Respuestas Práctica 2: Probabilidades

PARTE I: Conjuntos y Conteo

2.

a. $A \cap \overline{(B \cup C)}$

b. $(A \cap C) \cap \overline{B}$

c. $A \cup B \cup C$

d. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

e. $A \cap B \cap C$

f. $\overline{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)}$

g. $\overline{A \cap B \cap C}$

h. $[(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] \cap \overline{(A \cap B \cap C)}$

3.

a. E

b. $E \cap F$

c. $F \cup (E \cap G)$

4.

a. Si $x \in \overline{B}$ entonces, por definición de complemento, $x \notin B$. Por hipótesis (recordar que $A \subset B$ significa que si $x \in A \Rightarrow x \in B$, lo cual es lógicamente equivalente a que si $x \notin B \Rightarrow x \notin A$), entonces sabemos que $x \notin A$, es decir, $x \in \overline{A}$.

b. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Hay que probar la doble inclusión. Primero se prueba que

$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Si $x \in A \cup (B \cap C)$, por definición de unión, $x \in A \text{ ó } x \in (B \cap C)$. Por definición de intersección, $x \in A \text{ ó } (x \in B \text{ y } x \in C)$. Esto significa que puede pasar que $x \in A$ ó $x \notin A$, pero en este último caso, debe cumplirse necesariamente que $(x \in B \text{ y } x \in C)$. Por lo tanto, podemos reescribir la expresión anterior como $(x \in A \text{ ó } x \in B) \text{ y } (x \in A \text{ ó } x \in C)$. Por definición de unión, tenemos que $(x \in A \cup B) \text{ y } (x \in A \cup C)$. Por definición de intersección, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Ahora hay que probar la otra inclusión, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$

Si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, entonces por definición de intersección $(x \in A \cup B)\ y\ (x \in A \cup C)$ y por definición de unión, $(x \in A\ ó\ x \in B)\ y\ (x \in A\ ó\ x \in C)$. Razonando igual que en el caso anterior, esto implica que $x \in A\ ó\ (x \in B\ y\ x \in C)$. Es decir, por definición de unión e intersección, $x \in A \cup (B \cap C)$.

c. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Hay que probar la doble inclusión.

Primero se prueba que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Si $x \in A \cap (B \cup C)$, por definición de intersección, $x \in A\ y\ x \in (B \cup C)$.

Por definición de unión, $x \in A\ y\ (x \in B\ o\ x \in C)$. Esto significa que $x \in A$ ó $x \notin A$, y además se necesita que o bien $x \in B\ ó\ x \in C$. Por lo tanto, podemos reescribir la expresión anterior como $(x \in A\ y\ x \in B)\ ó\ (x \in A\ y\ x \in C)$. Por definición de intersección, tenemos que $(x \in A \cap B)\ ó\ (x \in A \cap C)$. Por definición de unión, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ahora hay que probar la otra inclusión, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

Si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, entonces por definición de unión $(x \in A \cap B)\ ó\ (x \in A \cap C)$ y por definición de intersección, $(x \in A\ y\ x \in B)\ ó\ (x \in A\ y\ x \in C)$. Razonando igual que en el caso anterior, esto implica que $x \in A$ y se necesita además que o $x \in B\ ó\ x \in C)$.

Es decir, por definición de unión e intersección, $x \in A \cap (B \cup C)$.

d. Si $x \in C$, por hipótesis sabemos que $x \in A$ y $x \in B$. Entonces, por definición de intersección, $x \in A \cap B$, lo que implica que $C \subset A \cap B$

e. $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

Hay que probar la doble inclusión. Primero se prueba que $A \subset (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

Si $x \in A$, puede pasar que $x \in B$ ó $x \notin B$. Es decir, puede pasar que $x \in A$ y $x \in B$, o $x \in A$ y $x \notin B$. Por definición de complemento, $x \in A$ y $x \in B$, o $x \in A$ y $x \in \overline{B}$. Por definición de intersección, $x \in A \cap B$, o $x \in A \cap \overline{B}$. Por definición de unión, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

Ahora se prueba la otra inclusión, $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \subset A$.

Si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, entonces por definición de unión $x \in A \cap B$, o $x \in A \cap \overline{B}$. Por definición de intersección, $x \in A$ y $x \in B$, o $x \in A$ y $x \in \overline{B}$. De aquí se deduce que $x \in A$, probando la inclusión.

f. $A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B)$

Hay que probar la doble inclusión. Primero se prueba que

$A \cup B \subset A \cup (\overline{A} \cap B)$

Si $x \in A \cup B$, entonces por definición de unión $x \in A$ *ó* $x \in B$. Es decir, si $x \notin A$, necesariamente $x \in B$. Por lo tanto, sabemos que

$x \in A \text{ ó } (x \notin A \text{ y } x \in B)$. Por definición de complemento,

$x \in A \text{ ó } (x \in \overline{A} \text{ y } x \in B)$. Por definición de intersección,

$x \in A \text{ ó } (x \in \overline{A} \cap B)$. Por definición de unión, $x \in A \cup (x \in \overline{A} \cap B)$.

Ahora se prueba la inclusión $A \cup (\overline{A} \cap B) \subset A \cup B$

Si $x \in A \cup (x \in \overline{A} \cap B)$, por definición de unión $x \in A \text{ ó } (x \in \overline{A} \cap B)$. Por definición de complemento e intersección, $x \in A \text{ ó } (x \notin A \text{ y } x \in B)$. De aquí se deduce que $x \in A \text{ ó } x \in B$. Por definición de unión, $x \in A \cup B$.

5.

a. $4 \times 3 \times 2 = 24$

b. Considerando un alfabeto de 26 caracteres, se pueden formar $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 456.976.000$ patentes distintas.
Sin repetir ninguna letra ni número, se pueden formar $26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 24 \times 23 = 258.336.000$ patentes.

c. Por simplicidad, suponemos que el orden en que salen los números importa. Es decir, los resultados 1-2-1-1 y 2-1-1-1 se cuentan como dos resultados distintos pese a que están conformados por los mismos números. De esta forma, se tienen $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4 = 1.296$ casos posibles.
Con cifras todas distintas, hay $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ resultados posibles.
Con exactamente un 4, hay que tener en cuenta que el 4 puede salir en cualquiera de los 4 lanzamientos y que para los lanzamientos restantes sólo hay 5 resultados posibles (no puede salir otro 4). Por lo tanto, la respuesta es $4 \times (5 \times 5 \times 5) = 500$ casos posibles.
Para calcular la cantidad de resultados con al menos un 4, una forma es restarle al total de resultados posibles (1.296) la cantidad de resultados con

ningún 4: $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$. Por lo tanto, la respuesta es $1.296 - 625 = 671$

d. Si el sistema no distingue entre mayúsculas y minúsculas, hay 26 posibilidades para cada letra: $26 \times 26 \times 26 \times 26 = 456.976$. Si sí distingue, hay 52 posibilidades para cada letra: $52 \times 52 \times 52 \times 52 = 7.311.616$

6. Cada saludo es un subconjunto de 2 personas del total de 10 que asisten a la reunión. Por lo tanto, la cantidad de saludos es la cantidad de subconjuntos de 2 elementos que se pueden armar de un total de 10 elementos: $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$
7. $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$
8. Suponiendo un mazo que incluye 8s y 9s (50 cartas, 12 por palo más 2 comodines), $\binom{12}{2} = \frac{12!}{2!(12-\ )!} = 66$
9. $\binom{52}{13} = \frac{52!}{13!(52-13)!} = 6.35 \times 10^{11}$
10. $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = 120$
11. Es una permutación con repetición de 6 elementos conformados por grupos de 3 elementos (los 4s), 2 elementos (los 2s) y un elemento (el 7). Por lo tanto, la cantidad de cifras distintas es: $\frac{6!}{3!2!1!} = 60$
12. Es una permutación con repetición de 8 elementos conformados por grupos de 4 elementos (las As), 2 elementos (las Ps) y un elemento (la N y la T). Por lo tanto, la cantidad de palabras distintas es: $\frac{8!}{4!2!1!1!} = 840$

    La cantidad de palabras que se puede armar con la T al principio es la misma que si la T está al final, y es igual a la cantidad de palabras que se pueden armar con las otras 7 letras: $\frac{7!}{4!2!1!} = 105$

PARTE II: Probabilidades

13.

a. $P(A) = 3/10; P(B) = 2/10; P(A \cup B) = 4/10; P(A \cap B) = 1/10;$
$P(\overline{A}) = 7/10; P(\overline{B}) = 8/10; P(A \cup \overline{B}) = 9/10; P(\overline{A} \cap B) = 1/10$

b. $P(A) = 5/20; P(B) = 6/20; P(A \cup B) = 8/20; P(A \cap B) = 3/20;$
$P(\overline{A}) = 15/20; P(\overline{B}) = 14/20; P(A \cup \overline{B}) = 17/20; P(\overline{A} \cap B) = 3/20$

c. No.

14.

a. A y C; B y C
b. No.
c. $P(A \cup B) = 0{,}65$
d. $P(A \cup C) = 0{,}90$

15.

a. P(A)=0,55
b. P(B)=0,50
c. P(C)=0,70

16.

a. $P(A \cap B) = 0{,}08$
b. $P(A \mid B) = 0{,}40$
c. $P(A \cup B) = 0{,}52$

17.

a. $P(A \cup B) = 0{,}85$
b. $P(A \cap B) = 0$
c. $P(A \mid B) = 0$
d. $P(B \cup C) = 0{,}70$
e. No.

18. P(N) = 0,31

19. $P(\bar{J}) = 0{,}5208\widehat{3}$

20.

a. S = {1,2,3,4,5,6}
b.
   i. 1/6
   ii. 1/2
   iii. 1/3

21.

a. 5/14
b. 15/56
c. 15/56
d. 30/56

22.

a.

b. 13/36

c. 1/12

23.

a.

i. P(A)=0,65

ii. P(B)=0,72

iii. P(C)=0,25

iv. P(D)=0,08

v. $P(\overline{A}) = 0{,}35$

vi. $P(A \cup B) = 0{,}72$

vii. $P(A \cap B) = 0{,}65$

b. A y C; B y C; C y D.

24.

a. 0,0336

b. 0,9024

c. 0,0352

25.

a. No son mutuamente excluyentes.

b.

i. 0,45

ii. 0,375

iii. 0,075

iv. 1/3

v. 3/10

c. No.

d.

i. $P(A \cup M) = 0{,}525$

ii. $P(A \cup \overline{M}) = 0{,}6$

iii. $P(O \cap M) = 0{,}15$

iv. $P(M \mid A) = 0{,}4$

26.

a. P(A)=0,68362

b. P(B)=0,12366

c. No.

d. $P(\overline{A}) = 0{,}31638$

e. $P(A \cup B) = 0{,}71675$

f. $P(A \cap B) = 0{,}09053$

27.

a. 0,05

b. 0,675

c. 0,125

28. 0,433

29. 0,41

30. 0,657

31.

a. 0,08

b. 0,3125

32.

a. 0,1575

b. 0,3249

c. 0,8425

33.

a. 0,2523

b. 0,4128

34.

a. 0,0118

b. 0,1528

35. 0,4848

36.

a. 3/10

b. 1/5

c. 17/20

37.

a. 0,73

b. 0,1

c. 0,8

d. 0,222

38.

a. 1/6
b. 24/25
c. No.

39. Demostraciones

a. Si $A \subset B$, podemos reescribir $B = A \cup (\overline{A} \cap B)$, (hacer el gráfico para convencerse que esto es cierto).

Como $A \, y \, (\overline{A} \cap B)$ son conjuntos disjuntos, entonces:

$$P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$$

Como toda probabilidad es mayor o igual a cero, $P(\overline{A} \cap B) \geq 0$ y de la anterior ecuación se desprende que $P(B) \geq P(A)$

b. Utilizando las definiciones de probabilidad condicional, tenemos que:

$$P(A \mid B) + P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$$

Como $A \cap B \;\; y \;\; \overline{A} \cap B$ son conjuntos disjuntos,

$$\frac{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P\big((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)\big)}{P(B)}$$

Aplicando propiedad distributiva (demostración 30. d), tenemos que:

$$\frac{P\big((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)\big)}{P(B)} = \frac{P\big(B \cap (A \cup \overline{A})\big)}{P(B)}$$

Por definición de complemento y de espacio muestral,

$$\frac{P\big(B \cap (A \cup \overline{A})\big)}{P(B)} = \frac{P\big(B \cap S\big)}{P(B)} = \frac{P\big(B\big)}{P(B)} = 1$$

c. En la Práctica 2 se demostró que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. Entonces:

$$P(A) = P\big((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\big)$$

Como $(A \cap B)$ y $(A \cap \overline{B})$ son conjuntos disjuntos, tenemos que:

$$P(A) = P\big((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\big) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

Despejando obtenemos que:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

d. Hay que probar que $P(\overline{A})P(\overline{B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$ suponiendo que

$$P(A)P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - \left[P(A) + P(B) - P(A\cap B)\right]$$

Como A y B son independientes,

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 1 - \left[P(A) + P(B) - P(A)P(B)\right] = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$$

Sacando factor común:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 1 - P(A) - P(B)(1 - P(A)) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\overline{A})P(\overline{B})$$