Práctica 2: *Probabilidades*

PARTE I: Conjuntos y Conteo

1) Mediante diagramas de Venn probar que:
   a) $A \cap \varnothing = \varnothing$
   b) $A \cup \varnothing = A$
   c) $A \cap \overline{A} = \varnothing$
   d) $A \cup \overline{A} = \mathrm{S}$
   e) $\overline{S} = \varnothing$
   f) $\overline{\varnothing} = \mathrm{S}$
   g) $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$
   h) $\overline{\left(A \cap B\right)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   i) $\overline{\left(A \cup B\right)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2) Sean A, B y C tres eventos. Grafique y encuentre las expresiones adecuadas para reflejar las siguientes situaciones:
   a) Sólo ocurre A.
   b) Ocurren A y C, pero no B.
   c) Ocurre al menos uno de los tres eventos.
   d) Ocurren al menos dos de los tres eventos.
   e) Los tres eventos ocurren.
   f) A lo sumo uno de los eventos ocurre.
   g) A lo sumo dos de los eventos ocurren.
   h) Ocurren exactamente dos de los eventos.

3) Encuentre una expresión más simple para los siguientes eventos:
   a) $\left(E \cup F\right) \cap \left(E \cup \overline{F}\right)$
   b) $\left(E \cup F\right) \cap \left(\overline{E} \cup F\right) \cap \left(E \cup \overline{F}\right)$
   c) $\left(E \cup F\right) \cap \left(F \cup G\right)$

4) Probar analíticamente las siguientes relaciones:
   a) $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
   b) $A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cup C\right)$
   c) $A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$
   d) $C \subset A \ y \ C \subset B \Rightarrow C \subset \left(A \cap B\right)$

e) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

f) $A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B)$

Fórmulas y definiciones útiles para ejercicios de Conteo

La **"Regla Básica del Conteo"** establece que, si hay *r* etapas y se tiene n_i opciones en la etapa *i*, el número total de opciones es: $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_r$.

Factorial: El factorial de un número natural m, es el producto de los "m" factores consecutivos desde "m" hasta 1. El factorial de un número se denota por m!

$$m! = m \times (m-1) \times (m-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Ejemplo:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 20$$

Por definición, 0!=1.

Permutaciones: ¿De cuántas formas se pueden ordenar *n* elementos distintos? Respuesta: ***n!***
Ejemplo: ¿cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra PAN? Respuesta: dado que son 3 letras distintas, se pueden ordenar de 3! = 6 formas distintas (PAN, PNA, APN, ANP, NAP, NPA).

Permutaciones con repetición: Se tienen n elementos, donde el primero se repite a veces, el segundo se repite b veces, el tercero c veces, etc. (n = a + b + c + …). La cantidad de ordenamientos distintos posibles es una permutación, en la que hay que descontar los casos repetidos.

$$\frac{n!}{a!\,b!\,c!\ldots}$$

Ejemplo: ¿cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra PAPA? Respuesta: son 4 letras, pero la A y la P se repiten 2 veces cada una. Por lo tanto, se pueden formar

$$\frac{4!}{2!\,2!} = \frac{24}{2 * 2} = 6$$

Estas 6 palabras son: PPAA, PAPA, PAAP, APPA, APAP, AAPP.

Cantidad de subconjuntos de un conjunto de n elementos: Si tenemos un conjunto A con n elementos. ¿Cuántos subconjuntos se pueden formar? Se puede aplicar la Regla Básica del

Conteo: N etapas (una por cada elemento), en cada etapa 2 opciones (que el elemento esté o no en el subconjunto). Entonces,

$$\underline{\# \boldsymbol{Total\ de\ subconjuntos} = \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \ldots \times \mathbf{2} = \mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}}$$

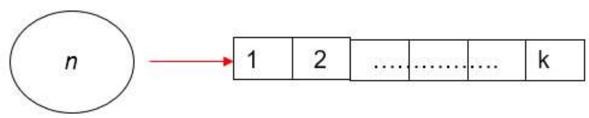
Tener en cuenta que esta fórmula cuenta al subconjunto vacío como una posibilidad. Ejemplo, con n=1, la fórmula da 2 subconjuntos posibles: el vacío y el que contiene al elemento.

<u>Número Combinatorio</u>: cantidad de subconjuntos de k elementos que se pueden obtener de un conjunto de n elementos. Se simboliza $\binom{n}{k}$ y es igual a: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Demostración intuitiva de esta fórmula:

Para obtener este número, construimos primero una lista ordenada de k elementos, de dos maneras distintas.

1. Elegimos k elementos, uno por vez.



$$n * (n-1) * (n-2) * \cdots * (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2. Obtenemos un subconjunto de k elementos y lo ordenamos de todas las formas posibles. Vamos a tener $\binom{n}{k}$, cada uno ordenado de *k!* maneras distintas.

Por ambos métodos se debe llegar al mismo resultado. Entonces: $\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} k!$

Esto implica que: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

5) Utilizando la Regla Básica del Conteo, responda las siguientes preguntas:
   a) Suponiendo que una persona viste siempre traje, camisa y corbata. ¿De cuántas formas puede vestirse si tiene 4 camisas, 3 corbatas y 2 trajes?
   b) Las patentes determinado país tienen un formato de 2 letras, 3 números y otras 2 letras al final. Por ejemplo, podemos encontrar la patente AG759LH. ¿Cuántas patentes distintas pueden construirse? ¿Cuántas patentes pueden construirse si no se puede repetir ninguna letra ni ningún número?
   c) Se lanza un dado de 6 caras 4 veces. ¿Cuántos resultados posibles hay? ¿Cuántos resultados hay con cifras todas distintas? ¿Cuántos que contengan exactamente un 4? ¿Cuántos que contengan al menos un 4?

d) Se nos pide una clave de 4 letras. ¿Cuántas posibles claves podemos construir si el sistema no distingue entre mayúsculas y minúsculas? ¿Y si sí distingue mayúsculas de minúsculas?

6) A una reunión asisten 10 personas y se intercambian saludos entre todos. ¿Cuántos saludos se han intercambiado?

7) En una prueba de atletismo en la que participan 8 atletas se pueden clasificar sólo 3 para la final. ¿Cuántos grupos distintos de finalistas se pueden formar?

8) ¿De cuántas formas se pueden extraer dos bastos de una baraja española?

9) Una mano de bridge consta de 13 cartas del conjunto de 52 de la baraja francesa (cada palo tiene 13 cartas, del 1 al 10 más las tres figuras). ¿Cuántas manos de bridge son posibles?

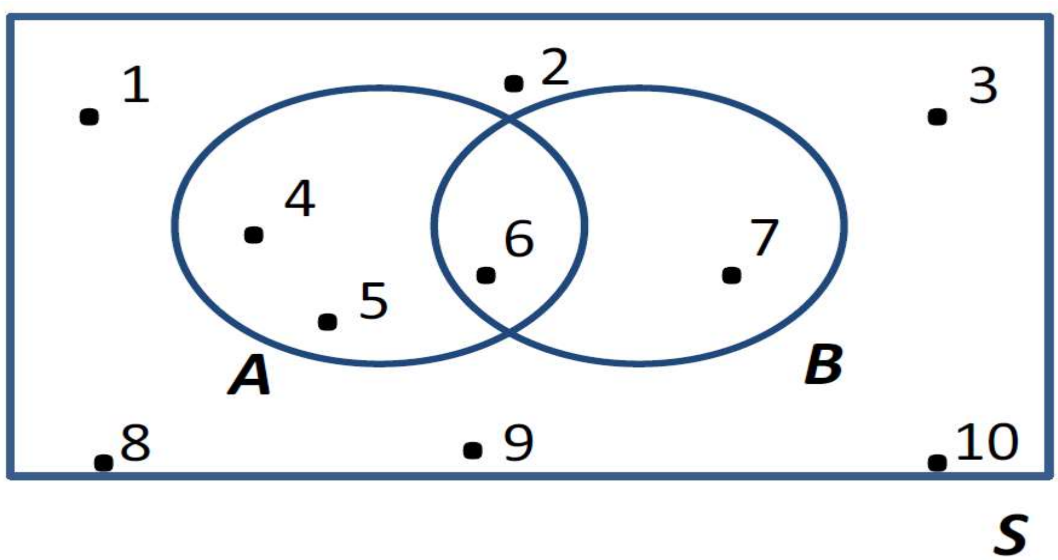
10) Un alumno tiene que elegir 7 de las 10 preguntas de un examen. ¿De cuántas maneras puede elegirlas?

11) ¿Cuántos números de 6 cifras se pueden formar a partir de las cifras del número 427442?

12) ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las letras de la palabra PAPANATA? ¿Cuántas palabras con la T al principio y cuántas con la T al final?

PARTE II: Probabilidades

13) El siguiente diagrama de Venn describe el espacio muestral de un experimento particular, y los eventos A y B.

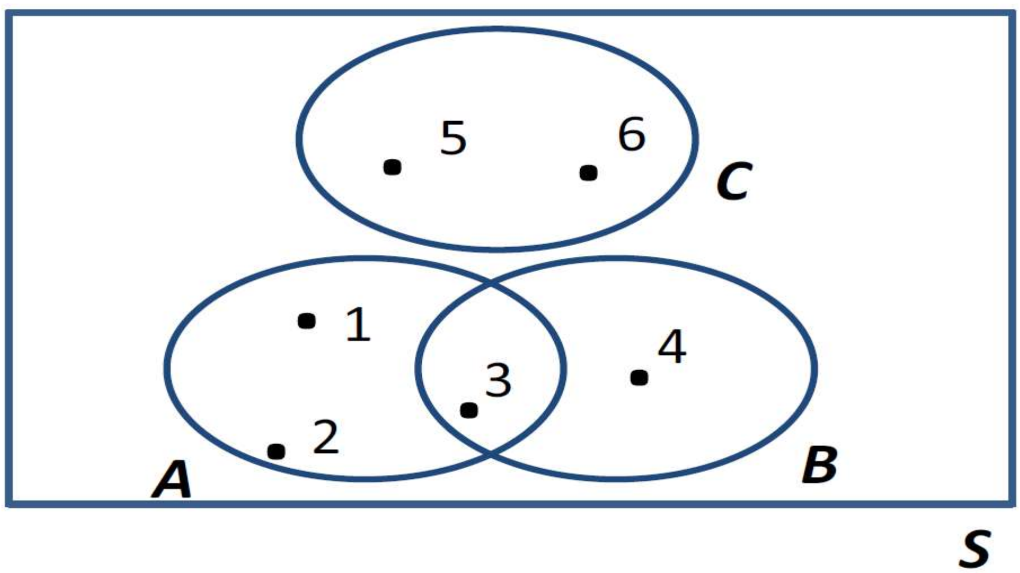


a) Suponiendo que todos los resultados son igualmente probables. Encuentre $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$, $P(A \cup \overline{B})$, $P(\overline{A} \cap B)$.

b) Encuentre las mismas probabilidades anteriores, pero suponiendo que *P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 1/20 y P(6) = P(7) = P(8) = P(9) = P(10) = 3/20.*

c) ¿Son A y B mutuamente excluyentes? Justifique.

14) El siguiente diagrama de Venn muestra el espacio muestral con seis resultados posibles y los eventos A, B y C.



Las probabilidades de los resultados son *P(1) = 0,20; P(2) = 0,05; P(3) = 0,30; P(4) = 0,10; P(5) = 0,10; P(6) = 0,25*.

a) ¿Existe algún par de eventos mutuamente excluyente? Justifique.

b) ¿Existe algún par de eventos independientes? Justifique.

c) Encuentre $P(A \cup B)$ por dos métodos distintos:

   i) Sumando las probabilidades de cada resultado.

   ii) Aplicando la regla de la suma.

d) Idem c. para $P(A \cup C)$

15) Sea un espacio muestral con cinco resultados posibles, la siguiente tabla contiene las probabilidades de cada uno de estos resultados:

Resultado	Probabilidad
1	0,05
2	0,20
3	0,30
4	0,30
5	0.15

Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

a) A : { Ocurre 1, 2 ó 3 }

b) B : { Ocurre 1, 3 ó 5 }

c) C : { No ocurre 4 }

16) Dados dos eventos independientes A y B, con *P(A) = 0,40* y *P(B) = 0,20*. Encuentre:

a) $P(A \cap B)$

b) $P(A | B)$

c) $P(A \cup B)$

17) Se conocen las probabilidades de tres eventos mutuamente excluyentes: *P(A) = 0,30, P(B) = 0,55 y P(C) = 0,15*. Encuentre las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup B)$

b) $P(A \cap B)$

c) $P(A | B)$

d) $P(B \cup C)$

e) ¿Son B y C eventos independientes? Justifique.

18) Dados dos sucesos aleatorios incompatibles *M* y *N* determinar la *P(N)* sabiendo que *P(M) = 0,52* y que la probabilidad de que no se presente ninguno de los dos sucesos es 0,17. Justificar claramente la respuesta.

19) Dados dos sucesos aleatorios compatibles *J* y *K* determinar $P(\bar{J})$ sabiendo que $P(\overline{K} | \bar{J}) = 0{,}48$ y que la probabilidad de que se presente alguno de los dos es 0,75. Justificar claramente la respuesta.

20) Sea el experimento que consiste en tirar un dado equilibrado y ver qué número sale en la cara superior.

a) Esquematizar el espacio muestral.

b) Calcular la probabilidad de:

i) obtener un cinco.

ii) obtener un número impar.

iii) obtener un múltiplo de 3.

21) En un recipiente hay 3 bolillas negras y 5 blancas. Se saca al azar una de ellas y luego otra sin reponer la primera. Calcular la probabilidad de que:

a) Ambas sean blancas.

b) La primera sea negra y la segunda sea blanca.

c) La primera sea blanca y la segunda sea negra.

d) Una sea blanca y la otra sea negra.

22) Se arroja un dado equilibrado dos veces, registrando los resultados obtenidos y se definen los siguientes sucesos:

J : la suma de los dos números obtenidos es de como mínimo 5

H : el valor obtenido en el primer tiro es superior al obtenido en el segundo

K : el valor obtenido en el primer tiro es un 4

Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) $J \cap H$

b) $H \cap K$

23) Los resultados de dos variables son (Bajo, Medio, Alto) y (Encendido, Apagado), respectivamente. Se realiza un experimento en el cual se observan los resultados de cada una de estas variables. La siguiente tabla muestra las probabilidades de cada par de resultados:

	Bajo	Medio	Alto
Encendido	0,50	0,10	0,05
Apagado	0,25	0,07	0,03

Considere los siguientes eventos:

A : { Encendido }, B : { Medio o Encendido }, C : { Apagado y Bajo }, D : { Alto }

a) Encuentre las siguientes probabilidades:
   - i) $P(A)$
   - ii) $P(B)$
   - iii) $P(C)$
   - iv) $P(D)$
   - v) $P(\overline{A})$
   - vi) $P(A \cup B)$
   - vii) $P(A \cap B)$

b) De los cuatro eventos *A, B, C y D*, encuentre los pares mutuamente excluyentes.

24) Se ha realizado una encuesta telefónica anual para identificar Factores de Riesgo en la población adulta y poder reportar así tendencias emergentes. La siguiente tabla resume dos variables: el estado de peso mediante el índice de masa corporal (IMC) y la cobertura de salud de cada encuestado. Se selecciona un individuo al azar:

		Ni sobrepeso ni obeso (IMC < 25)	Sobrepeso 25 ≤ IMC ≤ 30	Obeso IMC ≥ 30	Total
Cobertura de Salud	Si	134.801	141.699	107.301	383.801
	No	15.098	15.327	14.412	44.837

Total	149.899	157.026	121.713	428.638

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el encuestado tenga IMC superior a 30 y no tenga cobertura de salud?
b) Si el encuestado posee IMC entre 25 y 30 ¿Cuál es la probabilidad de que posea cobertura de salud?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cobertura de salud y IMC sea inferior a 25?

25) Los Empleados de cierta compañía se encuentran separados en tres divisiones: administración, operación de planta y ventas. La siguiente tabla muestra la cantidad de empleados en cada división clasificados por género:

	Mujer (M)	Hombre (H)
Administración (A)	20	30
Operación (O)	60	140
Ventas (V)	100	50

a) Utilizar un diagrama de Venn para ilustrar los eventos O y M para todos los empleados de la compañía. ¿Son mutuamente excluyentes?
b) Si se elige aleatoriamente un empleado:
   i) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?
   ii) ¿Cuál es la probabilidad de que trabaje en ventas?
   iii) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y trabaje en la división de administración?
   iv) ¿Cuál es la probabilidad de trabaje en la división de operaciones de la planta, si es mujer?
   v) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer si trabaja en la división de operaciones de la planta?
c) ¿Son independientes los eventos V y H? Justificar.
d) Determinar las siguientes probabilidades:
   i) $P(A \cup M)$
   ii) $P(A \cup \overline{M})$
   iii) $P(O \cap M)$
   iv) $P(M \mid A)$

26) En el "Journal of the American Law and Economics Association" se publicaron los resultados de un estudio sobre juicios civiles y sus apelaciones. La siguiente tabla resume la información de 2.143 casos donde hubo una apelación al fallo de primera instancia, ya sea por parte de los demandantes o de los demandados. El resultado de la primera instancia y de la apelación, junto con el tipo de juicio (por jurado o por juez), se muestran a continuación:

	Jurado	Juez	Total
Demandantes ganan – revierte apelación	194	71	265
Demandantes ganan – confirma apelación	429	240	669
Demandados ganan – revierte apelación	111	68	179
Demandados ganan – confirma apelación	731	299	1030
Total	1465	678	2143

a) Encuentre $P(A)$, siendo *A : { Juicio por Jurado }*.

b) Encuentre $P(B)$, siendo *B : { Demandantes ganan y el fallo se revierte en la apelación }*

c) ¿Son A y B eventos mutuamente excluyentes?

d) Encuentre $P(\bar{A})$.

e) Encuentre $P(A \cup B)$.

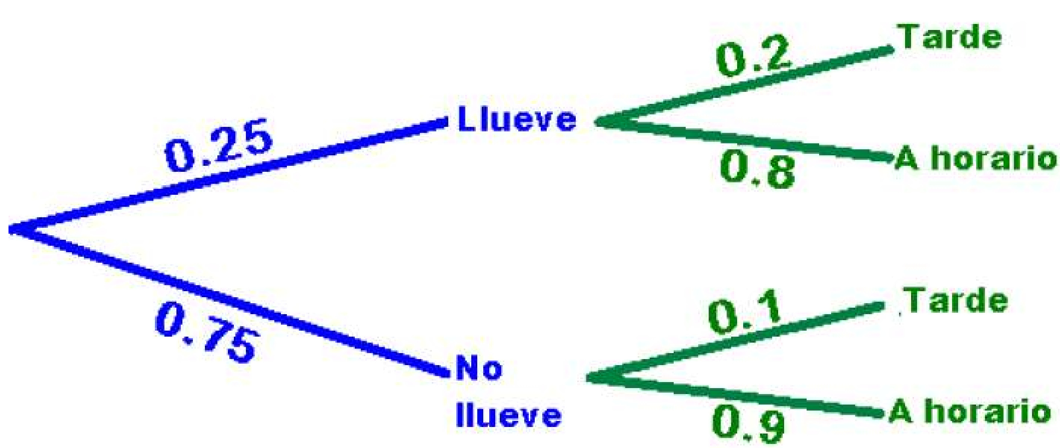
f) Encuentre $P(A \cap B)$.

27) Utilizando el siguiente diagrama de ramas, calcule la probabilidad de que:

a) Llueva y un estudiante llegue tarde a clase.

b) No llueva y un estudiante llegue a horario a clase.

c) Un estudiante llegue tarde a clase.



28) Se lanza una moneda con una probabilidad de 2/3 que el resultado sea cara. Si aparece cara, se extrae una pelota, aleatoriamente de una urna que contiene dos pelotas rojas y tres verdes. Si el resultado es cruz, se extrae una pelota, de otra urna, que contiene dos rojas y dos verdes. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una pelota roja?
29) Un inversionista está analizando comprar un número grande de acciones de una compañía. La cotización de las acciones en la bolsa, durante los seis meses anteriores, es de gran interés para el inversionista. Con base en esta información, se observa que la cotización se relaciona con el producto nacional bruto PNB. Si el PNB aumenta, la probabilidad de que el valor de las acciones aumente es de 0,8. Si el PNB es el mismo, la probabilidad de que las acciones aumenten su valor es de 0,2. Si el PNB disminuye, la probabilidad es de sólo 0,1. Si para los siguientes seis meses se asignan las probabilidades 0,4, 0,3 y 0,3 a los eventos, el PNB aumenta, es el mismo y disminuye respectivamente. Determinar la probabilidad de que las acciones aumenten su valor en los próximos seis meses.
30) El 5% de las unidades producidas en una fábrica se encuentran defectuosas cuando el proceso de fabricación se encuentra bajo control. Si el proceso se encuentra fuera de control, se produce un 30 % de unidades defectuosas. La probabilidad de que el proceso se encuentre bajo control es de 0,92. Si se selecciona aleatoriamente una unidad y se encuentra que es defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que el proceso se encuentre bajo control?
31) Una planta armadora recibe microcircuitos provenientes de tres proveedores distintos: H1, H2 y H3. El 50% del total se compra a H1, mientras que a H2 y H3 se les compra el 25% a cada uno. El porcentaje de microcircuitos defectuosos para H1, H2 y H3 es 5, 10 y 12% respectivamente. Si los microcircuitos se almacenan en la planta sin importar quién fue el proveedor:
    a) Determinar la probabilidad de que una unidad armada en la planta contenga un microcircuito defectuoso.
    b) Si un microcircuito es defectuoso ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido del proveedor H2?
32) El 35% de los alumnos que concurren a una universidad estudia carreras correspondientes a la facultad de ciencias económicas. De estos, el 55% trabaja en áreas relacionadas con la administración. Se sabe además que el 60% de los alumnos estudia carreras correspondientes a la facultad de ciencias económicas o no se desempeña en el área de la administración. Si se selecciona un individuo al azar:
    a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno estudie una carrera de la facultad de económicas y no trabaje en el área de administración?

b) De los individuos que trabajan en el área de administración, ¿qué porcentaje decidió estudiar una carrera de la facultad de ciencias económicas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno no estudie una carrera correspondiente a la facultad de ciencias económicas o trabaje en el área de administración?

33) Se dispone de dos urnas, cuyo contenido es el siguiente: La urna A contiene: 5 bolitas rojas y 3 blancas y la urna B contiene: 1 bolita roja y 2 blancas. Se arroja un dado equilibrado. Si sale 3 o 6 se extrae una bolita de la urna A y se la coloca en B, luego se saca una bolita de B. En caso contrario el proceso se hace a la inversa.

a) Hallar la probabilidad de que ambas bolitas sean rojas.

b) Si ambas bolitas son rojas, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido 3 o 6?

34) Una enfermedad afecta a una de cada 500 personas de cierta población. Se utiliza un examen para detectar dicha enfermedad. Se sabe que la probabilidad de que el examen aplicado a un enfermo lo muestre como tal es 0,90 y que la probabilidad de que el examen aplicado a una persona sana la muestre como enferma es 0,01.

a) Determinar la probabilidad de que al aplicar el examen el mismo resulte positivo.

b) Calcular la probabilidad de que una persona esté realmente enferma si su examen dio positivo.

35) Se tienen tres cajas J1, J2 y J3 con 30 piezas cada una, conteniendo 20, 15 y 10 piezas buenas respectivamente. La probabilidad de elegir la caja J1 es igual a la de elegir la caja J2 y la de elegir la caja J3 es igual a la suma de esas dos probabilidades. Se elige una caja al azar y se extraen con reposición dos piezas que resultan ser buenas ¿Cuál es la probabilidad de que provengan de la caja J1?

36) Una persona rinde un examen en tres partes. Las partes de la evaluación son tales que al contestar correctamente una de ellas, se tiene una clave para contestar correctamente las restantes etapas. La persona tiene una probabilidad 1/2 de contestar correctamente la primera parte del examen. Si contesta bien la primera etapa, la probabilidad de contestar bien la segunda es de 3/4, mientras que si contesta mal la primera etapa, la probabilidad de contestar bien la segunda es de 1/4. Finalmente, las probabilidades de contestar correctamente la tercera etapa del examen son: 1/5 si erró las dos etapas anteriores, 2/5 si contestó mal la segunda etapa pero contestó bien la primera, 3/5 si contestó mal la primera pero en forma correcta la segunda, 4/5 si contestó correctamente las dos etapas anteriores.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona se equivoque en las tres etapas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona conteste en forma correcta exactamente dos de las partes?

c) Si la persona contesta la última parte correctamente, ¿cuál es la probabilidad condicional de que haya contestado correctamente 2 o más partes del examen?

37) Se ha experimentado una vacuna contra el resfrío obteniéndose los siguientes resultados: para los que recibieron la vacuna se encontró que 30 no tuvieron ningún resfrío y 20 más de un resfrío. Los no vacunados fueron 100 de los cuales 10 no tuvieron ningún resfrío, 30 tuvieron un resfrío y el resto más de un resfrío.

a) Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar haya tenido algún resfrío.

b) Sabiendo que un individuo no ha sido vacunado, calcule la probabilidad de que no haya tenido ningún resfrío.

c) Determinar la probabilidad de que un individuo elegido al azar no haya sido vacunado o hayan tenido más de un resfrío.

d) Se seleccionan 3 individuos al azar. Determinar la probabilidad de que dos hayan sido vacunados y el restante no.

38) En una empresa se trabaja en tres turnos. El 20% de las unidades se fabrican en el turno mañana, el 50% en el turno tarde y el resto en el turno noche. De la producción de la mañana el 5% es defectuoso, como así también el 4% de las de tarde y el 10% de la noche.

a) Si la unidad resulta ser defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en el turno mañana?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en el turno tarde o no sea defectuosa?

c) Determinar si son independientes el hecho de ser defectuoso y pertenecer al turno mañana. Justificar.

Demostraciones

39) Probar analíticamente las siguientes relaciones:

a) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

b) $P(A|B) + P(\overline{A}|B) = 1$

c) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

d) Si A y B son independientes, entonces $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes.

<u>Trabajo Práctico en RStudio Cloud</u>

En el ejercicio 5 del trabajo práctico en R se realiza una simulación para estimar la cantidad de manos distintas que se pueden obtener jugando al truco. Recordar que al truco se juega con un mazo de 40 cartas y cada mano consta de 3 cartas. Por lo tanto, esta pregunta equivale al problema de calcular cuántos subconjuntos de 3 elementos podemos conformar en base a 40 elementos. La respuesta teórica la da el número combinatorio:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

En este caso, n=40 y k=3.

En el ejercicio 6 del trabajo práctico en R, se presenta una aplicación de probabilidades condicionales en el juego de básquet. En particular, se pone a prueba la teoría de las “manos calientes”: un jugador que convierte un tiro tiene una probabilidad mayor de convertir en el tiro siguiente que la que tendría normalmente. Es decir, se pone a prueba si se cumple o no la siguiente desigualdad:

$$P(convertir\ un\ tiro \mid se\ convirtió\ el\ tiro\ anterior) > P(convertir\ un\ tiro\ cualquiera)$$

Por su parte, los ejercicios 7 a 10 del trabajo práctico en R combinan temas de esta práctica con los de la práctica 4.