La fonction exponentielle Équations différentielles

Table des matières

Avant propos

Le but de ce chapitre est de construire une des fonctions mathématiques les plus importantes. Elle est en effet présente dans toutes les sciences. Sa construction à partir d'une équation différentielle est passionnante, bien qu'historiquement elle ne s'est pas construite ainsi, mais elle demande plus d'attention du fait de cette fabrication originale. Le début, surtout requière de la concentration.

J'espère que vous serez captivé, comme je le fus moi-même, par cette construction.

1 Existence et unicité de la fonction exponentielle

1.1 Définition et théorèmes

Théorème 1 : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

On nomme cette fonction exponentielle et on la note : exp

Démonstration : L'existence de cette fonction ne peut se faire dans chapitre. Elle découle d'un théorème sur les primitives des fonctions continues.

Pour montrer l'unicité, nous allons auparavant démontrer le théorème suivant :

Théorème 2 : La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) > 0$$

Démonstration : Tant que l'unicité de l'exponentielle n'est pas démontré, nous noterons f une fonction vérifiant les propriétés du théorème 1. On pose la fonction $\varphi(x) = f(x)f(-x)$. Montrons que la fonction φ est constante. Pour cela dérivons φ.

$$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$$

Comme $f' = f$, on a :

$$\begin{aligned} &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $\varphi' = 0$ alors la fonction φ est constante. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \varphi(0) = f^2(0) = 1$$

On en déduit alors : $f(x)f(-x) = 1$, donc la fonction f ne peut s'annuler.

Supposons alors qu'il existe $x = a$ telle que $f(a) < 0$, on a alors :

$f(a)f(0) < 0$, donc comme f est continue car dérivable, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins c tel que $f(c) = 0$ ce qui est contradictoire avec ce que nous avons établi.

Conclusion : la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Unicité : On suppose que deux fonctions f et g vérifient les conditions $f = f'$, $g' = g$ et $f(0) = g(0) = 1$. Comme la fonction g ne s'annule pas, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction h par $h = \dfrac{f}{g}$. On dérive h :

$$h' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{g^2} = 0$$

La fonction h est donc constante et $h(x) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = 1$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

On en déduit que $f = g$. L'unicité est ainsi prouvé. Nous noterons dans la suite cette fonction exp.

1.2 Propriétés de la fonction exponentielle

1.2.1 L'exponentielle de la somme

Théorème 3 : Soit a et b deux réels, on a alors :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

Démonstration : Posons la fonction $h(x) = \dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$, montrons alors que la fonction h n'est autre que la fonction exponentielle. Montrons que $h' = h$ et $h(0) = 1$:

$$h'(x) = \frac{\exp'(x+a)}{\exp(a)} = \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = h(x)$$

$$h(0) = \frac{\exp(0+a)}{\exp(a)} = 1$$

La fonction h est donc exp, on en déduit alors :

$$\frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = \exp(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exp(x+a) = \exp(x) \times \exp(a)$$

1.2.2 Autres opérations

Théorème 4 : Soit a et b deux réels et n un entier naturel, on a alors les relations suivantes :

➪ $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$ ➪ $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$ ➪ $\exp(na) = (\exp(a))^n$

Démonstration : Les démonstrations sont immédiates. La dernière propriété se montre par récurrence

1.2.3 Notation

Définition 1 : : Du fait des propriétés similaires entre la fonction exponentielle et la fonction puissance, on note :

➪ $e = \exp(1) \quad e \simeq 2,718\ldots$ ➪ $e^x = \exp(x)$

On a ainsi les propriétés :

➪ $e^{a+b} = e^a \times e^b$ ➪ $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$

➪ $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ ➪ $e^{na} = (e^a)^n$

2 Étude de la fonction exponentielle

2.1 Variation

Théorème 5 : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Immédiat du fait que sa dérivée est elle-même et que l'exponentielle est toujours positive.
Conséquence Comme la fonction exponentielle est stritement croissante, on peut écrire les équivalences suivante :

Règle 1 : Soit a et b deux réels, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} e^a = e^b \quad &\Leftrightarrow \quad a = b \\ e^a < e^b \quad &\Leftrightarrow \quad a < b \\ e^a = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad a = 0 \\ e^a > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad a > 0 \end{aligned}$$

Exemples :

➪ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x^2+3} = e^{7x}$

D'après les équivalences ci-dessus, l'équation est équivalente à :

$$2x^2 + 3 = 7x$$
$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

On calcule : $\Delta = 49 - 24$ soit $\Delta = 25 = 5^2$, on obtient les deux solutions suivantes :

$$x' = \frac{7+5}{4} = 3 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$$
$$S = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$$

➪ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(e^x)^3 \leqslant e^{x+6}$

D'après les équivalences ci-dessus, l'équation est équivalente à :

$$e^{3x} \leqslant e^{x+6}$$
$$3x \leqslant x + 6$$
$$2x \leqslant 6$$
$$x \leqslant 3 \quad \text{soit} \quad S =]-\infty; 3[$$

2.2 Limites

Théorème 6 : On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Démonstration : Soit la fonction f suivante : $f(x) = e^x - x$. Dérivons la fonction f :

$$f'(x) = e^x - 1$$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on a :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0 \quad \text{et} \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0 \quad \text{donc} \quad e^x > x$$

or on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ d'après le théorème sur la limite infinie on a :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

En faisant le changement de variable $X = -x$, on obtient :

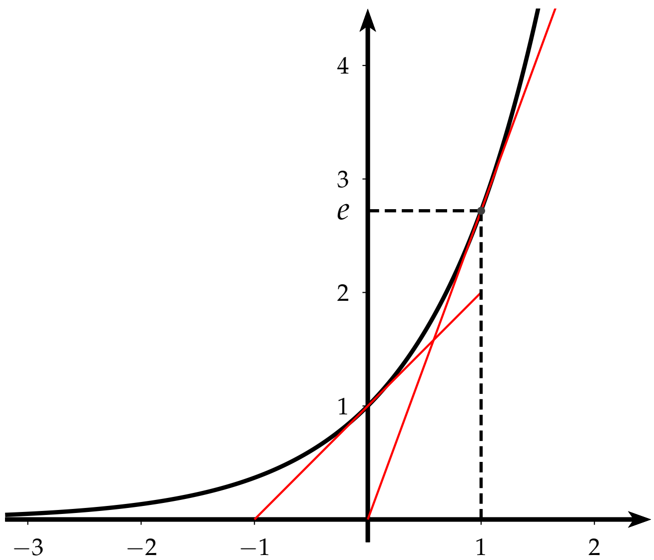
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

2.3 Courbe représentative

D'après les renseignements obtenus, on a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
$\exp(x)$	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$

On obtient la courbe suivante :



2.4 D'autres limites importantes

Théorème 7 : On a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Démonstration : La démonstration découle de la définition de la dérivée en 0 appliquée à la fonction e^x.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x} = e^0 = 1$$

Théorème 8 : **Croissance comparée**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

Démonstration : Comme pour la limite de e^x en $+\infty$, on étudie les variation d'une fonction. Soit donc la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$$

On détermine la dérivée g' :

$$g'(x) = e^x - x$$

D'après le paragraphe 2.2, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > x \quad \text{donc} \quad g'(x) > 0$$

La fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}$. Or $g(0) = 1$ donc si $x > 0$ alors $g(x) > 0$. On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} x > 0 \quad g(x) &> 0 \\ e^x &> \frac{x^2}{2} \\ \frac{e^x}{x} &> \frac{x}{2} \end{aligned}$$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, d'après le théorème sur la limite infinie, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Pour la deuxième limite, on fait un changement de variable $X = -x$, on obtient alors :

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{X \to +\infty} (-X)e^{-X} = -\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$$

Conséquence : la fonction exponentielle « l'emporte » sur la fonction x.

2.5 Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}$$

1) Pourquoi les droite d et Δ d'équation respectives $y = 2$ et $y = -3$ sont-elles asymptotes à $\mathscr{C}_f$?
2) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f.
3) Tracer d, Δ et $\mathscr{C}_f$
4) La courbe semble avoir un point de symétrie. Démontrer cette conjecture.

1) On étudie les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   a) En $+\infty$. On a une forme indéterminée, on change donc la forme de la fonction :

$$f(x) = \frac{e^x\left(2 - \dfrac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right)} = \frac{2 - \dfrac{3}{e^x}}{1 + \dfrac{1}{e^x}}$$

   On a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{e^x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

   Par quotient, on a donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 2$.

   b) En $-\infty$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} 2e^x - 3 = -3 \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x + 1 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par quotient, on a} \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3 \end{array}$$

   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = -3$.

2) On calcule la dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^x(e^x + 1) - e^x(2e^x - 3)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x(2x^x + 2 - 2e^x + 3)}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{5e^x}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

   La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. On a donc le tableau de variation suivant :

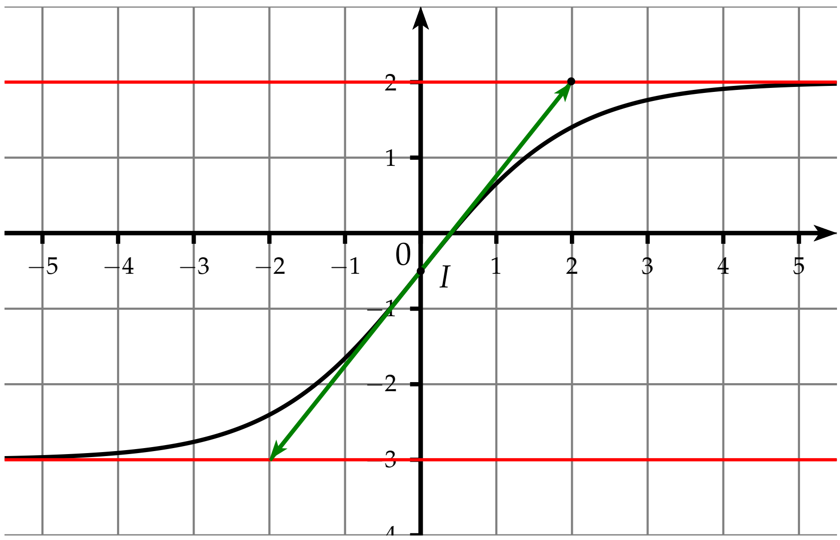
3) Le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-3	2

4) Pour tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, il est important de placer un point et sa tangente. Par exemple le point I d'abscisse nul. On a :

$$f(0) = -\frac{1}{2} \qquad f'(0) = \frac{5}{4}$$

On obtient la courbe suivante :



5) La courbe semble symétrique par rapport au point I. Pour le démontrer, premons un nouveau repère centré en I. Un point $M(x, y)$ a pour coordonnées dans le nouveau repère $M(X, Y)$. On a alors :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x \\ Y = f(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2e^X - 3}{e^X + 1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4e^X - 6 + e^X + 1}{2(e^X + 1)} = \dfrac{5(e^X - 1)}{2(e^X + 1)} \end{cases}$$

Montrons que la fonction $g(X) = \dfrac{5(e^X - 1)}{2(e^X + 1)}$ est impaire.

On a :

$$g(-X) = \frac{5(e^{-X} - 1)}{2(e^{-X} + 1)} = \frac{5(1 - e^X)}{2(1 + e^X)} = -g(-X)$$

La fonction g est impaire, donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par raport à I

2.6 Dérivée de la fonction e^u

Théorème 9 : Soit la fonction u définie sur l'ensemble $\mathcal{D}_f$. La fonction e^u est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et :

$$(e^u)' = u'e^u$$

Démonstration : Cela découle directement de la dérivabilité des fonctions composées

3 Équation différentielle du premier ordre

3.1 Définition

Définition 2 : On appelle une équation **différentielle du premier ordre**, une équation où l'inconnue y est une fonction dérivable à déterminer et dans laquelle figure cette fonction et sa dérivée.

Exemple : Soit l'équation différentielle suivante : $2y + 3y' = x + 3$ (équation du premier ordre à coefficient constant).

3.2 Résolution de l'équation sans second membre y'=ay

3.2.1 Solution générale

Théorème 10 : Soit a un réel non nul. Les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y' = ay \quad (1)$$

sont les fonctions f_k de la forme :

$$f_k = ke^{ax} \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R}$$

Démonstration : Montrons d'abord que les fonction f_k sont solutions de l'équation (1). On dérive et l'on obtient :

$$f_k'(x) = kae^{ax} = af_k(x)$$

Montrons maintenant que si g est une solution de (1) alors elle est du type f_k. Soit la fonction h définie par :

$$h(x) = g(x)e^{-ax}$$

On dérive la fonction h :

$$h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax}$$

Comme g est solution de (1) alors $g' = ag$

$$h'(x) = ag(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax}$$
$$h'(x) = 0$$

La fonction h est donc constante et l'on pose $h(x) = k$, on a alors :

$$g(x) = \frac{h(x)}{e^{-ax}} = ke^{ax} = f_k(x)$$

Exemple : Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$

On a $y' = -\frac{3}{2}y$, donc les solutions sont $f_k(x) = ke^{-\frac{3}{2}x}$

3.2.2 Solution particulière

Théorème 11 : Pour tout couple de réels (x_0, y_0), l'équation $y' = ay$ admet une unique solution f telle que $f(x_0) = y_0$

Démonstration : f est solution de (1) donc f est de la forme :

$$f(x) = ke^{ax}$$

or on sait que $f(x_0) = y_0$, donc :

$$y_0 = ke^{ax_0} \quad \text{donc} \quad k = \frac{y_0}{e^{ax_0}} = y_0\, e^{-ax_0}$$

La solution f est donc de la forme :

$$f(x) = y_0\, e^{-ax_0} e^{ax} = y_0\, e^{a(x-x_0)}$$

Exemple : Résoudre l'équation : $y' = 4y$ et $y(1) = 5$.

On a alors : $f(x) = 5\, e^{4(x-1)}$

3.3 Résolution de l'équation linéaire y'=ay+b

Théorème 12 : Les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y' = ay + b \quad (2)$$

sont les fonction f_k de la forme :

$$f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

Démonstration : L'équation (2) admet au moins une solution $f_0(x) = -\frac{b}{a}$, en effet :

$$f_0'(x) = 0 \quad \text{et} \quad af_0(x) + b = -b + b = 0$$

Soit f la solution générale de (2), comme f_0 est aussi solution, on a alors le système suivant :

$$\begin{cases} f' = af + b \\ f_0' = af_0 + b \end{cases}$$

Par soustraction des deux égalités, on obtient :

$$\begin{aligned} f' - f_0' &= af - af_0 \\ (f - f_0)' &= a\,(f - f_0) \end{aligned}$$

La fonction $f - f_0$ vérifie donc l'équation (1) donc :

$$(f - f_0)\,(x) = ke^{ax}$$

on obtient alors la solution générale f de l'équation (2) :

$$f = ke^{ax} + f_0 = ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

Exemple : Déterminer la fonction f, solution de l'équation $y' = -0,5y + 1$.

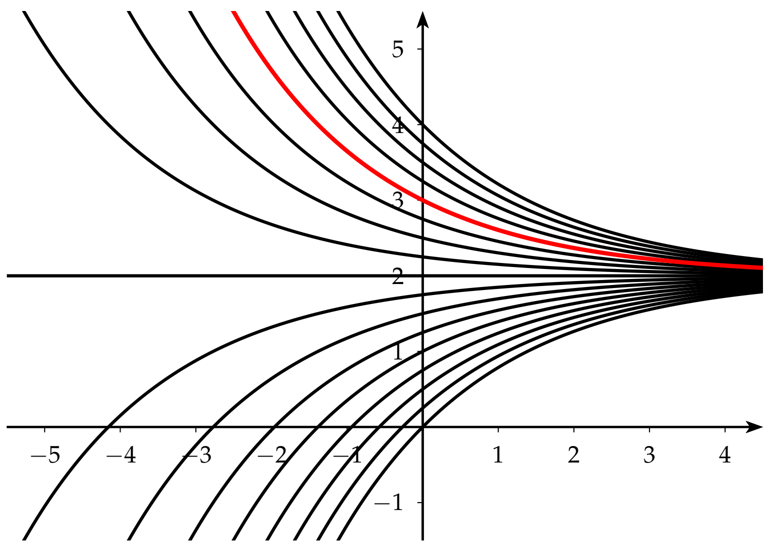
On a alors $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{-0,5} = 2$, les solutions sont donc de la forme :

$$f_k(x) = ke^{-0,5x} + 2$$

Si l'on cherche la solution particulière qui correspond à $f(0) = 3$, on obtient alors $k = 1$, la solution est donc :

$$f(x) = e^{-0,5x} + 2$$

Si l'on veut visualiser l'ensemble des solutions ainsi que la solution particulière, on obtient :



3.4 Équations se ramenant à $y'=ay+b$

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(1)\ y' - 2y = 1 - 6x \quad \text{et} \quad (2)\ y' = y(5-y)$$

1) Montrer que (1) admet une solution affine puis résoudre (1).

2) Déterminer les solutions strictement positives de (2) en posant $z = \dfrac{1}{y}$.

1) On pose f_0 une fonction affine qui vérifie l'équation (1).
On a donc : $f_0(x) = ax + b$. Comme la fonction f_0 doit vérifier (1), on a :

$$\begin{aligned} f_0'(x) - 2f_0(x) &= 1 - 6x \\ a - 2ax - 2b &= 1 - 6x \\ -2ax + a - 2b &= -6x + 1 \end{aligned}$$

En identifiant, on trouve alors $a = 3$ et $b = 1$. La solution particulière est donc : $f_0(x) = 3x + 1$

Appelons maintenant f la solution générale de l'équation (1), on a alors :

$$\begin{cases} f' - 2f = 1 - 6x \\ f_0' - 2f_0 = 1 - 6x \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre les deux égalités, on obtient :

$$(f - f_0)' - 2(f - f_0) = 0 \quad \text{soit} \quad (f - f_0)' = 2(f - f_0)$$

On obtient alors :

$$(f - f_0)(x) = ke^{2x} \quad \text{la solution générale est} \quad f(x) = ke^{2x} + 3x + 1$$

2) Pour résoudre l'équation (2), on pose :

$$z = \frac{1}{y} \quad \text{donc} \quad z' = -\frac{y'}{y^2} \qquad \text{avec} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad y \neq 0$$

Si on divise l'équation (2) par y^2, on obtient :

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{5}{y} - 1$$

en remplaçant par z et z', on a

$$\begin{aligned} -z' &= 5z - 1 \\ z' &= -5z + 1 \end{aligned}$$

On obtient donc la solution générale g de z :

$$g(x) = ke^{-5x} + \frac{1}{5} \qquad k \in \mathbb{R}_+$$

On obtient ensuite la solution générale f de y :

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{ke^{-5x} + \frac{1}{5}} \qquad k \in \mathbb{R}_+$$

3.5 Situation menant à une équation différentielle

Désintégration des noyaux radioactifs.

Rappel : si $N(t)$ est le nombre de noyaux d'un corps radioactif présent à l'instant t (t en années), la variation $\Delta N(t)$ de ce nombre pendant la durée Δt (par désintégration) est proportionnelle à $N(t)$

$$\Delta N(t) = -\lambda \Delta t N(t) \qquad (\lambda > 0)$$

1) On suppose que $t \mapsto N(t)$ est dérivable. Écrire une équation différentielle vérifiée par N et la résoudre.
2) On appelle *temps caractéristique* le nombre $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$.
   Exprimer en fonction de τ le temps $t_{0,5}$ au bout duquel $N(t)$ a diminué de moitié ($t_{0.5}$ est la *demi-vie* ou *période de l'element*).
3) Application : *datation au carbone 14.*
   Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants. À leur mort, celui-ci se désintègre avec une demi-vie de 5 730 ans.
   Si un fragment d'os contient 71 % de sa quantité initiale de carbone 14, quel âge a-t-il ?

⇒ ⇒

1) Si N est dérivable , on peut alors « passer à la limite » dans l'égalité :

$$\Delta N(t) = -\lambda \Delta t N(t) \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t)$$

On obtient alors l'équation différentielle suivante :

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

Si on appelle N_0 le nombre d'atome à l'instant $t = 0$, on obtient alors comme solution :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

2) $t_{0,5}$ est le temps pour lequel $N = \dfrac{1}{2} N_0$, on a donc :

$$N_0 e^{-\lambda t_{0,5}} = \frac{1}{2} N_0 \Leftrightarrow e^{-\lambda t_{0,5}} = \frac{1}{2}$$

On verra dans le chapitre suivant que $e^x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln \dfrac{1}{2} = -\ln 2$

On obtient alors :

$$t_{0.5} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2$$

3) Si la demi-vie du carbone 14 est de 5 730 ans, alors :

$$\frac{\ln 2}{\lambda} = 5730 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{5\,730}$$

si le fragment d'os contient 71 % de sa quantité initiale de carbone 14, alors $N = 0,71 N_0$, d'où

$$\begin{aligned} N_0 e^{-\lambda t} &= 0,71 N_0 \\ e^{-\lambda t} &= 0,71 \\ -\lambda t &= \ln 0,71 \\ t &= -\frac{\ln 0,71}{\lambda} \\ t &= -5\,730 \frac{\ln 0,71}{\ln 2} \\ t &\simeq 2\,831 \end{aligned}$$

Le fragment d'os a environ 2 831 ans