

# 解析学セミナー：ルベーグ積分超入門

京都工芸繊維大学 工芸科学部 設計工学域 情報工学課程

B4 estis\_jk

2020/10/02

## 目次

1. 抽象的測度論 .....	1
1. 可測性, 測度空間 .....	1
2. 可測関数 .....	5
3. 単関数 .....	9
4. ルベーグ積分の定義 .....	14
4.1. エゴロフの定理 .....	15
2. 確認事項 .....	20
1. well-definedness .....	20
1.1. sup, inf .....	20
3. 参考文献 .....	20

測度論で確率論を+完全理解+したい。ついでに情報理論もやりたいし、更には最近始まった情報幾何のゼミでも活かしていきたい。ところで君、学部なんだっただけ？

## 1. 抽象的測度論

普通の本だと先にボ렐集合をとってきて測度を構成して……ってやるけど、今回の本ではとりあえず測度・可測関数の性質を確認してから構成してという流れでした。それに従って実装をしていきます。

### 1. 可測性, 測度空間

**def 1.1.1** (可測空間). 集合  $\Omega$  の部分集合の族  $\mathfrak{B}$  で、以下をみたすものを  $\sigma$  代数という。

(1)  $\Omega \in \mathfrak{B}$

(2)  $A \in \mathfrak{B} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{B}$

(3)  $\mathfrak{B}$  の元の族  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  について,  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{B}$

$\Omega$  とその上の  $\sigma$  代数  $\mathfrak{B}$  の組  $(\Omega, \mathfrak{B})$  を可測空間といい,  $\sigma$  代数  $\mathfrak{B}$  の元を可測集合という. (特に, 確率論では可測集合のことを事象という.)

note: 族が  $\mathbb{N}$ -indexed だけど, 有限個の族を考えるときは適切に  $\emptyset$  を加えることで同じように考えられる.

**thm 1.1.2**  $(\Omega, \mathfrak{B})$  を可測空間とする.  $\mathfrak{B}$  の元の族  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  について以下が成り立つ.

(1)  $\emptyset \in \mathfrak{B}$

(2)  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{B}$

(3)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_i, \liminf_{n \rightarrow \infty} A_i \in \mathfrak{B}$

*proof.*

(1) def 1.1.1 (1), (2) より,  $\Omega^c = \emptyset \in \mathfrak{B}$

(2)

$$\begin{aligned} A_i \in \mathfrak{B} (i \in \mathbb{N}) &\Rightarrow A_i^c \in \mathfrak{B} (i \in \mathbb{N}) && (\because \text{def 1.1.1 (2)}) \\ &\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^c \in \mathfrak{B} && (\because \text{def 1.1.1 (3)}) \\ &\Rightarrow \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^c \right)^c = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{B} && (\because \text{ド・モルガンの定理}) \end{aligned}$$

より示せた.

(3)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j, \liminf_{n \rightarrow \infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} A_j$  なので, (2) と def 1.1.1 (3) より従う.

■

**def 1.1.3**  $+\infty$  は  $\forall r \in \mathbb{R}, r < +\infty$  を,  $-\infty$  は  $\forall r \in \mathbb{R}, r > -\infty$  を満たすものとして定める. また,  $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty]$ ,  $\mathbb{R}^* := [-\infty, +\infty]$  として定める.

**def 1.1.4** (測度). 可測空間  $(\Omega, \mathfrak{B})$  上の測度  $m : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^+$  は以下を満たすもの.

(1)  $A \in \mathfrak{B}$  について,  $m(A) \geq 0$ . 特に,  $m(\emptyset) = 0$

(2)  $\mathfrak{B}$  の元の族  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  について, どの  $i, j \in \mathbb{N} (i \neq j)$  で互いに素 ( $A_i \cap A_j = \emptyset$ ) ならば,

$$m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} m(A_i)$$

可測空間  $(\Omega, \mathfrak{B})$  の  $\Omega, \mathfrak{B}$  と測度  $m$  の組  $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  を測度空間という. (特に, 可測空間上の測度  $P$  であって,  $P(\Omega) = 1$  であるような測度空間を確率空間という. )

**def 1.1.5** ( $\sigma$  有限性). 測度空間  $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  について,  $m(\Omega_i) < \infty$ かつ  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i = \Omega$  をみたす互いに素な可測集合の族  $\{\Omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  が存在するとき, 測度空間  $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  を  $\sigma$  有限な測度空間という.

**thm 1.1.6**  $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  を測度空間とする.  $\mathfrak{B}$  の元の族  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  について以下が成り立つ.

$$(1) A_i \subset A_{i+1} (i \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i) = m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)$$

$$(2) m(A_1) < \infty \text{かつ } A_i \supset A_{i+1} (i \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i) = m\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)$$

$$(3) \liminf_{i \rightarrow \infty} m(A_i) \geq m\left(\liminf_{i \rightarrow \infty} A_i\right)$$

$$(4) m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) < \infty \Rightarrow \limsup_{i \rightarrow \infty} m(A_i) \leq m\left(\limsup_{i \rightarrow \infty} A_i\right)$$

*proof.*

(1)  $B_1 := A_1, B_{i+1} := A_{i+1} - A_i = A_{i+1} \cap A_i^c (i \in \mathbb{N})$  とおくと, 族  $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  の要素は def 1.1.1 より  $\mathfrak{B}$  に含まれ, 互いに素である. また,  $A_i = \bigcup_{j=1}^i B_j$  であるので,

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) &= m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^i B_j\right) \\ &= m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} m(B_i) \quad (\because \sigma \text{ 加法性}) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^j m(B_i) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{i=1}^j B_i\right) \quad (\because \sigma \text{ 加法性}) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} m(A_j) \end{aligned}$$

より示せた.

(2)  $B_i := A_1 - A_i = A_1 \cap A_i^c (i \in \mathbb{N})$  とおくと, 族  $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  の要素は def 1.1.1 より  $\mathfrak{B}$  に含まれ,  $B_i \subset B_{i+1} (i \in \mathbb{N})$  である. また,  $A_1 \supset B$  ならば  $m(A_1 - B) + m(B) = m(A_1) < \infty$  なので,

$$\begin{aligned} m\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) &= m\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_1 - B_i)\right) \\ &= m\left(A_1 - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) \\ &= m(A_1) - m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) \\ &= m(A_1) - \lim_{i \rightarrow \infty} m(B_i) \quad \because (1) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} (m(A_1) - m(B_i)) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_1 - B_i) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i) \end{aligned}$$

より示せた.

(3)  $B_i := \bigcap_{j=i}^{\infty} A_j$  とおくと,  $B_i \subset A_i, B_i \subset B_{i+1}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) ので,

$$\begin{aligned} m\left(\liminf_{i \rightarrow \infty} A_i\right) &= m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcap_{j=i}^{\infty} A_j\right) \\ &= m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} m(B_i) \quad \because(1) \\ &= \liminf_{i \rightarrow \infty} m(B_i) \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} m(A_i) \end{aligned}$$

より示せた.

(4)  $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$  とおくと,

$$\begin{aligned} m\left(\limsup_{i \rightarrow \infty} A_i\right) &= m\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right) \\ &= m(A) - m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left(A - \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right)\right) \\ &= m(A) - \lim_{i \rightarrow \infty} m\left(A - \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right) \quad \because(1) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(m(A) - m\left(A - \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right)\right) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right) \\ &= \limsup_{i \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right) \\ &\geq \limsup_{i \rightarrow \infty} m(A_i) \end{aligned}$$

より示せた.

■

## 2. 可測関数

**def 1.2.7** (可測関数).  $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  を測度空間とする.  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$  について, 任意の  $a \in \mathbb{R}^*$  で

$$f^{-1}((a, \infty]) = \{ \omega \in \Omega ; f(\omega) > a \} \in \mathfrak{B}$$

をみたすとき,  $f$  を可測関数という.

**prop 1.2.8**  $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  を測度空間,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$  を可測関数とする. 任意の  $a \in \mathbb{R}^*$  で以下が成り立つ.

- (1)  $f^{-1}([a, \infty]) = \{\omega \in \Omega ; f(\omega) \geq a\} \in \mathfrak{B}$
- (2)  $f^{-1}((-\infty, a)) = \{\omega \in \Omega ; f(\omega) < a\} \in \mathfrak{B}$
- (3)  $f^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega ; f(\omega) \leq a\} \in \mathfrak{B}$

*proof.*

(1) 可測関数の定義より, 任意の  $a \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}$  について

$$f^{-1}\left(\left(a - \frac{1}{n}, \infty\right]\right) = \left\{\omega \in \Omega ; f(\omega) > a - \frac{1}{n}\right\} \in \mathfrak{B}$$

で  $\sigma$  代数の加算無限個の和は閉じているので,

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left\{\omega \in \Omega ; f(\omega) > a - \frac{1}{n}\right\} = \{\omega \in \Omega ; f(\omega) \geq a\} \in \mathfrak{B}$$

(2) (1) の complement を取ればよい.

(3) 可測関数の  $(a, \infty]$  の逆像に関する complement を取ればよい.

■

**lem 1.2.9**  $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  を測度空間,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$  を可測関数とする. 任意の  $a, b \in \mathbb{R}^* (a < b)$  で以下が成り立つ.

- (1)  $f^{-1}((a, b)) \in \mathfrak{B}$
- (2)  $f^{-1}([a, b)) \in \mathfrak{B}$
- (3)  $f^{-1}((a, b]) \in \mathfrak{B}$
- (4)  $f^{-1}([a, b)) \in \mathfrak{B}$
- (5)  $f^{-1}(\{a\}) \in \mathfrak{B}$

*proof.*

$f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathfrak{B}, f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathfrak{B}$  が確認できれば, prop 1.2.8 より 2 つの積集合 (と必要であれば  $\{+\infty\}, \{-\infty\}$  を  $f$  で引き戻したものの和集合) を取ればよい.

prop 1.2.8 より,  $f^{-1}((-\infty, a)), f^{-1}((a, \infty]) \in \mathfrak{B}$  なので,

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}([-\infty, -i]) = f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathfrak{B}$$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}((i, \infty]) = f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathfrak{B}$$

以上より示せた.

■

**lem 1.2.10**  $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  を測度空間とする.  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*(i \in \mathbb{N})$  を可測関数とする. このとき, 以下が成り立つ.

- (1)  $(f+g)(\omega) := f(\omega) + g(\omega)$ ,  $(f \cdot g)(\omega) := f(\omega) \cdot g(\omega)$  と定義すると,  $f+g, f \cdot g$  は可測関数
- (2)  $\sup \{ f_i(\omega) ; i \in \mathbb{N} \}$ ,  $\inf \{ f_i(\omega) ; i \in \mathbb{N} \}$  は可測関数
- (3)  $\limsup_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega)$ ,  $\liminf_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega)$  は可測関数
- (4) 任意の  $\omega \in \Omega$  で  $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) \in \mathbb{R}^*$  ならば,  $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega)$  は可測関数

*proof.*

(1)  $(f+g)^{-1}((a, \infty]) \in \mathfrak{B}$  を示せばよい.

$$\begin{aligned} (f+g)^{-1}((a, \infty]) &= \{ \omega \in \Omega ; (f+g)(\omega) > a \} \\ &= \{ \omega \in \Omega ; f(\omega) + g(\omega) > a \} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \{ \omega \in \Omega ; f(\omega) > a - r \} \cap \{ \omega \in \Omega ; g(\omega) > r \} \quad (1) \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{q \in \mathbb{R}} \{ \omega \in \Omega ; f(\omega) > a - q \} \cap \{ \omega \in \Omega ; g(\omega) > q \} \quad (2)$$

$$\in \mathfrak{B} \quad (3)$$

(1)  $\rightarrow$  (2) : 左右の包含を示して等号が成立することを確認する.

• (1)  $\subset$  (2) :

$$\begin{aligned} (1) \ni \omega' &\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}, \omega' \in \{ \omega \in \Omega ; f(\omega) + r > a \} \cap \{ \omega \in \Omega ; g(\omega) > r \} \\ &\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \omega' \in \{ \omega \in \Omega ; f(\omega) + r > (a - \varepsilon) \} \cap \{ \omega \in \Omega ; g(\omega) > (r + \varepsilon) \} \\ &\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, r \leq \exists q \leq r + \varepsilon, \\ &\quad \omega' \in \{ \omega \in \Omega ; f(\omega) + q > a \} \cap \{ \omega \in \Omega ; g(\omega) > q \} \quad (\because \text{実数の稠密性}) \\ &\Rightarrow \omega' \in (2) \end{aligned}$$

より示せた.

• (1)  $\supset$  (2) :  $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$  なので示せた.

(2)  $\rightarrow$  (3) :  $\mathbb{Q}$  の要素は加算無限個なので  $\sigma$  代数の性質より従う.

- (2) 任意の  $a \in \mathbb{R}^*$  について,  $(a, \infty]$  の逆像が  $\mathfrak{B}$  に入っていればよい.  $a \in \mathbb{R}^*$  を固定する.  $\sup$  の定義から,  $\sup \{ f_i(\omega) ; i \in \mathbb{N} \} > a$  ならば, あるインデックス  $i$  が存在して  $\{ \omega \in \Omega ; f_i(\omega) > a \}$  なので,

$$\{ \omega \in \Omega ; \sup \{ f_i(\omega) ; i \in \mathbb{N} \} > a \} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{ \omega \in \Omega ; f_i(\omega) > a \}$$

一方,  $\omega \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{ \omega \in \Omega ; f_i(\omega) > a \}$  についても, あるインデックス  $i$  について  $f_i(\omega) > a$  なので,  $\sup$  の定義より,

$$\omega \in \{ \omega \in \Omega ; \sup \{ f_i(\omega) ; i \in \mathbb{N} \} > a \}$$

なので,

$$\{ \omega \in \Omega ; \sup \{ f_i(\omega) ; i \in \mathbb{N} \} > a \} \supset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{ \omega \in \Omega ; f_i(\omega) > a \}$$

また, 可測関数の  $(a, \infty]$  の逆像は  $\mathfrak{B}$  に含まれるので,  $\mathfrak{B}$  は  $\sigma$  代数なので加算無限個の和についても閉じている. 以上より

$$\{ \omega \in \Omega ; \sup \{ f_i(\omega) ; i \in \mathbb{N} \} > a \} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{ \omega \in \Omega ; f_i(\omega) > a \} \in \mathfrak{B}$$

$\inf$  も同様.

- (3)  $\limsup_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) = \inf_{j \geq 1} \sup_{i \geq j} f_i(\omega)$  なので, (2) より,

$$\inf_{j \geq 1} \sup_{i \geq j} f_i(\omega) \in \mathfrak{B}$$

同様に,

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) = \sup_{j \geq 1} \inf_{i \geq j} f_i(\omega) \in \mathfrak{B}$$

- (4)  $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) \in \mathbb{R}^* = \sup \{ f_i(\omega) ; i \in \mathbb{N} \} = \inf \{ f_i(\omega) ; i \in \mathbb{N} \}$  なので, (2) より成り立つ.

■

**lem 1.2.11**  $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  を測度空間とする. 定数関数  $r$  を

$$\begin{aligned} r: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ * &\longmapsto r \end{aligned}$$

で与えると, これは可測関数になる.

*proof.*

可測関数の定義から任意の  $a \in \mathbb{R}^*$  について,  $(a, \infty]$  の逆像が  $\mathfrak{B}$  に入っていればいいが,  $a \geq r$  ではその逆像は  $\emptyset \in \mathfrak{B}$ ,  $a < r$  ではその逆像は  $\Omega \in \mathfrak{B}$  なので示された.

■

**thm 1.2.12**  $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  を測度空間,  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$  を可測関数とする. このとき, 以下が成り立つ.

- (1)  $\{\omega \in \Omega ; f(\omega) > g(\omega)\} \in \mathfrak{B}$
- (2)  $\{\omega \in \Omega ; f(\omega) = g(\omega)\} \in \mathfrak{B}$

*proof.*

- (1)  $f - g$  が可測関数であることが確認できればよい. lem 1.2.10より, 可測関数同士の和と積について可測関数になり, lem 1.2.11より, 定数関数のは可測関数なので,  $f - g = f + (-1)^*g$  は可測関数. 可測関数の定義から任意の  $a \in \mathbb{R}^*$  について,  $(a, \infty]$  の逆像が  $\mathfrak{B}$  に入っているので, 特に  $a = 0$  の時が求める結果である.
- (2)  $f - g$  が可測関数なので, lem 1.2.9(5) より,  $a = 0$  の時が求める結果となっている.

■

### 3. 単関数

**def 1.3.13** (特性関数). 特性関数  $1_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$  を以下で与える.

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

**def 1.3.14** (単関数).  $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  を測度空間とする.  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$  について,  $a_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathfrak{B} (i \in \{1, 2, \dots, n\})$  が存在して,  $f(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(\omega)$  と書けるとき,  $f$  を単関数であるという.

この定義の元で特性関数は単関数である.

**def 1.3.15** (単関数の積分).  $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  を測度空間,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$  を单関数とする.  $f$  の  $A \in \mathfrak{B}$  での積分を

$$\int_A f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A \cap A_i)$$

で与える.

$f$  の表し方は一意的ではないため, この積分の well-definedness について以下で確認していく.

**lem 1.3.16** (特性関数の積分の性質).  $O, A \in \mathfrak{B}$  のとき, 以下が成り立つ.

- (1)  $B, C \in \mathfrak{B}$  で  $A = B \cup C, B \cap C = \emptyset$  ならば,  $\int_O 1_A dm = \int_O 1_B dm + \int_O 1_C dm$
- (2)  $b, c \in \mathbb{R}$  ならば,  $\int_O (b + c) \cdot 1_A dm = \int_O b \cdot 1_A dm + \int_O c \cdot 1_A dm$

*proof.*

(1)

$$\int_O 1_A dm = m(O \cap A) \quad (4)$$

$$= m((O \cap B) \cup (O \cap C)) \\ = m(O \cap B) + m(O \cap C) \quad (5)$$

$$= \int_O 1_B dm + \int_O 1_C dm \quad (6)$$

(4), (6)は单関数の積分の定義から, (5)は測度の  $\sigma$  加法性から従う.

(2)

$$\begin{aligned} \int_O (b+c) \cdot 1_A dm &= (b+c)m(O \cap A) \\ &= bm(O \cap A) + cm(O \cap A) \\ &= \int_O b \cdot 1_A dm + \int_O c \cdot 1_A dm \end{aligned}$$

より示せた.

■

**prop 1.3.17** (单関数の積分の一意性).  $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  を測度空間,  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$  を  $f = g$  であるような单関数とする. 任意の  $O \in \mathfrak{B}$  について,

$$\int_O f dm = \int_O g dm$$

*proof.*

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(\omega) \quad (a_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathfrak{B}(i \in \{1, 2, \dots, n\})) \\ g(\omega) &= \sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}(\omega) \quad (b_j \in \mathbb{R}, B_j \in \mathfrak{B}(j \in \{1, 2, \dots, m\})) \end{aligned}$$

と置く. また, 関数として同じだけでなく積分後も一致するという意味での等号を  $\stackrel{\int}{=}$  で与え, 積分を保つとよぶ.

$$A_c := \Omega - \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ について } a_c = 0 \text{ として } f' : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^* \text{ を}$$

$$f'(\omega) = f(\omega) + a_c 1_{A_c}(\omega)$$

で与えると、係数 0 の特性関数の積分は 0 なので、 $\int f = f'$  である。同様に  $B_c := \Omega - \bigcup_{j=1}^m B_i$  について  $b_c = 0$  として  $g' : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$  を

$$g'(\omega) = g(\omega) + b_c 1_{B_c}(\omega)$$

で与える。

lem 1.3.16より、单関数を互いに素な集合に分解する操作は積分を保つ。单関数は有限個の集合に対して定義されるので、どの集合も互いに素になるように分解することで得られる集合は高々  $2^n$  個である。よって、この操作で得られるのはまた单関数であり、操作については積分を保つ。单関数の互いに素な集合を合併する操作は積分を保つので、高々  $2^n$  種類の係数の中で同じ値の係数である集合の合併を取る操作で得られるのは单関数、操作については積分を保つ。以上より、 $f', g'$  について、集合を互いに素に分割し、同じ係数で合併を取る操作をした单関数  $f'', g''$  を

$$\begin{aligned} f''(\omega) &= \sum_{i=1}^{n'} a''_i 1_{A'_i}(\omega) & \left( a''_i \in \mathbb{R}, A''_i \in \mathfrak{B}(i \in \{1, 2, \dots, n'\}), \bigcup_{i=1}^{n'} A''_i = \Omega \right) \\ g''(\omega) &= \sum_{j=1}^{m'} b''_j 1_{B'_j}(\omega) & \left( b''_j \in \mathbb{R}, B''_j \in \mathfrak{B}(j \in \{1, 2, \dots, m'\}), \bigcup_{j=1}^{m'} B''_j = \Omega \right) \end{aligned}$$

とおき、 $\int f = \int f' = \int f''$ ,  $\int g = \int g' = \int g''$  となる。

$$\begin{array}{ccc} f & \xlongequal{\quad \int \quad} & f' & \xlongequal{\quad \int \quad} & f'' \\ \parallel & & & & \\ g & \xlongequal{\quad \int \quad} & g' & \xlongequal{\quad \int \quad} & g'' \end{array}$$

$\omega \in \Omega$  について、 $f''(\omega) = g''(\omega)$  より、任意の  $a \in \mathbb{R}^*$  について、

$$\{ \omega \in \Omega ; f''(\omega) = a \} = \{ \omega \in \Omega ; g''(\omega) = a \}$$

特性関数に使われる集合は互いに素でその合併は全体集合かつ、その数は有限なので、 $f'', g''$  の各項の係数が一致することとその項の特性関数に使われる集合が等しいことは同値である。よって、 $n' = m'$  であり、インデックスを適切に取り替えることで、 $a''_i = b''_i, A''_i = B''_i$  になるのでその積分値も等しく、 $\int f'' = \int g''$ 。

$$\begin{array}{ccc}
 f & \xrightarrow{\int} & f' & \xrightarrow{\int} & f'' \\
 \| & & & & \| \\
 g & \xrightarrow{\int} & g' & \xrightarrow{\int} & g'' \\
 \end{array}$$

以上より，元の  $f, g$  についても積分値が一致し， $\int f = \int g$ .

■

**col 1.3.18** 単関数の特性関数を用いた表示では係数はすべて異なり，また，特性関数に用いている集合は互いに素かつ全ての和集合は全体集合と思って良い。加えて，単関数は可測関数（特性関数の証明と同様）。

**lem 1.3.19**  $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  を測度空間， $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$  を非負値単関数， $A, B \in \mathfrak{B}$  とするとき，以下が成り立つ。

$$(1) A \cap B = \emptyset \Rightarrow \int_{A \cup B} f dm = \int_A f dm + \int_B f dm$$

$$(2) A \subset B \Rightarrow \int_A f dm \leq \int_B f dm$$

$$(3) \int_A (f + g) dm = \int_A f dm + \int_A g dm$$

$$(4) \forall \omega \in A, f(\omega) \leq g(\omega) \Rightarrow \int_A f dm \leq \int_A g dm$$

*proof.*

$$f(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(\omega) \quad (a_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathfrak{B}(i \in \{1, 2, \dots, p\}))$$

$$g(\omega) = \sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}(\omega) \quad (b_j \in \mathbb{R}, B_j \in \mathfrak{B}(j \in \{1, 2, \dots, q\}))$$

と置く。

(1) 積分の定義より,

$$\begin{aligned}
 \int_{A \cup B} f dm &= \sum_{i=1}^p a_i m((A \cup B) \cap A_i) \\
 &= \sum_{i=1}^p a_i m((A \cap A_i) \cup (B \cap A_i)) \\
 &= \sum_{i=1}^p a_i (m(A \cap A_i) + m(B \cap A_i)) \quad (\because \sigma\text{加法性}) \\
 &= \sum_{i=1}^p a_i m(A \cap A_i) + \sum_{i=1}^p a_i m(B \cap A_i) \\
 &= \int_A f dm + \int_B f dm
 \end{aligned}$$

(2) 積分の定義より,

$$\begin{aligned}
 \int_B f dm &= \sum_{i=1}^p a_i m(B \cap A_i) \\
 &= \sum_{i=1}^p a_i m((A \cap A_i) \cup ((B - A) \cap A_i)) \\
 &= \sum_{i=1}^p a_i (m(A \cap A_i) + m((B - A) \cap A_i)) \quad (\because \sigma\text{加法性}) \\
 &\geq \sum_{i=1}^p a_i m(A \cap A_i) \quad (\because \text{測度, 単関数の非負性}) \\
 &= \int_A f dm
 \end{aligned}$$

(3) 積分の定義より,

$$\begin{aligned}
 \int_A (f + g) dm &= \sum_{i=1}^p a_i m(A \cap A_i) + \sum_{j=1}^q b_j m(A \cap B_j) \\
 &= \int_A f dm + \int_A g dm
 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int_A f dm &= \sum_{i=1}^p a_i m(A \cap A_i) \\
&= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_i m(A \cap (A_i \cap B_j)) \\
&\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q b_j m(A \cap (A_i \cap B_j)) \\
&\quad \left( \because \text{各 } A_i \cap B_j \text{ 上で } m(A_i \cap B_j) \neq 0 \Rightarrow f(\omega) \leq g(\omega) \right) \\
&= \sum_{j=1}^q b_j m(A \cap B_j) \\
&= \int_A g dm
\end{aligned}$$

■

#### 4. ルベーグ積分の定義

$(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  を測度空間,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  を非負値可測関数とする.  $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ (i \in \mathbb{N}_{>0})$  を

$$f_i(\omega) = \begin{cases} \frac{k}{2^i} & f(\omega) \in \left[ \frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i} \right] \\ 2^i & f(\omega) \geq 2^i \end{cases}$$

と置くと, これは可測関数になる. この関数は

$$\forall \omega \in \Omega, f_i(\omega) \rightarrow f(\omega) (i \rightarrow \infty)$$

を満たすので, 以下の定義を得る.

**def 1.4.20** (可測関数の積分 (1)). 上の  $f, f_i$  の元で,  $A \in \mathfrak{B}$  上での積分  $\int_A f dm$  を,

$$\int_A f dm = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_A f_i dm \tag{7}$$

で与える. (以後のためにこの積分を単関数の極限による積分と呼ぶ.)

以上の定義のメリットは具体的な計算ができることがあるが, デメリットとして定数倍を外に出す操作など, 基本的な操作を確認するのに手間取ることになる. それを容易に行えるのが以下の定義である.

**def 1.4.21** (可測関数の積分 (2)).  $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  を測度空間,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  を非負値可測関数とする.  $A \in \mathfrak{B}$  上での積分  $\int_A f dm$  を,

$$\int_A f \, dm = \sup_{g: \text{单関数}, 0 \leq g(\omega) \leq f(\omega)} \int_A g \, dm \quad (8)$$

で与える。(以後のためにこの積分を  $\sup$  による積分と呼ぶ。)

この定義のメリットは、 $\sup$  の性質から、極限へどのような近づけ方をしても一致し、関数同士の和や関数の定数倍が積分の外でも一致することを要請する。 $F$  を非負値可測関数の集合として和について図式で描くと、

$$\begin{array}{ccc} (F, F) & \xrightarrow{+F} & F \\ \downarrow \int \times \int & \curvearrowright & \downarrow \int \\ (\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) & \xrightarrow{+R^+} & \mathbb{R}^+ \end{array}$$

で、かっこいい。

結果としてこの2つの積分の定義は一致するため、具体的な計算や形式的な演算を容易にできる。それを次の節で示していく。

さて、一般に可測関数が非負値に限らないとき、

$$f^+(\omega) = \max(f(\omega), 0)$$

$$f^-(\omega) = \max(-f(\omega), 0)$$

で与えると、

$$f = f^+ - f^-$$

であるような、非負値可測関数  $f^+, f^-$  に分解できる。このそれぞれに対して積分することで可測関数  $f$  を求めることができる。ただし、 $\infty - \infty$  は不定なので、 $\int f^+ \, dm < \infty$  かつ  $\int f^- \, dm < \infty$  でない場合に限り、積分を定義する。この条件を満たす可測関数  $f$  を可積分であるとよぶ。

#### 4.1. エゴロフの定理

**thm 1.4.22** (エゴロフの定理).  $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  を測度空間、 $m(\Omega) < \infty$  とする。 $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  ( $i \in \mathbb{N}_{>0}$ ) であるような非負値可測関数列  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$  が可測関数  $f$  に測度 0 を除いて収束しているとき、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、ある可測集合  $H \in \mathfrak{B}$  が存在して、

$$(1) m(H) < \varepsilon$$

$$(2) H^c \text{ で } \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} \text{ は } f \text{ に一様収束する}$$

*proof.*

$$A(r, i) := \bigcap_{k=i}^{\infty} \left\{ \omega \in \Omega ; |f(\omega) - f_k(\omega)| < \frac{1}{2^i} \right\} \quad (r \in \mathbb{N}_{>0}, i \in \mathbb{N}_{>0})$$

とおく.  $|f(\omega) - f_k(\omega)|$  が可測関数なので, その  $\left[ -\infty, \frac{1}{2^i} \right)$  に対する逆像は可測, その加算無限個の積集合も可測集合なので, この  $A(r, i)$  は可測集合である.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f \text{ を } \varepsilon\text{-}\delta \text{ 論法で書くと,}$$

$$\forall \omega \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_{>0}, \forall n \geq N, |f(\omega) - f_n(\omega)| < \varepsilon$$

なので, どの  $\omega \in \Omega$  についても, ある  $N_\omega$  以上の  $n$  で  $|f(\omega) - f_n(\omega)| < \frac{1}{2^i}$  であるようなものがとれる. よって,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A(r, i) = \Omega$$

$\{A(r, i)\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$  は  $A(r, i)$  の定義から単調増加なので,

$$A(r, 1) \subset A(r, 2) \subset \dots$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A(r, i) = \Omega$$

なので, thm 1.1.6より,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m(A(r, i)) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A(r, i)\right) = m(\Omega)$$

それぞれの  $r \in \mathbb{N}_{>0}$  について,  $\lim$  の定義から, ある  $n_r$  以降の  $n$  について,

$$m(A(r, n)) \geq m(\Omega) - \frac{1}{2^r}$$

$$H_R := \bigcup_{r \geq R, r \in \mathbb{N}_{>0}} A(r, n)^C \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} m(H_R) &= m\left(\bigcup_{r \geq R, r \in \mathbb{N}_{>0}} A(r, n)^C\right) \\ &= \sum_{r \geq R, r \in \mathbb{N}_{>0}} m(A(r, n)^C) \quad (\because \sigma \text{ 加法性, 集合に重複がない場合は等号}) \\ &= \sum_{r \geq R, r \in \mathbb{N}_{>0}} m(\Omega) - m(A(r, n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{r \geq R, r \in \mathbb{N}_{>0}} \frac{1}{2^r} \\ &= \frac{1}{2^{R-1}} \end{aligned}$$

$\omega \in H_R^C = \bigcap_{r \geq R, r \in \mathbb{N}_{>0}} A(r, n)$  では,

$$\forall r \geq R, \forall n \geq n_r, |f(\omega) - f_n(\omega)| < \frac{1}{2^r}$$

主張に戻ると,  $\varepsilon$  に対しては,  $\frac{1}{2^R} < \varepsilon$  を満たすように  $R$  をとればいい. このときの  $R$  について,  $H_R^C$  上で一様収束することが確認できればいいが, 一様収束の定義は,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in S} |f(\omega) - f_n(\omega)| = 0$$

なので, 任意の  $\delta > 0$  に対して,  $\frac{1}{2^r} < \min\left(\delta, \frac{1}{2^R}\right)$  であるような  $r$  をとってこれば,  $n_r \leq n$  で,

$$\sup_{\omega \in H_R^C} |f(\omega) - f_n(\omega)| \leq \frac{1}{2^r} < \delta$$

より示せた.

■

**thm 1.4.23**  $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$  を測度空間,  $O \in \mathfrak{B}$  とする.  $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ (i \in \mathbb{N}_{>0})$  であるような非負値可測関数列  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$  が可測関数  $f$  に測度 0 を除いて収束（概収束という）しているとき,

$$\int_O f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm$$

(等号の左側の積分は  $\sup$  による積分, 右側の積分は单閑数の極限による積分)

*proof.*

$m(O) < \infty$  のとき

適当な  $f$  に収束する非負値单閑数増加列  $f_i$  を取ってくる. (これは单閑数の極限に用いる单閑数列も含む) このとき, thm 1.4.22より,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists H \in \mathfrak{B}, \left( m(H) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in H^C} |f(\omega) - f_n(\omega)| = 0 \right)$$

特に後者の主張より,

$$\forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall \omega \in H^C, |f(\omega) - f_n(\omega)| < \delta$$

なので, 任意の单閑数  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ ;  $\forall \omega \in O, g(\omega) \geq f(\omega)$  について, 上の  $\delta, N$  について,  $N \leq n$  で

$$\begin{aligned} f_n(\omega) - g(\omega) &= (f_n(\omega) - f(\omega)) + (f(\omega) - g(\omega)) \\ &\geq -\delta \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \int_O g dm &= \int_{O \cap H} g dm + \int_{O \cap H^c} g dm \\ &\leq \max_{\omega \in O \cap H} g(\omega) \cdot m(O \cap H) + \int_{O \cap H^c} (f_n + \delta) dm \\ &\leq \max_{\omega \in O \cap H} g(\omega) \cdot \varepsilon + \delta \cdot m(H^c) + \int_O f_n dm \end{aligned}$$

この  $n$  に関する極限は,

$$\int_O g dm \leq \max_{\omega \in O \cap H} g(\omega) \cdot \varepsilon + \delta \cdot m(H^c) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm$$

$\varepsilon, \delta$  は任意にとれたので, 不等式

$$\int_O g dm \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm$$

を得る.

よって,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm$  は  $f$  以下の任意の  $g$  についての積分の上界になっているので,  $\sup$  による積分の定義から,

$$\int_O f dm \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm$$

一方,  $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ (i \in \mathbb{N}_{>0})$  は単調増加列なので,  $\int_O f_n dm \leq \int_O f dm$  より, その  $n$  に関する極限は,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm \leq \int_O f dm$

以上から, 2 つの不等式を合わせて,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm = \int_O f dm$

$m(O) = \infty$  のとき,  $f$  以下の任意の单関数  $g$  をとってきて,  $g = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$  とおく.

- $\int_O g dm = \infty$  のとき
- $\int_O g dm < \infty$  のとき

で場合分けが必要である.

$$\int_O g \, dm = \infty \text{ のとき}$$

$g$  は有限係数の特性関数の有限個の項の和なので、少なくとも一つ以上の index で,  $m(A_i) = \infty$ . そのうち一つを  $i_0$  とおく.  $g(\omega) \leq f(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$  より,

$$B_n := \left\{ \omega \in A_{i_0} \cap O ; f_n(\omega) \leq \frac{a_{i_0}}{2} \right\}$$

とおくと,  $B_n \in \mathfrak{B}$  で, かつ,  $f_n$  が単調増加なので,  $\{B_n\}$  は単調増加かつ  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A_{i_0} \cap O$ . よって, thm 1.1.6 より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(B_n) = m(A_{i_0} \cap O) = \infty$$

.

一方,  $B_n \in \omega$  について,  $f_n(\omega) \geq \frac{a_{i_0}}{2}$  なので,

$$\int_O f_n \, dm \geq \frac{a_{i_0}}{2} m(B_n)$$

より,  $n$  に関する極限は,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n \, dm \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{i_0}}{2} m(B_n) = \infty$$

なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n \, dm = \int_O f \, dm = \sup_{g: \text{单関数}, 0 \leq g(\omega) \leq f(\omega)} \int_O g \, dm$$

$$\int_O g \, dm < \infty \text{ のとき}$$

$O' := \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap O)$  とおくと,  $m(O') < \infty$  でなければならない. この  $O'$  上での積分を考えると,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n \, dm &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, dm \\ &= \int_{O'} f \, dm \quad (\because m(O) < \infty \text{ のときの議論}) \\ &\geq \int_{O'} g \, dm \\ &= \int_O g \, dm \end{aligned}$$

$g$  に関する  $\sup$  を取ると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm \geq \int_O f dm$$

を得る。一般に  $\int_O f_n dm \leq \int_O f dm$  なので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm \leq \int_O f dm$  より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm = \int_O f dm$$

■

## 2. 確認事項

### 1. well-definedness

#### 1.1. sup, inf

**def 2.1.24**  $\mathfrak{R} \subset 2^{\mathbb{R}^*}$  とする。 $\sup : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  を、 $S \in \mathfrak{R}$  について、

$$\forall c \in S, c \leq \sup(S) \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathfrak{R}, \sup(S) < c + \varepsilon$$

として定める。また、 $\inf : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  を、 $S \in \mathfrak{R}$  について、

$$\forall c \in S, c \geq \inf(S) \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathfrak{R}, c < \inf(S) + \varepsilon$$

として定める。

この定義では、論理式を満たす値が存在するか、存在すればただ一つに決まるかを確認しなければならない。  
 $\sup$  について確認する。 $\inf$  も適切に読み替えることで確認できる。

- (存在性)  $R := \{ r \in \mathbb{R} ; \forall c \in S, c \leq r \}$  について考えると、特に  $\infty$  を含むのでこの集合は非空である。 $c \in \mathbb{R}^*$  s.t.  $(\forall s \in S, s > c \wedge \forall r \in R, c \leq r)$  について考えると、この  $c$  は  $R$  に入ってなければならないので、 $R$  は最小の元  $c$  が取れる。 $R$  の定義から、この  $c$  は  $\forall \varepsilon > 0, \exists s \in S, c - s < \varepsilon$  をみたすので、存在が確認できた。
- (一意性) 論理式を満たすものが 2 つ取れたとする。これを  $x, y (x < y)$  と置く。このとき定義から、 $\forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathbb{R}, c \geq x < y < c + \varepsilon$  だが、任意の  $\varepsilon > 0$  についてこれが言えるので、 $x = y$ 。

## 3. 参考文献

(1) 森真, ルベーグ積分超入門 - 数理解析や数理ファイナンス理解のために -, 共立出版, 2004