Introduction à la programmation linéaire …

Source : https://www.ufrgs.br/producao/

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Av. Paulo Gama, 110 - Bairro Farroupilha - Porto Alegre - Rio Grande do Sul

Cep: 90040-060 - Fone: +55 51 33086000

Traduction : Nicolas Estel HULEUX - Github nicolas15000 – http://solvgraph.com

La programmation linaire (LP) est un outil pour résoudre les problèmes d'optimisation.

En 1947, George Dantzig a développé une méthode efficace, l'algorithme du simplexe, pour résoudre les problèmes de programmation linéaire (également appelé LP).

Depuis le développement de l'algorithme du simplex, la programmation linéaire a été utilisée pour résoudre les problèmes d'optimisation dans des industries aussi diverses que la banque, l'éducation, la foresterie, le pétrole et le camionnage.

Dans un sondage mené auprès d'entreprises fortune 500, 85 % des répondants ont déclaré avoir utilisé une programmation linéaire.

Pour mesurer l'importance de la programmation linéaire dans la recherche opérationnelle, environ 70 % de ce livre sera consacré à la programmation linéaire et aux techniques d'optimisation connexes.

À la section 3.1, nous commençons notre étude de la programmation linéaire en décrivant les caractérisitiques générales partagées par tous les problèmes de programmation linéaire.

Dans les sections 3.2 et 3.3, nous apprenons à résoudre graphiquement ces problèmes de programmation linéaire qui ne comportent que deux variables.

Résoudre ces PLs simples nous donnera des idées utiles pour résoudre des pls plus complexes.

Qu'est-ce qu'un problème de programmation linéaire?

Dans cette section, nous introduisons la programmation linéaire et définissons les termes importants qui sont utilisés pour décrire les problèmes de programmation linéaire.

Example 1 : La sculture sur bois de Giapetto.

La sculpture sur bois de Giapetto fabrique deux types de jouets en bois: les soldats et les trains.

Un soldat se vend 27 $ et utilise pour 10 $ de matières premières.

Chaque soldat fabriqué augmente de 14 $ la main-d'œuvre variable et les frais généraux de Giapetto.

Un train se vend 21 $ et utilise pour 9 $ de matières premières.

Chaque train construit augmente de 10 $ les frais de transport et les frais généraux variables de Giapetto.

La fabrication de soldats et de trains en bois nécessite deux types de main-d'œuvre qualifiée: la menuiserie et la finition.

Un soldat nécessite 2 heures de travail de finition et 1 heure de travail de menuiserie.

Un train nécessite 1 heure de finition et 1 heure de travail de charpentier.

Chaque semaine, Giapetto peut obtenir toute la matière première nécessaire mais seulement 100 heures de finition et 80 heures de menuiserie.

La demande de trains est illimitée, mais au plus 40 soldats sont achetés chaque semaine.

Giapetto veut maximiser le profit hebdomadaire (coûts des revenus).

Formuler un modèle mathématique de la situation de Giapetto qui peut être utilisé pour maximiser le profit hebdomadaire de Giapetto.

En développant le modèle de Giapetto, nous explorons les caractéristiques communes à tous les problèmes de programmation linéaire .

Variables de décision

Nous commençons par définir les variables de décision pertinentes Dans tout modèle de programmation linéaire, les variables de décision doivent décrire complètement les décisions à prendre (dans ce cas, par Giapetto).

De toute évidence, Giapetto doit décider du nombre de soldats et de trains à fabriquer chaque semaine.

Dans cet esprit, nous définissons $x1$ nombre de soldats produits chaque semaine $x2$ nombre de trains produits chaque semaine :

$x1$ = nombre de soldats produits chaque semaine

$x2$ = nombre de trains produits chaque semaine

La fonction objectif

Dans tout problème de programmation linéaire, le décideur veut **maximiser** (généralement les revenus ou les bénéfices) ou **minimiser** (généralement les coûts) une **fonction** des variables de décision.

La fonction à maximiser ou minimiser est appelée « la fonction objectif ».

Pour le problème de Giapetto, nous notons que les coûts fixes (comme le loyer et l'assurance) ne dépendent pas des valeurs de $x1$ et $x2$.

Ainsi, Giapetto peut se concentrer sur la maximisation

(revenus hebdomadaires) - (coûts d’achat de matières premières) - (autres coûts variables).

Les revenus et coûts hebdomadaires de Giapetto peuvent être exprimés en termes de variables de décision $x1$ et $x2$.

Il serait insensé que Giapetto fabrique plus de soldats qu'il ne peut en vendre, nous supposons donc que tous les jouets produits seront vendus.

Revenus hebdomadaires = Revenus hebdomadaires des soldats + Revenus hebdomadaires des trains

$= 27\,x1 + 21\,x2$

En outre, les matières premières hebdomadaires coûtent

$= 10x1 + 9x2$

Autres coûts variables hebdomadaires

$= 14x1 + 10x2$

On en déduit que Giapetto veut maximiser

$$\boxed{(27x1 + 21x2) - (10x1 + 9x2) - (14x1 + 10x2) = 3x1 + 2x2}$$

Ainsi, l'objectif de Giapetto est de choisir x1 et x2 pour maximiser 3x1 + 2x2.

Nous utilisons la variable z pour désigner la valeur de la fonction objectif de tout LP.

La fonction d'objectif de Giapetto est

$$\boxed{\text{Maximiser } z = 3x1 + 2x2}$$

(Dans le futur, nous abrégerons «maximiser» par max et «minimiser» par min.)

Le coefficient d'une variable dans la fonction objectif est appelé le coefficient de fonction objectif de la variable.

Par exemple, le coefficient de la fonction objectif pour x1 est 3, et le coefficient de la fonction objectif pour x2 est 2.

Dans cet exemple (et dans de nombreux autres problèmes), le coefficient de la fonction objectif pour chaque variable est simplement la contribution de la variable au profit de l'entreprise.

Contraintes

Au fur et à mesure que x1 et x2 augmentent, la fonction objectif de Giapetto s'agrandit.

Cela signifie que si Giapetto était libre de choisir n'importe quelle valeur pour x1 et x2, l'entreprise pourrait réaliser un profit arbitrairement élevé en choisissant x1 et x2 pour être très grand.

Malheureusement, les valeurs de x1 et x2 sont limitées par les trois restrictions suivantes (souvent appelées contraintes):

Contrainte 1 - Chaque semaine, pas plus de 100 heures de temps de finition ne peuvent être utilisées.

Contrainte 2 - Chaque semaine, pas plus de 80 heures de temps de menuiserie peuvent être utilisées.

Contrainte 3 - En raison de la demande limitée, 40 soldats au maximum devraient être produits chaque semaine.

Maintenant, la contrainte 1 peut être exprimée par

$$\boxed{2x1 + x2 <= 100}$$

Notez que les unités de chaque terme dans sont des heures de finition par semaine.

Pour qu'une contrainte soit raisonnable, tous les termes de la contrainte doivent avoir les mêmes unités.

2 heures de finition pour le soldat, 1 pour le train.

Sinon, on ajoute des pommes et des oranges, et la contrainte n'aura aucune signification.

Ensuite, la contrainte 2 peut être écrite comme

$$\boxed{x1 + x2 = 80}$$

Encore une fois, notez que les unités de chaque termes sont les mêmes (dans ce cas, heures de menuiserie par semaine) .

Enfin, nous exprimons le fait qu'au plus 40 les soldats par semaine peuvent être vendus en limitant la production hebdomadaire de soldats à au plus 40 soldats.

Cela donne la contrainte suivante:

$$\boxed{x1 = 40}$$

Ainsi (2) - (4) exprime les contraintes 1–3 en termes de variables de décision;

on les appelle les contraintes du problème de programmation linéaire de Giapetto.

Les coefficients des variables de décision dans les contraintes sont appelés coefficients technologiques, car les coefficients technologiques reflètent souvent la technologie utilisée pour produire différents produits.

Le nombre sur le côté droit de chaque contrainte est appelé right-hand side (ou rhs). Souvent, le rhs d'une contrainte représente la quantité d'une ressource disponible.

Restrictions de signe

Pour compléter la formulation d'un problème de programmation linéaire, il faut répondre à la question suivante pour chaque variable de décision: la variable de décision peut-elle prendre uniquement des valeurs non négatives, ou la variable de décision est-elle autorisée à prendre à la fois des valeurs positives et négatives?

Si une variable de décision Xi ne prend que des valeurs non négatives, alors nous ajoutons **le signe Xi >= 0.**

Si une variable Xi prend à la fois des valeurs positives et négatives (ou nulles), alors nous disons que xi est sans restriction de signe (souvent abrégé *urs*).

Pour le problème Giapetto, il est clair que x1 >= 0 et x2 >= 0.

Dans d'autres problèmes, cependant, certaines variables peuvent être *urs*.

Par exemple, si Xi représentait le solde de trésorerie d'une entreprise, alors x pourrait être considéré comme négatif si l'entreprise devait plus d'argent qu'elle n'en avait sous la main.

Dans ce cas, il serait approprié de classer Xi comme urs.

D'autres utilisations des variables urs sont discutées dans la section 4.12.

La combinaison des restrictions de signe x1 >= 0 et x2 >= 0 avec la fonction objectif (1) et les contraintes (2) - (4) donne le modèle d'optimisation suivant :

max z = 3 x1 + 2 x2 (fonction objectif) (1)

Sous les contraintes (subject to) :

2x1 + x2 <= 100 (Le contrainte de finition) (2)

x1 + x2 <= 80 (La contrainte de charpenterie) (3)

x1 <= 40 (Contrainte de la demande de soldats) (4)

x1 >= 0 (Restriction de signe)† (5)

x2 >= 0 (Restriction de signe) (6)

«Sous les contraintes (subject to)» (s.t.) signifie que les valeurs des variables de décision x1 et x2 doivent satisfaire toutes les contraintes et toutes les restrictions de signe.

Avant de définir formellement un problème de programmation linéaire, définissons les concepts de fonction et inégalité linéaire.

DÉFINITION ■ Une fonction $f(x_1, x_2, ..., X_n)$ de $x_1, x_2 ,. . . , x_n$ est une fonction linéaire si et seulement si pour un ensemble de constantes $c_1, c_2 ,. . . , c_n$, $f (x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1\ c_2x_2\ c_nx_n$.

Par exemple, $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ est une fonction linéaire de x_1 et x_2, mais $f(x_1, x_2) = x_1^2 * x_2$ n'est pas une fonction linéaire de x_1 et x_2.

DÉFINITION ■ Pour toute fonction linéaire $f(x_1, x_2, ..., X_n)$ et tout nombre b, les inégalités $f(x_1,x_2 ,. . . , x_n)<= b$ et $f(x_1, x_2, ..., x_n)>= b$ sont des inégalités linéaires.

Ainsi, $2x_1 + 3x_2 <= 3$ et $2x_1 + x_2 >= 3$ sont des inégalités linéaires, mais $= x_1^2 * x_2 > 3$ n'est pas une inégalité linéaire

Les restrictions de signe contraignent les valeurs des variables de décision, mais nous choisissons de considérer les restrictions de signe comme étant distinctes des contraintes. La raison en deviendra évidente lorsque nous étudierons l'algorithme du simplexe au chapitre 4.

DÉFINITION ■ Un problème de programmation linéaire (LP) est un problème d'optimisation pour lequel nous Procédons comme suit:

1 Nous essayons de maximiser (ou de minimiser) une fonction linéaire des variables de décision. La fonction qui doit être maximisée ou minimisée s'appelle la fonction objectif.

2 Les valeurs des variables de décision doivent satisfaire un ensemble de contraintes. Chaque contrainte doit être une équation linéaire ou une inégalité linéaire.

3 Une restriction de signe est associée à chaque variable. Pour toute variable x_i, le signe restriction spécifie que x_i doit être soit non négatif ($x_i > 0$) soit illimité dans signe (urs).

Le reste est encore à traduire .

Problèmes :

Farmer Jones doit déterminer combien d'acres de maïs et de blé planter cette année.

Un acre de blé donne 25 bosquets de blé et nécessite 10 heures de travail par semaine.

Un acre de maïs donne 10 boisseaux de maïs et nécessite 4 heures de travail par semaine.

Tout le blé peut être vendu à 4 $ abushel, et tout le maïs peut être vendu à 3 $ le boisseau.

Sept acres de terre et 40 heures de travail par semaine sont disponibles.

Les réglementations gouvernementales exigent qu'au moins 30 boisseaux de maïs soient produits au cours de l'année en cours.

Soit x_1 nombre d'acres de maïs semé et x_2 nombre d'acres de blé planté.

En utilisant ces variables de décision, formulez un LP dont la solution indiquera à Farmer Jones comment maximiser le revenu total du blé et du maïs.

2 Répondez à ces questions sur le problème 1.

A Is (x_1 =2, x_2=3) dans la région des possibles?

B Is (x_1=4, x_2=3) dans la région des possibles?

C Is (x_1=2, x_2=1 dans la région des possibles?

D Is (x_1=3, x_2=2) dans la région des possibles?

3 En utilisant les variables x1= nombre de boisseaux de maïs produits et x2 = nombre de boisseaux de blé produits, reformulez le pl de Farmer Jones'.

4. Truckco fabrique deux types de camions: 1 et 2.

Chaque camion doit passer par l'atelier de peinture et l'atelier d'assemblage.

Si l'atelier de peinture était entièrement consacré à la peinture de camions de type 1, 800 par jour pourraient être peints;

si l'atelier de peinture était entièrement consacré à la peinture de camions de type 2, 700 par jour pourraient être peints.

Si l'atelier d'assemblage était entièrement consacré à l'assemblage des moteurs de camions1, 1 500 par jour pourraient être assemblés;

si l'atelier d'assemblage était entièrement consacré à l'assemblage des moteurs de camions2, alors 1 200 par jour pourraient être assemblés.

Chaque camion de type 1 contribue 300 $ au profit;

chaque camion de type 2 contribue 500 $.

Formulez un LP qui maximisera les bénéfices de Truckco.

3.2The Graphical Solution of Two-Variable Linear Programming Problems

A traduire plus tard !

La solution graphique aux problèmes de minimisation :

Dorian Auto fabrique des voitures et des camions de luxe.

L'entreprise estime que les clients probables sont des femmes et des hommes à revenu élevé.

Pour atteindre ces groupes, Dorian Auto s'est lancé dans une campagne publicitaire télévisée ambitieuse et a décidé d'acheter Des Spots commerciaux d'une minute sur deux types de programmes: spectacles d'humour et matchs de football.

Chaque publicité comique est vue par 7 millions de femmes à revenu élevé et 2 millions d'hommes à revenu élevé. Chaque publicité de football est vue par 2 millions de femmes à revenu élevé et 12 millions d'hommes à revenu élevé. Une annonce comique d'une minute coûte 50 000 $ et en football l'annonce d'une minute coûte 100 000 $. Dorian aimerait que les publicités soient vues par au moins 28 millions de personnes femmes à revenu élevé et 24 millions d'hommes à revenu élevé.

Utilisez la programmation linéaire pour déterminer comment Dorian Auto peut répondre à ses besoins publicitaires à un coût minimum.

La solution :

Dorian doit décider du nombre d'annonces comiques et de football à acheter, les variables de décision sont donc

- $x1$ nombre d'annonces humoristiques d'une minute achetées
- $x2$ nombre d'annonces de football d'une minute achetées

Dorian souhaite alors minimiser le coût total de la publicité (en milliers de dollars).

La function objectif de Dorian est

min $z = 50x1 + 100x2$

Dorian fait face aux contraintes suivantes:

Contrainte 1 Les publicités doivent toucher au moins 28 millions de femmes à revenu élevé.

Contrainte 2 Les publicités doivent toucher au moins 24 millions d'hommes à revenu élevé.

La contrainte 1 est alors

$7x1 + 2x2 = 28$

Et la 2

$2x1 +12x2 = 24$

Le LP de Dorian est donc :

The sign restrictions $x1$ 0 and $x2$ 0 are necessary, so the Dorian LP is given by:

min $z = 50x1 + 100x2$

s.t.

$7x1 + 2x2 = 28$

Et la 2

$2x1 +12x2 = 24$

$X1,x2>=0$

Ce problème est typique d'une large gamme d'applications LP dans lesquelles un décideur

veut minimiser le coût de la satisfaction d'un certain ensemble d'exigences. Pour résoudre ce LP

graphiquement, nous commençons par représenter graphiquement la région des possibles (figure 4).

Notez que (10) est satisfait par des points sur ou au-dessus de la ligne AB (AB fait partie de la ligne 7x1 2x2 28) et que

(11) est satisfait par les points sur ou au-dessus de la ligne CD (CD fait partie de la ligne 2x1

12x2 24). À partir de la figure 4, nous voyons que les seuls points du premier quadrant satisfaisant à la fois

(10) et (11) sont les points dans la région ombrée délimitée par l'axe x1, CEB et l'axe x2.

Comme le problème du Giapetto, le problème de dorien a une région convexe réalisable, mais le problème

la région faisable pour Dorian, contrairement à celle de Giapetto, contient des points pour lesquels la valeur d'au moins une variable peut prendre des valeurs arbitrairement grandes. Une telle région faisable est appelée une région faisable non limitée.

Parce que Dorian veut minimiser le coût total de la publicité, la solution optimale au

Le problème est le point dans la région réalisable avec la plus petite valeur z. Pour trouver le meilleur

solution, nous devons tracer une ligne d'isocoût qui coupe la région réalisable. Un isocoût

ligne est une ligne sur laquelle tous les points ont la même valeur z (ou le même coût). Nous arbitrairement

choisissez la ligne d'isocoût passant par le point (x1 4, x2 4). Pour ce point, z

50 (4) 100 (4) 600, et nous représentons graphiquement la ligne d'isocoût z 50x1 100x2 600.

On considère des droites parallèles à la ligne d'isocoût 50x1 100x2 600 dans la direction de

décroissant z (sud-ouest). Le dernier point de la région des possibles qui croise un isocoût

line sera le point dans la région réalisable ayant la plus petite valeur z. D'après la figure 4,

nous voyons que le point E a la plus petite valeur z de tout point dans la région des possibles; c'est le

solution optimale au problème dorien. Notez que le point E est l'endroit où les lignes 7x1 2x2

28 et 2x1 12x2 24 se croisent. La résolution simultanée de ces équations donne la solution optimale (x1 3,6, x2 1,4). La valeur z optimale peut alors être trouvée en remplaçant ces valeurs de x1 et x2 dans la fonction objectif. Ainsi, la valeur z optimale est z

50 (3,6) 100 (1,4) 320 320 000 dollars. Parce qu'au point E les contraintes HIW et HIM sont satisfaites par l'égalité, les deux contraintes sont contraignantes

Abandon de la traduction est étude directe du livre en ANGLAIS (Ca va plus vite , y'en a marre de traduire 😊)

Rectification : Je ne traduis que les meilleurs passages ou les plus importants.

Example 6 : un problème de régime.

Mon alimentation exige que toute la nourriture que je mange provienne de l'un des quatre «groupes alimentaires de base»(gâteau au chocolat, crème glacée, soda et cheesecake).

À l'heure actuelle, les quatre aliments suivants sont disponibles à la consommation:

- brownies,
- glace au chocolat,
- cola et
- gâteau au fromage à l'ananas.

Chaque brownie coûte **50 ¢**, chaque boule de glace au chocolat coûte **20 ¢**, chaque bouteille de cola coûte **30 ¢**, et chaque morceau de gâteau au fromage à l'ananas coûte **80 ¢**.

Chaque jour, je dois faire au moins **500 calories, 6 onces de chocolat, 10 onces de sucre et 8 onces de matières grasses**. La teneur nutritionnelle par unité de chaque aliment est indiquée dans le tableau 2.

Formuler une programmation linéaire modèle qui peut être utilisé pour satisfaire mes besoins nutritionnels quotidiens à moindre coût

Solution :

Comme toujours, nous commençons par déterminer les décisions qui doivent être prises par celui qui décide: quelle quantité de chaque type d'aliment doit être consommée quotidiennement. Ainsi, nous définissons les variables de décision :

```
x1 nombre de brownies consommés quotidiennement
x2 nombre de boules de glace au chocolat consommées quotidiennement
x3 bouteilles de cola bues quotidiennement
x4 morceaux de cheesecake à l'ananas consommés quotidiennement
```

L'objectif est de minimiser le coût de mon alimentation.

Le coût total de tout régime peut être déterminé à partir de la relation suivante:

(coût total du régime) = (coût des brownies)+ (coût de la glacecrème) +(coût du cola) + (coût du gâteau au fromage).

Autrement dit

Cout du régime = $50x1 + 20x2 + 30x3 + 80x4$

Du coup, notre fonction objectif est :

Min(z)= $50x1 + 20x2 + 30x3 + 80x4$

Les variables de décision doivent satisfaire les quatre contraintes suivantes:

Contrainte 1 L'apport calorique quotidien doit être d'au moins 500 calories.

Contrainte 2 La consommation quotidienne de chocolat doit être d'au moins 6 onces.

Contrainte 3 La consommation quotidienne de sucre doit être d'au moins 10 onces.

Contrainte 4 L'apport quotidien en matières grasses doit être d'au moins 8 oz

TABLE 2

Valeurs nutritionelles pour le régime .

Type of Food	Calories	Chocolate (Ounces)	Sugar (Ounces)	Fat (Ounces)
Brownie	400	3	2	2
Chocolate ice cream (1 scoop)	200	2	2	4
Cola (1 bottle)	150	0	4	1
Pineapple cheesecake (1piece)	500	0	4	5

La contrainte 1 s'exprime de la sorte :

$400x1 + 200x2 + 150x3 + 500x4 <= 500$ (Calorie constraint)

La contrainte 2 s'exprime de la sorte :

3x1 + 2x2 >= 6 (Chocolate constraint)

La contrainte 3 s'exprime de la sorte :

2x1 + 2x2 + 4x3 +4x4 >=10 (Sucre constraint)

La contrainte 4 s'exprime de la sorte :

2x1 + 4x2 +x3+ 5x4 >= 8 (Gras constraint)

Et enfin la restriction de signe xi >= 0 (i = 1, 2, 3, 4) doit s'appliquer.

La Combinaison de la fonction objectif, des contraintes et des restrictions de signe

donne Le programme linéaire qui suit:

$$
\begin{array}{llr}
\min z = 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 80x_4 & & \\
\text{s.t.} \quad 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500 & \text{(Calorie constraint)} & (21) \\
\quad 3x_1 + 2x_2 \geq 6 & \text{(Chocolate constraint)} & (22) \\
\quad 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 10 & \text{(Sugar constraint)} & (23) \\
\quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 8 & \text{(Fat constraint)} & (24) \\
\quad x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3, 4) & \text{(Sign restrictions)} &
\end{array}
$$

La solution optimale pour ce LP est x1 = x4 = 0, x2 = 3, x3 = 1, z = 90.

Ainsi, le régime à prix minimum entraîne un coût quotidien de 90 ¢ en mangeant trois boules de glace au chocolat et en buvant une bouteille de cola.

La valeur z optimale peut être obtenue en substituant la valeur optimale des variables de décision dans la fonction objectif.

Cela donne un coût total de z 3 (20) 1 (30) 90 ¢.

90¢. The optimal diet provides

$$
\begin{aligned}
200(3) + 150(1) &= 750 \text{ calories} \\
2(3) &= 6 \text{ oz of chocolate} \\
2(3) + 4(1) &= 10 \text{ oz of sugar} \\
4(3) + 1(1) &= 13 \text{ oz of fat}
\end{aligned}
$$

les contraintes de chocolat et de sucre sont contraignantes, mais les contraintes de calories et de matières grasses ne sont pas contraignantes.

Une version du problème de l'alimentation avec une liste plus réaliste des aliments et des besoins nutritionnels a été l'un des premiers LP à être résolu par ordinateur.

Stigler (1945) a proposé un problème de régime dans lequel 77 types d'aliments étaient disponibles et 10 besoins nutritionnels (vitamine A, vitamine C, etc.) devaient être satisfaites.

Une fois résolue par ordinateur, la solution optimale a donné un régime composé de semoule de maïs, farine de blé, lait évaporé, beurre d'arachide, saindoux, boeuf, foie, pommes de terre, épinards et chou.

Bien qu'un tel régime soit clairement riche en nutriments vitaux, peu de gens en seraient satisfaits car il ne semble pas répondre à un minimum niveau goût (et Stigler exigeait que le même régime soit consommé chaque jour).

La solution optimale à tout modèle LP ne reflétera que les aspects de la réalité capturés par la fonction objective et les contraintes.

La formulation de Stigler du problème alimentaire ne reflétait pas le désir des gens d'avoir une alimentation savoureuse et variée.

La programmation en nombres entiers a été utilisée pour planifier des menus institutionnels pour une période hebdomadaire ou mensuelle.

Les modèles de planification de menus contiennent des contraintes qui reflètent les exigences de goût et de variété.

Problèmes

1

Il y a trois usines sur la rivière Momiss (1, 2 et 3).

Chacun émet deux types de polluants (1 et 2) dans le fleuve.

Si les déchets de chaque usine sont traités, la pollution dans la rivière peut être réduite.

Il en coûte 15 $ pour traiter une tonne de déchets d'usine 1, et chaque tonne traitée réduit la quantité de polluant 1 de 0,10 tonne et la quantité de polluant 2 de 0,45 tonne.

Il en coûte 10 $ pour traiter une tonne de déchets d'usine 2, et chaque tonne traitée réduira la quantité de polluant 1 de 0,20 tonne et la quantité de polluant 2 de 0,25 tonne.

Il en coûte 20 $ pour traiter une tonne de déchets d'usine 3, et chaque tonne traitée réduira la quantité de polluant 1 de 0,40 tonne et la quantité de polluant 2 de 0,30 tonne.

L'Etat souhaite réduire la quantité de polluant 1 dans la rivière d'au moins 30 tonnes et la quantité de polluant 2 dans la rivière d'au moins 40 tonnes.

Formulez une LP qui minimisera le coût de la réduction de la pollution des quantités souhaitées. Pensez-vous que les hypothèses LP (proportionnalité, additivité, divisibilité et certitude) sont raisonnables pour ce problème?

2

U.S. Labs fabrique des valves cardiaques mécaniques à partir des valves cardiaques de porcs.

Différentes opérations cardiaques nécessitent des vannes de différentes tailles.

U.S. Labs achète des vannes de porc auprès de trois fournisseurs différents.

Le coût et la taille des vannes achetées auprès de chaque fournisseur sont indiqués dans le tableau 3:

TABLE 3

Supplier	Cost Per Value ($)	Percent Large	Percent Medium	Percent Small
1	5	40	40	20
2	4	30	35	35
3	3	20	20	60

Chaque mois, U.S. Labs passe une commande auprès de chaque fournisseur.

Au moins 500 vannes grandes, 300 moyennes et 300 petites doivent être achetées chaque mois.

En raison de la disponibilité limitée des vannes de raccordement, au plus 700 vannes par mois peuvent être achetées auprès de chaque fournisseur.

Formulez un LP qui peut être utilisé pour minimiser le coût d'acquisition des vannes nécessaires.

3

Peg et Al Fundy ont un budget alimentaire limité, donc Peg istrying doit nourrir la famille le moins cher possible.

Cependant, elle veut toujours s'assurer que les membres de sa famille satisfont à leurs besoins nutritionnels quotidiens.

Peg peut acheter deux aliments.

- L'alimentation 1 se vend 7 $ la livre, et chaque livre contient 3 unités de vitamine A et 1 unité de vitamine C.
- L'alimentation 2 se vend 1 $ par livre, et chaque livre contient 1 unité de chaque vitamine

Chaque jour, la famille a besoin d'au moins 12 unités de de vitamine A et 6 unités de vitamine C.

a.Vérifiez que Peg devrait acheter 12 unités de nourriture 2 par jour et ainsi sur-satisfaire les besoins en vitamine C de 6 unités.

b.Al a mis le pied à terre et a exigé que Peg réponde exactement aux besoins nutritionnels quotidiens de la famille en obtenant précisément 12 unités de vitamine A et 6 unités de vitamine

C. La solution optimale au nouveau problème consistera à ingérer moins de vitamine C, mais elle sera plus coûteuse. Pourquoi ?

4

Boucles d'or doit trouver au moins 12 livres d'or et au moins 18 livres d'argent pour payer le loyer mensuel.

Il y a deux mines dans lesquels Boucle d'or peut trouver de l'or et de l'argent.

Chaque jour que Boucles d'or   passe dans la mine 1, elle trouve 2 livres d'or et 2 livres d'argent.

Chaque jour que Boucles d'or   passe dans la mine 2, elle trouve 1 livre d'or et 3 livres d'argent.

Formulez un LP pour aider Boucle d'or à répondre à ses besoins tout en passant le moins de temps possible dans les mines.

Résolvez graphiquement le LP.

3.5A Problème d'horaire de travail (Agenda)

De nombreuses applications de la programmation linéaire impliquent de déterminer la méthode du coût minimum pour satisfaire les besoins en main-d'œuvre.

L'exemple suivant illustre les fonctionnalités de base communes à bon nombre de ces applications.

Exemple 1 :

Un bureau de poste a besoin d'un nombre différent d'employés à temps plein à différents jours de la semaine.

Le nombre d'employés à temps plein requis chaque jour est indiqué dans le tableau 4.

Les règles syndicales stipulent que chaque employé à temps plein doit travailler cinq jours consécutifs, puis bénéficier de deux jours de congé.

Par exemple, un employé qui travaille du lundi au vendredi doit être en congé le samedi et le dimanche.

La poste souhaite répondre à ses besoins quotidiens en utilisant uniquement des salariés à temps plein.

Formulez un LP que le bureau de poste peut utiliser pour minimiser le nombre d'employés à temps plein qui doivent être embauchés.

TABLE 4
Requirements for Post Office

Day	Number of Full-time Employees Required
1 = Monday	17
2 = Tuesday	13
3 = Wednesday	15
4 = Thursday	19
5 = Friday	14
6 = Saturday	16
7 = Sunday	11

Solution :

Avant de donner la formulation correcte de ce problème, commençons par discuter d'une modélisation incorrecte du problème.

De nombreux étudiants commencent par définir Xi comme étant le nombre d'employés travaillant le jour i (jour 1 = lundi, jour 2 = mardi, etc.).

Puis ils raisonnent que (nombre d'employés à temps plein) = (nombre d'employés travaillant le lundi) + (nombre d'employés travaillant le mardi) + … + (nombre d'employés travaillant le dimanche).

Ce raisonnement conduit à la fonction objectif suivante:

min (z) = $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 + x_7$

Pour s'assurer que la poste dispose d'un nombre suffisant d'employés à temps plein travaillant chaque jour, ils ajoutent les contraintes xi (nombre d'employés requis le jour i).

Par exemple, pour Monday, ajoutez la contrainte x1 >= 17. L'ajout des restrictions de signe xi >= 0 (i 1, 2, ..., 7) donne le LP suivant:

$$\begin{aligned}
\min z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 \geq 17 \\
& x_2 \geq 13 \\
& x_3 \geq 15 \\
& x_4 \geq 19 \\
& x_5 \geq 14 \\
& x_6 \geq 16 \\
& x_7 \geq 11 \\
& x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 7)
\end{aligned}$$

Il y a au moins deux défauts dans cette modélisation.

Premièrement, la fonction objectif n'est pas le nombre d'employés à temps plein de la poste.

La fonction objectif actuelle compte chaque employé cinq fois, pas une fois.

Par exemple, chaque employé qui commence à travailler le lundi travaille du lundi au vendredi et est inclus dans x1, x2, x3, x4 et x5.

Deuxièmement, les variables x1, x2, ..., x7 sont interdépendantes et la corrélation entre les variables n'est pas capturée par l'ensemble actuel de contraintes.

Par exemple, certaines des personnes qui travaillent le lundi (les x1 personnes) travailleront le mardi.

Cela signifie que x1 et x2 sont interdépendants, mais nos contraintes n'indiquent pas que la valeur de x1 a un effet sur la valeur de x2.

La clé pour formuler correctement ce problème est de réaliser que la décision principale du bureau de poste n'est pas le nombre de personnes qui travaillent chaque jour mais plutôt combien de personnes commencent à travailler chaque jour de la semaine. Dans cet esprit, nous définissons

Xi = nombre d'employés commençant à travailler le jour i

Par exemple, X1 est le nombre de personnes qui commencent à travailler le lundi (ces personnes travaillent du lundi au vendredi).

Avec les variables correctement définies, il est facile de déterminer la fonction et les contraintes objectives correctes.

Pour déterminer la fonction objectif, notez que (nombre d'employés à temps plein) = (nombre d'employés qui commencent à travailler le lundi) + (nombre d'employés qui commencent à travailler le mardi) + …+ (nombre d'employés qui commencent à travailler Dimanche).

Étant donné que chaque employé commence à travailler exactement un jour de la semaine, cette expression ne compte pas deux fois les employés.

Ainsi, lorsque nous définissons correctement les variables, la fonction objectif est :

min (z) = $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 + x_7$

Le bureau de poste doit s'assurer qu'un nombre suffisant d'employés travaillent chaque jour de la semaine.

Par exemple, au moins 17 employés doivent travailler le lundi. Qui travaille le lundi?

Tout le monde sauf les employés qui commencent à travailler le mardi ou le mercredi (ils obtiennent, respectivement, dimanche et lundi, et lundi et mardi de congé).

Cela signifie que le nombre d'employés travaillant le lundi est de x1 + x4 + x5+ x6 + x7.

Pour nous assurer qu'au moins 17 employés travaillent le lundi, nous établissons donc que la contrainte suivante :

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17$$

Soit satisfaite . L'ajout de contraintes similaires pour les six autres jours de la semaine et les restrictions de signe xi >= 0 (i 1, 2, ..., 7) donne la formulation suivante du problème du bureau de poste:

$$\begin{array}{lrl}
\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & & \\
\text{s.t.} \quad x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17 & & \text{(Monday constraint)} \\
x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 & & \text{(Tuesday constraint)} \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15 & & \text{(Wednesday constraint)} \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 19 & & \text{(Thursday constraint)} \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 14 & & \text{(Friday constraint)} \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16 & & \text{(Saturday constraint)} \\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11 & & \text{(Sunday constraint)} \\
x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 7) & & \text{(Sign restrictions)}
\end{array}$$

La solution optimale pour ce LP est $z = \frac{67}{3}, x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{10}{3}, x_3 = 2, x_4 = \frac{22}{3}, x_5 = 0, x_6 = \frac{10}{3}, x_7 = 5.$

Cependant, étant donné que nous n'autorisons que les employés à temps plein, les variables doivent être des nombres entiers et l'hypothèse de divisibilité n'est pas satisfaite.

Pour trouver une réponse raisonnable dans laquelle toutes les variables sont des entiers, nous pourrions essayer d'arrondir les variables fractionnaires au terme supérieur, ce qui donne :

$$z = 25, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 8, x_5 = 0, x_6 = 4, x_7 = 5.$$

Il s'avère cependant que la programmation par nombres entiers peut être utilisée pour montrer qu'une solution optimale au problème du bureau de poste est

$$z = 23, x_1 = 4, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 6, x_5 = 0, x_6 = 4, \quad x_7 = 3.$$

Notez qu'il n'y a aucun moyen que la solution de programmation linéaire optimale ait pu être arrondie pour obtenir la solution optimale en nombres entiers.

Baker (1974) a développé une technique efficace (qui n'utilise pas de programmation linéaire) pour déterminer le nombre minimum d'employés obligatoire lorsque chaque travailleur bénéficie de deux jours de congé consécutifs.

Si vous résolvez ce problème à l'aide de LINDO, LINGO ou Excel Solver, vous pouvez obtenir une horaire de main-d'œuvre différente qui utilise 23 employés. Cela montre que l'exemple a des solutions optimales alternatives.

Créer un agenda équitable pour les employés

La solution optimale que nous avons trouvée nécessite que 4 travailleurs commencent le lundi, 4 le mardi, 2 le mercredi, 6 le jeudi, 4 le samedi et 3 le dimanche.

Les travailleurs qui commencent le samedi seront mécontents car ils ne reçoivent jamais de congé le week-end.

En tournant les agendas des employés sur une période de 23 semaines, un agenda plus juste peut être obtenu.

Pour voir comment cela est fait, considérez le calendrier suivant:

semaines 1 à 4: début le lundi

semaines 5 à 8: début le mardi

semaines 9 à 10: début le mercredi

semaines 11 à 16: début le jeudi

semaines 17 à 20: début le samedi

semaines 21 à 23: commencer le dimanche

L'employé 1 suit cet agenda pendant une période de 23 semaines. L'employé 2 commence avec la semaine 2 de cet horaire (commençant le lundi pendant 3 semaines, puis le mardi pendant 4 semaines, et se terminant par 3 semaines commençant le dimanche et 1 semaine le lundi).

Nous continuons de cette façon pour générer un horaire de 23 semaines pour chaque employé.

Par exemple, l'employé 13 aura l'horaire suivant: