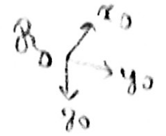
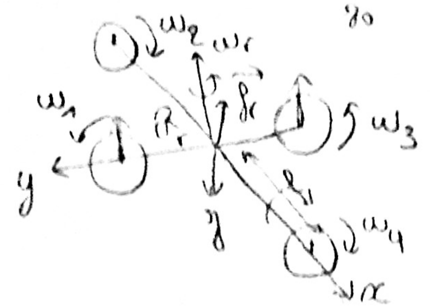
Révisions inertiel

Exo 2.7 quadrotor



on a le vecteur d'état suivant :



$$\begin{pmatrix} p \\ R \\ v_r \\ \omega_r \end{pmatrix} \quad \text{où} \begin{cases} p, v_r, \omega_r \in \mathbb{R}^3 \\ R \in SO_3 \end{cases}$$

Les équations du système sont :

$$\begin{cases} \dot{p} = R\, v_r \\ \dot{R} = R \exp(\omega_r \wedge) \\ \dot{v}_r = R^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + \frac{1}{m} f_r - \omega_r \wedge v_r \\ \dot{\omega}_r = I^{-1} (\tau_r - \omega_r \wedge (I . \omega_r)) \end{cases}$$

équations d'une centrale inertielle $\begin{cases} \dot{p} = R v_r \\ \dot{v}_r = a_r - \omega_r \wedge v_r \\ \dot{R} = R \exp(\omega_r \wedge) \end{cases}$

où
- R : matrice de changement de repère $\mathcal{R}_0$ vers $\mathcal{R}_r$
- p : position du centre de gravité du drone
- v_r : vitesse du drone dans le repère $\mathcal{R}_r$
- ω_r : vitesse de rotation du drone dans le repère $\mathcal{R}_r$
- I : matrice d'inertie du drone
- τ_r : couples engendrés par la rotation des hélices dans $\mathcal{R}_r$
- f_r : force de poussée dans $\mathcal{R}_r$
- $R^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$: poids du drone exprimé dans $\mathcal{R}_r$

On a $\tau_r = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} \tau_1 : \text{couple de rotation autour de l'axe } x \\ \tau_2 : \text{couple de rotation autour de l'axe } y \\ \tau_3 : \text{couple de rotation autour de l'axe } z \end{cases}$

$f_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau_0 \end{pmatrix}$ où τ_0 : force de poussée (thrust)

et

$$\begin{pmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta & \beta \\ -\beta l & 0 & \beta l & 0 \\ 0 & -\beta l & 0 & -\beta l \\ -\delta & \delta & -\delta & \delta \end{pmatrix}}_{=T} \begin{pmatrix} \omega_1 |\omega_1| \\ \omega_2 |\omega_2| \\ \omega_3 |\omega_3| \\ \omega_4 |\omega_4| \end{pmatrix}$$

où
- l : longueur de l'axe du centre de gravité du drone à l'hélice
- β : coefficient de portance (lift)
- δ : coefficient de traînée (drag)

De plus, avec le PFD, on a :

$$m a_r = \underbrace{\underbrace{R^T \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\mg\end{pmatrix}}_{\mathcal{R}_0}}_{\mathcal{R}_r}}_{\text{poids}} + \underbrace{\frac{1}{m}\begin{pmatrix}0\\0\\-\tau_0\end{pmatrix}}_{\text{force de poussée}}$$

Enfin, l'équation d'Euler donne :

$$I\dot{\omega}_r + \omega_r \wedge (I\omega_r) = \tau_r$$

$$\Leftrightarrow \dot{\omega}_r = I^{-1}(\tau_r - \omega_r \wedge (I\omega_r))$$

Pour contrôler l'altitude, on choisit τ_{0d} pour au moins compenser la force de gravité :

$$\tau_{0d} = \underbrace{K}_{=300}(z - z_d) \quad \text{(commande grand gain)}$$

$R_{t+dt} = R_t \cdot \exp(dt\, \omega_r \wedge)$ (Euler en rota°)

couples → vit de rota° → posi° angulaire

Chaîne fonctionnelle

$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$

① $\boxed{T.(\vec{\omega}^2)} \xrightarrow{\tau_0}$ ④

$\downarrow \tau_1, \tau_2, \tau_3$

② $\boxed{\dot{\omega}_r = I^{-1}(\tau_{1,2,3} - \omega_r \wedge (I.\omega_r))}$

$\downarrow \omega_r$

③ $\boxed{\dot{R} = R.\omega_r \wedge}$

$\downarrow R$

④ $\boxed{\dot{v}_r = R^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tau_0/m \end{pmatrix} - \omega_r \wedge v_r}$

$\downarrow$

⑤ $\boxed{\dot{p} = R v_r}$

- Comment piloter directᵗ les couples τ_1, τ_2, τ_3 ?
  Backstepping → on élimine chaq bloc de la chaîne fonctionnelle

* 1er bloc :

$$\text{①}\quad \tau_{0d},\ \tau_{1,2,3d} \longrightarrow \boxed{\sqrt{T^{-1}.\tau}} \xrightarrow{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} \text{①}\ \boxed{T(\vec{\omega}^2)} \longrightarrow \tau_0,\ \tau_1, \tau_2, \tau_3$$

* 2e bloc : ②

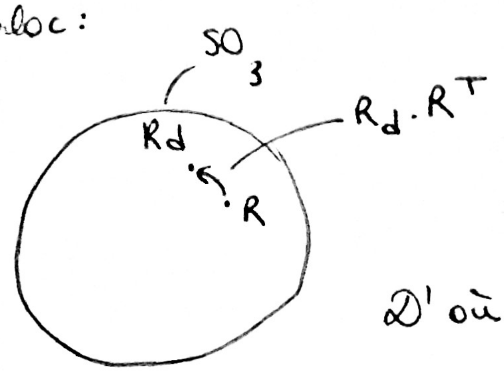
$$\tau_{1,2,3} = I\dot{\omega}_r + \omega_r \wedge I\omega_r$$

$$\tau^d_{1,2,3} = I\, K(\underbrace{\omega_r^d - \omega_r}_{=e \approx 0 \text{ si } K \text{ est grand}}) + \omega_r \wedge I\omega_r$$

K : 100 (commande grd gain)

$$\text{②}\quad \omega_{rd} \longrightarrow \boxed{\tau^d_{1,2,3} = I K(\omega_r^d - \omega_r) + \omega_r \wedge I\omega_r} \longrightarrow \tau_{1,2,3d},\ \tau_{0d}\ \text{①}$$

* 3e bloc :



$$R_{t+dt} = R_t \, e^{dt\, \omega_r \wedge}$$

$$\omega_r = ad^{-1}\left(\log\left(R_{t+dt} R_t^T\right)\right)$$

D'où $\omega_{r_d} = ad^{-1}\left(\log\left(\underbrace{R_d R^T}_{\approx I = \tilde{R}}\right)\right)$

$$R_d \longrightarrow \boxed{\omega_{r_d} = ad^{-1}\left(\log\left(R_d R^T\right)\right)} \xrightarrow{\omega_r^d} (2)$$

car $tr(\tilde{R}) = 2\cos\alpha + 1$

angle — $\alpha = \arccos\left(\dfrac{tr(\tilde{R}) - 1}{2}\right)$

vect direct de la rota — $n = \dfrac{1}{2\sin\alpha} \, ad^{-1}\left(\tilde{R} - \tilde{R}^T\right)$

→ Faire exo quadrirotor + cours ac mat de rot