Calcul inertiel
TD08

Exo 19 :

2) Les équations d'état d'un robot doté d'une IMU sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{p} = R_3 v_3 \quad (1) \\ \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tan\theta \sin\varphi & \tan\theta\cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \frac{\sin\varphi}{\cos\theta} & \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} \end{pmatrix} \cdot \omega_3 \quad (2) \\ \dot{v}_3 = R_3^T g(p) + a_3^{mes} - \omega_3 \wedge v_3 \quad (3) \end{cases}$$

Or, $\dot{R}_3 R_3^T = Ad(\omega_0)$

$$R_3^T \dot{R}_3 = Ad(R_3^T \omega_0) = Ad(\omega_3)$$

Donc (2) $\Leftrightarrow$ $\dot{R}_3 = R_3 Ad(\omega_3)$

3) On a :

$$\xrightarrow{u_{\omega_3}} \quad \dot{\omega}_3 = -\omega_3 + R_3 \omega_E + u_{\omega_3} \quad \xrightarrow{\omega_3} \quad \dot{p} = R_3 v_3$$

$$\dot{R}_3 = R_3 (\omega_3 \wedge)$$

$$\xrightarrow{u_{a_3}} \quad a_3 = R_3^T(\omega_E \wedge p) - v_3 + R_3^T(\omega_E \wedge (\omega_E \wedge p) - g(p)) + u_{a_3} \quad \xrightarrow{a_3} \quad \dot{v}_3 = a_3 + R_3^T g(p) - \omega_3 \wedge v_3$$

En effet :

- $\dot{\omega}_3 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{frottements} \\ \text{fluides}}}{-\omega_3} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{force} \\ \text{d'entraînement} \\ \text{(rotation Terre)}}}{R_3 \omega_E} + u_{\omega_3}$ ↖ propulseurs robot

- $a_3 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{force d'entraînement} \\ \text{(rotation Terre)}}}{R_3^T(\omega_E \wedge p)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{frottements} \\ \text{fluides}}}{- v_3} + \underbrace{R_3^T(\omega_E \wedge (\omega_E \wedge p) - g(p))}_{\text{poussée d'Archimède relative}} + u_{a_3}$ ↖ propulseurs robot

vitesse du fluide (eau) $v_f = \omega_E \wedge p$ dans R_0.

$$\dot{v}_f = \omega_E \wedge \dot{p} + \underset{\overset{\parallel}{0}}{\dot{\omega}_E} \wedge p$$

$$= \omega_E \wedge v_f = \omega_E \wedge (\omega_E \wedge p)$$

Exo 20 :

1) On a :

$$\begin{cases} \dot{p} = R(\varphi,\theta,\psi)\, v_r \\ \dot{v}_r = a_r - w_r \wedge v_r \\ \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tan\theta\sin\varphi & \tan\theta\cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \frac{\sin\varphi}{\cos\theta} & \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} \end{pmatrix} w_r \end{cases}$$

Or, $v_r = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w_r = \begin{pmatrix} w_{rx} \\ w_{ry} \\ w_{rz} \end{pmatrix}$. Alors $a_r = \begin{pmatrix} a_{rx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{cases} \dot{p} = R(\varphi,\theta,\psi) \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dot{v}_r = a_{rx} \\ \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tan\theta\sin\varphi & \tan\theta\cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \frac{\sin\varphi}{\cos\theta} & \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} \end{pmatrix} w_r \end{cases}$$

2) En appliquant de PFD, on a :

$f_x = (m + m_a)\, a_{rx}$ où $\begin{cases} m : \text{masse du AUV} \\ m_a : \text{masse ajoutée due à l'eau déplacée par l'AUV} \end{cases}$

$m_a = k_a\, \rho_{eau} \times V_{AUV}$

Or, $k_a \approx 1$ pour un cyclindre et $\rho_{AUV} = \rho_{eau}$ dans l'énoncé donc

$m_a = \rho_{AUV} \times V_{AUV} = m$

Donc $f_x = 2 m a_{rx}$

De plus, $f_x = \underbrace{k_p u_0^2}_{\text{force de propulsion}} - \underbrace{\frac{1}{2} C_x S_x \rho_{eau} v^2}_{\text{force de frottements fluides}}$

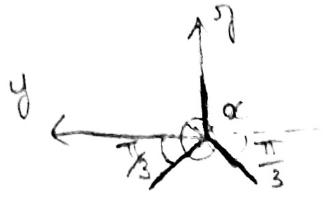
D'où $a_{rx} = \frac{f_x}{2m} = \underbrace{\frac{k_p}{2m}}_{= p_1} u_0^2 - \underbrace{\frac{1}{4m} C_x S_x \rho_{eau}}_{= p_2} v^2$

$$\boxed{a_{rx} = p_1 u_0^2 - p_2 v^2}$$

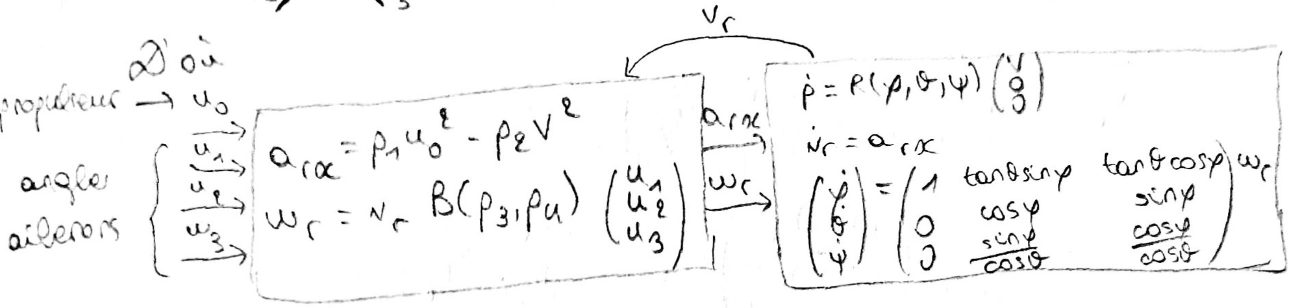
En négligeant la traînée des ailerons, on peut négliger l'inertie de l'AUV et on a alors une relation du type :

$$\omega_r = k\, v_r\, u$$

$$\omega_r = \underbrace{v_r \begin{pmatrix} p_3 & 0 & 0 \\ 0 & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ -1 & \cos\frac{\pi}{3} & -\cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}}_{k = B(p_3, p_4)} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{= u}$$



D'où



3) On a :

- $\overline{a_{rx}} = p_1 u_0^2 - p_2 v^2$

  Donc $u_0 = \sqrt{\dfrac{\overline{a_{rx}} + p_2 v^2}{p_1}}$

- $\overline{\omega_r} = v_r B(p_3, p_4) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

  Donc $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{v_r} B^{-1}(p_3, p_4)\, \overline{\omega_r}$

Exo 21 :

1) On a : $x(t) = r(q(t))$

Alors $\dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{dr(q(t))}{dt} = \dfrac{dq(t)}{dt} \times \left(\dfrac{dr}{dq}(q(t)) \right)$

D'où $\dot{x} = \dot{q} \times \dfrac{dr}{dq}(q)$

Or, $\dfrac{dr}{dq}(q) = J(q)$

$$J(q) = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \hspace{5em} j \\ \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial r_1}{\partial q_1} & & \frac{\partial r_1}{\partial q_n} \\ & \frac{\partial r_i}{\partial q_j} & \\ \frac{\partial r_m}{\partial q_1} & & \frac{\partial r_m}{\partial q_n} \end{array} \right) \end{array} \Big] m$$

$$\hspace{8em} n$$

Donc :

$$\forall i \in [\![1, m]\!] \quad \dot{x}_i = \frac{dr_i}{dq}\dot{q} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

$$\ddot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)}\dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\ddot{q}_j\right]$$

$$= \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k$$

$$\ddot{x}_i = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k \dot{q}_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\ddot{q}_j\right)$$

$$\ddot{x}_i = \underbrace{\dot{q}^T H_i \dot{q}}_{\substack{\text{Hessian} \\ h(q,\dot{q})}} + \underbrace{\frac{dr_k}{dq}}_{\substack{\text{Jacobian} \\ J(q)}}\ddot{q}$$

D'où $\boxed{\ddot{x} = h(q,\dot{q}) + J(q)\ddot{q}}$ où $\begin{cases} q \in \mathbb{R}^2 \\ x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$

2) Pour avoir des accélérations $\ddot{x}$ qui permettent de rester à la surface de la variété x, on doit choisir $\ddot{q}$ tel que :

$$\ddot{q} = \text{argmin} \; \| \underbrace{J\ddot{q} + h}_{= \ddot{x}} - u \|^2 = (J^T J)^{-1} J^T (u - h) \quad \text{(moindres carrés)}$$

3) Si $u = 0$, on a un mouvement rectiligne uniforme à la surface de la variété (qui est courbe). Ce mouvement est un géodesic.

Alors $\begin{cases} \ddot{q} = -(J^T J)^{-1} J^T h \\ q(0) = q_0 \\ \dot{q}(0) = \dot{q}_0 \\ x(t) = r(q(t)) \end{cases}$

Pour simuler la trajectoire sur la variété, on a :

$$\forall i \in [\![1, m]\!] \quad \ddot{x}_i = \dot{q}^T H_i \dot{q} + \frac{dr_i}{dq} \ddot{q}$$

$$\text{où } \ddot{q} = \sum_{j,k} C^i_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

symbole de Christoffel du 2e ordre

4) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r(q_1, q_2)$