

Práctica 5: Variables Aleatorias Continuas

- 1) Considere la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{para otro valor} \end{cases}$$

- a) Determinar el valor de k , de manera que sea función de densidad.
 - b) Determinar la función de distribución acumulada y graficar.
 - c) Calcular $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$ y $P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right)$
- 2) La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X está dada por la función $f(x) = 2(1-x)$ en el rango $[0,1]$. Determinar $E(X)$ y $\sigma^2(X)$.
- 3) Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo (a, b) . Si $E(X)=10$ y $\sigma^2(X)=12$, encontrar los valores de a y b .
- 4) Una variable aleatoria posee distribución uniforme en el intervalo de 6 a 10.
- a) Determinar la media de la distribución y su desvío estándar.
 - b) Graficar la función de densidad y demostrar que el área total es igual a 1.
 - c) ¿Cuál es la probabilidad de que la variable asuma un valor superior a 7?
- 5) Los ingresos de todas las familias de un barrio pueden representarse por medio de una variable aleatoria continua. Se sabe que el ingreso mediano de todas las familias de este barrio es de \$60.000 y que el 40% de todas las familias del barrio tiene un ingreso de más de \$72.000.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el ingreso de una familia elegida aleatoriamente esté comprendido entre \$60.000 y \$72.000?
 - b) Dado que no se dispone de más información, ¿qué puede decirse sobre la probabilidad de que una familia elegida aleatoriamente tenga un ingreso de menos de \$65.000?
- 6) Una aerolínea informa que el tiempo de vuelo del Aeropuerto internacional de Los Ángeles a las Vegas es de 1 hora y 5 minutos. Suponiendo que el tiempo de vuelo tiene una distribución uniforme de entre 60 y 70 minutos.
- a) ¿Cuál es el tiempo medio de vuelo? ¿Cuál es la varianza de los tiempos de vuelo?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de vuelo sea menor a 68 minutos?
 - c) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de vuelo sea mayor a 64 minutos?
 - d) ¿Cuál es el tiempo superado por el 35% de los vuelos?

- 7) Una empresa se presenta a una licitación en la que compite con otras empresas, de la que resultará ganador el proyecto menos costoso. Presenta un proyecto de 10 millones de pesos y estima que la oferta de las demás empresas se puede representar mediante una distribución uniforme entre 8 y 20 millones de pesos.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma ofertada sea más baja que los 10 millones del proyecto presentado por la empresa?
 - b) Si la suma ofertada resulta ser mayor a los 10 millones, ¿Cuál es la probabilidad de que no supere los 15 millones de pesos?
 - c) ¿Cuál es el valor mínimo del 20% de las ofertas de mayor monto?
 - d) Si en la subasta 4 empresas en forma independiente hacen su oferta. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una ofrezca menos de 10 millones?

- 8) Sea X una variable aleatoria continua:

- a) Demostrar la siguiente expresión de la varianza de X

$$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2$$

siendo μ_X la media de la variable X .

- b) Probar que si X sigue una distribución $U[a, b]$, entonces:

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

sabiendo que $E(X) = \frac{(a+b)}{2}$.

- 9) Una variable aleatoria X posee distribución normal de media $\mu = 10$ y desvío estándar $\sigma = 2$. Calcular las siguientes probabilidades:

- a) $P(X < 8)$
- b) $P(X > 11)$
- c) $P(7 < X < 12)$
- d) $P(X < 13)$

- 10) Suponga que la variable aleatoria X sigue una distribución normal con $\mu = 80$ y $\sigma^2 = 100$.

- a) Halle la probabilidad de que X sea superior a 60.
- b) Halle la probabilidad de que X sea superior a 72 e inferior a 82.
- c) Halle la probabilidad de que X sea inferior a 60.
- d) La probabilidad de que X sea superior a _____ es 0,1.

- e) La probabilidad de que X esté en el intervalo simétrico en torno a la media entre _____ y _____ es 0,08.
- 11) En una planta industrial el consumo mensual de combustible es una variable aleatoria distribuida normalmente con media de 20.000 litros y desvío estándar de 2.500 litros.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un mes se consuman menos de 24.000 litros?
 - b) ¿Qué porcentaje de los meses se consume más de 24.000 litros?
 - c) ¿Qué porcentaje de los meses se consume entre 18.000 y 24.000 litros?
 - d) ¿Cuál es el consumo superado en el 95% de los meses?
 - e) Considerando solo los meses en que se consume menos de 24.000 litros ¿Con qué probabilidad se consumió más de 18.000 litros?
- 12) Una variable aleatoria posee distribución normal de media μ desconocida y desvío $\sigma = 2$. Si la probabilidad de que la variable exceda a 7,5 es 0,8023 ¿Cuánto vale la media?
- 13) El flujo sanguíneo en el cerebro de una persona sana tiene distribución normal con una media de 74 y un desvío de 16.
- a) ¿Qué proporción de personas sanas tendrá lecturas de flujo sanguíneo entre 60 y 80?
 - b) ¿Qué proporción de personas sanas tendrá lecturas de flujo sanguíneo por encima de 100?
 - c) Si una persona tiene una lectura de flujo sanguíneo menor a 40 se clasifica en riesgo de un accidente cerebro-vascular ¿Qué proporción de personas sanas recibirán un diagnóstico de riesgo?
- 14) Una cartera de inversión contiene acciones de un gran número de empresas. El año pasado, las tasas de rendimiento de estas acciones siguieron una distribución normal que tenía una media de 12,2% y una desviación típica de 7,2%.
- a) ¿De qué proporción de estas empresas fue la tasa de rendimiento de más del 20 por ciento?
 - b) ¿De qué proporción de estas empresas fue la tasa de rendimiento negativa?
 - c) ¿De qué proporción de estas empresas fue la tasa de rendimiento de entre el 5 y el 15%?
- 15) Un experimento publicado en *Annals of Botany* investigó si los diámetros de los tallos de plantas de girasol cambiarían dependiendo de si la planta se deja oscilar libre en el viento o se apoya artificialmente. Suponiendo que los diámetros de los tallos sin apoyos en la base de una especie particular de girasol tienen distribución normal con un diámetro medio de 35 mm y un desvío de 3 mm.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una planta de girasol tenga un diámetro basal de más de 40 mm?

- b) Si se seleccionan 2 plantas al azar ¿Cuál es la probabilidad de que ambas plantas tengan un diámetro superior a 40 mm?
 - c) ¿Dentro de qué límites esperaría usted que quedaran los diámetros basales, con probabilidad 0,95?
 - d) ¿Cuál es el diámetro no superado por el 90% de las plantas?
- 16) Se sabe que las calificaciones de un examen siguen una distribución normal que tiene una media de 420 y una desviación típica de 80.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida aleatoriamente obtenga una calificación de entre 400 y 480?
 - b) ¿Cuál es la calificación mínima necesaria para estar en el 10% superior de todas las personas que realizan el examen?
 - c) Indique, sin realizar los cálculos, en cuál de los intervalos siguientes es más probable que se encuentra la calificación de una persona elegida aleatoriamente: 400-439; 440-479; 480-519 ó 520-559.
 - d) ¿En cuál de los intervalos enumerados en el apartado (c) es menos probable que se encuentre la calificación de esta persona?
 - e) Se eligen aleatoriamente dos personas que realizan el examen. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas tenga una calificación de más de 500 puntos?
- 17) Una forma de llegar a los pronósticos económicos es usar un método de consenso general. De cada miembro de un gran número de analistas se obtiene un pronóstico y el promedio de estos pronósticos individuales es el pronóstico de consenso. Suponiendo que los pronósticos de cada uno de los analistas económicos para la tasa de interés principal de enero de 2006 tienen una distribución normal de media 4,5% y desvío de 0,1%. Si de este grupo se selecciona al azar un solo analista ¿Cuál es la probabilidad de que el pronóstico del analista para la tasa de interés principal tome los siguientes valores?
- a) mayor a 4,75%
 - b) menor a 4,375%
 - c) Si se seleccionan al azar 5 analistas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 pronostiquen una tasa superior a 4,75?
- 18) Una máquina produce cojinetes cuyos diámetros tienen una distribución normal con media 0,498 pulgadas y se sabe que el 90% de los cojinetes tiene un diámetro de a lo sumo 0,5. Si las especificaciones requieren que el diámetro del cojinete sea igual a $0,5 \pm 0,004$,
- a) ¿Qué fracción de la producción es inaceptable?

- b) Si se toma al azar una muestra de 3 cojinetes. ¿Cuál es la probabilidad de que todos sean inaceptables?
- 19) Para ingresar al equipo de atletismo de una Universidad se requiere una altura mínima de 164,6 cm. Se sabe que la altura es una variable que se distribuye normalmente, con una media de 170 cm. y un desvío de 5 cm. Se han presentado para la selección 122 jóvenes. Calcular la probabilidad de que más de 20 de ellos sean excluidos.
- 20) Se sabe que 30% de las llamadas que entran a una central telefónica son de larga distancia. Si entran 200 llamadas a la central, calcular la probabilidad de que:
- a) Por lo menos 50 sean de larga distancia.
 - b) Más de la tercera parte sean de larga distancia.
 - c) Menos de 138 no sean de larga distancia.
- 21) Las estaturas de un grupo de individuos de una misma edad se distribuyen normalmente con una media de 1,68 metros y se sabe que el 95% mide menos de 1,78 metros.
- a) Calcular el desvío estándar.
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida más de 1,8 metros?
 - c) ¿Cuál es la estatura máxima del 10% de los individuos más bajos?
- 22) *The Biology Data Book* informa que el tiempo de gestación para los bebés humanos es en promedio 278 días con una desviación estándar de 12 días. Suponiendo que estos tiempos de gestación están normalmente distribuidos.
- a) Encontrar el primer y tercer cuartil para los tiempos de gestación.
 - b) ¿Sería raro que un bebé naciera con menos de 6 meses de gestación? Explique.
 - c) ¿Cuál es el tiempo mínimo de gestación del 80% de los bebés?
 - d) Si se seleccionan 25 bebés al azar ¿Cuántos se espera que tengan un tiempo de gestación comprendido entre 272 y 280 días?
- 23) En un establecimiento dedicado a la cría ganadera, el 10% de los novillos que salen a la venta pesan más de 500 Kg y el 7% pesa menos de 410 kg. Si la distribución del peso de un novillo es normal:
- a) ¿Cuál es el peso superado por el 15% de los novillos?
 - b) Determinar un intervalo de pesos que comprenda al 95% de los novillos.
 - c) ¿Cuál es la probabilidad de que en una jaula de 25 novillos haya alguno que pese menos de 400Kg?
- 24) En los Juegos Olímpicos, la jabalina se lanza a distancias que siguen de forma aproximada una distribución normal con una media de 50 metros y se sabe que el 10% de los tiros tiene una distancia máxima de 42,308 metros para la rama femenina. En una ronda de clasificación, el lanzamiento de las candidatas tiene que superar los 42 metros para

clasificarse. En el evento principal, el récord de lanzamiento fue de 69,48 metros y lo estableció la deportista noruega Trine Solberg Hattestad (1966-) en los Juegos Olímpicos de Sydney celebrados en Julio de 2000.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un lanzamiento supere la distancia de clasificación?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de batir el récord durante el evento principal?
 - c) Se seleccionan 5 competidoras al azar ¿Cuál es la probabilidad de que más de la mitad supere una distancia de 49 metros?
- 25) El peso del cereal que contiene una caja se aproxima a una distribución normal con una media de 600 gramos. El proceso de llenado de las cajas está diseñado para que, de cada 100 cajas, el peso de sólo una se encuentre fuera del intervalo 590-610 gramos. ¿Cuál es el valor máximo de la desviación estándar para alcanzar este requerimiento?
- 26) El contenido de bolsas de harina tiene distribución normal y se sabe que el 10% de las bolsas tiene un peso mínimo de 65kgs, mientras que el 8% de las bolsas tiene un peso máximo de 55 kgs.
- a) Determine el peso promedio y el desvío estándar.
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que una bolsa pese más de 63 kgs?
 - c) ¿Qué porcentaje de las bolsas pesan más que la mediana?

Trabajo Práctico en RStudio Cloud

En el ejercicio 12 del trabajo práctico en R se analiza la altura de un grupo de personas, testeando si la distribución normal constituye una buena aproximación.

En el ejercicio 13 del trabajo práctico en R se comprueba que, en ciertas circunstancias, la distribución normal puede ser una buena aproximación de una distribución normal. También se pone a prueba la utilidad del factor de corrección.