Résolution d'équations différentielles

Python nous propose un outil numérique pour la résolution d'équations différentielles, utilisant l'instruction `odeint`, importée du module `scipy.integrate`. Avant toute chose, tapons l'instruction suivante :

```
from scipy.integrate import odeint
```

Exemple :

On souhaite résoudre sur l'intervalle $[0,10]$ le problème de Cauchy suivant (E) : $\begin{cases} y' &= -2y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ Nous allons tout d'abord demander à Python de calculer une solution *approchée* de ce problème :

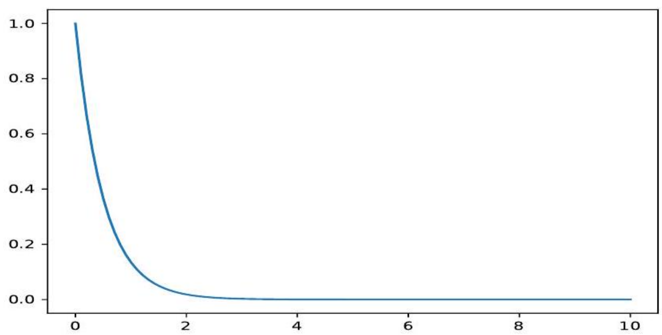
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

def F(y,x):
        return(-2*y)
x=np.linspace(0,10,100)
y=odeint(F,1,x)
```

Puis tracer la courbe approchée de cette solution sur l'intervalle $[0,10]$:

```
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

On obtient le graphe suivant :



On peut vérifier que l'on obtient à peu près la courbe de f définie par $f(x) = e^{-2x}$ qui est la solution exacte de cette équation différentielle très simple.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle suivante : $(E_1) \quad y' + 5y = 3 \quad$ avec $y(0) = 0$

1. Résoudre l'équation homogène associée, puis donner la solution unique de (E_1). On note f cette solution.
2. Utiliser Python pour représenter graphiquement f sur l'intervalle $[0,5]$.
3. Utiliser l'instruction odeint pour obtenir une approximation numérique d'une solution de (E_1). Tracer cette solution sur $[0,5]$. *On pourra comparer les deux méthodes sur un même graphique.*
4. Recommencer la question 3 , en changeant la condition initiale, et en prenant $y(0) = 1$.
5. Que dire de la fonction $x \mapsto \dfrac{3}{5}$?

Exercice 2

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E_2) \quad 2y' - 3y = 3x \quad \text{avec } y(0) = 0$$

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. On pose $y(x) = \lambda(x) e^{3/2x}$. Déterminer la fonction $\lambda(x)$ pour que y soit solution de $2y' - 3y = 3x$.
3. Donner enfin la fonction f solution unique de (E_2).
4. Utiliser Python pour représenter graphiquement f sur l'intervalle $[0, 3]$.
5. Utiliser l'instruction odeint pour vérifier en obtenant une approximation numérique d'une solution de (E_2), que l'on tracera également sur $[0, 3]$.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E_3) \quad \left(1 + x^2\right) y' + xy = x \quad \text{avec } y(0) = 3$$

1. Utiliser l'instruction odeint pour représenter une solution de (E_3) sur $[0, 5]$.
2. Résoudre l'équation homogène associé à (E_3) et en déduire l'expression de la solution générale f de (E_3).
3. Vérifier en ajoutant la représentation de f au graphique précédent.
4. L'équation différentielle admet-elle un équilibre ?

Exercice 4

On considère le système d'équations différentielles : $(S_1) \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$ avec $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$

1. Écrire le système (S_1) sous forme matricielle en posant $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.
2. Résoudre ensuite le système (S_1) en utilisant les outils classiques d'algèbre linéaire.
3. Représenter sur un même graphique, en utilisant Python, les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ pour $t \in [0, 1.5]$.
4. La commande odeint permet d'obtenir une bonne approximation des deux fonctions solutions. Compléter le script suivant :

```
#On définit le système
def F(y,t):
        x,y=Y[0],Y[1]
        return([2*x+y,x+2*y)
#On donne les conditions initiales
Y0=...
#On résout le système
t=np.linspace(0,1.5,100)
Y=odeint(F,Y0,t)
x=...
y=...
#On trace les courbes
plt.plot(t,x,'b')
plt.plot(t,y,'r')
plt.show()
```

Exercice 5

On considère le système d'équations différentielles :

$$(S_2)\left\{\begin{array}{l} x'(t)=2x(t)+y(t) \\ y'(t)=-x(t)+2y(t) \end{array}\right. \qquad \text{avec la condition initiale } x(0)=1 \text{ et } y(0)=0$$

1. Écrire le système (S_1) sous forme matricielle en posant $Y(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.
2. Expliquer pourquoi la méthode du cours ne permet pas de résoudre ce système.
3. Utiliser odeint pour obtenir une bonne approximation des fonctions solutions sur l'intervalle $I=[0,2]$. Représenter ces deux fonctions sur I.
4. Représenter la courbe $\mathscr{C}$ des points $M(t)$ de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ avec $t\in[0,2]$.

Exercice 6

On considère l'équation différentielle suivante : $(E_4) \quad y''+4y'+4y=0$

1. Donner la forme générale des solutions de (E_4).
2. Déterminer la solution unique de (E_4) vérifiant $y(0)=-1$ et $y'(0)=\dfrac{1}{2}$.
3. Représenter graphiquement cette fonction sur $[-1,5]$.
4. Pour résoudre cette équation avec condition initiale avec Python, on se ramène à un système d'équations différentielles, ou plus précisément à une éq. diff dans $\mathbf{R}^2$ en posant $Y(x)=\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$. Écrire le système différentiel obtenu.
5. Utiliser l'instruction odeint pour résoudre ce système sur $[0,5]$ et récupérer la liste donnant les valeurs de y.
6. Représenter y sur $[0,5]$ et vérifier que l'on obtient le même graphique.
7. Proposer un script permettant d'étendre la méthode approchée avec odeint pour obtenir la courbe sur $[-1,5]$

Exercice 7

On cherche les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que :

$$\forall x\in\mathbf{R} \quad f'(x)=f(-x) \qquad \text{avec } f(0)=a \quad (a\in\mathbf{R})$$

1. Montrer que si f est solutions, alors f vérifie l'équation différentielle
(E5) $y''+y'=0$.
2. Expliquer pourquoi cette équation différentielle d'ordre 2 sort du cadre du programme de maths appliquées en ECG2.
3. Utiliser Python pour représenter sur un même graphique les trois solutions correspondant aux valeurs de a prise dans $\left\{0,-1,\dfrac{1}{2}\right\}$ pour $x\in[0,10]$.