1

OLIVEIRA
Estelle
M1-CHPS

TP Techniques de Modélisation

I - Introduction

L'objectif de ce TP est de résoudre analytiquement l'EDP suivante :

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) && \forall x \in]0,1[\ ,\ \forall t>0. \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 && \forall t>0 \\ u(x,0) &= f(x) && \forall x \in]0,1[\end{aligned}$$

On proposera par la suite 3 schémas numérique :

- Euler explicite
- Euler implicite
- Crank - Nicholson

On identifiera leur stabilité, puis grâce à une implémentation sur python on pourra déterminer les avantages et inconvénients de chaque schéma numérique.

1. Solution analytique

a) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

On résout par la méthode des séparations de variable.

$$X(x)\,T'(t) = X''(x)\,T(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \qquad \text{car } x \text{ et } t \text{ sont indépendantes}$$

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$

2

Conditions initiales:

$u(0,t) = u(1,t) = 0$

$X(0)\,T(t) = 0 \longrightarrow X(0) = 0$ ou $T(t) = 0$

$X(1)\,T(t) = 0 \longrightarrow X(1) = 0$ ou $T(t) = 0$

conduit à $u=0$

équation caractéristique associée à l'EDP : $r^2 + \lambda = 0 \iff r^2 = -\lambda$.

Cas 1 : $\lambda < 0$

$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ X(1) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{cases}$$

$C_1 = -C_2$

$C_1\left(e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}\right) = 0$

$\hookrightarrow C_1 = 0$ ou $e^{\sqrt{-\lambda}} = e^{-\sqrt{-\lambda}}$

$\iff +\sqrt{-\lambda} = -\sqrt{-\lambda}$

IMPOSSIBLE

conduit à $u=0$.

Cas 2 : $\lambda = 0$ $\quad r_0 = 0$

$X(x) = (C_1 x + C_2)\,e^{r_0 x} = C_1 x + C_2$

$$\begin{cases} X(0) = C_2 = 0 \\ X(1) = C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0$$

$\hookrightarrow X(x) = 0$ donc $u = 0$

Cas 3 : $\lambda > 0$

$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\,x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\,x)$

$X(0) = C_1 = 0$

$X(1) = \underbrace{C_1 \cos(\sqrt{\lambda})}_{=0} + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}) = 0$

$\Downarrow$

$C_2 = 0$ ou $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$

$\iff \sqrt{\lambda} = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\iff \lambda = (k\pi)^2$

Donc $\lambda = (k\pi)^2$ pour une solution non triviale.

3

$u(x,0) = \sin(2\pi x)$ avec $x \in]0,1[$

$X_k = a_k \sin(\sqrt{\lambda}\, x) = a_k \sin(k\pi x)$

$T_k' + (k\pi)^2 T_k = 0 \Rightarrow T_k = b_k e^{-(k\pi)^2 t}$

$U_k = X_k T_k = a_k b_k \sin(k\pi x) e^{-(k\pi)^2 t} = c_k \sin(k\pi x) e^{-(k\pi)^2 t}$

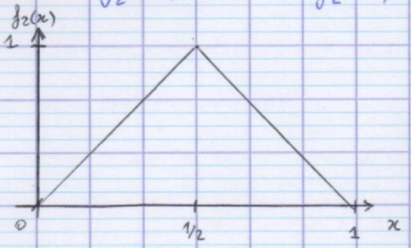
$u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin(k\pi x) = \sin(2\pi k)$

$\hookrightarrow c_k = 2\int_0^1 \sin(2\pi x) \sin(k\pi x)$

$c_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc $u(x,t) = \sin(2\pi x) e^{-(k\pi)^2 t}$

b) $u(x,0) = f_2(x)$ $f_2(x) = \begin{cases} 2x & x \in]0, 1/2[\\ 2(1-x) & x \in]1/2, 1[\end{cases}$



fonction triangle.

$X_k = a_k \sin(\sqrt{\lambda}\, x) = a_k \sin(k\pi x)$

$T'_k + (k\pi)^2 T_k = 0 \Rightarrow T_k = b_k e^{-(k\pi)^2 t}$

$U_k = X_k T_k = a_k b_k \sin(k\pi x) e^{-(k\pi)^2 t}$

$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin(k\pi x) e^{-(k\pi)^2 t}$

$u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin(k\pi x) = f_2(x)$

Donc $c_k = 2\int_0^1 f_2(x) \sin(k\pi x)\, dx$

Analysons : $I = \int_0^1 f_2(x) \sin(k\pi x)\, dx$

$$I = \int_0^{1/2} 2x \sin(k\pi x)\, dx + \int_{1/2}^1 2(1-x) \sin(k\pi x)\, dx$$

Résolution par intégration par parties : $\int u v' = \left.uv\right] - \int u'v$

- $$2\int_0^{1/2} x \sin(k\pi x)\, dx = 2\left\{ \left[\frac{-x\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{-\cos(k\pi x)}{k\pi}\, dx \right\}$$
$$= 2\left\{ \left[\frac{-x\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_0^{1/2} + \left[\frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\right]_0^{1/2} \right\}$$
$$= -\frac{\cos(k\pi/2)}{k\pi} + \frac{2\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2}$$

- $$2\int_{1/2}^1 (1-x) \sin(k\pi x)\, dx = 2\left\{ \left[\frac{-(1-x)\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 \frac{-1 * -\cos(k\pi x)}{k\pi}\, dx \right\}$$
$$= 2\left\{ \left[\frac{(x-1)\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_{1/2}^1 - \left[\frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\right]_{1/2}^1 \right\}$$
$$= -2\,\frac{(-1/2)\cos(k\pi/2)}{k\pi} - \frac{2\sin(k\pi)}{(k\pi)^2} + \frac{2\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2}$$

$$I = \cancel{-\frac{\cos(k\pi/2)}{k\pi}} + \frac{2\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2} + \cancel{\frac{\cos(k\pi/2)}{k\pi}} - \underbrace{\frac{2\sin(k\pi)}{(k\pi)^2}}_{=0 \text{ car } k\in\mathbb{Z}} + \frac{2\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{4\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2}$$

Donc $c_k = 2I = \frac{8\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2}$

Ainsi, $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} 8\,\frac{\sin(k\pi/2)}{(k\pi)^2} \sin(k\pi x)\, e^{-(k\pi)^2 t}$

2. Solution numérique : schéma explicite

a) $$u_t \underset{\Delta t \to 0}{=} \frac{u(x, t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} + o(\Delta t)$$ temps ordre 1

$$u_{xx} \underset{\Delta x \to 0}{=} \frac{u(x+\Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x, t)}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2)$$ espace ordre 2

On propose le schéma numérique suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

b) Analysons la stabilité de ce schéma :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)}{\Delta x^2} = 0$$

Par l'hypothèse de Fourier, on remplace en posant :

$$\hat{u}_j^n = \hat{U}_n \, e^{i(kj\Delta x - wn\Delta t)}$$

$$\hat{u}_j^{n+1} = \hat{U}_{n+1} \, e^{i(kj\Delta x - w(n+1)\Delta t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{U}_{n+1} e^{i(kj\Delta x - w(n+1)\Delta t)} - \hat{U}_n e^{i(kj\Delta x - wn\Delta t)}}{\Delta t}$$

$$- \frac{\hat{U}_n e^{i(k(j+1)\Delta x - wn\Delta t)} - 2\hat{U}_n e^{i(kj\Delta x - wn\Delta t)} + \hat{U}_n e^{i(k(j-1)\Delta x - wn\Delta t)}}{\Delta x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{e^{i(kj\Delta x - wn\Delta t)}} \frac{\left[\hat{U}_{n+1} e^{-iw\Delta t} - \hat{U}_n\right]}{\Delta t} - \cancel{e^{i(kj\Delta x - wn\Delta t)}} \frac{\left[\hat{U}_n e^{ik\Delta x} - 2\hat{U}_n + \hat{U}_n e^{-ik\Delta x}\right]}{\Delta x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{U}_{n+1} \, e^{-iw\Delta t}}{\Delta t} = \hat{U}_n \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{e^{ik\Delta x}}{\Delta x^2} - \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{e^{-ik\Delta x}}{\Delta x^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{U}_{n+1}}{\hat{U}_n} = e^{iw\Delta t} \left(1 + \frac{e^{ik\Delta x}}{\Delta x^2}\Delta t - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{e^{-ik\Delta x}}{\Delta x^2}\Delta t \right)$$

$\| e^{i\omega\Delta t} \| = 1$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\hat{U}_{n+1}}{\hat{U}_n} \right\| = \left\| \left(1 + \frac{e^{ik\Delta x}}{\Delta x^2}\Delta t - 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{e^{-ik\Delta x}}{\Delta x^2}\Delta t \right) e^{i\omega\Delta t} \right\|$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\hat{U}_{n+1}}{\hat{U}_n} \right\| = \left\| \left(1 + \frac{e^{ik\Delta x}}{\Delta x^2}\Delta t - 2\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{e^{-ik\Delta x}}{\Delta x^2}\Delta t \right) \right\|$$

$$\rightarrow \quad 1 - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{e^{ik\Delta x}\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{e^{-ik\Delta x}\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left[e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}\cos(k\Delta x)$$

Il faut que $\left| 1 - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}\cos(k\Delta x) \right| \leq 1$

$$\Rightarrow \left[1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}\left(\cos(k\Delta x) - 1\right) \right]_{min} = 1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}(-1-1) = 1 - \frac{4\Delta t}{\Delta x^2} \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{4\Delta t}{\Delta x^2} \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1/2$$ condition de stabilité !

c) Matriciellement :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_j^{n+1}}{\Delta t} = \frac{U_{j+1}^n}{\Delta x^2} - \frac{2U_j^n}{\Delta x^2} + \frac{U_j^n}{\Delta t} + \frac{U_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\Leftrightarrow U_j^{n+1} = U_{j+1}^n \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2U_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + U_j^n + \frac{U_{j-1}^n \Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\Leftrightarrow U_j^{n+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} U_{j+1}^n + \left(1 - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}\right) U_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} U_{j-1}^n$$

Posons $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

$$\Rightarrow U^{n+1} = \begin{pmatrix} 1-2r & r & 0 \\ r & 1-2r & r \\ 0 & r & 1-2r \end{pmatrix} U^n = \left[I + r \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right] U^n$$

3. Solution numérique : schéma implicite

a) $$u_t \underset{\Delta t \to 0}{=} \frac{u(x, t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$u_{xx} \underset{\Delta x \to 0}{=} \frac{u(x+\Delta x, t+\Delta t) - 2u(x, t+\Delta t) + u(x-\Delta x, t+\Delta t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

On propose le schéma numérique suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

b) Analysons la stabilité de ce schéma :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1})}{\Delta x^2} = 0$$

Par l'hypothèse de Fourier, on remplace en posant :

$$\hat{u}_j^n = \hat{u}_n \, e^{i(kj\Delta x - \omega n \Delta t)}$$
$$\hat{u}_j^{n+1} = \hat{u}_{n+1} \, e^{i(kj\Delta x - \omega(n+1)\Delta t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{u}_{n+1} e^{i(kj\Delta x - \omega(n+1)\Delta t)} - \hat{u}_n e^{i(kj\Delta x - \omega n \Delta t)}}{\Delta t} - \frac{\left[\hat{u}_{n+1} e^{i(k(j+1)\Delta x - \omega(n+1)\Delta t)} - 2\hat{u}_{n+1} e^{i(kj\Delta x - \omega(n+1)\Delta t)} + \hat{u}_{n+1} e^{i(k(j-1)\Delta x - \omega(n+1)\Delta t)}\right]}{\Delta x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{e^{i(kj\Delta x - \omega(n+1)\Delta t)}} \frac{\left[\hat{u}_{n+1} - \hat{u}_n e^{i\omega\Delta t}\right]}{\Delta t} - \cancel{e^{i(kj\Delta x - \omega(n+1)\Delta t)}} \frac{\left[\hat{u}_{n+1} e^{ik\Delta x} - 2\hat{u}_{n+1} + \hat{u}_{n+1} e^{-ik\Delta x}\right]}{\Delta x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{u}_{n+1} - \hat{u}_n e^{i\omega\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\hat{u}_{n+1} e^{ik\Delta x} - 2\hat{u}_{n+1} + \hat{u}_{n+1} e^{-ik\Delta x}}{\Delta x^2}$$

$$\Rightarrow \hat{u}_{n+1}\left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{e^{ik\Delta x}}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta x^2} - \frac{e^{-ik\Delta x}}{\Delta x^2}\right] = \hat{u}_n \frac{e^{i\omega\Delta t}}{\Delta t}$$

8

$$\Rightarrow \frac{\hat{U}_{n+1}}{\hat{U}_n} = \frac{e^{i\omega\Delta t}}{1 - \frac{\Delta t\, e^{ik\Delta x}}{\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t\, e^{-ik\Delta x}}{\Delta x^2}}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\hat{U}_{n+1}}{\hat{U}_n} \right\| = \left\| \frac{1}{1 - \frac{\Delta t\, e^{ik\Delta x}}{\Delta x^2} + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{\Delta t\, e^{-ik\Delta x}}{\Delta x^2}} \right\|$$

$$\longrightarrow \frac{1}{1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}\cos(k\Delta x)} = \frac{1}{1 - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}\left[\cos(k\Delta x) - 1\right]}$$

On cherche à majorer le résultat ;

$$-2 \leq \cos(k\Delta x) - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\Delta t}{\Delta x^2} \geq -\frac{2\Delta t}{\Delta x^2}\left[\cos(k\Delta x) - 1\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{4\Delta t}{\Delta x^2} \geq 1 - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}\left[\cos(k\Delta x) - 1\right] \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + \frac{4\Delta t}{\Delta x^2}} \leq \frac{1}{1 - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}\left[\cos(k\Delta x) - 1\right]} \leq 1$$

Ainsi :

$$\left| \frac{1}{1 - \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}\left[\cos(k\Delta x) - 1\right]} \right| \leq 1 \qquad \text{Toujours stable !}$$

c) Matriciellement :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_j^{n+1}}{\Delta t} - \frac{U_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{2U_j^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{U_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = \frac{U_j^n}{\Delta t}$$

$$\Leftrightarrow U_j^{n+1} + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - U_{j+1}^{n+1}\frac{\Delta t}{\Delta x^2} = U_j^n$$

Posons $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

$$\Rightarrow U^n = \begin{pmatrix} 1+2r & -r & 0 \\ -r & 1+2r & -r \\ 0 & -r & 1+2r \end{pmatrix} U^{n+1} = \left[I - r \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right] U^{n+1}$$

4. Solution numérique : schéma de Crank - Nicholson

a) En faisant la moyenne des 2 schémas, on a :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta x^2}\left[U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right]$$

b) Calculons l'ordre de ce schéma :

$$* \; U_{j\pm1}^{n+1} = u(x\pm\Delta x, t+\Delta t) \underset{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta t\to 0}}{=} u(x,t) \pm u_x \Delta x + u_t \Delta t + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx} \pm \Delta x \Delta t \, u_{xt} + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt} + \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx} \pm \frac{\Delta x^2 \Delta t}{2} u_{xxt} + \frac{\Delta x \Delta t^2}{2} u_{xtt} + \frac{\Delta t^3}{6} u_{ttt} + O(\Delta x^4 + \Delta t^3 + \Delta x^2 \Delta t^2)$$

$$* \; U_j^{n+1} = u(x, t+\Delta t) \underset{\Delta t\to 0}{=} u(x,t) + u_t \Delta t + O(\Delta t^2)$$

$$* \; U_{j\pm1}^n = u(x\pm\Delta x, t) \underset{\Delta x\to 0}{=} u(x,t) \pm \partial_x u \, \Delta x + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx} \pm \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{24} u_{xxxx} + O(\Delta x^4)$$

$$U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} = \cancel{u(x,t)} + \cancel{u_x \Delta x} + \cancel{u_t \Delta t} + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx} + \cancel{\Delta x \Delta t \, u_{xt}} + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt} + \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx} + \cancel{\frac{\Delta x^2 \Delta t}{2} u_{xxt}} + \frac{\Delta x \Delta t^2}{2} u_{xtt} + \frac{\Delta t^3}{6} u_{ttt} + O(\Delta x^4 + \Delta t^3 + \Delta x^2 \Delta t^2)$$
$$- \cancel{2u(x,t)} - \cancel{2u_t \Delta t} - 2\,O(\Delta t)$$
$$+ \cancel{u(x,t)} - \cancel{\partial_x u \, \Delta x} + \cancel{\partial_t u \, \Delta t} + \frac{\Delta x^2}{2} \partial^2_{xx} u - \cancel{\Delta x \Delta t \, u_{xt}} + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt} + \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx} - \cancel{\frac{\Delta x^2 \Delta t}{2} u_{xxt}} + \frac{\Delta x \Delta t^2}{2} u_{xtt} + \frac{\Delta t^3}{6} u_{ttt} + O(\Delta x^4 + \Delta t^3 + \Delta x^2 \Delta t^2)$$

$$\Rightarrow \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = u_{xx} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} u_{tt} + \frac{\Delta x}{3} u_{xxx} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x} u_{xtt} + \frac{\Delta t^3}{3\Delta x^2} u_{ttt} + O(\Delta x^2 + \Delta t^3)$$

$$U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n = \cancel{u(x,t)} + \cancel{u_x \Delta x} + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx} + \cancel{\frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx}} + \frac{\Delta x^4}{24} u_{xxxx} + O(\Delta x^4) + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx} + \cancel{u(x,t)} - \cancel{2u(x,t)} - \cancel{u_x \Delta x} - \cancel{\frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx}} + \frac{\Delta x^4}{24} u_{xxxx} + O(\Delta x^4)$$

$$\Rightarrow \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{\Delta x^2} = u_{xx} + \frac{\Delta x^2}{12} u_{xxxx} + O(\Delta x^2)$$

Ainsi $\rightarrow \frac{1}{2}\left(U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right)$

$$= \partial_{xx}^2 u + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} u_{tt} + \frac{\Delta x}{6} u_{xxx} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x} u_{xtt} + \frac{\Delta t^3}{3\Delta x^2} u_{ttt} + \frac{\Delta x^2}{12} u_{xxxx}$$
$$+ O(\Delta x^2) + O(\Delta t^3)$$

$$\rightarrow \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = u_{t\,j}^{\,n} + \frac{\Delta t}{2} u_{tt} + O(\Delta t^2) + \frac{\Delta t^2}{6} u_{ttt}$$

Donc $\quad u_{t\,j}^{\,n} + \frac{\Delta t}{2} u_{tt} + \frac{\Delta t^2}{6} u_{ttt} + O(\Delta t^2)$

$$= \partial_{xx}^2 u + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} u_{tt} + \frac{\Delta x}{6} u_{xxx} + \frac{\Delta t^2}{\Delta x} u_{xtt} + \frac{\Delta t^3}{3\Delta x^2} u_{ttt}$$
$$+ \frac{\Delta x^2}{12} u_{xxxx} + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^3)$$

Le schéma est d'ordre 2 en temps et d'ordre 2 en espace.

$\hookrightarrow O(\Delta x^2),\ O(\Delta t^2)$.

c) Analysons la stabilité de ce schéma :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta x^2}\left[U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{2\Delta x^2}\left[U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right] = 0$$

Par l'hypothèse de Fourier, on remplace en posant :

$$\hat{U}_j^n = \hat{U}_n\, e^{i(kj\Delta x - wn\Delta t)}$$
$$\hat{U}_j^{n+1} = \hat{U}_{n+1}\, e^{i(kj\Delta x - w(n+1)\Delta t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{U}_{n+1}\, e^{i(kj\Delta x - w(n+1)\Delta t)} - \hat{U}_n\, e^{i(kj\Delta x - wn\Delta t)}}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta x^2}\Big[\hat{U}_{n+1}\, e^{i(k(j+1)\Delta x - w(n+1)\Delta t)}$$
$$- 2\hat{U}_{n+1}\, e^{i(kj\Delta x - w(n+1)\Delta t)} + \hat{U}_{n+1}\, e^{i(k(j-1)\Delta x - w(n+1)\Delta t)} + \hat{U}_n\, e^{i(k(j+1)\Delta x - wn\Delta t)}$$
$$- 2\hat{U}_n\, e^{i(kj\Delta x - wn\Delta t)} + \hat{U}_n\, e^{i(k(j-1)\Delta x - wn\Delta t)}\Big].$$

$$\Rightarrow e^{i(\cancel{kj\Delta x - \omega n \Delta t})}\left[\frac{\hat{U}_{n+1}\, e^{-i\omega\Delta t} - \hat{U}_n}{\Delta t}\right] - \frac{e^{i(\cancel{kj\Delta x - \omega n\Delta t})}}{2\Delta x^2}\Big[\hat{U}_{n+1}\, e^{ik\Delta x} e^{-i\omega\Delta t} - 2\hat{U}_{n+1} e^{-i\omega\Delta t} + \hat{U}_{n+1}\, e^{-ik\Delta x} e^{-i\omega\Delta t} + \hat{U}_n\, e^{ik\Delta x} - 2\hat{U}_n + \hat{U}_n\, e^{-ik\Delta x}\Big] = 0$$

$$\Rightarrow \hat{U}_{n+1}\left[\frac{e^{-i\omega\Delta t}}{\Delta t} - \frac{e^{ik\Delta x} e^{-i\omega\Delta t}}{2\Delta x^2} + \frac{e^{-i\omega\Delta t}}{\Delta x^2} - \frac{e^{-ik\Delta x} e^{-i\omega\Delta t}}{2\Delta x^2}\right]$$

$$= \hat{U}_n\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{e^{ik\Delta x}}{2\Delta x^2} - \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{e^{-ik\Delta x}}{2\Delta x^2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{U}_{n+1}}{\hat{U}_n} = \frac{1 + e^{ik\Delta x}\frac{\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + e^{-ik\Delta x}\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}}{e^{-i\omega\Delta t} - e^{ik\Delta x} e^{-i\omega\Delta t}\frac{\Delta t}{2\Delta x^2} + e^{-i\omega\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta x^2} - e^{-ik\Delta x} e^{-i\omega\Delta t}\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}}$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{\hat{U}_{n+1}}{\hat{U}_n}\right\| = \left\|\frac{1 + e^{ik\Delta x}\frac{\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + e^{-ik\Delta x}\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}}{1 - e^{ik\Delta x}\frac{\Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - e^{-ik\Delta x}\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}}\right\|$$

$$= \left\|\frac{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left[\cos(k\Delta x) - 1\right]}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left[\cos(k\Delta x) - 1\right]}\right\|$$

$$\rightarrow \left|\frac{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left[\cos(k\Delta x) - 1\right]}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left[\cos(k\Delta x) - 1\right]}\right| \leq 1$$

On cherche à majorer chaque membre du produit $a * \frac{1}{b}$:

$$a \longrightarrow \left[\cos(k\Delta x) - 1\right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left[\cos(k\Delta x) - 1\right] \leq 1$$

$$\frac{1}{b} \longrightarrow \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left[\cos(k\Delta x) - 1\right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\Delta t}{\Delta x^2}\left[\cos(k\Delta x) - 1\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left[\cos(k\Delta x) - 1\right] \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left[\cos(k\Delta x) - 1\right]} \leq 1$$

Donc $a * \frac{1}{b} \leq 1 \Leftrightarrow \left|a * \frac{1}{b}\right| \leq 1$

$$\left|\frac{1+\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left[\cos(k\Delta x)-1\right]}{1-\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left[\cos(k\Delta x)-1\right]}\right| \text{ est toujours inférieur ou égal à 1.}$$

Donc ce schéma est toujours stable quelque soit $r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$

d) Matriciellement :

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta x^2}\left[U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_j^{n+1}}{\Delta t} - \frac{U_{j+1}^{n+1}}{2\Delta x^2} - \frac{U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} + \frac{2U_j^{n+1}}{2\Delta x^2} = \frac{U_j^n}{\Delta t} + \frac{U_{j+1}^n}{2\Delta x^2} + \frac{U_{j-1}^n}{2\Delta x^2} - \frac{2U_j^n}{2\Delta x^2}$$

$$\Leftrightarrow U_j^{n+1} + 2U_j^{n+1}\frac{\Delta t}{2\Delta x^2} - U_{j+1}^{n+1}\frac{\Delta t}{2\Delta x^2} - U_{j-1}^{n+1}\frac{\Delta t}{2\Delta x^2} = U_j^n - 2U_j^n\frac{\Delta t}{2\Delta x^2} + U_{j+1}^n\frac{\Delta t}{2\Delta x^2} + U_{j-1}^n\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}.$$

$$\Rightarrow U^{n+1}\begin{pmatrix}1+2r & -r & 0\\ -r & 1+2r & -r\\ 0 & -r & 1+2r\end{pmatrix} = U^n\begin{pmatrix}1-2r & r & 0\\ r & 1-2r & r\\ 0 & r & 1-2r\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow U^{n+1}\left[I - r\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\right] = U^n\left[I + r\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\right].$$

Conclusion

Nous avons pu déterminer les schémas le plus stable mais aussi la précision des différents schémas (Euler explicite, Euler implicite et Crank - Nicholson).
Les schémas les plus stables seront donc le schéma de Crank - Nicholson et le schéma d'Euler implicite, car Euler explicite nécessite un $r \leq 1/2$.
Crank - Nicholson est d'ordre 2 en temps, ce qui permettra d'obtenir une meilleure solution, qui demandera plus de calculs mais pourra être contre - balancé par un r élevé.
L'implémentation nous permet de constater une erreur plus faible pour Crank - Nicholson et une stabilité importante sans dégradations importantes dans la solution pour un $r \leq 100$.