Análisis y diseño de algoritmos

3. El diseño de algoritmos. Divide y vencerás

José Luis Verdú Mas, Jose Oncina,
Mikel L. Forcada, Jorge Calvo

Dep. Lenguajes y Sistemas Informáticos
Universidad de Alicante

21 de enero de 2019

Índice

El diseño de algoritmos: objetivos

- Dar a conocer las familias más importantes de problemas algorítmicos y estudiar diferentes esquemas o paradigmas de diseño aplicables para resolverlos.
- Aprender a instanciar (particularizar) un esquema genérico para un problema concreto, identificando los datos y operaciones del esquema con las del problema, previa comprobación de que se satisfacen los requisitos necesarios para su aplicación.
- Justificar la elección de un determinado esquema cuando varios de ellos pueden ser aplicables a un mismo problema.

El diseño de algoritmos: definición

- El diseño de algoritmos estudia la aplicación de métodos para resolver problemas en programación.
- La resolución de problemas:
  - Diseño ad hoc (frecuentemente "fuerza bruta")
    - Algoritmos dependientes del problema y no generalizables
    - Dificultad de adecuar cambios en la especificación
  - Esquemas:
    - Cada esquema representa un grupo de algoritmos con características comunes (análogos)
    - Permiten la generalización y reutilización de algoritmos
    - Cada instanciación de un esquema da lugar a un algoritmo diferente

El diseño de algoritmos: paradigmas

Esquemas algorítmicos más comunes

- Divide y vencerás (*divide and conquer*)
- Programación dinámica (*dynamic programming*)
- Algoritmos voraces (*greedy method*)
- Algoritmos de búsqueda y enumeración
  - Vuelta atrás (*backtracking*)
  - Ramificación y poda (*branch and bound*)
- Algoritmos probabilísticos y heurísticos[1]
  - Algoritmos probabilísticos
  - Algoritmos heurísticos
  - Algoritmos genéticos

[1] No se tratarán en la asignatura

Índice

Ordenación por selección directa

- Ordenar de forma ascendente un vector v de n elementos.

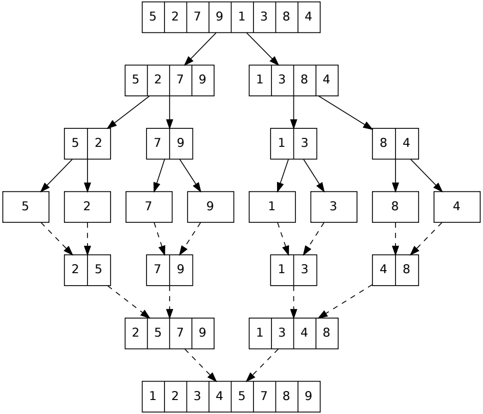
```
1 void selection_sort( Elem v[], int n) {
2     for( int i=0; i<n-1; i++) {
3         int m = i;
4         for( int j = i+1; j<n; j++)
5             if (v[j] < v[m])
6                 m = j;
7         swap(v[i],v[m]);
8     }
9 }
```

- El bucle de la línea 3 se ejecuta $n-1$ veces y el bucle de la línea 4 se ejecuta $n-i-1$ veces con $i \in [0, n-2]$.
- La línea 5 se ejecuta $\sum_{i=0}^{n-2}(n-i-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{1}{2}n(n-1)$ veces.
- La línea 7 se ejecuta n veces.

Complejidad: $f(n) \in \Theta(n^2)$

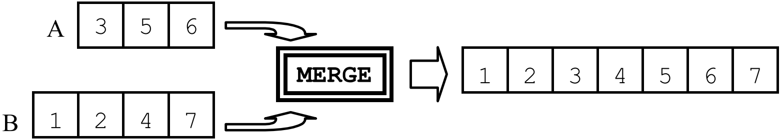
Algoritmo Mergesort: idea

- Ordenar de forma ascendente un vector V de n elementos.
- Solución usando el esquema "divide y vencerás":



Algoritmo Mergesort: función merge

- El algoritmo mergeSort utiliza la función merge que obtiene un vector ordenado como fusión de dos vectores también ordenados



Algoritmo *Mergesort*

Mergesort

```
void mergeSort(Elem v[], int pi, int pf) {
  if ( pi<pf ){ // pi==pf quiere decir 1 elemento
      int m = (pi+pf)/2;
      mergeSort(v, pi, m);
      mergeSort(v, m+1, pf);
      merge(v, pi, m, pf);
  }
}
```

merge(v,pi,m,pf) $\in \Theta(n)$ donde $n = \mathtt{pf} - \mathtt{pi} + 1$.

Algoritmo *Mergesort*: Complejidad

- Talla: n $\qquad (n = \texttt{pf} - \texttt{pi} + 1$: número de elementos del vector$)$
- Ecuación de recurrencia (coste exacto):

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ n + 2T(\frac{n}{2}) & n > 1 \end{cases}$$

- Complejidad temporal: $f(n) \in \Theta(n \log n)$

Algoritmo *Mergesort*: Complejidad

- Talla: n $\qquad$ ($n = \texttt{pf} - \texttt{pi} + 1$: número de elementos del vector)
- Ecuación de recurrencia (coste exacto):

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ n + 2T(\frac{n}{2}) & n > 1 \end{cases}$$

- Complejidad temporal: $f(n) \in \Theta(n \log n)$

¿Cuál es la complejidad espacial?

Algoritmo *Mergesort*: Complejidad

- Talla: n $\quad$ ($n = \texttt{pf} - \texttt{pi} + 1$: número de elementos del vector)
- Ecuación de recurrencia (coste exacto):

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ n + 2T(\frac{n}{2}) & n > 1 \end{cases}$$

- Complejidad temporal: $f(n) \in \Theta(n \log n)$

¿Cuál es la complejidad espacial?

- ¿Cuál es la complejidad espacial de `merge`?

Algoritmo *Mergesort*: Complejidad

- Talla: n ($n = \texttt{pf} - \texttt{pi} + 1$: número de elementos del vector)
- Ecuación de recurrencia (coste exacto):

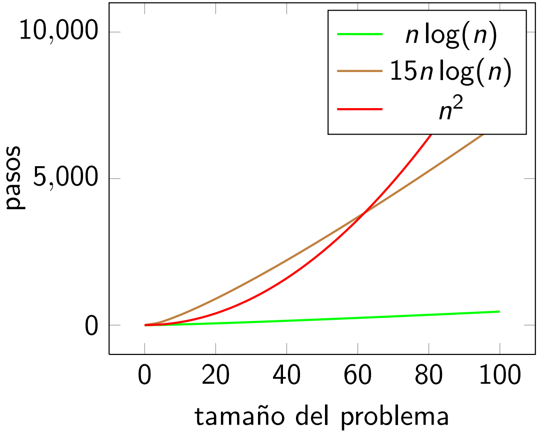
$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ n + 2T(\frac{n}{2}) & n > 1 \end{cases}$$

- Complejidad temporal: $f(n) \in \Theta(n \log n)$

¿Cuál es la complejidad espacial?

- ¿Cuál es la complejidad espacial de `merge`?
- ¡Ojo!: se puede reutilizar la memoria

Mergesort vs. selección



Sólo si el coeficiente de $n \log n$ es mayor que e puede pasar que para ciertos valores pequeños de n, $n \log n$ sea menos ventajoso que n^2.

Técnica de divide y vencerás

- Técnica de diseño de algoritmos que consiste en:
  - descomponer el problema en subproblemas de menor tamaño que el original
  - resolver cada subproblema de forma individual e independiente
  - combinar las soluciones de los subproblemas para obtener la solución del problema original
- Consideraciones:
  - No siempre un problema de talla menor es más fácil de resolver
  - La solución de los subproblemas no implica necesariamente que la solución del problema original se pueda obtener fácilmente
- Aplicable si encontramos:
  - Forma de descomponer un problema en subproblemas de talla menor
  - Forma directa de resolver problemas menores a un tamaño determinado
  - Forma de combinar las soluciones de los subproblemas que permita obtener la solución del problema original

Esquema de Divide y vencerás

Esquema divide y vencerás

```
Solucion DyV( Problema x ) {

   if (pequeno(x))
        return trivial(x);

   list<Solucion> s;
   for( Problema q : descomponer(x) )
       s.push_back( DyV(q) );
   return combinar(s);
}
```

Mergesort como divide y vencerás

Particularización (instanciación) del esquema general para el caso de Mergesort:

- **descomponer**: $m = (\mathrm{pi} + \mathrm{pf})/2$
- **trivial**: retorno sin hacer nada si **pequeño** $(\mathrm{pi} = \mathrm{pf})$
- **combinar**: merge(...)

Quicksort

```
void quicksort( Elem v[], int pri, int ult ) {

  if( ult <= pri )
    return;

  int p = pri;   // posicion del pivote
  int j = ult;
  while(p < j) {
    if (v[p+1] < v[p]) {
      swap( v[p+1], v[p] );
      p++;
    } else {
      swap( v[p+1], v[j] );
      j--;
    }
  }

  quicksort(v, pri, p-1);
  quicksort(v, p+1, ult);
}
```

Quicksort como divide y vencerás

Particularización (instanciación) del esquema general para el caso de quickSort:

- **descomponer**: cálculo de la posición del elemento pivote
- **trivial**: retorno sin hacer nada si **pequeño** (`ult` $<=$ `pri`)
- **combinar**: no es necesario

Análisis de eficiencia (1)

- Eficiencia: costes de logarítmicos a exponenciales.
  Depende de:
  - Nº de subproblemas (h)
  - Tamaño de los subproblemas
  - Grado de intersección entre los subproblemas
- Ecuación de recurrencia:
  - $g(n) =$ tiempo del esquema para tamaño n. (sin llamadas recursivas)
  - $b =$ Cte. de división de tamaño de problema

$$T(n) = hT\left(\frac{n}{b}\right) + g(n)$$

  - Solución general: suponiendo la existencia de un entero k tal que: $g(n) \in \Theta(n^k)$

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } h < b^k \\ \Theta(n^k \log_b n) & \text{si } h = b^k \\ \Theta(n^{\log_b h}) & \text{si } h > b^k \end{cases}$$

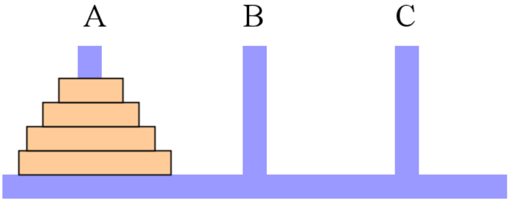
- **Teorema de reducción**: los mejores resultados en cuanto a coste se consiguen cuando los subproblemas son aproximadamente del mismo tamaño (y no contienen subproblemas comunes).
- Si se cumple la condición del teorema de reducción $(b = h = a)$

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{a}\right) + g(n) \qquad\qquad g(n) \in \Theta(n^k)$$

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^k) & k > 1 \\ \Theta(n \log n) & k = 1 \\ \Theta(n) & k < 1 \end{cases}$$

Las torres de Hanoi

- Colocar los discos de la torre A en la C empleando como ayuda la torre B
- Los discos han de moverse uno a uno y sin colocar nunca un disco sobre otro más pequeño



- ¿Cómo se afrontaría el problema?
- ¿Cuál sería la complejidad del algoritmo resultante?

Las torres de Hanoi: solución

- hanoi($n, A \overset{B}{\rightarrow} C$) es la solución del problema: mover los n discos superiores del pivote A al pivote C.
- Supongamos que sabemos mover $n-1$ discos: sabemos cómo resolver hanoi($n-1, X \overset{Y}{\rightarrow} Z$).
- También sabemos como mover 1 disco del pivote X al Y: hanoi($1, X \overset{Y}{\rightarrow} Z$), que es el caso trivial. Lo llamaremos mover($X \rightarrow Z$).
- Resolver hanoi($n, A \overset{B}{\rightarrow} C$) equivale a ejecutar:
  - hanoi($n-1, A \overset{C}{\rightarrow} B$)
  - mover($A \rightarrow C$)
  - hanoi($n-1, B \overset{A}{\rightarrow} C$)

Las torres de Hanoi: Complejidad (1)

Nótese que aquí la talla de los subproblemas no es $\frac{n}{a}$ sino $n - 1$:

- No se pueden aplicar las fórmulas generales de las transparencias anteriores
- Divide y vencerás es aquí más una estrategia de solución (un esquema algorítmico) que una manera de conseguir una solución con menor complejidad
  - El problema tiene una complejidad intrínseca peor que las descritas en las transparencias anteriores

Las torres de Hanoi: Complejidad (2)

- Ecuación de recurrencia para el coste exacto (asumiendo coste 1 para todas las operaciones de 1 disco):

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 + 2T(n-1) & n > 1 \end{cases}$$

- Solución:

$$\begin{aligned} T(n) &\stackrel{1}{=} 1 + 2T(n-1) \\ &\stackrel{2}{=} 1 + 2 + 4T(n-2) \\ &\stackrel{3}{=} 1 + 2 + 4 + 8T(n-3) = \dots \\ &\stackrel{k}{=} \sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} + 2^k T(n-k) = 2^k - 1 + 2^k T(n-k) \end{aligned}$$

- Paramos cuando $n - k = 1$, osea, en el paso $k = n - 1$,

$$T(n) = 2^n - 1 \in \Theta(2^n)$$

Ejercicios

1. Selección del k-ésimo mínimo
   - Dado un vector A de n números enteros diferentes, diseñar un algoritmo que encuentre el k-ésimo valor mínimo.
2. Búsqueda binaria o dicotómica
   - Dado un vector X de n elementos ordenado de forma ascendente y un elemento e, diseñar un algoritmo que devuelva la posición del elemento e en el vector X.
3. Calculo recursivo de la potencia enésima.

Selección del k-ésimo mínimo

Dado un vector A de n enteros, encontrar el k-ésimo valor mínimo.

```
Elem quickselect( Elem v[],int pri,int ult,int k ) {

  if( ult == pri )
      return v[k];

  int p = pri; // pivote
  int j = ult;
  while(p < j) {
    if (v[p+1] < v[p]) {
      swap( v[p+1], v[p] );
      p++;
    } else {
      swap( v[p+1], v[j] );
      j--;
    }
  }

  if( k == p ) return v[k];
  if( k < p ) return quickselect(v,pri,p-1,k);
  return quickselect(v,p+1,ult,k);
}
```

Búsqueda binaria o dicotómica

Dado un vector *v* ordenado de forma ascendente y un elemento *e*, diseñad un algoritmo que devuelva la posición del elemento en el vector.

Búsqueda binaria

```
int bb( Elem v[], int p, int u, Elem e){
  if( p > u ) return -1 // No hay elementos

  int m = ( p + u ) / 2;
  if ( e == v[m] ) return m;
  if ( e < v[m] ) return bb(v,p,m-1,e);
  return bb(v,m+1,u,e);
}
```

- ¿Reconocéis en el algoritmo los componentes del esquema *divide y vencerás*?

Búsqueda binaria

- Esta solución se puede ver como un *divide y vencerás* en el que
  - La operación **descomponer** viene representada por $m = (p + u)/2$
  - El problema **pequeno** corresponde a cuando $p > u$
  - Sólo se resuelve uno de los dos subproblemas
  - No es necesaria la combinación

Búsqueda binaria: complejidad

- Ecuación de recurrencia para el caso peor:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 + T(\frac{n}{2}) & n > 1 \end{cases}$$

(agrupamos $n = 0$ en $n = 1$ porque no se produce división).

- Solución:

$$\begin{aligned} T(n) &\stackrel{1}{=} 1 + T(\frac{n}{2}) \\ &\stackrel{2}{=} 2 + T(\frac{n}{2^2}) \\ &\dots \\ &\stackrel{k}{=} k + T(\frac{n}{2^k}) \end{aligned}$$

- Paramos cuando $\frac{n}{2^k} = 1$, o sea en el paso $k = \log(n)$,

$$T(n) \in O(\log(n))$$

Cálculo de la potencia enésima

Si asumimos que multiplicar dos elementos de un determinado tipo tiene un coste constante, es posible calcular la enésima potencia x^n de un elemento x de ese tipo en tiempo sublineal usando la siguiente recursión:

$$x^n = \begin{cases} x & n = 1 \\ x^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}} & n \text{ es par} \\ x^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}} x & n \text{ es impar} \end{cases}$$

Escribid un algoritmo para calcular eficientemente x^n.

- ¿Se puede evitar repetir operaciones?
- ¿Cuál es el coste asintótico del algoritmo resultante?