

8. Applications en sciences

8.1. Évolution de populations

Dans beaucoup de domaines comme l'écologie, l'économie et les sciences appliquées, on établit des modèles mathématiques de phénomènes dynamiques qui évoluent dans le temps. Les mesures d'un certain nombre de caractéristiques du système sont prises à des intervalles de temps réguliers, fournissant ainsi une suite de vecteurs x_0, x_1, x_2, \dots . Les composantes de x_k rendent compte de l'état du système au moment de la k -ème mesure.

S'il existe une matrice A telle que $x_1 = Ax_0, x_2 = Ax_1$ et, en général.

$$x_{k+1} = Ax_k \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots \quad (*)$$

alors (*) est appelé une équation de récurrence linéaire (ou équation aux différences finies).

Exercice 8.1



Les démographes s'intéressent aux déplacements de populations ou de groupes de personnes d'un endroit vers une autre. Nous exposons ici un modèle simple qui rend compte des va-et-vient d'une population entre une certaine ville et ses faubourgs immédiats durant un certain nombre d'années.

On choisit une année initiale, disons 2000, et on désigne les populations de la ville et des faubourgs de cette année-là par v_0 et f_0 respectivement. Soit x_0 le vecteur population $x_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ f_0 \end{pmatrix}$ en 2000, $x_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ f_1 \end{pmatrix}$ la population en 2001, etc.

Des études démographiques ont montré que chaque année environ 5 % des habitants des villes émigrent vers les faubourgs (95 % restent en ville) tandis que 3 % quittent les faubourgs (et 97 % restent dans les faubourgs) pour s'installer en ville.

Calculez la population en 2001 et en 2002 de la région dont il vient d'être question, sachant qu'en 2000 elle se montait à 600'000 citadins et 400'000 habitants des faubourgs.

8.2. Le système proie-prédateur

Exemple



Au fond des forêts de séquoias californiennes, les rats des bois aux pattes foncées fournissent jusqu'à 80 % de la nourriture des chouettes, le principal prédateur de ce rongeur. Cet exercice propose un système dynamique linéaire pour modéliser le système des chouettes et des rats. Le modèle n'est pas réaliste à divers égards, mais il a le mérite de constituer un premier modèle abordable.

On désigne les populations de chouettes et de rats au moment k par $x_k = \begin{pmatrix} C_k \\ R_k \end{pmatrix}$, où k est le temps en mois, C_k le nombre de chouettes dans la région étudiée et R_k le nombre de rats (en milliers). On suppose que

$$\begin{cases} C_{k+1} = 0.5 C_k + 0.4 R_k \\ R_{k+1} = -p \cdot C_k + 1.1 R_k \end{cases} \quad (*)$$

où p est un paramètre positif à spécifier.

Le terme $0.5 C_k$ dans la première équation traduit le fait qu'en l'absence de rats pour se nourrir, seule la moitié des chouettes survivraient chaque mois.

Le terme $1.1 R_k$ dans la deuxième équation signifie qu'en l'absence des chouettes comme prédateurs, le nombre de rats augmenterait de 10 % par mois.

Si les rats sont abondants, le $0.4R_k$ tend à faire croître la population des chouettes tandis que le terme négatif $-p \cdot C_k$ rend compte du nombre de rats disparus, mangés par les chouettes. (En effet, $1000/p$ est le nombre moyen de rats qu'une chouette mange chaque mois.)

Question Déterminez l'évolution de ce système quand le paramètre p est fixé à 0.104.

Théorie C'est dans les valeurs propres et les vecteurs propres que se trouve la clef pour comprendre le comportement à long terme ou *évolution* d'un système dynamique décrit par une équation de récurrence $x_{k+1} = Ax_k$.

Nous supposons que A est diagonalisable et possède n vecteurs propres linéairement indépendants v_1, \dots, v_n associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Il est commode de supposer que les vecteurs propres sont ordonnés de façon que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Comme $\{v_1, \dots, v_n\}$ forme une base de \mathbb{R}^n , tout vecteur initial x_0 peut être écrit, de façon unique toutefois, sous la forme

$$x_0 = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

Cette *décomposition en vecteurs propres* de x_0 détermine entièrement le comportement de la suite $\{x_k\}$. Puisque les v_i sont des vecteurs propres,

$$x_1 = Ax_0 = c_1 Av_1 + \dots + c_n Av_n = c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_n \lambda_n v_n$$

En général,

$$x_k = c_1 (\lambda_1)^k v_1 + \dots + c_n (\lambda_n)^k v_n \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Solution Pour $p = 0.104$, les valeurs propres de la matrice A des coefficients de (*) sont $\lambda_1 = 1.02$ et $\lambda_2 = 0.58$. Des vecteurs propres associés sont $v_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur initial x_0 peut être écrit sous la forme $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$.

Alors, pour $k \geq 0$, $x_k = c_1 (1.02)^k v_1 + c_2 (0.58)^k v_2 = c_1 (1.02)^k \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} + c_2 (0.58)^k \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lorsque $k \rightarrow \infty$, $(0.58)^k$ s'approche rapidement de 0. On suppose $c_1 > 0$. Donc, pour toute valeur suffisamment grande de k ,

$$x_k \approx c_1 (1.02)^k \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$x_{k+1} \approx c_1 (1.02)^{k+1} \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} = (1.02) c_1 (1.02)^k \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} \approx 1.02 x_k$$

Les approximations ci-dessus établissent qu'en fin de compte les deux composantes de x_k (le nombre de chouettes et le nombre de rats) augmentent d'un facteur presque égal à 1.02 par mois, ce qui revient à un taux d'accroissement de 2 %. Or, x_k est à peu de choses près un multiple de $(10, 13)$.

Les composantes de x_k sont donc dans un rapport proche du rapport de 10 à 13, autrement dit il y a environ 13 milliers de rats pour 10 chouettes.

Exercice 8.2

Déterminez l'évolution du système dynamique de l'exemple quand le paramètre de prédation p vaut :

- a. 0.2
- b. 0.125

Donnez une expression de x_k .

Comment évoluent dans le temps les populations de chouettes et de rats ?

8.3. Modèle de Leslie



Patrick Holt **Leslie**
(1900 - 1972)

En démographie, on étudie l'évolution d'une population à partir des taux de fécondité et de mortalité. Pour présenter un modèle simple, on exclut d'autres caractéristiques telles que la migration et on suppose que la population dispose de ressources illimitées. Comme seules les femelles donnent la vie, il suffit de considérer les classes d'âge des femelles de la population.

Considérons une population de rongeurs dont le cycle de reproduction est de 3 ans. Chaque femelle donne en moyenne naissance à 6 femelles durant sa deuxième année et à 10 femelles durant sa troisième année. Cependant, seule une femelle sur deux survit au-delà de sa première année et seules 40 % de celles qui survivent la deuxième année survivront jusqu'à la troisième année.

Si l'on écrit sous forme vectorielle $(x_1 ; x_2 ; x_3)$ les effectifs x_i des femelles à l'âge i , l'année suivante, la répartition de cette population est donnée par le vecteur y ci-dessous, qui peut s'écrire sous forme matricielle $y = Lx$:

$$\begin{pmatrix} 6x_2 + 10x_3 \\ 0.5x_1 \\ 0.4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $y = Lx$ fournit les effectifs des femelles de chaque classe d'âge après une année. Pour $(10 ; 0 ; 0)$ par exemple, on trouve successivement :

an	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
x_1	10	0	30	20	90	120	310	540	1170	...
x_2	0	5	0	15	10	45	60	155	270	...
x_3	0	0	2	0	6	4	18	24	62	...

La matrice L possède deux valeurs propres 2 et -1 . On vérifie immédiatement que $(20 ; 5 ; 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2. Si une population est répartie en classes d'âge dans les rapports 20 : 5 : 1, alors ses effectifs sont **doublés** chaque année. Le vecteur propre $(10 ; -5 ; 2)$ associé à la valeur propre -1 n'a pas de signification en termes d'effectifs.

Plus généralement, on appelle matrice de Leslie, une matrice carrée de la forme

$$L = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

qui modélise la dynamique d'une population structurée en n classes d'âge. La première ligne contient les coefficients (positifs) de fertilité f_i de la classe d'âge i et les éléments p_i sous la diagonale indiquent les probabilités (ou taux) de survie de la classe d'âge i à la suivante.

Exercice 8.3



Une population de scarabées présente quatre classes d'âge d'une année chacune avec des taux de survie de respectivement 10 %, 50 % et 50 % et une reproduction uniquement durant la quatrième année de p descendants par individu. Écrire la matrice de Leslie qui modélise la dynamique de cette population.

Quelle est la valeur minimale de p qui assure la survie de l'espèce ?

Exercice 8.4

Un modèle de Leslie est proposé pour représenter la dynamique de la population d'un pays. Ne prenant en compte que les individus de sexe féminin, on a choisi dix classes d'âge d'une durée de 5 ans chacune. Les éléments de la première ligne de la matrice de Leslie sont

0.000 0.000 0.001 0.012 0.376 0.438 0.383 0.046 0.007 0.002

et les éléments situés sous la diagonale sont

0.996 0.998 0.997 0.996 0.996 0.994 0.992 0.990 0.983

- Comment expliquer que les éléments de la première ligne sont croissants puis décroissants ? Un tel élément peut-il être supérieur à 1 ?
- Pourquoi le premier coefficient de la deuxième liste est-il inférieur au suivant ?
- Pourquoi le modèle ne tient-il pas compte des individus de plus de 50 ans ?

Exercice 8.5

On considère un modèle de Leslie de matrice $L = \begin{pmatrix} 0.25 & 1 \\ 0.75 & 0 \end{pmatrix}$.

- Donnez une interprétation des éléments non nuls de la matrice L par rapport à la population que l'on modélise.
- Trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice L . Donnez une interprétation des résultats.
- Diagonalisez la matrice L et calculez L^n . En déduire le comportement asymptotique de la dynamique de cette population.

Exercice 8.6

Même exercice que le précédent avec la matrice $L = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.7

On considère une population de saumons. En moyenne, deux neuvièmes meurent la première année. Durant la deuxième année, ils donnent naissance en moyenne à un juvénile par individu, puis les six septièmes meurent. Chaque poisson qui survit la troisième année donne encore naissance en moyenne à deux juvéniles avant de mourir.

- Écrivez la matrice de Leslie L modélisant l'évolution de cette population.
- Avec une population initiale de respectivement 1200, 1400 et 500 saumons dans chaque classe d'âge, calculez les populations au début des quatre années suivantes.
- Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de L .
- En écrivant le vecteur de la population initiale en combinaison linéaire de trois vecteurs propres, prédir l'évolution à long terme de la population.

8.4. Économie (modèle fermé de Leontief)



Wassily Leontief (1906 - 1999)

Il existe aussi un modèle ouvert.

Vers la fin des années quarante, Wassily **Leontief**, chercheur de l'université de Harvard, subdivisa l'économie américaine en 500 secteurs, comme ceux de l'industrie de l'automobile, du charbon, des services, etc. Il établit pour chacun une équation linéaire qui décrit comment sa production est redistribuée vers les autres secteurs et énonça un certain nombre de résultats fondamentaux sur les systèmes d'équations de même type. Il ouvrit une nouvelle ère dans la modélisation mathématique de l'économie et reçut le prix Nobel d'économie pour ses travaux en 1973.

Le modèle *fermé* de Leontief des années quarante comportait 500 inconnues pour 500 équations. Nous considérerons ici un modèle beaucoup plus simple.

Un modèle économique se divise en trois secteurs : Charbon (C), Électricité (E) et Acier (A). Le tableau montre la production et les achats de chaque secteur en proportion. Montrons qu'il existe des revenus qui équilibrent les coûts de chacun.

		Produit par		
		C	E	A
Acheté par	C	0.0	0.4	0.6
	E	0.7	0.2	0.2
	A	0.3	0.4	0.2

Dans cet exemple, la troisième colonne indique que 60 % de la production du secteur Acier va au secteur Charbon, 20 % à celui de l'Électricité, 20 % à celui de l'Acier. Toutes les productions étant prises en compte, la somme d'une colonne est égale à 1. La troisième ligne indique que le secteur Acier a acheté 30 % de la production du secteur Charbon, 40 % de celui de l'Électricité, 20 % de celui de l'Acier.

Notons par r_C , r_E et r_A les revenus respectifs des secteurs Charbon, Électricité et Acier. Leurs dépenses sont alors respectivement égales à :

$$\begin{aligned}
 &0.4r_E + 0.6r_A \text{ pour le charbon} && \text{(première ligne)} \\
 &0.7r_C + 0.2r_E + 0.2r_A \text{ pour l'électricité} && \text{(deuxième ligne)} \\
 &0.3r_C + 0.4r_E + 0.2r_A \text{ pour l'acier} && \text{(troisième ligne).}
 \end{aligned}$$

L'équilibre économique entre secteurs a lieu lorsque les dépenses sont égales aux revenus :

$$\begin{cases}
 0.4r_E + 0.6r_A = r_C \\
 0.7r_C + 0.2r_E + 0.2r_A = r_E \\
 0.3r_C + 0.4r_E + 0.2r_A = r_A
 \end{cases}$$

On peut évidemment aussi écrire ce système sous forme matricielle : en posant

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{r} = \begin{pmatrix} r_C \\ r_E \\ r_A \end{pmatrix}, \text{ on a alors } M \cdot \vec{r} = \vec{r} \text{ ou } (M - I) \cdot \vec{r} = \vec{0}.$$

Résoudre ce système revient donc à trouver un vecteur propre de M correspondant à la valeur propre $\lambda=1$.

$$\text{On trouve } \vec{r} = \begin{pmatrix} r_C \\ r_E \\ r_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1 \\ 0.83 \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que si le secteur Électricité produit l'équivalent d'un milliard de francs, alors le secteur Charbon doit produire l'équivalent de 900 millions de francs et le secteur Acier l'équivalent de 830 millions de francs pour obtenir l'équilibre entre les dépenses et les revenus.

Exercice 8.8

Une économie fermée comprend deux secteurs, les biens et les services. Le secteur des biens vend 75 % des biens au secteur des services et garde le reste. Le secteur des services fournit 60 % de ses prestations au secteur des biens et garde le complément pour lui.

Déterminez les prix d'équilibre afin que les recettes compensent les dépenses.

Exercice 8.9

Un grand domaine d'une économie fermée est divisée en trois secteurs : la chimie, l'énergie, l'industrie. La chimie vend 25 % de sa production à l'énergie, 55 % à l'industrie et garde le reste. L'énergie vend 75 % de sa production à la chimie, 10 % à l'industrie et garde le reste. L'industrie vend 40 % à la chimie, 40 % à l'énergie et garde le reste.

Écrivez la matrice des échanges et déterminez les prix d'équilibre qui permettent aux dépenses d'être compensées par les recettes.

8.5. Matrices de transition

Une **matrice de transition** T est une matrice carrée dont les éléments sont tous positifs ou nuls, de plus la somme des éléments de chaque colonne est égale à 1. L'élément t_{ij} d'une telle matrice peut être considéré comme la probabilité de passer de l'état j à l'état i . Une matrice-colonne E dont les éléments sont positifs et dont la somme des éléments est 1 est appelée **vecteur d'état**.

Un vecteur d'état E qui vérifie l'égalité $T \cdot E = E$ est appelé **vecteur d'état stationnaire**. Dans ce cas, le vecteur d'état E est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Les matrices de transition servent de modèle mathématique dans de nombreux domaines (biologie, chimie, économie,...).

- Propriétés**
1. Si T est une matrice de transition et n est un entier naturel, alors T^n est une matrice de transition.
 2. Toute matrice de transition admet la valeur propre 1.
 3. Toute matrice de transition admet un vecteur d'état stationnaire.

Exercice 8.10

On considère la matrice de transition $T = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$. Déterminez un vecteur d'état stationnaire.

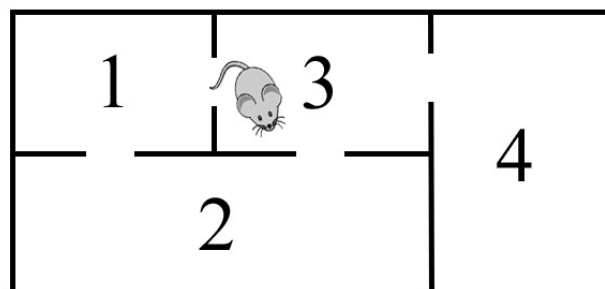
Exercice 8.11

Dans une crèche, un enfant est déclaré en bonne santé ou malade. Parmi les enfants en bonne santé un jour donné, 90 % le seront encore le lendemain. Parmi les enfants malades, 30 % le seront encore le lendemain. Le 2 mars, 15 % des enfants sont malades.

- a. Trouvez la matrice de transition.
- b. Quel est le vecteur d'état au 2 mars, au 3 mars, au 4 mars ?
- c. Quelle est la proportion d'enfants malades à long terme ?

Exercice 8.12

Une souris est placée dans un labyrinthe. Chaque fois qu'elle entend un coup de sifflet, elle panique et change de compartiment, en choisissant au hasard une des portes.



- a. Déterminez la matrice de transition associée à cette situation.
- b. La souris se trouvait dans le compartiment 3 au départ. Écrivez le vecteur correspondant à sa position après un coup de sifflet.
- c. Et après un deuxième coup de sifflet ?
- d. Quel est le vecteur d'état stationnaire ? Interprétez ce résultat.

8.6. Ce qu'il faut absolument savoir

Le modèle de Leslie

☐ ok

Le modèle fermé de Leontief

☐ ok

Les matrices de transitions (élévation à la puissance, état stationnaire)

☐ ok