonction $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite coercive (ou infinie à l'infini) si

$$\lim_{\substack{\|x\|\to+\infty \\ x\in K}} f(x) = +\infty$$

ou de façon équivalente

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite d'éléments de K}, \quad \|x_n\| \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to +\infty.$$

Proposition II.1.2. Existence

Soit $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(i) (Weierstrass) Si f est continue sur K compact, alors f admet (au moins) un minimum global.

(ii) Si f est continue, coercive sur K fermé, alors f admet (au moins) un minimum global.

Démonstration. Elle repose de façon cruciale sur la notion de compacité et sera faite en cours. □

Exemple II.1.3 Exercice

Les problèmes suivants possèdent une solution :

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x^2 + y^2 - xy + x + y \qquad \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ x^2+2y^4\leq 1}} e^{xy} - y^3 - x^6, \qquad \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x^4 + y^4 - 10x^2y$$

Le problème suivant n'a pas de solution :

$$\inf_{(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2} \frac{1}{x} + y$$

Intéressons-nous à présent à l'unicité de solutions aux problèmes d'optimisation.

Proposition II.1.4. Convexité et unicité

Soit $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Si f est *strictement* convexe sur K convexe, alors il y a au plus un minimum sur K.

Proposition II.1.5. Cas particulier des fonctions α-convexes

Une fonction f α-convexe et C^1 sur K convexe est strictement convexe et coercive. Si de plus K est fermé, f admet sur K un unique minimum global.

Exemple II.1.6 Exercice

La fonction f de l'exemple II.0.1 est α-convexe avec $\alpha = \min\left\{2\sigma_A^2, 2\sigma_B^2, 2\sigma_C^2\right\}$ sur K convexe. K étant fermé, f admet un unique minimum global sur K.

II.2 Conditions d'optimalité (inéquation d'Euler)

La proposition suivante, appelée "inéquation d'Euler" est à l'origine de toute l'analyse des conditions d'optimalité qui nous permettront par la suite d'écrire des conditions d'optimalité exploitables pour les problèmes sous contraintes.

Proposition II.2.1. Conditions d'optimalité sur un convexe

Soit $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur K convexe. Si f admet un minimum local en $\bar{x}$ alors on a :

$$\forall y \in K, \quad \langle \nabla f(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \geqslant 0. \qquad \text{(inéquation d'Euler)}$$

Si f est *convexe*, cette condition devient suffisante et l'on a :

$$(\bar{x} \text{ minimum global de } f) \Leftrightarrow (\bar{x} \text{ minimum local de } f) \Leftrightarrow (\text{inéquation d'Euler}).$$

L'inéquation d'Euler signifie : "f est croissante en x dans toutes les "directions" $y - x \in K$ possibles". Dans un ouvert, on peut approcher x dans toutes les directions, ce qui permet d'affiner le résultat précédent.

Proposition II.2.2. Condition d'optimalité dans un ouvert

Soit $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $\bar{x} \in \mathring{K}$. Si f admet un minimum local en $\bar{x}$ alors $\bar{x}$ est un point critique de f :

$$\nabla f(\bar{x}) = 0. \qquad \text{(équation d'Euler)}$$

Si f et K sont *convexes* et si K est de plus ouvert, alors cette condition devient suffisante et l'on a :

$$(x \text{ minimum global de } f) \Leftrightarrow (x \text{ minimum local de } f) \Leftrightarrow \text{(équation d'Euler)}.$$

La proposition ci-dessus s'applique en particulier dans le cas où l'on cherche à minimiser une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sur $K = \mathbb{R}^n$. Dans ce cas, si ce problème possède une solution $\bar{x}$ et si f est C^1, alors $\bar{x}$ satisfait nécessairement l'équation d'Euler.

Exemple II.2.3 Exercice : moindres carrés

Soit $f(\alpha,\beta) = \|A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} - b\|^2$. Si f admet un minimum local alors ce minimum satisfait l'équation :

$$\nabla f(\bar{\alpha},\bar{\beta}) = 2\left(A^\top A \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{bmatrix} - A^\top b\right) = 0.$$

Déterminer la droite aux moindres carrés avec les valeurs suivantes :

kilométrage (× 1000 km)	53	75	128	220	188	99	160
frais d'entretien (× 100 euros)	5	7	13	23	20	10	16

II.3 Conditions d'optimalité sous contraintes

II.3.1 Théorème des multiplicateurs de Lagrange (pour une contrainte scalaire)

Théorème II.3.1. Multiplicateurs de Lagrange en dimension 2

Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. On considère l'ensemble :

$$K = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x_1,x_2) = 0\right\}.$$

Soit $\bar{x} = (\bar{x}_1,\bar{x}_2) \in K$ tel que $\nabla g(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \neq 0$. Si la fonction f admet un minimum local en $\bar{x}$ sur K, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\nabla f(\bar{x}) + \lambda \nabla g(\bar{x}) = 0.$$

Le paramètre λ est appelé **multiplicateur de Lagrange** et il dépend de $\bar{x}$.

Remarque II.3.2

Dans l'énoncé ci-dessus, on peut remplacer $\mathbb{R}^2$ par un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.

Démonstration. Elle repose sur le théorème des fonctions implicites. Le lecteur intéressé la trouvera dans la section A-2. □

Exemple II.3.3 Exercice : fonction d'utilité de Cobb-Doublas

Un consommateur partage son revenu I entre deux produits x et y de prix p et q. La fonction d'utilité de Cobb-Doublas est :

$$f(x,y) = x^\alpha y^\beta, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1.$$

On souhaite donc minimiser $-f(x,y)$ sur l'ensemble $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+, g(x,y) = 0\right\}$ avec $g(x,y) = px + qy - I$.

Remarque II.3.4 Interprétation du multiplicateur de Lagrange

Supposons que l'ensemble des contraintes soit paramétré

$$K_c = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, g(x_1,x_2) = c\right\}.$$

A chaque valeurs de c, il existe un minimum local noté $\bar{x}(c)$. En appelant $\lambda(c)$, le multiplicateur de Lagrange associé, on peut montrer en particulier que

$$\frac{d}{dc}[f(\bar{x}(c))] \quad = -\lambda(c)$$

Le multiplicateur de Lagrange λ est donc la variation de la fonction critère à l'optimum : une variation de δ sur la contrainte induit une variation de $-\lambda\delta$ sur la fonction critère à l'optimum.

II.3.2 Théorème des multiplicateurs de Lagrange (généralisation)

Théorème II.3.5. Théorème des multiplicateurs de Lagrange

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$. On considère l'ensemble :

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i \in [\![1,m]\!], g_i(x) = 0\}.$$

Soit $\bar{x} \in K$ tel que les vecteurs $\nabla g_i(\bar{x})$ $(i = 1, \ldots, m)$ soient linéairement indépendantes (contraintes régulières en $\bar{x}$). Si la fonction f admet un minimum local en $\bar{x}$ sur K, alors il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0.$$

Exemple II.3.6 Exercice : minimisation d'une fonction quadratique sous contraintes

On minimise la fonction $f(x,y,z) = 4x^2 + 64y^2 + 100z^2$ sous les contraintes

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &= x + y + z - 1 \\ g_2(x,y,z) &= 5x + 10y + 15z - \alpha \end{aligned}$$

Étudions la réciproque de ce théorème lorsque la fonction et les contraintes sont supposées convexes.

Théorème II.3.7.

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ **convexes** pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$. Soit $\bar{x} \in K$ vérifiant les conditions de Lagrange du théorème précédent. Si pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, l'une des deux conditions est vérifiées :

(i) le multiplicateur de Lagrange λ_i est positif,

(ii) la fonction (g_i) est linéaire,

alors $\bar{x}$ est un minimum local de f.

II.3.3 Lagrangien

Définition II.3.8. Lagrangien

On introduit le Lagrangien : $\forall (x,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$.

Proposition II.3.9.

$\bar{x}$ vérifie les conditions d'Euler-Lagrange avec multiplicateur de Lagrange $\bar{\lambda}$ ssi $(\bar{x},\bar{\lambda})$ est un point critique de L :

$$\nabla_x L(\bar{x},\bar{\lambda}) = 0, \quad \nabla_\lambda L(\bar{x},\bar{\lambda}) = 0.$$

II.4 Conditions d'optimalité sous contraintes d'inégalité

II.4.1 Contraintes actives, contraintes qualifiées

Soit $g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leqslant i \leqslant m$. On considère l'ensemble :

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall i \in [\![1,m]\!]\,,\ g_i(x) \leqslant 0\}\,.$$

Définition II.4.1. Contraintes actives

Soit $\bar{x} \in K$. L'ensemble des contraintes actives, noté $I(\bar{x})$ est défini par

$$I(\bar{x}) = \{i \in [\![1,m]\!]\,, g_i(\bar{x}) = 0\}\,.$$

Définition II.4.2. Contraintes inégalité qualifiées

Les contraintes sont dites qualifiées en $\bar{x} \in K$ si

$$\exists z \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i \in I(\bar{x}), \quad \begin{cases} (\nabla g_i(\bar{x}),z) \leqslant 0 & \text{si } g_i \text{ est affine} \\ (\nabla g_i(\bar{x}),z) < 0 & \text{si } g_i \text{ n'est pas affine} \end{cases}$$

Remarque II.4.3

Cela implique qu'il existe une direction $z \in \mathbb{R}^n$ dans laquelle toutes les fonctions (g_i) (avec $i \in I(\bar{x})$) sont décroissantes. Donc, on reste localement dans K.

Proposition II.4.4. Qualification des contraintes

Les contraintes sont qualifiées en $\bar{x}$ dans chacun des cas suivant :

(i) Toutes les contraintes sont affines.

(ii) les $(\nabla g_i(\bar{x}))_{i \in I(\bar{x})}$ sont linéairement indépendantes.

(iii) les (g_i) sont convexes et $\exists y \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall i \in I(\bar{x}), \quad \begin{cases} g_i(y) \leqslant 0 & \text{si } g_i \text{ est affine} \\ g_i(y) < 0 & \text{si } g_i \text{ n'est pas affine} \end{cases}$$

II.4.2 Théorème de Kuhn et Tucker

Théorème II.4.5. Théorème de Kuhn et Tucker

Soient $f, g_1, \ldots, g_m \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $\bar{x} \in K$ tels que les contraintes soient qualifiées. Si f admet en $\bar{x}$ un minimum local, alors il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}_+^m$ tels que

$$\begin{cases} \nabla_x f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \nabla_x g_i(\bar{x}) = 0 \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i \in [\![1,m]\!] \end{cases}$$

Remarque II.4.6 Cas $m = 1$

Commentons la condition $\lambda_1 g_1(\bar{x}) = 0$. Soit la contrainte est active $(g_1(\bar{x}) = 0)$: on se trouve sur le bord de l'ensemble des contraintes et on retrouve le théorème des multiplicateurs de Lagrange (avec λ_1 pouvant être non nul). Soit la contrainte n'est pas active ($g_1(\bar{x}) < 0$) : on se trouve dans l'intérieur de l'ensemble des contraintes et on retrouve l'équation d'Euler.

Exemple II.4.7 Exercice

Un consommateur a un revenu I. Soient x et y l'investissement dans deux produits de prix respectif p et q. On a donc : $px + qy \leqslant I$. Le confort de la consommation est caractérisée par la fonction d'utilité quasi-linéaire suivante :

$$f(x,y) = y + a\ln(x),$$

avec $a > 0$.

On veut donc minimiser $-f$ sur l'ensemble $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x > 0, y \geqslant 0, px + qy \leqslant I\right\}$.

Étudions la réciproque de ce théorème lorsque la fonction et les contraintes sont supposées convexes.

Théorème II.4.8. Réciproque

Soient $f, g_1, \cdots, g_m \in C^1(\mathbb{R}^n)$ convexes. S'il existe $\bar{x}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geqslant 0$ vérifiant les conditions de Kuhn et Tucker alors $\bar{x}$ est un minimum (global) de f sur K.

II.4.3 Théorème de Kuhn et Tucker généralisé

Théorème II.4.9. Théorème de Kuhn et Tucker généralisé

Soient $f, g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_r \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Soit

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i \in [\![1,m]\!]\,, g_i(x) \leqslant 0,\, \forall j \in [\![1,r]\!]\,, h_j(x) = 0\}\,.$$

Soit $\bar{x} \in K$ tel que $(\nabla g_i(\bar{x}))_{i \in I(\bar{x})})$ et $(\nabla h_j(\bar{x}))$ soient linéairement indépendants. Si f admet en $\bar{x}$ un minimum local, alors il existe $\mu_1, \ldots, \mu_m \geqslant 0$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} \nabla_x f(\bar{x}) + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \bar{\mu}_i \nabla_x \tilde{g}_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \nabla_x \tilde{h}_j(\bar{x}) = 0 \\ \mu_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i \in [\![1,m]\!]\,. \end{cases}$$

Réciproquement, supposons $f, g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_r$ sont convexes et $\bar{x} \in K$ vérifiant l'équation. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \geqslant 0$ ou si toutes les contraintes sont affines alors $\bar{x}$ est un minimum (global) de f sur K.

Remarque II.4.10 Contraintes affines

On peut montrer que si toutes les contraintes (égalité et inégalité) sont affines et définissent un ensemble K non vide, alors les contraintes sont automatiquement qualifiées en tout point de

K. Ainsi, la condition " $(\nabla g_i(\bar{x}))_{i\in I(\bar{x})})$ et $(\nabla h_j(\bar{x}))$ soient linéairement indépendants" dans le théorème ci-dessus n'est pas utile lorsque toutes les contraintes sont affines et peut par conséquent être supprimée dans ce cas uniquement.

Exemple II.4.11 Exercice

Une ferme possède 300 unités de main d'oeuvre et 450 parcelles de terres. Elle produit du blé et du bœuf. La production d'une unité de blé nécessite 2 unité de main d'oeuvre et 1 parcelle de terre. La production d'une unité de bœuf nécessite 1 unité de main d'oeuvre et 2 parcelles de terre.

On souhaite maximiser la fonction de bénéfice suivante :

$$f(x,y) = \alpha \ln x + \beta \ln y, \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1$$

où x est la production de blé et y est la production de bœufs. On minimise donc $-f$ sur l'ensemble des contraintes :

$$K = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\, 2x + y \leqslant 300,\, x + 2y \leqslant 450\right\}.$$

Exemple II.4.12 Un second exemple à travailler en autonomie

Considérons le problème de minimisation

$$\boxed{\inf_{(x,y,z)\in K} f(x,y,z)}$$

où $f(x,y,z) = 4x^2 + 64y^2 + 100z^2$ et

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0,\, x + y + z = 1,\, 5x + 10y + 15z = \alpha\right\}.$$

Remarquons de prime abord que, du fait des contraintes, α est compris entre 5 et 15.

L'existence d'une solution à ce problème s'obtient aisément (fonction continue sur un compact...).

Appliquons le théorème de Kuhn-Tucker. Remarquons que toutes les contraintes sont affines (et définissent un ensemble non vide), par conséquent, elles sont qualifiées en tout point.

Si $(x, y, z) \in K$ est un minimum local, alors d'après le théorème de Kuhn-Tucker généralisé, il existe $\mu_1,\mu_2,\mu_3 \geqslant 0$ et $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} 8x - \mu_1 + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 128y - \mu_2 + \lambda_1 + 10\lambda_2 = 0 \\ 200z - \mu_3 + \lambda_1 + 15\lambda_2 = 0 \\ x + y + z = 1 \\ 5x + 10y + 15z = \alpha \\ \mu_1 x = \mu_2 y = \mu_3 z = 0 \end{cases}$$

Si $x, y, z > 0$, alors $\mu_1 = \mu_2 = \mu_2 = 0$ et on avait déjà déterminé la solution précédemment (voir la partie du cours sur le théorème des extrema liés / multiplicateurs de Lagrange). Une condition pour que cela soit satisfait était que $\boxed{170/33 < \alpha < 730/57}$

<u>Si $x = 0$ et $y, z > 0$</u> alors $\mu_2 = \mu_3 = 0$. On doit donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -\mu_1 + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 128y + \lambda_1 + 10\lambda_2 = 0 \\ 200z + \lambda_1 + 15\lambda_2 = 0 \\ y + z = 1 \\ 10y + 15z = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\mu_1 + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 128y + \lambda_1 + 10\lambda_2 = 0 \\ 200z + \lambda_1 + 15\lambda_2 = 0 \\ y = (15 - \alpha)/5 \\ z = (\alpha - 10)/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = 8(-730 + 57\alpha)/5 \\ \lambda_1 = ... \\ \lambda_2 = ... \\ y = (15 - \alpha)/5 \\ z = (\alpha - 10)/5 \end{cases}$$

On vérifie les contraintes : $y,z > 0 \Rightarrow \alpha \in]10,15[$ et on a $\mu_1 \geqslant 0 \Rightarrow (10 <) \boxed{730/57 \leqslant \alpha < 15}$.

<u>Si $x, y > 0$ et $z = 0$</u>, alors $\mu_1 = \mu_2 = 0$. On résout :

$$\begin{cases} 8x + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 128y + \lambda_1 + 10\lambda_2 = 0 \\ -\mu_3 + \lambda_1 + 15\lambda_2 = 0 \\ x + y = 1 \\ 5x + 10y = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 128y + \lambda_1 + 10\lambda_2 = 0 \\ -\mu_3 + \lambda_1 + 15\lambda_2 = 0 \\ x = (10 - \alpha)/5 \\ y = (\alpha - 5)/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = ... \\ \lambda_2 = ... \\ \mu_3 = 8/5(170 - 33\alpha) \\ x = (10 - \alpha)/5 \\ y = (\alpha - 5)/5 \end{cases}$$

On vérifie les contraintes : $x,z > 0 \Rightarrow \alpha \in]5,10[$ et on a $\mu_3 \geqslant 0 \Rightarrow (10 <) \boxed{5 < \alpha \leqslant 170/33} (< 10)$.

<u>Si $x > 0$, $y = 0$ et $z > 0$</u>, alors $\mu_1 = \mu_3 = 0$. On résout :

$$\begin{cases} 8x + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ -\mu_2 + \lambda_1 + 10\lambda_2 = 0 \\ 200z + \lambda_1 + 15\lambda_2 = 0 \\ x + z = 1 \\ 5x + 15z = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ -\mu_2 + \lambda_1 + 10\lambda_2 = 0 \\ 200z + \lambda_1 + 15\lambda_2 = 0 \\ x = (15 - \alpha)/10 \\ z = (\alpha - 5)/10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = ... \\ \mu_2 = -8/10(12\alpha - 55) \\ \lambda_2 = ... \\ x = (10 - \alpha)/5 \\ y = (\alpha - 5)/5 \end{cases}$$

On constate que $\mu_2 < 0$ pour $\alpha > 5$ donc ce cas est $\boxed{\text{impossible}}$.

<u>Si $x = y = 0$ et $z > 0$</u> alors $\mu_3 = 0$ et on résout le système :

$$\begin{cases} -\mu_1 + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ -\mu_2 + \lambda_1 + 10\lambda_2 = 0 \\ 200z + \lambda_1 + 15\lambda_2 = 0 \\ z = 1 \\ 15z = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = -200 - 10\lambda_2 \\ \mu_2 = -200 - 5\lambda_2 \\ \lambda_1 = -200 - 15\lambda_2 \\ z = 1 \\ \boxed{15 = \alpha} \end{cases}$$

Pour que $\mu_1, \mu_2 \geqslant 0$, il suffit de prendre $\lambda_2 \leqslant -40$. (Remarquez qu'il n'y a pas unicité dans ce cas pour les multiplicateurs de Lagrange).

<u>Si $x > 0$ et $y, z = 0$</u>, alors $\mu_1 = 0$ et on résout :

$$\begin{cases} 8x + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ -\mu_2 + \lambda_1 + 10\lambda_2 = 0 \\ -\mu_3 + \lambda_1 + 15\lambda_2 = 0 \\ x = 1 \\ 5x = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -8 - 5\lambda_2 \\ \mu_2 = -8 + 5\lambda_2 \\ \mu_3 = -8 + 10\lambda_2 \\ x = 1 \\ \boxed{5 = \alpha} \end{cases}$$

Pour que $\mu_2, \mu_3 \geqslant 0$, il suffit de prendre $\lambda_2 \geqslant 8/5$. (Remarquez qu'il n'y a pas unicité dans ce cas pour les multiplicateurs de Lagrange).

Si $x = 0$, $y > 0$ et $z = 0$, alors $\mu_2 = 0$ mais :

$$\begin{cases} -\mu_1 + \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ 128y + \lambda_1 + 10\lambda_2 = 0 \\ -\mu_3 + \lambda_1 + 15\lambda_2 = 0 \\ y = 1 \\ 10y = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = -128 - 5\lambda_2 \\ \lambda_1 = -128 - 10\lambda_2 \\ \mu_3 = -128 + 5\lambda_2 \\ y = 1 \\ \boxed{10 = \alpha} \end{cases}$$

mais il est $\boxed{\text{impossible}}$ d'assurer $\mu_1 \geqslant 0$ et $\mu_3 \geqslant 0$.

II.4.4 Point selle et dualité

Définition II.4.13. Lagrangien/Point selle

On introduit le Lagrangien :

$$\forall (x,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+, \qquad L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x).$$

On dit que $(\bar{x},\bar{\lambda})$ est un point selle de L si

$$\forall x, \lambda \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+, \qquad L(\bar{x}, \lambda) \leqslant L(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leqslant L(x,\bar{\lambda}).$$

Proposition II.4.14.

(i) S'il existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$ tel que $(\bar{x},\bar{\lambda})$ est un point selle de L, alors $\bar{x}$ est un minimum de f sur K.

(ii) Dans le cas où $f, g_1, \dots g_m$ sont convexes, il y a équivalence.

Proposition II.4.15.

Si $(\bar{x},\bar{\lambda})$ est un point selle alors

$$\text{[problème primal]} \quad J(\bar{x}) = \min J(x) \text{avec } J(x) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+} L(x,\lambda)$$

$$\text{[problème dual]} \quad G(\bar{\lambda}) = \max G(\lambda) \text{avec } G(\lambda) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x,\lambda)$$

et $L(\bar{x},\bar{\lambda}) = J(\bar{x}) = G(\bar{\lambda})$.

Remarque II.4.16
On peut montrer que

$$J(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in K \\ +\infty & \text{si } x \notin K \end{cases}$$

donc minimiser J revient à minimiser f sur K d'où le nom de problème primal.

II.5 Méthodes numériques

On cherche à résoudre numériquement un pproblème d'optimisation de la forme

$$\inf_{x \in K} f(x), \qquad \text{avec } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ et } K \subset \mathbb{R}^n.$$

Pour cela, on cherche à voir une solution x^* de ce problème (si elle existe) comme la limite d'une suite d'itérés simple à construire.

Une grande classe d'algorithmes que nous allons considérer pour les problèmes d'optimisation ont la forme générale suivante

$$x_0 \text{ étant donné, calculer } x_{k+1} = x_k + s_k d_k. \tag{II.1}$$

Le vecteur $d_k \in \mathbb{R}^n$ s'appelle la direction de descente, $s_k > 0$ est le pas de la méthode à la k-ième itération. En pratique, on s'arrange pour satisfaire l'inégalité

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k).$$

De tels algorithmes sont souvent appelés méthodes de descente.

II.5.1 Algorithme de gradient (optimisation sans contrainte)

On construit une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la forme (II.1) où la direction de descente $d_k \in \mathbb{R}^n$ est donnée par l'opposé du gradient : $d_k = -\nabla f(x_k)$.

La méthode est dite convergente si $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\min_K f$.

Remarque II.5.1 Choix de la direction de descente
Si $d_k = -\nabla f(x_k)$, alors on peut écrire à l'aide de la formule de Taylor-Young :

$$f(x_k + sd_k) - f(x_k) = s(\nabla f(x_k),d_k) + \mathrm{o}(s) = s\left(-\|\nabla f(x_k)\|^2 + \mathrm{o}(1)\right).$$

Par conséquent, si $\|\nabla f(x_k)\| \neq 0$ et si s est choisi assez petit, on peut garantir que $f(x_k + sd_k) - f(x_k) < 0$, autrement dit que la méthode considérée est bien une méthode de descente.

Remarquons également que pour toute direction $v \in \mathbb{R}^n$ avec $\|v\| = 1$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$\left|(\nabla f(x_k), v)\right| \leqslant \|\nabla f(x_k)\|,$$

avec égalité si $v = \pm\nabla f(x_k)/\|\nabla f(x_k)\|$. Ainsi $v = -\nabla f(x_k)/\|\nabla f(x_k)\| = d_k/\|d_k\|$ est la direction de plus grande pente.

Reste à choisir le pas de descente :

- Méthode de gradient à pas constant : on choisit $s_k = s > 0$.
- Méthode de gradient à pas optimal : on choisit s_k tel que x_{k+1} soit un minimum de la fonction f dans la direction d_k, c'est à dire :

$$s_k = \underset{s>0}{\operatorname{argmin}}\, f(x_k + s\, d_k)$$

Excepté pour certaines fonctions, il n'existe pas de formule pour trouver le pas optimal. Il faut donc réaliser une méthode d'optimisation 1D sur la fonction $s \mapsto f(x_k + s\, d_k)$ pour déterminer une approximation du pas optimal. Par example, avec la méthode de gradient à pas constant ou avec un algorithme de recherche linéaire.

Il est intéressant de noter que pour ces méthodes, nous avons les résultats de convergence suivants :

Proposition II.5.2.

(i) Si f est α-convexe, C^1 et ∇f est M-Lipshitzien, alors en prenant le pas s dans l'intervalle $]0,2\alpha/M^2[$, la méthode à pas constant converge.

(ii) Si f est α-convexe, C^1 alors la méthode à pas optimal converge.

Remarque II.5.3 Critère d'arrêt

En pratique il faut également se donner un critère d'arrêt traduisant que l'on considère être suffisamment proche de la solution cherchée :
- calcul de x_k tant que $|\nabla f(x_k)| > \varepsilon$
- calcul de x_k tant que $\|x_{k+1} - x_k\|/\|x_k\| > \varepsilon$
- calcul de x_k tant que $\|f(x_{k+1}) - f(x_k)\|/\|f(x_k)\| > \varepsilon$

II.5.2 Algorithme de gradient projeté (optimisation sous contraintes)

Si l'on souhaite minimiser une fonction sur un convexe fermé K, on peut utiliser la méthode de gradient projeté (à pas constant) en construisant la suite :

$$x_{k+1} = P_K\big(x_k - s\nabla f(x_k)\big),$$

Cette méthode possède la même propriété de convergence que que la méthode à pas constant sans contrainte.

Attention : cet algorithme nécessite la connaissance de l'opérateur de projection. En pratique, cet algorithme est surtout utilisé lorsque K est un pavé du plan (voir l'exemple I.2.9).

II.6 Exercices du chapitre

Optimisation sans contrainte

Exercice II.1 Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction convexe. Montrer que si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est un minimum local, alors $\bar{x}$ est un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice II.2 Complétez les énoncés suivants : soit $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un point critique de f, c'est à dire : . On a alors :

- si $\nabla f^2(\bar{x})$ est , $\bar{x}$ est un minimum local de f
- si $\nabla f^2(\bar{x})$ est , $\bar{x}$ est un maximum local de f
- si $\nabla f^2(\bar{x})$ est positive ou négative,
- si $\nabla f^2(\bar{x})$ a des valeurs propres de signes différents et non nulles, alors $\bar{x}$ est , autrement dit $\bar{x}$ n'est ni un minimum local ni un maximum local.

Exercice II.3 Etudier les extremums (minima/maxima, local/global) des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = 4x^2 - xy + y^2 - x^3,$$
$$g(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y - 1,$$
$$h(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy.$$

Exercice II.4 Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ avec $m > n$. On considère la fonction :

$$f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|Ax - b\|^2 \in \mathbb{R}.$$

(i) Montrer que f est convexe.

(ii) Montrer que $A^\top A$ est inversible ssi le rang de A est égal à n (montrer que $\ker(A^\top A) = \ker(A)$).

(iii) Montrer que f est α-convexe ssi $A^\top A$ est inversible.

(iv) En supposant A de rang n, qu'en déduire sur le minimum de la fonction ?

Optimisation sous contraintes égalité

Exercice II.5 Minimiser la fonction

$$f(x,y) = 5x^2 - xy + 6y^2 + 2y + 10$$

sous la contrainte $x + 2y = 24$.

Exercice II.6 Une usine produit des appareils sur deux sites différents dont les coûts de fabrication sont respectivement :

$$f_1(x) = 200 + 6x + 0.03x^2, \quad f_2(y) = 150 + 10y + 0.02y^2.$$

où x et y sont les nombres des appareils produits sur les sites. Le coût de transport est 4 euros par appareil pour le premier site et 2 euros pour le second. Comment organiser la production pour livrer 100 appareils à un client avec un coût minimal ? De combien augmente environ le coût (optimal) de production si l'on souhaite la quantité d'appareils $100 + \delta$?

Exercice II.7 Une usine produit trois types de machines dont le coût de fabrication est :

$$f(x,y,z) = 4x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + yz - 30y - 30z,$$

où x, y, z sont les nombres de machines à fabriquer. Comment organiser la production pour minimiser le coût de production de 100 machines ?

Optimisation sous contraintes d'inégalités

Exercice II.8 Soit $f(x,y) = 5x^2+6y^2-xy$. Déterminer le minimum de f sous la contrainte $x + 2y \leq 24$.

Exercice II.9 Considérons le problème

$$\min_{(x,y)\in K} x, \qquad \text{avec } K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -x^3 + y \leq 0, x^4 - y \leq 0\right\}$$

(i) Dessiner l'ensemble des solutions admissibles et résoudre graphiquement le problème.

(ii) Examiner la qualification des contraintes en (0,0). Est-il possible de trouver les multiplicateurs de Lagrange ?

Reprendre les mêmes questions pour le problème

$$\min_{(x,y)\in K} x^2, \qquad \text{avec } K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y - x^2 \leq 0, -y - x^2 \leq 0\right\}$$

Optimisation sous contraintes d'égalités et d'inégalités

Exercice II.10 Un consommateur partage son revenu I entre trois produits de prix $p > 0$, $q > 0$ et $r > 0$. La fonction d'utilité est de Cobb-Douglas

$$f(x,y,z) = \alpha \ln x + \beta \ln y + \gamma \ln z$$

avec $(\alpha,\beta,\gamma) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$

(i) Comment partager son revenu entre ces trois produits pour avoir le meilleur confort ?

(ii) Supposons que le consommateur ne peut pas consommer plus de $k > 0$ unités du premier produit : $x \leq k$. Maximiser la fonction d'utilité sous la contrainte budgétaire et la contrainte de ration.

Exercice II.11 Minimiser la fonction quadratique :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left((x-1)^2 + (y-2)^2\right)$$

sous les contraintes

$$x - y = 1, \quad x + y \leq 2.$$

III.

Optimisation dynamique

Voici le type de problème que l'on cherche à résoudre dans ce chapitre.

Exemple III.0.1

Un consommateur a une durée de vie T. Il gagne un salaire avec un taux $\alpha > 0$ constant (par unité de temps). Soit $x(t)$ son salaire accumulé et $i > 0$ le taux de rémunération (fixe) de l'épargne ou le taux d'intérêt de la dette. La consommation est notée $u(t)$. On a :

$$x'(t) = \alpha + ix(t) - u(t),$$

et $x(0) = x(T) = 0$ (il n'y a pas d"héritage ni de legs). On souhaite déterminer la consommation $u(\cdot)$ qui maximise la fonction d'utilité :

$$\int_0^T \ln u(t)\, e^{-\rho t}\, dt$$

La difficulté ici réside dans le fait que la commande $u(\cdot)$ ne peut pas être choisie de n'importe quelle façon. En effet, seules les commandes $u(\cdot)$ telles que le salaire accumulé $x(\cdot)$ satisfait l'équation dynamique (différentielle) ainsi que les conditions initiale et terminale $x(0) = x(T) = 0$ doivent être considérées. D'une certaine façon, il est nécessaire de considérer des contraintes "égalité" d'un type très particulier (contrainte différentielle). c'est l'objet de ce chapitre.

Nous distinguerons deux types de systèmes dynamiques.

Système dynamique discret. A tout instant $t = 0, 1, 2, \ldots, T$, on définit l'état du système $x(t)$. Il satisfait l'équation d'évolution :

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ x(t+1) = g(x(t), u(t), t), \quad t \in [\![0, T-1]\!] \end{cases}$$

où $u(t)$ est la commande du système grâce à laquelle on peut modifier l'évolution de $x(t)$.

L'objectif est de déterminer la commande $u(t)$ à appliquer afin de minimiser le coût total.

$$J(x,u) = \sum_{t=0}^{T-1} f\big(x(t), u(t), t\big) + h(x(T)).$$

où f est le coût instantané et h est le coût final.

Le problème s'écrit donc :

$$\boxed{\min_{\substack{u(0),\ldots,u(T-1)\in\mathbb{R} \\ x(t+1)=g\left(x(t),u(t),t\right) \\ x(0)=x_0}} J(x,u)}$$

Système dynamique continu. Pour tout $t \in [0,T]$, l'état du système satisfait l'équation d'évolution :

$$x'(t) = g(x(s),u(t),t),$$

L'objectif est de résoudre :

$$\boxed{\min_{\substack{u:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x'(t)=g(x(s),u(t),t)}} \int_0^T f(x(s),u(s),s)ds + h(x(T))}$$

Définition III.0.2. Vocabulaire de l'optimisation dynamique

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est appelée fonction de coût instantanée
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est appelée fonction de coût final
$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ loi de commande
$u(t) \in U(t) \subset \mathbb{R}$: ensemble des commandes admissibles

Remarque III.0.3

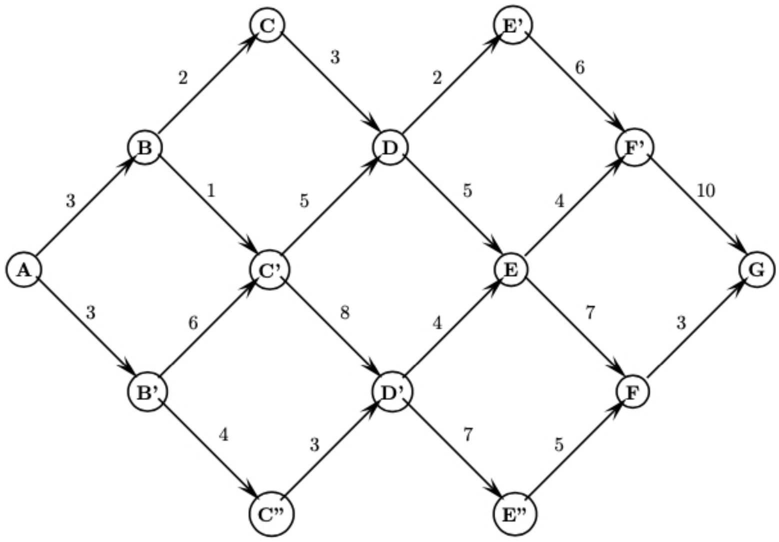
Dans cette partie, nous ne nous préoccuperons pas de l'existence ou l'unicité de solutions aux problèmes traités. En effet, aborder de telles questions nécessiterait des connaissances avancées sur les espaces vectoriels normés (topologie faible). Nous avons fait le choix de nous concentrer sur la caractérisation des solutions à l'aide des conditions d'optimalité.

III.1 Principe d'optimalité de Bellman

Exemple III.1.1 Exercice : problème du plus court chemin

Si le plus court chemin pour aller de A à G passe par D alors le sous chemin allant de D à G est encore un plus court chemin.

Nous allons utiliser ce principe pour déterminer le plus court chemin dans le graphe ci-dessous.



> **Proposition III.1.2. Principe d'optimalité de Bellman**
>
> Une suite de commande est optimale si, quel que soit l'état intermédiaire $x(s)$ pour $s \in [0,T-1]$, les commandes ultérieures pour $t \in [s,T-1]$ sont optimales pour le sous problème partant de $(x(s), s)$

Remarque III.1.3

L'algorithme précédent s'applique plus généralement à tout graphe sans circuit (sans boucle). Dans l'exemple précédent, toutes les arrêtes sont positives : on aurait donc pu appliquer l'algorithme de Dijkstra qui consiste à calculer les plus court chemin uniquement pour les antécédents du sommet optimal parmi ceux déjà traités (alors que la méthode précédente calcule le plus court chemin de des antécédents de tous les sommets déjà traités).

III.2 Programmation dynamique en temps discret

III.2.1 Equation de Hamilton Jacobi Bellman

> **Définition III.2.1. Problème dynamique à temps discret**
>
> Soit x_0 fixé. Trouver u réalisant le minimum du problème suivant :
>
> $$\min_{\substack{u(0),\dots,u(T-1)\in\mathbb{R} \\ x(t+1)=g\left(x(t),u(t),t\right) \\ x(0)=x_0}} \sum_{t=0}^{T-1} f\left(x(t),u(t),t\right) + h(x(T)).$$

On introduit la fonction valeur :

$$\boxed{V(y,s) = \min_{\substack{u(s),\dots,u(T-1)\in\mathbb{R} \\ x(t+1)=g\left(x(t),u(t),t\right) \\ x(s)=y}} \sum_{t=s}^{T-1} f\left(x(t),u(t),t\right) + h(x(T))}$$

pour le problème partant de y au temps s. Notons que calculer la valeur optimale du problème donné dans la définition III.2.1 revient à calculer $V(x_0,0)$.

Proposition III.2.2. Equation d'Hamilton Jacobi Bellman

La fonction valeur satisfait l'équation :

$$\begin{cases} V(y,s) = \min_{u(s)} \left\{ f(y,u(s),s) + V\left(g(y,u(s),s),s+1\right) \right\} \\ V(y,T) = h(y) \end{cases}$$

III.2.2 Exemples

Exemple III.2.3 Exercice

Soit $x(t)$ la quantité de gaz polluant produit par une usine. L'usine réduit sa production de $u(t)$ unités dans la période $[\![t,t+1]\!]$ On a donc :

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t) - u(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

La taxe de pollution et la réduction de la production ont un coût :

$$\sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{2}(x^2(t) + u^2(t)) + \frac{1}{2}x^2(T)$$

Exemple III.2.4 Exercice

On dispose de ressources $x(t)$ que l'on peut affecter :

- soit avec un gain 2 et un amortissement de 20%
- soit avec un gain 3 et un amortissement de 50%

$u(t)$ est la quantité de ressources affectées à 1) et $(x(t)-u(t))$la quantité de ressources affectées à 2). On a donc :

$$\begin{aligned} x(t+1) &= 0.8u(t) + 0.5(x(t) - u(t)) \\ &= 0.5x(t) + 0.3u(t), \end{aligned}$$

et on a la contrainte supplémentaire : $0 \leqslant u(t) \leqslant x(t)$.

Le gain instantané est $2u(t) + 3(x(t) - u(t)) = 3x(t) - u(t)$. On minimise donc :

$$\sum_{t=0}^{T-1} \big(u(t) - 3x(t)\big)$$

III.3 Equations différentielles

III.3.1 Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants est une équation, dont l'inconnue est une fonction y de la variable t, de la forme

$$ay'(t) + by(t) = f(t) \qquad (\mathcal{E})$$

où $a \neq 0$ et b sont des constantes réelles, et f est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème III.3.1. Superposition des solutions

Soit y_P, une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$. Toute autre solution y de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ s'écrit : $y = y_P + y_H$, où y_H est une solution de l'équation homogène associée (sans second membre)

$$ay'(t) + by(t) = 0. \qquad (\mathcal{E}_0)$$

Résolution de l'équation sans second membre. On peut écrire formellement[1] : $ay' + by = 0 \iff \frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}$, donc $\ln|y(t)| = -\frac{b}{a}t + \ln|y(0)|$ puis $|y(t)| = |y(0)|e^{-\frac{b}{a}t}$. En admettant que y ne change pas de signe, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire III.3.2.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ est l'ensemble des fonctions $t \mapsto ke^{-\frac{b}{a}t} + y_P(t)$, où $k \in \mathbb{R}$ et y_P est une solution particulière de $(\mathcal{E})$. Par conséquent, l'équation différentielle linéaire $(\mathcal{E})$ vérifiant une condition initiale donnée (de la forme $y(0) = y_0$, avec $y_0 \in \mathbb{R}$) a une solution unique.

Recherche d'une solution particulière. Voici quelques recettes :

- *Cas où f est constante.* On recherche y_P sous la forme d'une constante.
- *Cas où f est un polynôme.* On recherche y_P sous la forme d'un polynôme de même degré.
- *Cas où $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + B\sin(\omega t + \varphi)$.* On recherche y_P sous la forme $y_P(t) = A'\cos(\omega t + \varphi) + B'\sin(\omega t + \varphi)$.

1. en admettant que y ne s'annule pas et que y ne change pas de signe...

• *Cas où* $f(t) = ke^{\lambda t}$. si $k \neq -b/a$,n recherche y_P sous la forme $y_P(t) = Ae^{\lambda t}$. Si $k = -b/a$, alors on recherche une solution particulière sous la forme $y_P(t) = Ate^{-\frac{b}{a}t}$.

Exemple III.3.3

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = 1$ est $\{t \mapsto ke^{-t} + 1, k \in \mathbb{R}\}$. Si de plus, on cherche y telle que $y(0) = 0$, alors l'unique solution de l'équation est $t \mapsto 1 - e^{-t}$.

III.3.2 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Une équation différentielle du second ordre est une équation de la forme

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t) \qquad (\mathcal{E})$$

où $a \neq 0$, b, c sont trois réels, et f est une fonction continue par morceaux.

Théorème III.3.4.

Soit y_P une solution particulière de $(\mathcal{E})$. La solution générale de $(\mathcal{E})$ est de la forme $y = y_P + y_H$ où y_H résout l'équation homogène associée (sans second membre)

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \qquad (\mathcal{E}_0)$$

De plus, il existe une unique solution résolvant l'équation $(\mathcal{E})$ et satisfaisant les deux conditions initiales $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$.

Résolution de l'équation sans second membre. Remarquons que $y : t \mapsto e^{rt}$, avec r un réel, résout l'équation différentielle $(\mathcal{E}_0)$ si, et seulement si $ar^2 + br + c = 0$.

Définition III.3.5. Équation caractéristique

L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_0)$.

Proposition III.3.6.

Appelons $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à $(\mathcal{E}_0)$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2. Les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont de la forme $y_H : t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, avec A et B des constantes réelles.
- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une solution double $r = -\frac{b}{2a}$. Les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont de la forme $y_H : t \mapsto (A + Bt)e^{rt}$, avec A et B des constantes réelles.
- Si $\Delta < 0$, L'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = a + ib$ et $r_2 = a - ib$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont de la forme $y : t \mapsto Ae^{at}\cos(bt) + Be^{at}\sin(bt)$.

Recherche d'une solution particulière On recherche une solution particulière de la même façon que pour une équation du premier ordre.

Exemple III.3.7

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y''+y = t$ est $r^2+1 = 0$ ayant pour solutions (complexes conjuguées) $\pm i$. Par conséquent, en remarquant que $t \mapsto t$ est solution particulière, l'ensemble des solutions de cette équation est $\{t \mapsto t+A\cos t+B\sin t, k(A,B) \in \mathbb{R}^2\}$. Si de plus, on cherche y telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$, alors l'unique solution de l'équation est $t \mapsto t + \sin t$.

III.3.3 Méthode de variation de la constante

Cette méthode permet de résoudre des équations différentielles linéaires générales du premier ordre, dont les coefficients ne sont pas nécessairement constants. on considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \qquad (\mathcal{E})$$

où a,b,c sont des fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (avec $a \neq 0$ sur I). On appelle équation homogène associée à cette équation, l'équation différentielle

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0. \qquad (\mathcal{E}_0)$$

Théorème III.3.8. Superposition des solutions

Soit y_P, une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$. Toute autre solution y de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ s'écrit : $y = y_P + y_H$, où y_H est une solution de l'équation homogène associée $(\mathcal{E}_0)$.

Résolution de l'équation sans second membre.

Proposition III.3.9.

Toute solution de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ sur I est de la forme

$$y_H : t \mapsto \exp\left(-\int \frac{b}{a}\right),$$

où la notation $\int \frac{b}{a}$ désigne une primitive de la fonction $-b/a$.

Le principe de la méthode de variation de la constante est d'écrire toute solution y de $(\mathcal{E})$ sous la forme $y : t \mapsto C(t)\exp\left(-\int \frac{b}{a}\right)$ où C désigne la nouvelle inconnue du problème (on peut se convaincre que la formulation du problème en y est équivalente à la formulation en C). En injectant l'expression de y dans $(\mathcal{E}_0)$, on obtient

$$C'(t)\exp\left(-\int \frac{b}{a}\right) = c(t) \iff C(t) = \int c \exp\left(\int \frac{b}{a}\right)$$

On en déduit le résultat suivant :

Théorème III.3.10.

Toute solution y de $(\mathcal{E})$ satisfaisant $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ est de la forme

$$y : t \mapsto \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)}\,ds\right) C(t),$$

où C est l'unique fonction telle que $C'(t) = \frac{c(t)}{a(t)}\exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)}\,ds\right)$ et $C(t_0) = y_0$.

Exemple III.3.11

Résolvons l'équation différentielle

$$ty'(t) = y(t) + 1 \text{ sur }]0, +\infty[\quad \text{et} \quad y(1) = 1.$$

On est conduit à la résolution de $y'(t) = \frac{1}{t}y(t)$ sur $]0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto t$ est solution de l'équation homogène associée $ty'(t) = y(t)$. On cherche donc les solutions sous la forme $y : t \mapsto tC(t)$. En injectant cette expression dans l'équation à résoudre, on obtient $tC'(t) = \frac{1}{t}$, soit $C'(t) = \frac{1}{t^2}$, donc $C(t) = -\frac{1}{t} + C_0$, où $C_0 \in \mathbb{R}$. On en déduit que la solution de l'équation ci-dessus est de la forme $y = t \mapsto -1 + C_0 t$. Puisque $y(1) = 1$, on en déduit que $C_0 = 2$ et finalement

$$y : t \mapsto -1 + 2t.$$

III.4 Programmation dynamique en temps continu

III.4.1 Principe du maximum de Pontryagin

Définition III.4.1. Problème dynamique en temps continu

Trouver $x(t), u(t)$ qui réalisent le minimum du problème suivant :

$$\min_{\substack{x(t),u(t) \\ x'(t)=g\left(x(t),u(t),t\right) \\ x(0)=\alpha,x(T)=\beta}} \int_0^T f(x(s),u(s),s)ds$$

Définition III.4.2. Hamiltonien

On définit le Hamiltonien du problème : $H(x,\lambda,u,t) = f(x,u,t) + \lambda g(x,u,t)$.

Proposition III.4.3. Principe du maximum de Pontryagin

Soit $(x(t),u(t))$ une solution du problème. Alors il existe un état adjoint $\lambda(t)$ qui satisfait :

$$x' = \partial_\lambda H(x,u,\lambda,t) = H_\lambda$$
$$\lambda' = -\partial_x H(x,u,\lambda,t) = -H_x$$

et d'autre part la commande optimale satisfait :

$$\partial_u H(x,u,\lambda,t) = 0,$$

donc $u(t)$ minimise (est un point critique) le Hamiltonien instantané à chaque instant.

Proposition III.4.4.

Soient f et g convexes et C^1 et soit λ, x, u vérifiant les équations précédentes. Si $\lambda \geqslant 0$ ou si g est affine, alors u est une commande optimale.

III.4.2 Exemples

Exemple III.4.5 Exercice

Soit $x(t)$ un stock et $x'(t)$ le taux de production. On souhaite obtenir q produits au temps T en minimisant le coût total :

$$\int_0^T \frac{1}{2}x'(t)^2 + x(t)dt.$$

On reformule ce problème sous la forme de problème de commande optimale :

$$\min_{\substack{x(t),u(t) \\ x'(t)=u(t) \\ x(0)=0,x(T)=q}} \int_0^T \frac{1}{2}u(t)^2 + x(t)dt$$

III.4.3 Autres contraintes terminales

Définition III.4.6. Problème dynamique en temps continu

Trouver $x(t), u(t)$ qui réalisent le minimum du problème suivant :

$$\min_{\substack{x(t),u(t)\\ x'(t)=g\left(x(t),u(t),t\right)\\ x(0)=\alpha,}} \int_0^T f(x(s),u(s),s)ds + h(x(T))$$

où $h(x(T)$ est une pénalité ou une prime.

Proposition III.4.7. Condition de transversalité

(i) Si l'extrémité est totalement libre, on impose $\lambda(T) = h'(x(T))$.

(ii) Si l'extrémité est soumise à une contrainte d'inégalité, de la forme $\phi(x(T)) \leqslant 0$, alors on introduit p tel que :

$$\lambda(T) = h'(x(T)) + p\phi'(x(T)), \qquad p \geqslant 0, \quad p\phi(x(T)) = 0.$$

Exemple III.4.8 Exercice

Résoudre le problème

$$\min_{\substack{x(t),u(t)\\ x'(t)=u(t)\\ x(0)=1}} \int_0^T \frac{1}{2}(u(t)^2 + x(t)^2)dt$$

Exemple III.4.9 Exercice

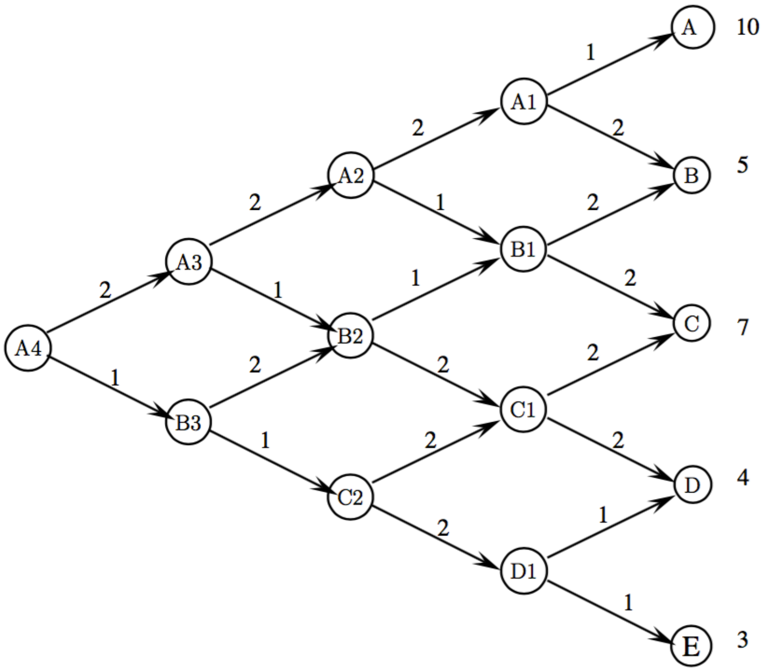
Résoudre le problème

$$\min_{\substack{x(t),y(t),u(t)\\ x'(t)=y(t)\\ y'(t)=u(t)\\ x(0)=0,y(0)=0\\ x(T)+y(T)\geqslant 2}} \int_0^T \frac{1}{2}u(t)^2dt$$

III.5 Exercices du chapitre

Optimisation dynamique en temps discret

Exercice III.1 Etant données 5 villes A, B, C, D et E possédant chacun un trésor (10,5,7,4,3). Le réseau et les coûts de transport sont schématisés sur le graphe ci-dessous. Déterminer le chemin optimal partant de A_4 pour trouver le gain maximal.



Exercice III.2 A chaque instant $t = 0, 1, 2, 3$, on dispose des ressources $x(t) \geq 0$ que l'on peut affecter au cours de la période $[t,t+1[$ à l'usage

a) qui apporte le gain 1 par unité et entraîne un amortissement de 20% des ressources affectées,

b) qui apporte le gain 2 par unité et entraîne un amortissement de 50% des ressources affectées.

Notons $u(t)$ la quantité de ressources à affecter à l'usage a) et $x(t) - u(t)$ celle à l'usage b). On cherche à maximiser la fonction du gain total :

$$J(u) = \sum_{t=0}^{3} (2x(t) - u(t))$$

sous la contrainte dynamique :

$$x(t+1) = 0.5\, x(t) + 0.3\, u(t), \quad 0 \leq u(t) \leq x(t), \quad x(0) = 1.$$

Déterminer explicitement le gain maximal obtenu, la suite des commandes optimales $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, $u(3)$ et la suite des états correspondants $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$, $x(3)$, $x(4)$.

Exercice III.3 Un consommateur dispose d'un capital initial de 100 euros. Il peut dépenser une partie $u(t)$ de son capital $x(t)$ et épargner le reste avec un taux d'intérêt de 100% :

$$x(t+1) = 2(x(t) - u(t)), \quad x(0) = 100.$$

Déterminer la stratégie optimale qui maximise la fonction d'utilité :

$$\sum_{t=0}^{2}(4u(t) - 0.001\, u^2(t)).$$

Exercice III.4 Un consommateur dispose d'un capital initial $\alpha > 0$. Au cours de la période $[t,t+1[$, il dépense une partie $u(t)$ de son capital $x(t)$. Il épargne le reste avec un taux d'intêret $i > 0$. Le nouveau capital $x(t+1)$ au cours de la période $[t+1,t+2[$ sera :

$$x(t+1) = (1+i)(x(t) - u(t)), \quad x(0) = \alpha.$$

La consommation sur T périodes lui donne un confort caractérisé par une fonction d'utilité :

$$\sum_{t=0}^{T-1} \sqrt{u(t)}.$$

Quelle est la stratégie optimale pour avoir le plus grand confort ?

Optimisation dynamique en temps continu

Exercice III.5 Résoudre l'équation différentielle $y' - 4y = 5x$. En déduire l'unique solution de cette équation telle que $y(0) = 0$.

Exercice III.6 Minimiser la fonction

$$\int_0^1 u^2(t)dt + x^2(1)$$

sous la contrainte dynamique :

$$x'(t) = x(t) + u(t), \quad x(0) = 1.$$

Exercice III.7 Maximiser la fonction

$$\int_0^1 (x(t) + u(t))dt$$

sous la contrainte dynamique :

$$x'(t) = 1 - u^2(t), \quad x(0) = 1.$$

Exercice III.8 Au cours d'une période $T > 0$, un capital $x(t)$ peut être soit réinvesti avec un taux d'intérêt $\alpha > 0$, soit consommé. La fonction d'utilité s'écrit $\ln u(t)$ où $u(t) > 0$ désigne la quantité consommée. Maximiser la fonction :

$$J(u) = \int_0^T \ln u(t)\, dt$$

sous la contrainte dynamique :

$$x'(t) = \alpha x(t) - u(t), \quad u(t) \geq 0, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) \geq 0.$$

Exercice III.9 Dans le modèle de Life-cycle saving, supposons que l'individu a eu un héritage $a > 0$ et a décidé de laisser un legs $b > 0$. On maximise donc la fonction d'utilité :

$$J(u) = \int_0^T \ln u(t)\, e^{-\rho t}\, dt$$

sous la contrainte dynamique de l'équation d'état du salaire accumulé :

$$x'(t) = \alpha + i x(t) - u(t), \quad x(0) = a, \quad x(T) = b.$$

Quel est le plus grand legs qu'il puisse laisser ?

A

Quelques compléments

A-1 Mineurs principaux et critère de Sylvester

Définition A-1.1. Mineurs principaux

Soit A, une matrice symétrique réelle de taille $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **mineurs principaux** les déterminants des n matrices $A_p = \left(a_{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$, pour p allant de 1 à n.

Le critère de Sylvester fournit une méthode simple permettant de tester le caractère "défini positif" d'une matrice.

Théorème A-1.2. Critère de Sylvester

Pour qu'une matrice symétrique réelle A de taille n soit définie positive, il est nécessaire et suffisant que les n mineurs principaux $(A_p)_{1\leq p\leq n}$ soient strictement positifs.

Exemple A-1.3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de x cette matrice est-elle définie positive ?

Appliquons le critère de Sylvester. On a $\det A_1 = \det\left(x\right) = x$, $\det A_2 = \det\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2x - 1$ et enfin $\det A_3 = \det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3x - 2$. Par conséquent, A est définie positive si, et seulement si $x > 0$ et $x > 1/2$ et $x > 2/3$, soit $x > 2/3$.

Remarque A-1.4

Si l'on s'intéresse à présent au seul caractère positif d'une matrice symétrique réelle, on obtient un critère un peu plus compliqué à tester. En effet, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A symétrique réelle soit positive est que tous les mineurs extraits diagonaux de cette matrice soient positifs, autrement dit $\det(a_{ij})_{(i,j)\in I^2} \geq 0$ pour toute partie I de $\{1,\ldots,n\}$. Notons qu'il y a $2^n - 1$ tels mineurs.

A-2 Fonctions implicites, théorème des extrema liés

Théorème A-2.1. Fonctions implicites

Soit g une fonction de classe C^k définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(a) = 0$. On suppose que $\partial_{x_n} g(a) \neq 0$. Alors il existe un voisinage $O_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ de $(a_1,\ldots,a_{n-1})$, un voisinage $O_2 \subset \mathbb{R}$ de a_n et une fonction $\phi : O_1 \to O_2$ de classe C^k tels que, pour tout $(x,y) \in O_1 \times O_2 \subset \Omega$, on a

$$f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = g(x).$$

Démonstration. Heuristique. On a :

$$g(x) = g(a) + \sum_{j=1}^{n-1} \partial_{x_j} g(a)(x_j - a_j) + \partial_{x_n} g(a)(x_n - a_n) + o(x-a).$$

Or $g(a) = 0$. De plus, si on cherche x tel que $g(x) = 0$, on obtient formellement (en oubliant le petit o) :

$$x_n = a_n - (\partial_{x_n} g(a))^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \partial_{x_j} g(a)(x_j - a_j) \right),$$

ce qui nous donne une expression de x_n en fonction de $(x_1,\ldots,x_{n-1})$. □

Exemple A-2.2

Considérons le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne $x^2+y^2 = 1$. Le théorème des fonctions implicites montre que le cercle est localement le graphe d'une fonction en tout point exceptés $(\pm 1,0)$.

Preuve du théorème des extrema liés dans le cas d'une contrainte scalaire (Théorème II.3.1). Quitte à échanger les rôles entre x_1 et x_2, on peut supposer $\partial_{x_2} g(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un (intervalle) ouvert O_1 contenant $\bar{x}_1$, un (intervalle) ouvert O_2 contenant $\bar{x}_2$ et une fonction implicite $\phi : O_1 \to O_2$ tels que :

$$\forall x_1 \in O_1, \quad g(x_1,\phi(x_1)) = 0.$$

On a donc : $\bar{x} = (\bar{x}_1,\bar{x}_2) = (\bar{x}_1,\phi(\bar{x}_1))$ et

$$\phi'(\bar{x}_1) = -\partial_{x_1} g(\bar{x})/\partial_{x_2} g(\bar{x}).$$

On a donc :

$$(O_1 \times O_2) \cap K = \{(x_1,\phi(x_1)),\, x_1 \in O_1\}.$$

La fonction $x_1 \mapsto f(x_1,\phi(x_1))$ admet donc en $\bar{x}_1$ un minimum local dans l'intervalle O_1. On a donc :

$$\frac{d}{dx_1} f(\bar{x}_1,\phi(\bar{x}_1)) = 0,$$

soit

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{x_1} f(\bar{x}_1,\phi(\bar{x}_1)) + \phi'(\bar{x}_1)\partial_{x_2} f(\bar{x}_1,\phi(\bar{x}_1)) \\ &= \partial_{x_1} f(\bar{x}) + (-\partial_{x_2} f(\bar{x})/\partial_{x_2} g(\bar{x}))\partial_{x_1} g(\bar{x}) \end{aligned}$$

On a également :

$$\partial_{x_2} f(\bar{x}) + (-\partial_{x_2} f(\bar{x})/\partial_{x_2} g(\bar{x}))\partial_{x_2} g(\bar{x}) = 0.$$

On a donc la relation demandée avec :

$$\lambda = -\partial_{x_2} f(\bar{x})/\partial_{x_2} g(\bar{x}).$$

□

A-3 Optimisation linéaire quadratique

Définition A-3.1. Problème linéaire quadratique

Trouver u réalisant le minimum du problème suivant :

$$\min_u \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} \left[\frac{1}{2}(Rx(t),x(t)) + \frac{1}{2}(Qu(t),u(t)) \right] + \frac{1}{2}(Dx(T),x(T)) \right\}$$

sous la contrainte dynamique : $x(t+1) = Ax(t) + \alpha u(t)$, avec $R, Q, D \in \S_n(\mathbb{R})$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'équation de Bellman s'écrit :

$$V(y,s) = \min_u \left\{ \left[\frac{1}{2}(Ry,y) + \frac{1}{2}(Qu,u) \right] + V(Ay + \alpha u, s+1) \right\}$$

On cherche une solution de la forme $V(y,s) = \frac{1}{2}(P_s y, y)$ avec $P_s \in S_n(\mathbb{R})$.

Proposition A-3.2.

Les matrices P_s satisfont l'équation de Ricatti matricielle :

$$\begin{aligned} P_s &= R + A^T P_{s+1} A - \alpha^2 A^T P_{s+1} B_{s+1} P_{s+1} A \\ u(s) &= -\alpha B_{s+1} P_{s+1} A y. \end{aligned}$$

avec $B_{s+1} = (Q + \alpha^2 P_{s+1})^{-1}$

Démonstration. On a :

$$V(y,s) = \min_u \left\{ \frac{1}{2} \left[(Ry,y) + (Qu,u) + (P_{s+1}(Ay + \alpha u), Ay + \alpha u) \right] \right\}$$

On a $\nabla P(u) = Qu + \alpha P_{s+1}(Ay + \alpha u)$. Donc $\nabla P(u) = 0$ implique la première égalité de la proposition. D'où :

$$\begin{aligned}
V(y,s) &= \frac{1}{2}\left[(Ry,y) + (Qu,u) + \alpha^2(P_{s+1}u, u) + (P_{s+1}Ay, Ay) + \alpha(P_{s+1}u, Ay) + \alpha(P_{s+1}Ay, u)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(Ry,y) + (P_{s+1}Ay, Ay) + \alpha(P_{s+1}u, Ay)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(Ry,y) + (A^T P_{s+1}Ay, y) - \alpha^2(A^T P_{s+1}B_{s+1}P_{s+1}Ay, y)\right],
\end{aligned}$$

d'où le résultat par identification. □