RUR : Reconfigurable underwater robots

Henrique Fagundes Gasparoto   Olivier Chocron   Emmanuel Delaleau

LabSTICC
ENSTA Bretagne

IRDL
ENIB

26 janvier 2020

Première partie I

Présentation du projet RUR

Deuxième partie II

Modélisation

Plan

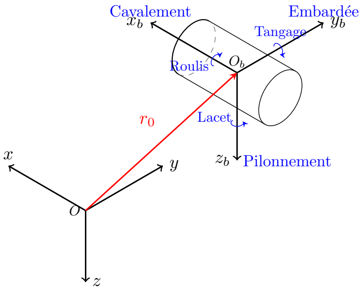
Pour analyser le comportement en 6 DDL d'un robot sous-marin, on définit deux systèmes de coordonnées :

- Le système de coordonnées ***mobile***, attaché au robot

$$R_b \quad = \quad (O_b, \vec{\imath}_b, \vec{\jmath}_b, \vec{k}_b)$$

- Le système de coordonnées ***inertiel***, attaché à la terre

$$R_0 \quad = \quad (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$$



DDL		Forces et moments	vitesse linéaire et angulaire	position et orientation
1	mouv. sur x (cavalement)	X	u	x
2	mouv. sur y (embardée)	Y	v	y
3	mouv. sur z (pilonnement)	Z	w	z
4	rotation. sur x (roulis)	K	p	ϕ
5	rotation sur y (tangage)	M	q	θ
6	rotation sur z (lacet)	N	r	ψ

Les vecteurs qui décrivent le mouvement du sous-marin en 6 DDL sont :

- Position et orientation dans R_0 :

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \quad \eta_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$$

- Vitesse linéaire et angulaire dans R_b :

$$\nu = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \\ \nu_2 \end{bmatrix}, \quad \nu_1 = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \nu_2 = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

- Efforts dans R_b :

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1 \\ \\ \boldsymbol{\tau}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}_1 = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \begin{bmatrix} K \\ M \\ N \end{bmatrix}$$

Évolution des positions en fonction des vitesses :

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \boldsymbol{J}_1(\eta_2)\nu_1 \\ \dot{\eta}_2 &= \boldsymbol{J}_2(\eta_2)\nu_2 \end{aligned}$$

Matrices de transformation : (avec c$a = \cos a$, s$a = \sin a$ et t$a = \tan a$)

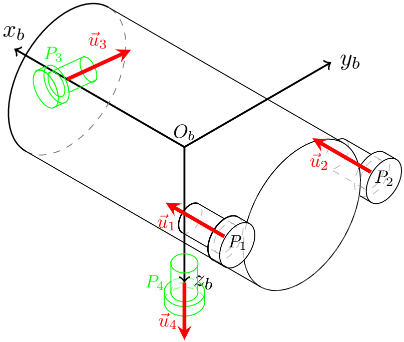
- $\boldsymbol{J}_1(\eta_2) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi + c\psi c\phi s\theta \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\theta s\theta s\psi & -c\psi s\phi + s\theta s\psi c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}$ (Euler ZYX)
- $\boldsymbol{J}_2(\eta_2) = \begin{bmatrix} 1 & s\phi t\theta & c\phi t\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & \frac{s\phi}{c\theta} & \frac{c\phi}{c\theta} \end{bmatrix}$

Modèle dynamique :

$$\boldsymbol{M}\dot{\nu} + \boldsymbol{C}(\nu)\nu + \boldsymbol{D}(\nu)\nu + \boldsymbol{G}(\eta) = \boldsymbol{\tau}$$

avec

- $\boldsymbol{M}$: Matrice de masse et d'inertie
- $\boldsymbol{C}(\nu)$: Matrice de couplage
- $\boldsymbol{D}(\nu)$: Matrice de traînée et de portance
- $\boldsymbol{G}(\eta)$: torseur de gravité et de flottaison
- $\boldsymbol{\tau}$: torseur des efforts, dépend des propulseurs et de leur positionnement



Chaque propulseur est défini par :

- Son point d'implantation : ${}^{b}P_i = \begin{bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ P_{zi} \end{bmatrix}$

- sa direction définie par le vecteur unitaire $\overrightarrow{f}_i = \begin{bmatrix} f_{xi} \\ f_{yi} \\ f_{zi} \end{bmatrix}$
- sa poussée définie par le vecteur $\overrightarrow{u}_i = \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{zi} \end{bmatrix}$

  On pose $u_i = \left\|\overrightarrow{u_i}\right\|$ et donc $\overrightarrow{u_i} = u_i \overrightarrow{f}_i$ ou encore $\overrightarrow{f}_i = \frac{1}{u_i} \overrightarrow{u}_i$
- A chaque propulseur on associe un repère orthonormé

$$\begin{aligned} R_i &= (P_i, \vec{\imath}_i, \vec{\jmath}_i, \vec{k}_i) \\ \vec{\imath}_i &= \overrightarrow{f}_i \end{aligned}$$

- Chg de coordonnées $R_i \longrightarrow R_b$: matrice notée ${}^bR_i$
- Chg de coordonnées $R_b \longrightarrow R_i$: matrice notée ${}^iR_b$
- $({}^bR_i)^{-1} = ({}^bR_i)^\top = {}^iR_b$ (matrices de rotation)

Il existe 9 types de propulseurs fixes “élémentaires” :

- 3 sont portés par les axes principaux $O_b x_b$, $O_b y_b$ et $O_b z_b$
- 6 sont contenus dans les plans principaux $x_b O_b y_b$, $x_b O_b z_b$ et $y_b O_b z_b$ et sont dirigés selon l'un des axes principaux

Famille de propulseurs fixes “élémentaires” (donnés dans R_b)

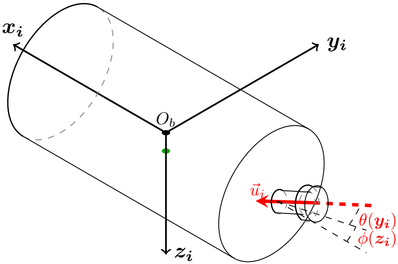
Configuration Notation	T_x	T_y	T_z	T_{yx}	T_{zx}	T_{xy}	T_{zy}	T_{xz}	T_{yz}
Position du propulseur	$\begin{bmatrix} P_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ P_y \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_x \\ 0 \\ P_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_x \\ 0 \\ P_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ 0 \end{bmatrix}$
Direction de la force	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
Moment par rapport à O_b	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -P_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} +P_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ +P_z \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -P_x \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P_y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +P_x \end{bmatrix}$

Famille de propulseurs fixes “élémentaires” (donnés dans R_b)

Configuration Notation	T_x	T_y	T_z	T_{yx}	T_{zx}	T_{xy}	T_{zy}	T_{xz}	T_{yz}
Position du propulseur	$\begin{bmatrix} P_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ P_y \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_x \\ 0 \\ P_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_x \\ 0 \\ P_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ 0 \end{bmatrix}$
Direction de la force	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
Moment par rapport à O_b	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -P_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} +P_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ +P_z \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -P_x \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P_y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +P_x \end{bmatrix}$

Remarques :

- Un AUV peut porter plusieurs propulseurs du même type situés à des endroits différents
- Les 3 premiers ne provoquent que des mouvements de translation
- Les 6 autres génèrent des mouvements de translation et de rotation couplés



Propulseur orientable selon 2 axes :

- autour de l'axe $\boldsymbol{z}_i$ selon l'angle ϕ
- autour de l'axe $\boldsymbol{y}_i$ selon l'angle θ

Expression du torseur :

$$ {}^{i}P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, \quad {}^{i}\boldsymbol{\tau} = \mathcal{B}(\phi, \theta) = \begin{bmatrix} u\,\mathrm{c}\phi\,\mathrm{c}\theta \\ u\,\mathrm{s}\phi\,\mathrm{c}\theta \\ -u\,\mathrm{s}\theta \\ -u\,\mathrm{s}\theta\,p_y - u\,\mathrm{s}\phi\,\mathrm{c}\theta\,p_z \\ u\,\mathrm{c}\phi\,\mathrm{c}\theta\,p_z + u\,\mathrm{s}\theta\,p_x \\ u\,\mathrm{s}\phi\,\mathrm{c}\theta\,p_x - u\,\mathrm{c}\phi\,\mathrm{c}\theta\,p_y \end{bmatrix} \tag{1} $$

Les variables u, ϕ, θ sont les variables de contrôle du propulseur

- Composantes de la poussée :

$$ \begin{aligned} u_x &= \mathrm{c}\phi\,\mathrm{c}\theta\,u \\ u_y &= \mathrm{s}\phi\,\mathrm{c}\theta\,u \\ u_z &= -\mathrm{s}\theta\,u \end{aligned} $$

- Réciproquement :

$$
\begin{aligned}
u &= \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \\
\phi &= \operatorname{arctan2}(u_y, u_x) \ , \qquad \phi \in]-\pi, +\pi] \\
\theta &= \arcsin\left(\frac{-u_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}\right) \ , \ \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[
\end{aligned}
$$

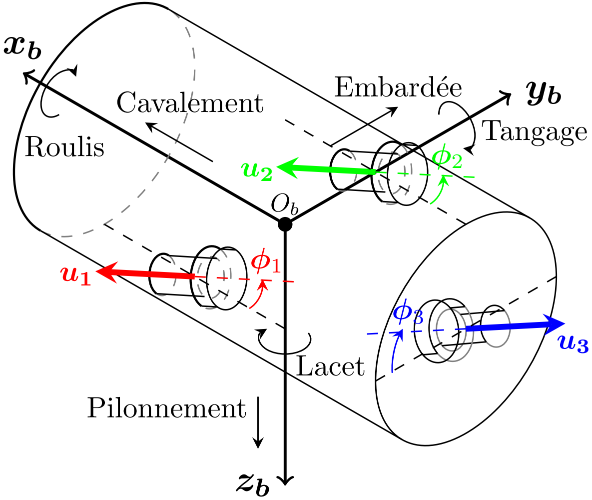
Décomposition d'un propulseur vectoriel

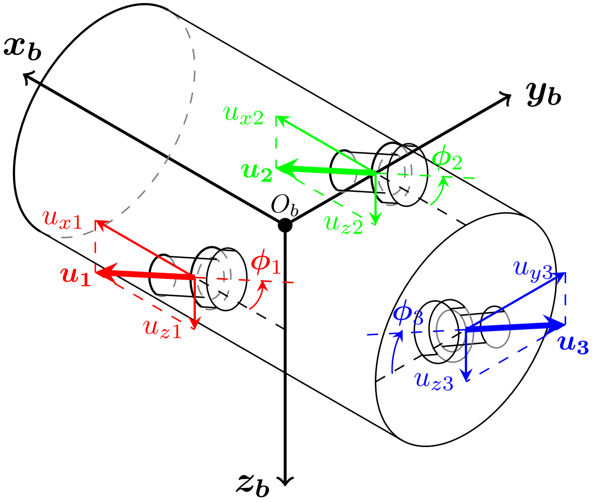
$$\boldsymbol{\tau} = \mathcal{B}(\theta,\phi) = \begin{bmatrix} u\,c\theta\,c\phi \\ u\,c\theta\,s\phi \\ -u\,s\theta \\ -u\,s\theta\,p_y - u\,c\theta s\phi\,p_z \\ u\,c\theta c\phi\,p_z + u\,s\theta\,p_x \\ u\,c\theta s\phi\,p_x - u\,c\theta c\phi\,p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ u_z p_y - u_y p_z \\ u_x p_z - u_z p_x \\ u_y p_x - u_x p_y \end{bmatrix}$$

$$= u_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p_z \\ -p_y \end{bmatrix} + u_y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -p_z \\ 0 \\ p_x \end{bmatrix} + u_z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ p_y \\ -p_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}_{\mathbf{vec}}$$

Plan


x_b
Roulis
Cavalement
Embardée
y_b
Tangage
u_2
ϕ_2
O_b
u_1
ϕ_1
ϕ_3
u_3
Lacet
Pilonnement
z_b


x_b
y_b
z_b
O_b
u_{x2}
u_2
ϕ_2
u_{z2}
u_{x1}
u_1
ϕ_1
u_{z1}
u_{y3}
ϕ_3
u_3
u_{z3}

- Position et orientation :

$$ {}^{b}P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{b}R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} $$

- Force de propulsion :

$$ {}^{1}F_1 = \begin{bmatrix} u_1 \mathrm{c}\phi_1 \\ u_1 \mathrm{s}\phi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad {}^{b}F_1 = {}^{b}R_1 \, {}^{1}F_1 = \begin{bmatrix} u_1 \mathrm{c}\phi_1 \\ 0 \\ u_1 \mathrm{s}\phi_1 \end{bmatrix} $$

- Moment de propulsion :

$$ {}^{b}M_1 = {}^{b}R_1(({}^{1}R_b \, {}^{b}P_1) \times {}^{1}F_1) \quad = \quad \begin{bmatrix} -u_1 R \mathrm{s}\phi_1 \\ 0 \\ u_1 R \mathrm{c}\phi_1 \end{bmatrix} $$

- Torseur de propulsion vectorielle :

$$^{b}\tau_1 = \begin{bmatrix} u_1 \mathrm{c}\phi_1 \\ 0 \\ u_1 \mathrm{s}\phi_1 \\ -u_1 R \mathrm{s}\phi_1 \\ 0 \\ +u_1 R \mathrm{c}\phi_1 \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} \mathrm{c}\phi_1 \\ 0 \\ \mathrm{s}\phi_1 \\ -R\mathrm{s}\phi_1 \\ 0 \\ +R\mathrm{c}\phi_1 \end{bmatrix}$$

- Décomposition en propulseurs fixes élémentaires :
  on pose $u_{x1} = u_1 \mathrm{c}\phi_1$ et $u_{z1} = u_1 \mathrm{s}\phi_1$

$$^{b}\tau_1 = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ 0 \\ u_{z1} \\ -Ru_{z1} \\ 0 \\ +Ru_{x1} \end{bmatrix} = u_{x1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ +R \end{bmatrix} + u_{z1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -R \\ 0 & 0 \\ R & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B_1}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{z1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u_{\mathrm{vec1}}}}$$

- Position et orientation :

$$ {}^{b}P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ +R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{b}R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} $$

- Force de propulsion :

$$ {}^{2}F_2 = \begin{bmatrix} u_2 \mathrm{c}\phi_2 \\ u_2 \mathrm{s}\phi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad {}^{b}F_2 = {}^{b}R_2 \, {}^{2}F_2 = \begin{bmatrix} u_2 \mathrm{c}\phi_2 \\ 0 \\ u_2 \mathrm{s}\phi_2 \end{bmatrix} $$

- Moment de propulsion :

$$ {}^{b}M_2 = {}^{b}R_2(({}^{2}R_b \, {}^{b}P_2) \times {}^{2}F_2) \quad = \quad \begin{bmatrix} +u_2 R \mathrm{s}\phi_2 \\ 0 \\ -u_2 R \mathrm{c}\phi_2 \end{bmatrix} $$

- Torseur de propulsion vectorielle :

$$ {}^{b}\tau_2 = \begin{bmatrix} u_2 \mathrm{c}\phi_2 \\ 0 \\ u_2 \mathrm{s}\phi_2 \\ +u_2 R \mathrm{s}\phi_2 \\ 0 \\ -u_2 R \mathrm{c}\phi_2 \end{bmatrix} = u_2 \begin{bmatrix} \mathrm{c}\phi_2 \\ 0 \\ \mathrm{s}\phi_2 \\ +R\mathrm{s}\phi_2 \\ 0 \\ -R\mathrm{c}\phi_2 \end{bmatrix} $$

- Décomposition en propulseurs fixes élémentaires : on pose $u_{x2} = u_2 \mathrm{c}\phi_2$ et $u_{z2} = u_2 \mathrm{s}\phi_2$

$$ {}^{b}\tau_2 = \begin{bmatrix} u_{x2} \\ 0 \\ u_{z2} \\ +Ru_{x2} \\ 0 \\ -Ru_{z2} \end{bmatrix} = u_{x2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix} + u_{z2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ +R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & +R \\ 0 & 0 \\ -R & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B_2}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{x2} \\ u_{z2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u_{\mathrm{vec2}}}} $$

- Position et orientation :

$$ {}^{b}P_3 = \begin{bmatrix} -H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{b}R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} $$

- Force de propulsion :

$$ {}^{3}F_3 = \begin{bmatrix} u_3 \mathrm{c}\phi_3 \\ u_3 \mathrm{s}\phi_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad {}^{b}F_3 = {}^{b}R_3 \, {}^{3}F_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ u_3 \mathrm{c}\phi_3 \\ u_3 \mathrm{s}\phi_3 \end{bmatrix} $$

- Moment de propulsion :

$$ {}^{b}M_3 = {}^{b}R_3(({}^{3}R_b \, {}^{b}P_3) \times {}^{3}F_3) \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 \\ +u_3 H \mathrm{s}\phi_3 \\ -u_3 H \mathrm{c}\phi_3 \end{bmatrix} $$

- Torseur de propulsion vectorielle :

$$ {}^{b}\tau_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ u_3 \mathrm{c}\phi_3 \\ u_3 \mathrm{s}\phi_3 \\ 0 \\ +u_3 H \mathrm{s}\phi_3 \\ -u_3 H \mathrm{c}\phi_3 \end{bmatrix} = u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{c}\phi_3 \\ \mathrm{s}\phi_3 \\ 0 \\ +H \mathrm{s}\phi_3 \\ -H \mathrm{c}\phi_3 \end{bmatrix} $$

- Décomposition en propulseurs fixes élémentaires :
on pose $u_{y3} = u_3 \mathrm{c}\phi_3$ et $u_{z3} = u_3 \mathrm{s}\phi_3$

$$ {}^{b}\tau_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ u_{y3} \\ u_{z3} \\ 0 \\ +H u_{z3} \\ -H u_{y3} \end{bmatrix} = u_{y3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -H \end{bmatrix} + u_{z3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ +H \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & +H \\ -H & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B_3}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{y3} \\ u_{z3} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u_{\mathrm{vec3}}}} $$

$$
\begin{aligned}
{}^b\tau_{123} &= {}^b\tau_1 + {}^b\tau_2 + {}^b\tau_3 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -R \\ 0 & 0 \\ +R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{z1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & +R \\ 0 & 0 \\ -R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x2} \\ u_{z2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & +H \\ -H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{y3} \\ u_{z3} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ou encore

$$
{}^b\tau_{123} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -R & 0 & +R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +H \\ +R & 0 & -R & 0 & -H & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{z1} \\ u_{x2} \\ u_{z2} \\ u_{y3} \\ u_{z3} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}_{\mathbf{vec}}}
$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -R & 0 & +R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +H \\ +R & 0 & -R & 0 & -H & 0 \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{B}$ *matrice de configuration de poussée* ou Trust configuration matrix (TCM) en anglais
- Chacune des lignes de $\boldsymbol{B}$ correspond correspond à un DDL (dans le repère $\mathcal{R}_b$)
- Chacune des colonnes de $\boldsymbol{B}$ correspond à un propulseur élémentaire

En faisant des opérations uniquement sur les colonnes de B (Algorithme d'élimination de Gauss) on montre :

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{B} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\text{R}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & -H & \boxed{\text{-2H}} & 0 \\ R & -H & 0 & 0 & 0 & \boxed{\text{-2R}} \end{bmatrix} = 6 \quad (R \neq 0, H \neq 0)$$

B est une matrice carré de rang plein donc elle est inversible

$${}^{b}\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{123}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{\mathbf{vec}} \quad \text{donc} \quad \boldsymbol{u}_{\mathbf{vec}} = \boldsymbol{B}^{-1}\,{}^{b}\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{123}}$$

Tous les degrés de liberté sont actionnés indépendamment

⇒ Ceci confirme que le robot RUR est holonome

Pour inverser la matrice B de manière “pas trop coûteuse” on peut faire des opérations sur les équations ${}^b\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{123}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{\mathbf{vec}}$ (opérations sur les lignes de B)

$$\begin{array}{rcl} u_{x1} + u_{x_2} & = & X \\ u_{y3} & = & Y \\ u_{z1} + u_{z2} + u_{z3} & = & Z \\ -Ru_{z1} + Ru_{z2} & = & K \\ Hu_{z3} & = & M \\ Ru_{x1} - Ru_{x2} - Hu_{y3} & = & N \end{array} \iff \begin{array}{rcl} u_{x1} & = & (X + HY/R + N/R)/2 \\ u_{z1} & = & (Z - K/R - M/H)/2 \\ u_{x2} & = & (X - HY/R - N/R)/2 \\ u_{z2} & = & (Z + K/R - M/H)/2 \\ u_{y3} & = & Y \\ u_{z3} & = & M/H \end{array}$$

$$\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}_{\mathbf{vec}} = {}^b\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{123}} \iff \boldsymbol{u}_{\mathbf{vec}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{123}}$$

Détermination les poussées cartésiennes $u_{x1}, u_{z1}, \ldots, u_{y3}, u_{z3}$
On obtient les poussées et angles des propulseurs vectoriels à l'aide des formules :

$$i = 1,2 \quad \left.\begin{array}{rcl} u_{xi} & = & u_i \mathrm{c}\phi_i \\ u_{zi} & = & u_i \mathrm{s}\phi_i \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u_i & = & \sqrt{u_{xi}^2 + u_{zi}^2} \\ \phi_i & = & \mathrm{arctan2}(u_{zi}, u_{xi}) \end{array}\right.$$

$$i = 3 \quad \left.\begin{array}{rcl} u_{x3} & = & u_3 \mathrm{c}\phi_3 \\ u_{z3} & = & u_3 \mathrm{s}\phi_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} u_3 & = & \sqrt{u_{x3}^2 + u_{z3}^2} \\ \phi_3 & = & \mathrm{arctan2}(u_{z3}, u_{x3}) \end{array}\right.$$

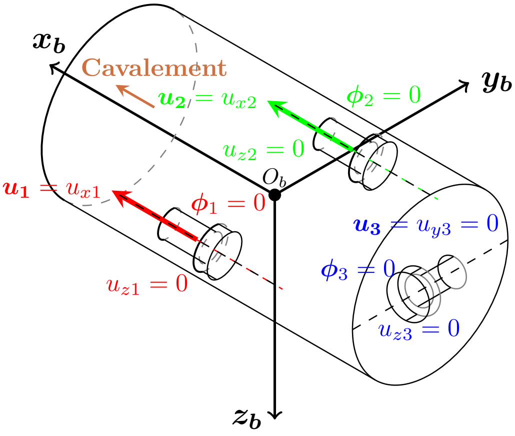
Des expressions de u_{x1}, u_{z1}, …, u_{y3}, u_{z3} on tire l'inverse de la matrice $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{H}{2R} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2R} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2R} & -\frac{1}{2H} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{H}{2R} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2R} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2R} & -\frac{1}{2H} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H} & 0 \end{bmatrix}$$

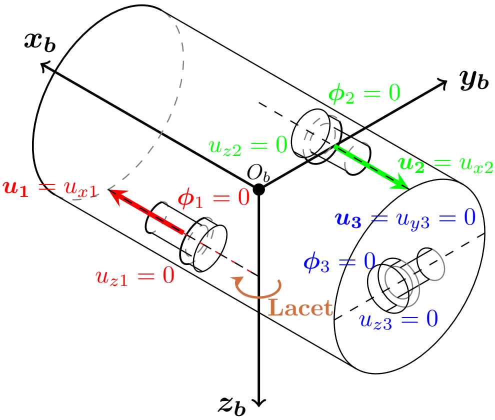
Plan

$Y = Z = K = M = N = 0,\ X \neq 0$

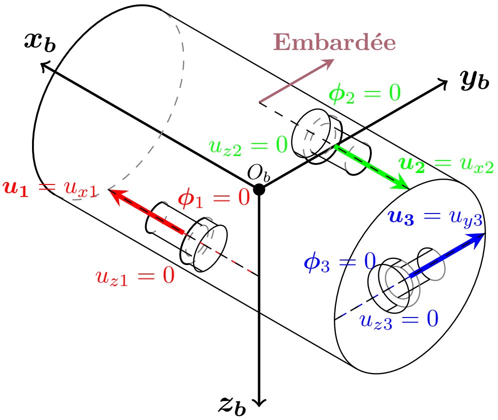
$\Rightarrow u_{x1} = \dfrac{X}{2}, u_{x2} = \dfrac{X}{2}$ (les autres nuls)



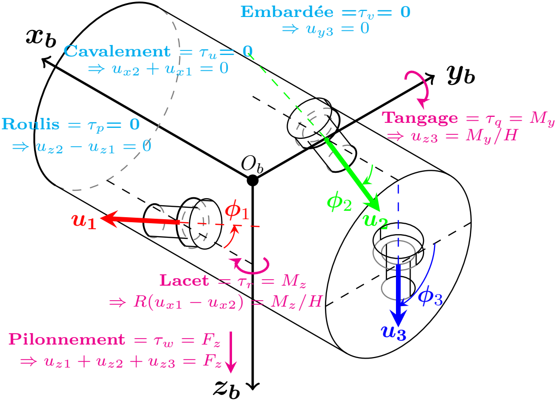
$X = Y = Z = K = M = 0,\ N \neq 0$
$\Rightarrow u_{x1} = \dfrac{N}{2R}, u_{x2} = -\dfrac{N}{2R}$ (les autres nuls)



$$X = Z = K = M = N = 0,\ Y \neq 0$$
$$\Rightarrow u_{x1} = \frac{HY}{2R}, u_{x2} = -\frac{HY}{2R}, u_{y3} = Y \text{ (les autres nuls)}$$



$$X = Y = K = 0,\ Z \neq 0, M \neq 0, N \neq 0$$
$$\Rightarrow u_{x1} = \frac{N}{2R}, u_{z1} = \frac{Z - \frac{M}{H}}{2}, u_{x2} = -\frac{N}{2R}, u_{z2} = \frac{Z - \frac{M}{H}}{2}, u_{y3} = 0,\ u_{z3} = \frac{M}{H}$$



Troisième partie III

Simulation

Quatrième partie IV

Réalisation