

解析学セミナー：ルベーグ積分超入門

京都工芸繊維大学 工芸科学部 設計工学域 情報工学課程

B4 estis_jk

2021/07/18

目次

1. 抽象的測度論	2
1. 可測性, 測度空間	2
2. 可測関数	5
3. 単関数	9
4. ルベーグ積分の定義	14
4.1. エゴロフの定理	15
5. 収束定理	20
5.1. 準備	20
5.2. 本題	24
2. 測度の構成	29
1. 準備	29
2. 本題	30
3. 具体例	37
3.1. \mathbb{R}	37
3.2. 確率	39
3. 確認事項	40
1. well-definedness	40
1.1. sup, inf	40

4. 参考文献 40

測度論で確率論を+完全理解+したい。ついでに情報理論もやりたいし、更には最近始まった情報幾何のゼミでも活かしていきたい。ところで君、学部なんだつたっけ？

1. 抽象的測度論

普通の本だと先にボ렐集合をとってきて測度を構成して……ってやるけど、今回の本ではとりあえず測度・可測関数の性質を確認してから構成してという流れでした。それに従って実装をしていきます。

1. 可測性、測度空間

def 1.1.1 (可測空間)。集合 Ω の部分集合の族 \mathfrak{B} で、以下をみたすものを σ 代数といいう。

- (1) $\Omega \in \mathfrak{B}$
- (2) $A \in \mathfrak{B} \Rightarrow A^C \in \mathfrak{B}$
- (3) \mathfrak{B} の元の族 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ について、 $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{B}$

Ω とその上の σ 代数 \mathfrak{B} の組 (Ω, \mathfrak{B}) を可測空間といい、 σ 代数 \mathfrak{B} の元を可測集合といいう。(特に、確率論では可測集合のことを事象といいう。)

note: 族が \mathbb{N} -indexed だけど、有限個の族を考えるときは適切に \emptyset を加えることで同じように考えられる。

thm 1.1.2 (Ω, \mathfrak{B}) を可測空間とする。 \mathfrak{B} の元の族 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ について以下が成り立つ。

- (1) $\emptyset \in \mathfrak{B}$
- (2) $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{B}$
- (3) $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_i, \liminf_{n \rightarrow \infty} A_i \in \mathfrak{B}$

proof.

(1) def 1.1.1 (1), (2) より、 $\Omega^C = \emptyset \in \mathfrak{B}$

(2)

$$\begin{aligned}
 A_i \in \mathfrak{B}(i \in \mathbb{N}) &\Rightarrow A_i^c \in \mathfrak{B}(i \in \mathbb{N}) && (\because \text{def 1.1.1 (2)}) \\
 &\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^c \in \mathfrak{B} && (\because \text{def 1.1.1 (3)}) \\
 &\Rightarrow \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i^c \right)^c = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{B} && (\because \text{ド・モルガンの定理})
 \end{aligned}$$

より示せた.

$$(3) \limsup_{n \rightarrow \infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j, \liminf_{n \rightarrow \infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=i}^{\infty} A_j \text{ なので, (2) と def 1.1.1 (3) より従う.}$$

■

def 1.1.3 $+\infty$ は $\forall r \in \mathbb{R}, r < +\infty$ を, $-\infty$ は $\forall r \in \mathbb{R}, r > -\infty$ を満たすものとして定める. また, $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty]$, $\mathbb{R}^* := [-\infty, +\infty]$ として定める.

def 1.1.4 (測度). 可測空間 (Ω, \mathfrak{B}) 上の測度 $m : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^+$ は以下を満たすもの.

(1) $A \in \mathfrak{B}$ について, $m(A) \geq 0$. 特に, $m(\emptyset) = 0$

(2) \mathfrak{B} の元の族 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ について, どの $i, j \in \mathbb{N} (i \neq j)$ で互いに素 ($A_i \cap A_j = \emptyset$) ならば,

$$m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} m(A_i)$$

可測空間 (Ω, \mathfrak{B}) の Ω, \mathfrak{B} と測度 m の組 $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間という. (特に, 可測空間上の測度 P であって, $P(\Omega) = 1$ であるような測度空間を確率空間という.)

def 1.1.5 (σ 有限性). 測度空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ について, $m(\Omega_i) < \infty$ かつ $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i = \Omega$ をみたす互いに素な可測集合の族 $\{\Omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が存在するとき, 測度空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を σ 有限な測度空間という.

thm 1.1.6 $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間とする. \mathfrak{B} の元の族 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ について以下が成り立つ.

$$(1) A_i \subset A_{i+1} (i \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i) = m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)$$

$$(2) m(A_1) < \infty \text{かつ } A_i \supset A_{i+1} (i \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i) = m\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)$$

$$(3) \liminf_{i \rightarrow \infty} m(A_i) \geq m\left(\liminf_{i \rightarrow \infty} A_i\right)$$

$$(4) m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) < \infty \Rightarrow \limsup_{i \rightarrow \infty} m(A_i) \leq m\left(\limsup_{i \rightarrow \infty} A_i\right)$$

proof.

(1) $B_1 := A_1, B_{i+1} := A_{i+1} - A_i = A_{i+1} \cap A_i^c (i \in \mathbb{N})$ とおくと, 族 $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ の要素は def 1.1.1 より \mathfrak{B} に含まれ, 互いに素である. また, $A_i = \bigcup_{j=1}^i B_j$ であるので,

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) &= m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^i B_j\right) \\ &= m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} m(B_i) \quad (\because \sigma \text{ 加法性}) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^j m(B_i) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{i=1}^j B_i\right) \quad (\because \sigma \text{ 加法性}) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} m(A_j) \end{aligned}$$

より示せた.

(2) $B_i := A_1 - A_i = A_1 \cap A_i^c (i \in \mathbb{N})$ とおくと, 族 $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ の要素は def 1.1.1 より \mathfrak{B} に含まれ, $B_i \subset B_{i+1} (i \in \mathbb{N})$ である. また, $A_1 \supset B$ ならば $m(A_1 - B) + m(B) = m(A_1) < \infty$ なので,

$$\begin{aligned} m\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) &= m\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_1 - B_i)\right) \\ &= m\left(A_1 - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) \\ &= m(A_1) - m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) \\ &= m(A_1) - \lim_{i \rightarrow \infty} m(B_i) \quad \because (1) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} (m(A_1) - m(B_i)) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_1 - B_i) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i) \end{aligned}$$

より示せた.

(3) $B_i := \bigcap_{j=i}^{\infty} A_j$ とおくと, $B_i \subset A_i, B_i \subset B_{i+1}$ ($i \in \mathbb{N}$) ので,

$$\begin{aligned} m\left(\liminf_{i \rightarrow \infty} A_i\right) &= m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcap_{j=i}^{\infty} A_j\right) \\ &= m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} m(B_i) \quad \because(1) \\ &= \liminf_{i \rightarrow \infty} m(B_i) \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} m(A_i) \end{aligned}$$

より示せた.

(4) $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ とおくと,

$$\begin{aligned} m\left(\limsup_{i \rightarrow \infty} A_i\right) &= m\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right) \\ &= m(A) - m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left(A - \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right)\right) \\ &= m(A) - \lim_{i \rightarrow \infty} m\left(A - \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right) \quad \because(1) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(m(A) - m\left(A - \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right)\right) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right) \\ &= \limsup_{i \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right) \\ &\geq \limsup_{i \rightarrow \infty} m(A_j) \end{aligned}$$

より示せた.

■

2. 可測関数

def 1.2.7 (可測関数). $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間とする. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ について, 任意の $a \in \mathbb{R}^*$ で

$$f^{-1}((a, \infty]) = \{\omega \in \Omega; f(\omega) > a\} \in \mathfrak{B}$$

をみたすとき, f を可測関数という.

prop 1.2.8 $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ を可測関数とする. 任意の $a \in \mathbb{R}^*$ で以下が成り立つ.

- (1) $f^{-1}([a, \infty]) = \{\omega \in \Omega; f(\omega) \geq a\} \in \mathfrak{B}$
- (2) $f^{-1}((-\infty, a)) = \{\omega \in \Omega; f(\omega) < a\} \in \mathfrak{B}$
- (3) $f^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega; f(\omega) \leq a\} \in \mathfrak{B}$

proof.

(1) 可測関数の定義より, 任意の $a \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}$ について

$$f^{-1}\left(\left(a - \frac{1}{n}, \infty\right]\right) = \left\{\omega \in \Omega; f(\omega) > a - \frac{1}{n}\right\} \in \mathfrak{B}$$

で σ 代数の加算無限個の和は閉じているので,

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left\{\omega \in \Omega; f(\omega) > a - \frac{1}{n}\right\} = \{\omega \in \Omega; f(\omega) \geq a\} \in \mathfrak{B}$$

(2) (1) の complement を取ればよい.

(3) 可測関数の $(a, \infty]$ の逆像に関する complement を取ればよい.

■

lem 1.2.9 $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ を可測関数とする. 任意の $a, b \in \mathbb{R}^* (a < b)$ で以下が成り立つ.

- (1) $f^{-1}((a, b)) \in \mathfrak{B}$
- (2) $f^{-1}([a, b)) \in \mathfrak{B}$
- (3) $f^{-1}((a, b]) \in \mathfrak{B}$
- (4) $f^{-1}([a, b)) \in \mathfrak{B}$
- (5) $f^{-1}(\{a\}) \in \mathfrak{B}$

proof.

$f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathfrak{B}, f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathfrak{B}$ が確認できれば, prop 1.2.8 より 2 つの積集合 (と必要であれば $\{+\infty\}, \{-\infty\}$ を f で引き戻したものの和集合) を取ればよい.

prop 1.2.8 より, $f^{-1}((-\infty, a)), f^{-1}((a, \infty]) \in \mathfrak{B}$ なので,

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}([-\infty, -i]) = f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathfrak{B}$$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}((i, \infty]) = f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathfrak{B}$$

以上より示せた.

■

lem 1.2.10 $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間とする. $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$, $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*(i \in \mathbb{N})$ を可測関数とする. このとき, 以下が成り立つ.

- (1) $(f + g)(\omega) := f(\omega) + g(\omega)$, $(f \cdot g)(\omega) := f(\omega) \cdot g(\omega)$ と定義すると, $f + g$, $f \cdot g$ は可測関数
- (2) $\sup \{f_i(\omega); i \in \mathbb{N}\}$, $\inf \{f_i(\omega); i \in \mathbb{N}\}$ は可測関数
- (3) $\limsup_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega)$, $\liminf_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega)$ は可測関数
- (4) 任意の $\omega \in \Omega$ で $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) \in \mathbb{R}^*$ ならば, $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega)$ は可測関数

proof.

(1) $(f + g)^{-1}((a, \infty]) \in \mathfrak{B}$ を示せばよい.

$$\begin{aligned} (f + g)^{-1}((a, \infty]) &= \{\omega \in \Omega; (f + g)(\omega) > a\} \\ &= \{\omega \in \Omega; f(\omega) + g(\omega) > a\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \{\omega \in \Omega; f(\omega) > a - r\} \cap \{\omega \in \Omega; g(\omega) > r\} \end{aligned} \tag{1}$$

$$= \bigcup_{q \in \mathbb{R}} \{\omega \in \Omega; f(\omega) > a - q\} \cap \{\omega \in \Omega; g(\omega) > q\} \tag{2}$$

$$\in \mathfrak{B} \tag{3}$$

(1) \rightarrow (2) : 左右の包含を示して等号が成立することを確認する.

- (1) \subset (2) :

$$\begin{aligned} (1) \ni \omega' &\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}, \omega' \in \{\omega \in \Omega; f(\omega) + r > a\} \cap \{\omega \in \Omega; g(\omega) > r\} \\ &\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \omega' \in \{\omega \in \Omega; f(\omega) + r > (a - \varepsilon)\} \cap \{\omega \in \Omega; g(\omega) > (r + \varepsilon)\} \\ &\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, r \leq \exists q \leq r + \varepsilon, \\ &\quad \omega' \in \{\omega \in \Omega; f(\omega) + q > a\} \cap \{\omega \in \Omega; g(\omega) > q\} \ (\because \text{実数の稠密性}) \\ &\Rightarrow \omega' \in (2) \end{aligned}$$

より示せた.

- (1) \supset (2) : $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ なので示せた.

(2) \rightarrow (3) : \mathbb{Q} の要素は加算無限個なので σ 代数の性質より従う.

- (2) 任意の $a \in \mathbb{R}^*$ について, $(a, \infty]$ の逆像が \mathfrak{B} に入っていればよい. $a \in \mathbb{R}^*$ を固定する. \sup の定義から, $\sup \{f_i(\omega); i \in \mathbb{N}\} > a$ ならば, あるインデックス i が存在して $\{\omega \in \Omega; f_i(\omega) > a\}$ なので,

$$\{\omega \in \Omega; \sup \{f_i(\omega); i \in \mathbb{N}\} > a\} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega; f_i(\omega) > a\}$$

一方, $\omega \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega; f_i(\omega) > a\}$ についても, あるインデックス i について $f_i(\omega) > a$ なので, \sup の定義より,

$$\omega \in \{\omega \in \Omega; \sup \{f_i(\omega); i \in \mathbb{N}\} > a\}$$

なので,

$$\{\omega \in \Omega; \sup \{f_i(\omega); i \in \mathbb{N}\} > a\} \supset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega; f_i(\omega) > a\}$$

また, 可測関数の $(a, \infty]$ の逆像は \mathfrak{B} に含まれるので, \mathfrak{B} は σ 代数なので加算無限個の和についても閉じている. 以上より

$$\{\omega \in \Omega; \sup \{f_i(\omega); i \in \mathbb{N}\} > a\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega; f_i(\omega) > a\} \in \mathfrak{B}$$

\inf も同様.

- (3) $\limsup_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) = \inf_{j \geq 1} \sup_{i \geq j} f_i(\omega)$ なので, (2) より,

$$\inf_{j \geq 1} \sup_{i \geq j} f_i(\omega) \in \mathfrak{B}$$

同様に,

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) = \sup_{j \geq 1} \inf_{i \geq j} f_i(\omega) \in \mathfrak{B}$$

- (4) $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) \in \mathbb{R}^* = \sup \{f_i(\omega); i \in \mathbb{N}\} = \inf \{f_i(\omega); i \in \mathbb{N}\}$ なので, (2) より成り立つ.

lem 1.2.11 $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間とする. 定数関数 r を

$$\begin{aligned} r: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ * &\longmapsto r \end{aligned}$$

で与えると, これは可測関数になる.

proof.

可測関数の定義から任意の $a \in \mathbb{R}^*$ について, $(a, \infty]$ の逆像が \mathfrak{B} に入っていればいいが, $a \geq r$ ではその逆像は $\emptyset \in \mathfrak{B}$, $a < r$ ではその逆像は $\Omega \in \mathfrak{B}$ なので示された.

thm 1.2.12 $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間, $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ を可測関数とする. このとき, 以下が成り立つ.

- (1) $\{\omega \in \Omega; f(\omega) > g(\omega)\} \in \mathfrak{B}$
- (2) $\{\omega \in \Omega; f(\omega) = g(\omega)\} \in \mathfrak{B}$

proof.

- (1) $f - g$ が可測関数であることが確認できればよい. lem 1.2.10より, 可測関数同士の和と積について可測関数になり, lem 1.2.11より, 定数関数のは可測関数なので, $f - g = f + (-1)^*g$ は可測関数. 可測関数の定義から任意の $a \in \mathbb{R}^*$ について, $(a, \infty]$ の逆像が \mathfrak{B} に入っているので, 特に $a = 0$ の時が求める結果である.
- (2) $f - g$ が可測関数なので, lem 1.2.9(5) より, $a = 0$ の時が求める結果となっている.

■

3. 単関数

def 1.3.13 (特性関数). 特性関数 $1_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ を以下で与える.

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

def 1.3.14 (単関数). $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間とする. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ について, $a_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathfrak{B} (i \in \{1, 2, \dots, n\})$ が存在して, $f(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(\omega)$ と書けるとき, f を単関数であるという.

この定義の元で特性関数は単関数である.

def 1.3.15 (単関数の積分). $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ を单関数とする. f の $A \in \mathfrak{B}$ での積分を

$$\int_A f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A \cap A_i)$$

で与える.

f の表し方は一意的ではないため, この積分の well-definedness について以下で確認していく.

lem 1.3.16 (特性関数の積分の性質). $O, A \in \mathfrak{B}$ のとき, 以下が成り立つ.

- (1) $B, C \in \mathfrak{B}$ で $A = B \cup C, B \cap C = \emptyset$ ならば, $\int_O 1_A dm = \int_O 1_B dm + \int_O 1_C dm$
- (2) $b, c \in \mathbb{R}$ ならば, $\int_O (b + c) \cdot 1_A dm = \int_O b \cdot 1_A dm + \int_O c \cdot 1_A dm$

proof.

(1)

$$\int_O 1_A dm = m(O \cap A) \quad (4)$$

$$= m((O \cap B) \cup (O \cap C)) \\ = m(O \cap B) + m(O \cap C) \quad (5)$$

$$= \int_O 1_B dm + \int_O 1_C dm \quad (6)$$

(4), (6)は单関数の積分の定義から, (5)は測度の σ 加法性から従う.

(2)

$$\begin{aligned} \int_O (b+c) \cdot 1_A dm &= (b+c)m(O \cap A) \\ &= bm(O \cap A) + cm(O \cap A) \\ &= \int_O b \cdot 1_A dm + \int_O c \cdot 1_A dm \end{aligned}$$

より示せた.

■

prop 1.3.17 (单関数の積分の一意性). $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間, $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ を $f = g$ であるような单関数とする. 任意の $O \in \mathfrak{B}$ について,

$$\int_O f dm = \int_O g dm$$

proof.

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(\omega) \quad (a_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathfrak{B}(i \in \{1, 2, \dots, n\})) \\ g(\omega) &= \sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}(\omega) \quad (b_j \in \mathbb{R}, B_j \in \mathfrak{B}(j \in \{1, 2, \dots, m\})) \end{aligned}$$

と置く. また, 関数として同じだけでなく積分後も一致するという意味での等号を $\stackrel{\int}{=}$ で与え, 積分を保つとよぶ.

$$A_c := \Omega - \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ について } a_c = 0 \text{ として } f' : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^* \text{ を}$$

$$f'(\omega) = f(\omega) + a_c 1_{A_c}(\omega)$$

で与えると、係数 0 の特性関数の積分は 0 なので、 $\int f = f'$ である。同様に $B_c := \Omega - \bigcup_{j=1}^m B_i$ について $b_c = 0$ として $g' : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ を

$$g'(\omega) = g(\omega) + b_c 1_{B_c}(\omega)$$

で与える。

lem 1.3.16より、单関数を互いに素な集合に分解する操作は積分を保つ。单関数は有限個の集合に対して定義されるので、どの集合も互いに素になるように分解することで得られる集合は高々 2^n 個である。よって、この操作で得られるのはまた单関数であり、操作については積分を保つ。单関数の互いに素な集合を合併する操作は積分を保つので、高々 2^n 種類の係数の中で同じ値の係数である集合の合併を取る操作で得られるのは单関数、操作については積分を保つ。以上より、 f', g' について、集合を互いに素に分割し、同じ係数で合併を取る操作をした单関数 f'', g'' を

$$\begin{aligned} f''(\omega) &= \sum_{i=1}^{n'} a''_i 1_{A'_i}(\omega) & \left(a''_i \in \mathbb{R}, A''_i \in \mathfrak{B}(i \in \{1, 2, \dots, n'\}), \bigcup_{i=1}^{n'} A''_i = \Omega \right) \\ g''(\omega) &= \sum_{j=1}^{m'} b''_j 1_{B'_j}(\omega) & \left(b''_j \in \mathbb{R}, B''_j \in \mathfrak{B}(j \in \{1, 2, \dots, m'\}), \bigcup_{j=1}^{m'} B''_j = \Omega \right) \end{aligned}$$

とおき、 $\int f = \int f' = f''$, $\int g = \int g' = g''$ となる。

$$\begin{array}{ccc} f & \xlongequal{\int} & f' & \xlongequal{\int} & f'' \\ \parallel & & & & \\ g & \xlongequal{\int} & g' & \xlongequal{\int} & g'' \end{array}$$

$\omega \in \Omega$ について、 $f''(\omega) = g''(\omega)$ より、任意の $a \in \mathbb{R}^*$ について、

$$\{\omega \in \Omega; f''(\omega) = a\} = \{\omega \in \Omega; g''(\omega) = a\}$$

特性関数に使われる集合は互いに素でその合併は全体集合かつ、その数は有限なので、 f'', g'' の各項の係数が一致することとその項の特性関数に使われる集合が等しいことは同値である。よって、 $n' = m'$ であり、インデックスを適切に取り替えることで、 $a''_i = b''_i, A''_i = B''_i$ になるのでその積分値も等しく、 $\int f'' = \int g''$ 。

$$\begin{array}{ccc}
 f & \xlongequal{\int} & f' & \xlongequal{\int} & f'' \\
 \| & & & & \| \\
 g & \xlongequal{\int} & g' & \xlongequal{\int} & g'' \\
 \end{array}$$

以上より，元の f, g についても積分値が一致し， $\int f = \int g$.

■

cor 1.3.18 単関数の特性関数を用いた表示では係数はすべて異なり，また，特性関数に用いている集合は互いに素かつ全ての和集合は全体集合と思って良い．加えて，単関数は可測関数（特性関数の証明と同様）．

lem 1.3.19 $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間， $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ を非負値単関数， $A, B \in \mathfrak{B}$ とするとき，以下が成り立つ．

$$(1) A \cap B = \emptyset \Rightarrow \int_{A \cup B} f dm = \int_A f dm + \int_B f dm$$

$$(2) A \subset B \Rightarrow \int_A f dm \leq \int_B f dm$$

$$(3) \int_A (f + g) dm = \int_A f dm + \int_A g dm$$

$$(4) \forall \omega \in A, f(\omega) \leq g(\omega) \Rightarrow \int_A f dm \leq \int_A g dm$$

proof.

$$f(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(\omega) \quad (a_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathfrak{B}(i \in \{1, 2, \dots, p\}))$$

$$g(\omega) = \sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}(\omega) \quad (b_j \in \mathbb{R}, B_j \in \mathfrak{B}(j \in \{1, 2, \dots, q\}))$$

と置く．

(1) 積分の定義より,

$$\begin{aligned}
 \int_{A \cup B} f dm &= \sum_{i=1}^p a_i m((A \cup B) \cap A_i) \\
 &= \sum_{i=1}^p a_i m((A \cap A_i) \cup (B \cap A_i)) \\
 &= \sum_{i=1}^p a_i (m(A \cap A_i) + m(B \cap A_i)) \quad (\because \sigma\text{加法性}) \\
 &= \sum_{i=1}^p a_i m(A \cap A_i) + \sum_{i=1}^p a_i m(B \cap A_i) \\
 &= \int_A f dm + \int_B f dm
 \end{aligned}$$

(2) 積分の定義より,

$$\begin{aligned}
 \int_B f dm &= \sum_{i=1}^p a_i m(B \cap A_i) \\
 &= \sum_{i=1}^p a_i m((A \cap A_i) \cup ((B - A) \cap A_i)) \\
 &= \sum_{i=1}^p a_i (m(A \cap A_i) + m((B - A) \cap A_i)) \quad (\because \sigma\text{加法性}) \\
 &\geq \sum_{i=1}^p a_i m(A \cap A_i) \quad (\because \text{測度, 単関数の非負性}) \\
 &= \int_A f dm
 \end{aligned}$$

(3) 積分の定義より,

$$\begin{aligned}
 \int_A (f + g) dm &= \sum_{i=1}^p a_i m(A \cap A_i) + \sum_{j=1}^q b_j m(A \cap B_j) \\
 &= \int_A f dm + \int_A g dm
 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int_A f dm &= \sum_{i=1}^p a_i m(A \cap A_i) \\
&= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_i m(A \cap (A_i \cap B_j)) \\
&\leq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q b_j m(A \cap (A_i \cap B_j)) \\
&\quad \left(\because \text{各 } A_i \cap B_j \text{ 上で } m(A_i \cap B_j) \neq 0 \Rightarrow f(\omega) \leq g(\omega) \right) \\
&= \sum_{j=1}^q b_j m(A \cap B_j) \\
&= \int_A g dm
\end{aligned}$$

■

4. ルベーグ積分の定義

$(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ を非負値可測関数とする. $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ (i \in \mathbb{N}_{>0})$ を

$$f_i(\omega) = \begin{cases} \frac{k}{2^i} & f(\omega) \in \left[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i} \right] \\ 2^i & f(\omega) \geq 2^i \end{cases}$$

と置くと, これは可測関数になる. この関数は

$$\forall \omega \in \Omega, f_i(\omega) \rightarrow f(\omega) (i \rightarrow \infty)$$

を満たすので, 以下の定義を得る.

def 1.4.20 (可測関数の積分 (1)). 上の f, f_i の元で, $A \in \mathfrak{B}$ 上での積分 $\int_A f dm$ を,

$$\int_A f dm = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_A f_i dm \tag{7}$$

で与える. (以後のためにこの積分を单関数の極限による積分と呼ぶ.)

以上の定義のメリットは具体的な計算ができることがあるが, デメリットとして定数倍を外に出す操作など, 基本的な操作を確認するのに手間取ることになる. それを容易に行えるのが以下の定義である.

def 1.4.21 (可測関数の積分 (2)). $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ を非負値可測関数とする. $A \in \mathfrak{B}$ 上での積分 $\int_A f dm$ を,

$$\int_A f dm = \sup_{g: \text{单関数}, 0 \leq g(\omega) \leq f(\omega)} \int_A g dm \quad (8)$$

で与える。(以後のためにこの積分を \sup による積分と呼ぶ。)

この定義のメリットは、 \sup の性質から、極限へどのような近づけ方をしても一致し、関数同士の和や関数の定数倍が積分の外でも一致することを要請する。 F を非負値可測関数の集合として和について図式で描くと、

$$\begin{array}{ccc} (F, F) & \xrightarrow{+F} & F \\ \downarrow \int \times \int & \curvearrowright & \downarrow \int \\ (\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) & \xrightarrow{+R^+} & \mathbb{R}^+ \end{array}$$

で、かっこいい。

結果としてこの2つの積分の定義は一致するため、具体的な計算や形式的な演算を容易にできる。それを次の節で示していく。

さて、一般に可測関数が非負値に限らないとき、

$$f^+(\omega) = \max(f(\omega), 0)$$

$$f^-(\omega) = \max(-f(\omega), 0)$$

で与えると、

$$f = f^+ - f^-$$

であるような、非負値可測関数 f^+, f^- に分解できる。このそれぞれに対して積分することで可測関数 f を求めることができる。ただし、 $\infty - \infty$ は不定なので、 $\int f^+ dm < \infty$ かつ $\int f^- dm < \infty$ でない場合に限り、積分を定義する。この条件を満たす可測関数 f を可積分であるとよぶ。

積分の際、積分領域が指定されていない場合、 Ω 上での積分をするものとする。

4.1. エゴロフの定理

thm 1.4.22 (エゴロフの定理). $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間、 $m(\Omega) < \infty$ とする。 $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ ($i \in \mathbb{N}_{>0}$) であるような非負値可測関数列 $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$ が可測関数 f に測度 0 を除いて収束しているとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある可測集合 $H \in \mathfrak{B}$ が存在して、

$$(1) m(H) < \varepsilon$$

$$(2) H^c \text{ で } \{f_i\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}} \text{ は } f \text{ に一様収束する}$$

proof.

$$A(r, i) := \bigcap_{k=i}^{\infty} \left\{ \omega \in \Omega; |f(\omega) - f_k(\omega)| < \frac{1}{2^i} \right\} \quad (r \in \mathbb{N}_{>0}, i \in \mathbb{N}_{>0})$$

とおく。 $|f(\omega) - f_k(\omega)|$ が可測関数なので、その $\left[-\infty, \frac{1}{2^i} \right)$ に対する逆像は可測、その加算無限個の積集合も可測集合なので、この $A(r, i)$ は可測集合である。

$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f$ を ε - δ 論法で書くと、

$$\forall \omega \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_{>0}, \forall n \geq N, |f(\omega) - f_n(\omega)| < \varepsilon$$

なので、どの $\omega \in \Omega$ についても、ある N_ω 以上の n で $|f(\omega) - f_n(\omega)| < \frac{1}{2^i}$ であるようなものがとれる。よって、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A(r, i) = \Omega$$

$\{A(r, i)\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$ は $A(r, i)$ の定義から単調増加なので、

$$A(r, 1) \subset A(r, 2) \subset \dots$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A(r, i) = \Omega$$

なので、thm 1.1.6 より、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m(A(r, i)) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A(r, i)\right) = m(\Omega)$$

それぞれの $r \in \mathbb{N}_{>0}$ について、 \lim の定義から、ある n_r 以降の n について、

$$m(A(r, n)) \geq m(\Omega) - \frac{1}{2^r}$$

$$H_R := \bigcup_{r \geq R, r \in \mathbb{N}_{>0}} A(r, n)^c \text{ とおくと、}$$

$$\begin{aligned} m(H_R) &= m\left(\bigcup_{r \geq R, r \in \mathbb{N}_{>0}} A(r, n)^c\right) \\ &= \sum_{r \geq R, r \in \mathbb{N}_{>0}} m(A(r, n)^c) \quad (\because \sigma \text{ 加法性、集合に重複がない場合は等号}) \\ &= \sum_{r \geq R, r \in \mathbb{N}_{>0}} m(\Omega) - m(A(r, n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{r \geq R, r \in \mathbb{N}_{>0}} \frac{1}{2^r} \\ &= \frac{1}{2^{R-1}} \end{aligned}$$

$\omega \in H_R^C = \bigcap_{r \geq R, r \in \mathbb{N}_{>0}} A(r, n)$ では,

$$\forall r \geq R, \forall n \geq n_r, |f(\omega) - f_n(\omega)| < \frac{1}{2^r}$$

主張に戻ると, ε に対しては, $\frac{1}{2^R} < \varepsilon$ を満たすように R をとればいい. このときの R について, H_R^C 上で一様収束することが確認できればいいが, 一様収束の定義は,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in S} |f(\omega) - f_n(\omega)| = 0$$

なので, 任意の $\delta > 0$ に対して, $\frac{1}{2^r} < \min\left(\delta, \frac{1}{2^R}\right)$ であるような r をとってこれば, $n_r \leq n$ で,

$$\sup_{\omega \in H_R^C} |f(\omega) - f_n(\omega)| \leq \frac{1}{2^r} < \delta$$

より示せた.

■

thm 1.4.23 $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間, $O \in \mathfrak{B}$ とする. $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ ($i \in \mathbb{N}_{>0}$) であるような非負値可測関数列 $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}_{>0}}$ が可測関数 f に測度 0 を除いて収束（概収束という）しているとき,

$$\int_O f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm$$

(等号の左側の積分は \sup による積分, 右側の積分は单閑数の極限による積分)

proof.

$m(O) < \infty$ のとき

適当な f に収束する非負値单閑数増加列 f_i を取ってくる. (これは单閑数の極限に用いる单閑数列も含む) このとき, thm 1.4.22より,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists H \in \mathfrak{B}, \left(m(H) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in H^C} |f(\omega) - f_n(\omega)| = 0 \right)$$

特に後者の主張より,

$$\forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall \omega \in H^C, |f(\omega) - f_n(\omega)| < \delta$$

なので, 任意の单閑数 $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$; $\forall \omega \in O, g(\omega) \geq f(\omega)$ について, 上の δ, N について, $N \leq n$ で

$$\begin{aligned} f_n(\omega) - g(\omega) &= (f_n(\omega) - f(\omega)) + (f(\omega) - g(\omega)) \\ &\geq -\delta \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \int_O g dm &= \int_{O \cap H} g dm + \int_{O \cap H^c} g dm \\ &\leq \max_{\omega \in O \cap H} g(\omega) \cdot m(O \cap H) + \int_{O \cap H^c} (f_n + \delta) dm \\ &\leq \max_{\omega \in O \cap H} g(\omega) \cdot \varepsilon + \delta \cdot m(H^c) + \int_O f_n dm \end{aligned}$$

この n に関する極限は,

$$\int_O g dm \leq \max_{\omega \in O \cap H} g(\omega) \cdot \varepsilon + \delta \cdot m(H^c) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm$$

ε, δ は任意にとれたので, 不等式

$$\int_O g dm \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm$$

を得る.

よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm$ は f 以下の任意の g についての積分の上界になっているので, \sup による積分の定義から,

$$\int_O f dm \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm$$

一方, $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ (i \in \mathbb{N}_{>0})$ は単調増加列なので, $\int_O f_n dm \leq \int_O f dm$ より, その n に関する極限は, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm \leq \int_O f dm$

以上から, 2 つの不等式を合わせて, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm = \int_O f dm$

$m(O) = \infty$ のとき, f 以下の任意の单関数 g をとってきて, $g = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ とおく.

- $\int_O g dm = \infty$ のとき
- $\int_O g dm < \infty$ のとき

で場合分けが必要である.

$$\int_O g \, dm = \infty \text{ のとき}$$

g は有限係数の特性関数の有限個の項の和なので、少なくとも一つ以上の index で, $m(A_i) = \infty$. そのうち一つを i_0 とおく. $g(\omega) \leq f(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$ より,

$$B_n := \left\{ \omega \in A_{i_0} \cap O; f_n(\omega) \leq \frac{a_{i_0}}{2} \right\}$$

とおくと, $B_n \in \mathfrak{B}$ で, かつ, f_n が単調増加なので, $\{B_n\}$ は単調増加かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A_{i_0} \cap O$. よって, thm 1.1.6 より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(B_n) = m(A_{i_0} \cap O) = \infty$$

.

一方, $B_n \in \omega$ について, $f_n(\omega) \geq \frac{a_i}{2}$ なので,

$$\int_O f_n \, dm \geq \frac{a_{i_0}}{2} m(B_n)$$

より, n に関する極限は,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n \, dm \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{i_0}}{2} m(B_n) = \infty$$

なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n \, dm = \int_O f \, dm = \sup_{g: \text{单関数}, 0 \leq g(\omega) \leq f(\omega)} \int_O g \, dm$$

$$\int_O g \, dm < \infty \text{ のとき}$$

$O' := \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap O)$ とおくと, $m(O') < \infty$ でなければならない. この O' 上での積分を考えると,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n \, dm &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, dm \\ &= \int_{O'} f \, dm \quad (\because m(O) < \infty \text{ のときの議論}) \\ &\geq \int_{O'} g \, dm \\ &= \int_O g \, dm \end{aligned}$$

g に関する \sup を取ると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm \geq \int_O f dm$$

を得る。一般に $\int_O f_n dm \leq \int_O f dm$ なので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm \leq \int_O f dm$ より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_O f_n dm = \int_O f dm$$

■

5. 収束定理

ここまでやってくると、積分と \lim を交換したくなるので交換します。

5.1. 準備

lem 1.5.24 $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間とする。

(1) $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ であるような非負値可測関数列 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ に対して、

$$f(\omega) := \sum_{i=1}^{\infty} f_i(\omega)$$

とおく。このとき、

$$\int f dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i dm$$

が、左辺が発散すれば右辺も発散するという意味で成り立つ。

(2) (単調収束定理) $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ であるような非負値可測関数列 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ について、

$$\forall \omega \in \Omega, 0 \leq f_1(\omega) \leq f_2(\omega) \leq \dots \rightarrow f(\omega)$$

を満たすとする。このとき、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i dm = \int f dm$$

が、左辺が発散すれば右辺も発散するという意味で成り立つ。

proof.

(1) f_i に収束する非負单関数の単調増加列 $\{f_{i,j}\}_{j=1}^\infty$ に対して、

$$g_j := \sum_{i=1}^j f_{i,j}$$

とおく. (f_i に収束する单関数は, 单関数の極限による積分のときに定義した单関数の族が一つの例だが, ここでは任意に取って良いことに注意.) このとき,

$$g_{j+1} - g_j = \sum_{i=1}^j (f_{i,j+1} - f_{i,j}) + f_{j+1,j+1}$$

で, $f_{i,j+1} - f_{i,j}$ は単調増加な单関数を取ってきてるので非負, $f_{j+1,j+1}$ は非負値であることから, $g_{i,j}$ は単調増加である.

$$\forall j \in \mathbb{N}, f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \geq \sum_{i=1}^j f_i \geq \sum_{i=1}^j f_{i,j} = g_j \quad (9)$$

また, $\forall k \in \mathbb{N}$ について,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} g_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^j f_{i,j} \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k f_{i,j} = \sum_{i=1}^k \lim_{j \rightarrow \infty} f_{i,j} = \sum_{i=1}^k f_i$$

なので, $k \rightarrow \infty$ のとき,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} g_j \geq f \quad (10)$$

となる. よって, (9), (10)より,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} g_j = f \quad (11)$$

lem 1.2.10より f は可測となる. thm 1.4.23より, f に収束する单関数列の極限は積分後も一致するので,

$$\begin{aligned} \int f dm &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j dm \\ \int f dm &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j dm \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int \left(\sum_{i=1}^j f_{i,j} \right) dm \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^j \int f_{i,j} dm \quad (\because \text{lem 1.3.19(3)}) \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^j \int f_i dm \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i dm \end{aligned} \quad (12)$$

一方,

$$\forall j \in \mathbb{N}, f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$$

なので,

$$\int f dm \geq \int \left(\sum_{i=1}^j f_i \right) dm = \sum_{i=1}^j \int f_i dm \quad (\because \text{lem 1.3.19(3)})$$

より,

$$\int f \, dm \geq \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, dm \quad (13)$$

以上より, (12), (13)なので,

$$\int f \, dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, dm$$

(2) $f'_1 := f_1, f'_{k+1} := f_{k+1} - f_k$ とおくと, $\{f'_i\}_{i=1}^{\infty}$ は非負値関数列になる. この $\{f'_i\}_{i=1}^{\infty}$ について,
 $f = \sum_{i=1}^{\infty} f'_i$ とおくと, (1) より,

$$\int f \, dm = \sum_{i=1}^{\infty} \int f'_i \, dm \quad (14)$$

だが, $f_i = \sum_{k=1}^i f'_k$ なので,

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i \, dm &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int \left(\sum_{k=1}^i f'_k \right) \, dm \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^i \int f'_k \, dm \quad (\because \text{lem 1.3.19(3)}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int f'_k \, dm \\ &= \int f \, dm \end{aligned}$$

■

lem 1.5.25 (ファトウの補題). $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ であるような非負値可測関数列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ について,

$$\int \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i \, dm \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int f_i \, dm$$

proof.

$$g_i(\omega) := \inf \{f_n(\omega); n \geq i\}$$

とおく. $\forall i \in \mathbb{B}, f_i(\omega) \geq 0$ より, $g_i(\omega) \geq 0$. また,

$$g_i(\omega) \leq g_{i+1}(\omega) \quad (\because \inf \text{の def})$$

lem 1.5.24(2) より,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int g_i \ dm = \int \lim_{i \rightarrow \infty} g_i \ dm$$

右辺から,

$$\int \lim_{i \rightarrow \infty} g_i \ dm = \int \liminf_{i \rightarrow \infty} f_k \ dm = \int \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i \ dm$$

左辺から,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int g_i \ dm = \liminf_{i \rightarrow \infty} \int g_i \ dm \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int f_i \ dm$$

よって,

$$\int \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i \ dm \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int f_i \ dm$$

を得る.

■

def 1.5.26 (概収束, 測度収束). (Ω, \mathcal{B}, m) を測度空間, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ を可測関数, $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ であるような可測関数列 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ とする.

(1)

$$m\left(\left\{\omega \in \Omega; \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) \neq f(\omega)\right\}\right) = 0$$

を満たすとき, $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ は f に概収束する, またはほとんどいたるところ (almost everywhere) で収束するといい, $f_i \rightarrow f$ a.e. と表す.

(2)

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{i \rightarrow \infty} m\left(\left\{\omega \in \Omega; |f_i(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

を満たすとき, $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ は f に測度収束するという.

(1) で測る集合は必ずしも可測とは限らないので, 概収束するかは収束するかを確認しないといけない. 一方,

(2) では必ず可測になるので (1) に比べ簡単に条件を満たすかを確認できる.

def 1.5.27 (Ω, \mathcal{B}, m) を測度空間, $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ であるような可測関数列 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ とする.

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega, |f_i(\omega)| \leq M$$

を満たすとき, 可測関数列 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ は一様有界であるという.

5.2. 本題

thm 1.5.28 (ルベーグの有界収束定理). $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間, $m(\Omega) < \infty$ とする. 一様有界な可測関数列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が可測関数 f に概収束するならば,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i dm = \int f dm$$

proof.

$$N := \left\{ \omega \in \Omega; \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) \neq f(\omega) \right\}$$

とおく. $f_i \rightarrow f$ a.e. なので, $m(N) = 0$. よって,

$$\begin{aligned} \int_{N^c} f_n dm &= \int f_n dm \\ \int_{N^c} f dm &= \int f dm \end{aligned}$$

$$M := \sup \left\{ |f_i(\omega)|; i \in \mathbb{N} \right\}$$

とおくと, $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が一様有界なので, $M < \infty$.

lem 1.5.25より,

$$\int \liminf_{i \rightarrow \infty} (M + f_i) dm \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int (M + f_i) dm \quad (15)$$

$$\int \liminf_{i \rightarrow \infty} (M - f_i) dm \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int (M - f_i) dm \quad (16)$$

よって,

$$\begin{aligned} \int \liminf_{i \rightarrow \infty} (M + f_i) dm &= \int M + \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i dm \\ &= Mm(\Omega) + \int \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i dm \\ &= Mm(\Omega) + \int_{N^c} \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i dm \\ &= Mm(\Omega) + \int_{N^c} \liminf_{i \rightarrow \infty} f dm \quad (\because \text{def 1.5.26(1)} \text{ より, } N^c \text{ 上で関数が一致}) \\ &= Mm(\Omega) + \int \liminf_{i \rightarrow \infty} f dm \\ &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int (M + f_i) dm \quad (\because (15)) \\ &= \liminf_{i \rightarrow \infty} \left(Mm(\Omega) + \int f_i dm \right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$= Mm(M) + \liminf_{i \rightarrow \infty} \int f_i dm \quad (18)$$

(17), (18)の比較により, $f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i = \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i$ なので,

$$\int f dm \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int f_i dm \quad (19)$$

また,

$$\begin{aligned} \liminf_{i \rightarrow \infty} (-f_i(\omega)) &= \liminf_{i \rightarrow \infty} \inf_{i \leq k} (-f_k(\omega)) \\ &= \liminf_{i \rightarrow \infty} \inf_{i \leq k} (-f_k(\omega)) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(-\sup_{i \leq k} f_k(\omega) \right) \\ &= -\limsup_{i \rightarrow \infty} f_k(\omega) \end{aligned}$$

なので, 同様に計算すると,

$$\begin{aligned} \int \liminf_{i \rightarrow \infty} (M - f_i) dm &= \int M - \limsup_{i \rightarrow \infty} f_i dm \\ &= Mm(\Omega) - \int \limsup_{i \rightarrow \infty} f_i dm \\ &= Mm(\Omega) - \int_{N^C} \limsup_{i \rightarrow \infty} f_i dm \\ &= Mm(\Omega) - \int_{N^C} \limsup_{i \rightarrow \infty} f dm \quad (\because \text{def 1.5.26(1) より, } N^C \text{ 上で関数が一致}) \\ &= Mm(\Omega) - \int \limsup_{i \rightarrow \infty} f dm \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int (M - f_i) dm \quad (\because (16)) \\ &= \liminf_{i \rightarrow \infty} \left(Mm(M) - \int f_i dm \right) \\ &= Mm(M) - \limsup_{i \rightarrow \infty} \int f_i dm \quad (21) \end{aligned}$$

(20), (21)の比較により, $f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i = \limsup_{i \rightarrow \infty} f_i$ なので,

$$\int f dm \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} \int f_i dm \quad (22)$$

一般に, $\liminf_{i \rightarrow \infty} f_i \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} f_i$ だが, (19), (22)より,

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \int f_i dm \leq \int f dm \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int f_i dm$$

なので極限が一致し,

$$\int f \ dm = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i \ dm$$

となり、所望の結果を得る.

■

thm 1.5.29 (ルベーグの優収束定理). (Ω, \mathcal{B}, m) を測度空間とする. 可測関数列 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ が可測関数 f に概収束し、可積分な可測関数 g が存在して、 $|f_i(\omega)| \leq g(\omega)$ がほとんどいたるところで成立すれば、

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i \ dm = \int f \ dm$$

proof.

$$N := \left\{ \omega \in \Omega; \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) \neq f(\omega) \right\}$$

とおくと、 $f_i \rightarrow f$ a.e. なので $m(N) = 0$,

$$G := \left\{ \omega \in \Omega; \exists i \in \mathbb{N}, |f_i(\omega)| > g(\omega) \right\}$$

とおくと、ほとんどいたるところで $|f_i| \leq g$ なので $m(G) = 0$. よって、

$$\begin{aligned} \int_{N^c} f_n \ dm &= \int f_n \ dm \\ \int_{G^c} f_n \ dm &= \int f_n \ dm \\ \int_{N^c} f \ dm &= \int f \ dm \\ \int_{G^c} f \ dm &= \int f \ dm \end{aligned}$$

lem 1.5.25より、測度 0 である G 以外でファトウの補題の仮定を満たすので、

$$\int \liminf_{i \rightarrow \infty} (g + f_i) \ dm \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int (g + f_i) \ dm \quad (23)$$

$$\int \liminf_{i \rightarrow \infty} (g - f_i) \ dm \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int (g - f_i) \ dm \quad (24)$$

よって、

$$\begin{aligned} \int \liminf_{i \rightarrow \infty} (g + f_i) \ dm &= \int g + \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i \ dm \\ &= \int g \ dm + \int \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i \ dm \\ &= \int g \ dm + \int_{N^c} \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i \ dm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int g \, dm + \int_{N^c} \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i \, dm \quad (\because \text{def 1.5.26(1) より, } N^c \text{ 上で関数が一致}) \\
&= \int g \, dm + \int \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i \, dm
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int (g + f_i) \, dm \quad (\because (23)) \\
&= \liminf_{i \rightarrow \infty} \left(\int g \, dm + \int f_i \, dm \right) \\
&= \int g \, dm + \liminf_{i \rightarrow \infty} \int f_i \, dm
\end{aligned} \tag{26}$$

(25), (26)の比較により, $f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i = \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i$ であることと, g が可積分であることから $\int g \, dm < \infty$ より,

$$\int f \, dm \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int f_i \, dm \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\int \liminf_{i \rightarrow \infty} (g - f_i) \, dm &= \int g - \limsup_{i \rightarrow \infty} f_i \, dm \\
&= \int g \, dm - \int \limsup_{i \rightarrow \infty} f_i \, dm \\
&= \int g \, dm - \int_{N^c} \limsup_{i \rightarrow \infty} f_i \, dm \\
&= \int g \, dm - \int_{N^c} \limsup_{i \rightarrow \infty} f \, dm \quad (\because \text{def 1.5.26(1) より, } N^c \text{ 上で関数が一致}) \\
&= \int g \, dm - \int \limsup_{i \rightarrow \infty} f \, dm
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int (g - f_i) \, dm \quad (\because (24)) \\
&= \liminf_{i \rightarrow \infty} \left(\int g \, dm - \int f_i \, dm \right) \\
&= \int g \, dm - \limsup_{i \rightarrow \infty} \int f_i \, dm
\end{aligned} \tag{29}$$

(28), (29)の比較により, $f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i = \limsup_{i \rightarrow \infty} f_i$ なので,

$$\int f \, dm \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} \int f_i \, dm \tag{30}$$

よって,

$$\int f \, dm = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i \, dm$$

となり, 所望の結果を得る.

■

lem 1.5.30 (マルコフ不等式). (Ω, \mathcal{B}, m) を測度空間, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ を非負値可測関数とする. このとき以下が成り立つ.

$$\forall a > 0, m(f^{-1}[a, \infty]) \leq \frac{\int f dm}{a}$$

proof.

任意の $a > 0$ について,

$$\begin{aligned} \int f dm &\geq \int_{f^{-1}[a, \infty]} f dm \\ &\geq \int_{f^{-1}[a, \infty]} a \cdot 1_{f^{-1}[a, \infty]} dm \\ &= a \cdot \int_{f^{-1}[a, \infty]} 1_{f^{-1}[a, \infty]} dm \\ &= a \cdot m(f^{-1}[a, \infty]) \end{aligned}$$

より辺々 a で割ることで示せた. ■

cor 1.5.31 (Ω, \mathcal{B}, m) を測度空間, 可測関数列 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ が単調増加, $\sup \left\{ \int |f_i| dm; i \in \mathbb{N} \right\} < \infty$ とする. このとき, $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega)$ はほとんどいたるところで収束し,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i dm = \int \lim_{i \rightarrow \infty} f_i dm$$

proof.

$\{f_i\}_{i=1}^\infty$ が単調増加なので,

$$\begin{aligned} \left\{ \omega \in \Omega; \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) = \infty \right\} &= \bigcap_{k=1}^\infty \left\{ \omega \in \Omega; \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) > k \right\} \\ &= \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{i=1}^\infty \left\{ \omega \in \Omega; \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) > k \right\} \end{aligned}$$

で, $\{\omega \in \Omega; f_n(\omega) > i\}$ が i に関して単調増加なので, その測度は,

$$\begin{aligned} m\left(\left\{ \omega \in \Omega; \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) = \infty \right\}\right) &= m\left(\bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{i=1}^\infty \left\{ \omega \in \Omega; \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) > k \right\}\right) \\ &\leq m\left(\bigcup_{i=n}^\infty \left\{ \omega \in \Omega; f_i(\omega) > n \right\}\right) (\forall n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{i \rightarrow \infty} m(\{\omega \in \Omega; f_i(\omega) > n\}) \quad (\because \text{thm 1.1.6 (4)}) \\
&= \sup_{i \geq 1} m(\{\omega \in \Omega; f_i(\omega) > n\}) \quad (\because \lim \leq \sup) \\
&\leq \frac{\sup_{i \geq 1} \int |f_i| dm}{n} \quad (\because \text{lem 1.5.30})
\end{aligned}$$

仮定より, $\sup \left\{ \int |f_i| dm; i \in \mathbb{N} \right\} < \infty$ で, n は任意にとっていいので,

$$m\left(\left\{\omega \in \Omega; \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) = \infty\right\}\right) = 0$$

一方, f_i の単調増加性から, f_1 での $\{-\infty\}$ に対する逆像をみればいいが,

$$m\left(\left\{\omega \in \Omega; \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega) = -\infty\right\}\right) > 0$$

とすれば, f_i の可積分性に反するので測度は 0 である.

以上より, ほとんどいたるところで極限 $f(\omega) := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega)$ が存在し, lem 1.2.10(4) より f は可測になる.
この f について,

$$\begin{aligned}
\int \lim_{i \rightarrow \infty} |f_i| dm &= \int \liminf_{i \rightarrow \infty} |f_i| dm \\
&\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int |f_i| dm \quad (\because \text{lem 1.5.25}) \\
&\leq \sup \left\{ \int |f_i| dm; i \in \mathbb{N} \right\} < \infty
\end{aligned}$$

なので可積分である. $\Omega_f := \left\{ \omega \in \Omega; \lim_{i \rightarrow \infty} |f_i(\omega)| < \infty \right\}$ とおくと, 可測関数の一点に対する逆像は可測なので, $\Omega_f \in \mathcal{B}$. よって, thm 1.5.29 で $g = f$ をとれば仮定を満たすので,

$$\int f dm = \int_{\Omega_f} f dm = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega_f} f_i dm = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f dm$$

■

2. 測度の構成

1. 準備

def 2.1.32 (Algebra). 集合 Ω 上の集合族 \mathcal{A} が以下を満たすとき, \mathcal{A} を代数 (Algebra, alg.) という.

- (1) $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- (3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

def 2.1.33 (有限加法的測度). alg. \mathcal{A} 上の集合関数 $m : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$ が以下を満たすとき, m を有限加法的測度という.

- (1) $\forall A \in \mathcal{A}, m(A) \geq 0 \wedge m(\emptyset) = 0$
- (2) $(A, B \in \mathcal{A} \wedge A \cap B = \emptyset) \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

def 2.1.34 (外測度). 集合関数 $m^* : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ が以下を満たすとき, m^* を外測度という.

- (1) $m^*(\emptyset) = 0$
- (2) $A \subset B \subset \Omega \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$
- (3) $A_i \subset \Omega (i \in \mathbb{N}) \Rightarrow m^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} m^*(A_i)$

def 2.1.35 (可測集合). 外測度 m^* が Ω 上に定義されているとき,

$$\forall E \subset \Omega, m^*(E) = m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E) \quad (31)$$

を満たす集合 $A \subset \Omega$ を可測集合（または端的に可測）とよび, その集合全体を \mathfrak{B}_{m^*} とかく.

以下の文脈では def 1.1.1での可測集合ではないことに注意する.

lem 2.1.36 外測度 m^* に対して, $A \subset \Omega$ が以下を満たせば A は可測集合である.

$$\forall E \subset \Omega, m^*(E) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E) \quad (32)$$

proof.

def 2.1.34(3) より,

$$m^*(E) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E)$$

なので, 式 (32)を満たせば, 式 (31)をみたす.

■

2. 本題

prop 2.2.37 \mathcal{A} を Ω 上の alg., m を \mathcal{A} 上の有限加法的測度とする. 集合関数 $m^* : 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ を, 任意の $B \subset \Omega$ に対して

$$m^*(B) := \inf_{A_i \in \mathcal{A}, B \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i} \sum_{i \in \mathbb{N}} m(A_i)$$

で与えると、この m^* は外測度となる。

proof.

def 2.1.34のそれぞれを確認すればよい。

(1) 定義より $\forall B \subset \Omega, m^*(B) \geq 0$. \emptyset は \emptyset を被覆し、その有限加法的測度は下限の 0 を取るので、

$$m^*(\emptyset) \leq m(\emptyset) = 0$$

よって、 $m^*(\emptyset) = 0$

(2) $A \subset B$ とする。 B を被覆するどのような高々加算個の \mathcal{A} の族 $\{B_i\}$ についても A の被覆となっているので、

$$\begin{aligned} m^*(B) &= \inf_{B_i \in \mathcal{A}, B \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i} \sum_{i \in \mathbb{N}} m(B_i) \\ &\geq \inf_{A_i \in \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i} \sum_{i \in \mathbb{N}} m(A_i) \\ &= m^*(A) \end{aligned}$$

(3) それぞれの $A_i \subset \Omega$ について、inf の定義より、どのような $\varepsilon > 0$ に対しても、

$$m^*(A_i) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} m(A'_{i,j}) - \frac{\varepsilon}{2^i}$$

をみたすようにそれぞれの A_i に対する被覆 $\{A'_{i,j}\} \subset \mathcal{A}$ がとれる。また、それぞれの A_i を被覆する集合族 $\{A_{i,j}\}$ は $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} A'_{i,j}$ なので、

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{N}} m^*(A_i) &\geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} m(A'_{i,j}) - \frac{\varepsilon}{2^i} \right) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} m(A'_{i,j}) - \varepsilon \\ &\geq \inf_{A'_k \in \mathcal{A}, \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A'_k} \sum_{k \in \mathbb{N}} m(A'_k) - \varepsilon \\ &= m^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) - \varepsilon \end{aligned}$$

以上より、 ε は任意にとってよかったので、

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} m^*(A_i) \geq m^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)$$

を得る。

よって示せた。 ■

thm 2.2.38 def 2.1.35で定めた \mathfrak{B}_{m^*} は σ 代数となる。また、外測度 m^* を \mathfrak{B}_{m^*} 上に制限したものを m で表すと、 $(\Omega, \mathfrak{B}_{m^*}, m)$ は測度空間になる。

proof.

(\mathfrak{B}_{m^*} が σ 代数となること)

def 1.1.1を満たすことを確認すればよい。

(1) $\forall E \subset \Omega, \emptyset \cap E = \emptyset, \emptyset^c \cap E = E$ なので、

$$\begin{aligned} m^*(\emptyset \cap E) + m^*(\emptyset^c \cap E) &= m^*(\emptyset) + m^*(E) \\ &= 0 + m^*(E) \\ &= m^*(E) \end{aligned}$$

より、 $\emptyset \in \mathfrak{B}_{m^*}$ 。

(2) $A \in \mathfrak{B}_{m^*}$ について、

$$\forall E \subset \Omega, m^*(E) = m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E)$$

を満たすが、この A と A^c を読み替えれば、 $A^c \in \mathfrak{B}_{m^*}$ 。

(3) 互いに素であるような \mathfrak{B}_{m^*} の族 $\{A_i\}$ について、

$$\forall E \subset \Omega, m^*(E) = m^*\left(\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \cap E\right) + m^*\left(\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)^c \cap E\right)$$

を示せば良い。まず、有限個の和の場合を確認し、その後、加算無限個の和について示す。

$A, B \in \mathfrak{B}_{m^*}$ について、任意の $E \subset \Omega$ で、

$$\begin{aligned} m^*((A \cup B) \cap E) + m^*((A \cup B)^c \cap E) &= m^*((A \cap E) \cup (A^c \cap B \cap E)) + m^*(A^c \cap B^c \cap E) \\ &\leq m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap B \cap E) + m^*(A^c \cap B^c \cap E) \quad (\because \text{def 2.1.34}) \\ &\leq m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E) \quad (\because B \text{ の可測性}) \\ &\leq m^*(E) \quad (\because A \text{ の可測性}) \end{aligned}$$

よって、lem 2.1.36より $A \cup B \in \mathfrak{B}_{m^*}$ で、有限個の和について閉じていることが示せた。

また, 互いに素な $A, B \subset \Omega$ について, $A \cup B \subset \Omega$ について, \inf の定義より, どのような $\varepsilon > 0$ に対しても,

$$m^*(A \cup B) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} m(A_{i,j}) - \varepsilon$$

をみたすようにそれぞれの $A \cup B$ に対する被覆 $\{A_{i,j}\} \subset \mathcal{A}$ がとれる. よって, そのような被覆に対して, $\{A_{i,j} \cap A\}$ が A の, $\{A_{i,j} \cap B\}$ が B の被覆になっていることに注意すると,

$$\begin{aligned} m^*(A \cup B) &\geq \sum_{j \in \mathbb{N}} m(A_{i,j}) - \varepsilon \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} m((A_{i,j} \cap A) \cup (A_{i,j} \cap B) \cup (A_{i,j} - (A \cup B))) - \varepsilon \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} (m(A_{i,j} \cap A) + m(A_{i,j} \cap B) + m(A_{i,j} - (A \cup B))) - \varepsilon \quad (\because \text{def 2.1.33(2)}) \\ &\geq \sum_{j \in \mathbb{N}} (m(A_{i,j} \cap A) + m(A_{i,j} \cap B)) - \varepsilon \quad (\because \text{def 2.1.33(1)}) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} m(A_{i,j} \cap A) + \sum_{j \in \mathbb{N}} m(A_{i,j} \cap B) - \varepsilon \\ &\geq \inf_{A'_i \in \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A'_i} \sum_{i \in \mathbb{N}} m(A'_i) + \inf_{B'_i \in \mathcal{A}, B \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B'_i} \sum_{i \in \mathbb{N}} m(B'_i) - \varepsilon \\ &= m^*(A) + m^*(B) - \varepsilon \end{aligned}$$

以上より, ε は任意にとってよかつたので, def 2.1.34(3) と合わせて,

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$$

を得る.

加算無限個の和について確認する. 互いに素であるような \mathfrak{B}_{m^*} の族 $\{A_i\}$ について, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $E \subset \Omega$ について,

$$\begin{aligned} m^*(E) &= m^*\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap E\right) + m^*\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c \cap E\right) \\ &\geq m^*\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap E\right) + m^*\left(\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)^c \cap E\right) \left(\because \text{def 2.1.34(2)}, \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^c \supset \left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)^c\right) \\ &= \sum_{i=1}^n m^*(A_i \cap E) + m^*\left(\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)^c \cap E\right) \end{aligned}$$

より, $n \rightarrow \infty$ になると.

$$\begin{aligned} m^*(E) &\geq \sum_{i=1}^\infty m^*(A_i \cap E) + m^*\left(\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)^c \cap E\right) \quad (33) \\ &\geq m^*\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i \cap E\right) + m^*\left(\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)^c \cap E\right) \quad (\because \text{def 2.1.34 (3)}) \end{aligned}$$

以上より, lem 2.1.36の仮定をみたしているので, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{B}_{m^*}$

(m が測度になること)

(1)

$$\begin{aligned} m(\emptyset) &= m^*(\emptyset) = 0 \\ \forall A \in \mathfrak{B}_{m^*}, m(A) &= m^*(A) \geq m^*(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

(2)

式 (33)について, $E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ を与えると, 不等式

$$m^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i)$$

を得る. def 2.1.34(3) の不等式と合わせて,

$$m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = m^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

よって, \mathfrak{B}_{m^*} が σ 代数で, m が測度であることが示せた.

■

prop 2.2.39 Ω の部分集合の族 \mathcal{A} に対して, \mathcal{A} を含む最小の σ 代数が存在する. ここでいう最小の σ 代数とは, \mathcal{A} を含む任意の σ 代数がそれを含むという意味で最小である.

proof.

\mathcal{A} を含む σ 代数全体を \mathcal{F} とおく. 明らかに, $2^\Omega \in \mathcal{F}$ なので, $\mathcal{F} \neq \emptyset$. $\mathcal{B} := \bigcap_{\mathcal{C} \in \mathcal{F}} \mathcal{C}$ とおくと, この \mathcal{B} は \mathcal{A} を含む. また,

(1) $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$ について, \mathcal{C} は σ 代数なので $\emptyset \in \mathcal{C}$. なので, $\emptyset \in \mathcal{B}$

(2) $B \in \mathcal{B}$ について, $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$ が σ 代数なので, $B \in \mathcal{C} \Rightarrow B^c \in \mathcal{C}$. どの \mathcal{C} についても成り立つので, $B^c \in \mathcal{B}$

(3) $\{B_i\} \subset \mathcal{B}$ について, $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$ が σ 代数なので, $\{B_i\} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{C}$. どの \mathcal{C} についても成り立つので, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{B}$

よって, \mathcal{B} は \mathcal{A} を含むような最小の σ 代数である.

上の命題の元で次の定義ができる.

def 2.2.40 Ω の部分集合の族 \mathcal{A} を含む最小の σ 代数を $\sigma(\mathcal{A})$ とかき, \mathcal{A} の生成する σ 代数という.

thm 2.2.41 (Höpf の拡張定理). alg. \mathcal{A} 上に有限加法的測度 m が存在するとき,

(1) m を $\sigma(\mathcal{A})$ 上の測度に拡張できる必要十分条件は, 任意の互いに素な $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$ について,

$$m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} m(A_i) \quad (34)$$

を満たすことである. (\mathcal{A} 上だけ ($\neq \sigma(\mathcal{A})$) の振る舞いを見れば十分)

(2) さらに, $\{\Omega_i\} \subset \mathcal{A}$ で, $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i$ かつ, $m(\Omega_i) < \infty$ をみたすものがあれば, その拡張は一意的である.

proof.

(1)

必要性は定義から明らか.

条件の元で一つでも拡張できる物があることを示せばよい. prop 2.2.37による外測度 m^* を \mathfrak{B}_{m^*} に制限したものをそのまま m^* とかくと, thm 2.2.38より, $(\Omega, \mathfrak{B}_{m^*}, m^*)$ は測度空間になる. \mathfrak{B}_{m^*} は \mathcal{A} を含むような σ 代数なので, $\sigma(\mathcal{A})$ を含む. よって, m^* を $\sigma(\mathcal{A})$ に制限したものをそのまま m^* とかくと, この m^* は測度である.

$A \in \mathcal{A}$ について, どのような $\varepsilon > 0$ に対しても,

$$m^*(A) \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} m(A_i) - \varepsilon$$

をみたすような A に対する被覆 $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$ がとれる. この族に対して,

$$B_1 := A_1 \cap A, B_i := (A_i \cap A) - \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j \quad (i \in \mathbb{N})$$

で族 $\{B_i\}$ を与えると, この族の元は互いに素でかつ $B_i \in \mathcal{A}$, $B_i \subset A_i$, $\bigcup_{i=1}^n B_i = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap A$. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) - \varepsilon \\ &\geq \sum_{i=1}^n m(A_i) - \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{i=1}^n m(B_i) - \varepsilon \quad (\because A_i \subset B_i) \\ &\geq m\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) - \varepsilon \quad (\because \text{def 2.1.33}) \end{aligned}$$

なので $n \rightarrow \infty$ で,

$$m^*(A) \geq m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) - \varepsilon = m(A) - \varepsilon$$

ε は任意に取ってよかったです,

$$m^*(A) \geq m(A)$$

を得る. 他方, A は A を被覆するので, def 2.1.34より,

$$m^*(A) \leq m(A)$$

以上から,

$$m^*(A) = m(A)$$

を得る. よって, m^* が m を $\sigma(\mathcal{A})$ 上に拡張したもののが一つになっていることを示せた.

(2)

m^* を $\sigma(\mathcal{A})$ に制限したものの他に, m を拡張するような測度 m' があるとする. $A \in \sigma(\mathcal{A})$ について, どのような $\varepsilon > 0$ に対しても,

$$m^*(A) \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} m(A_i) - \varepsilon$$

をみたすような A に対する被覆 $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$ がとれる. この $A, \{A_i\}$ について,

$$\begin{aligned} m'(A) &\leq m'\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \quad (\because m' \text{ の } \sigma \text{ 加法性}) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} m'(A_i) \quad (\because \{A_i\} \text{ は } A \text{ を被覆}) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} m(A_i) \quad (\because m' \text{ は } m \text{ の拡張なので } \mathcal{A} \text{ 上で一致}) \\ &\leq m^*(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

ε は任意にとっていいので,

$$m'(A) \leq m^*(A)$$

仮定より, $\Omega_i \in \mathcal{A}, m(\Omega_i) < \infty$.

$$m'(A) \leq m^*(A), m'\left(\Omega_i \cap A^c\right) \leq m^*\left(\Omega_i \cap A^c\right)$$

なので, ある i について $A \subset \Omega_i$ のとき,

$$\begin{aligned}
m'(\Omega_i \cap A^c) &= m'(\Omega_i) - m'(A) \\
&= m(\Omega_i) - m'(A) \\
&\geq m^*(\Omega_i) - m'(A) \quad (\because \text{prop 2.2.37}) \\
&\geq m^*(\Omega_i) - m^*(A) \\
&= m^*(\Omega_i \cap A^c)
\end{aligned}$$

以上より, $m'(\Omega_i \cap A^c) = m^*(\Omega_i \cap A^c)$, なので,

$$m'(A) = m^*(A)$$

一般に, $A \in \sigma(\mathcal{A})$ について, $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\Omega_i \cap A)$ と分解できるので,

$$\begin{aligned}
m'(A) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} m'(\Omega_i \cap A) \quad (\because \sigma \text{ 加法性}) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} m^*(\Omega_i \cap A) \\
&= m^*(A) \quad (\because \sigma \text{ 加法性})
\end{aligned}$$

なので, $\sigma(\mathcal{A})$ 上で $m' = m^*$ となり, 示せた.

■

3. 具体例

3.1. \mathbb{R}

(1) alg. と有限加法的測度を構成する

$$\mathcal{A}_0 := \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i); n \in \mathbb{N}, a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots, a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{A}_{\square} := \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i]; n \in \mathbb{N}, a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots, a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{A}_{\square} := \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i); n \in \mathbb{N}, a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots, a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{A}_{\square} := \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]; n \in \mathbb{N}, a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots, a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_{\square} \cup \mathcal{A}_{\square} \cup \mathcal{A}_{\square}$$

で定義される集合族 \mathcal{A} に対して, 集合関数 $m : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ を,

$$\mathcal{A} \ni A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_{(),i}, b_{(),i}) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_{[],i}, b_{[],i}] \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_{[],i}, b_{[],i}) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_{[],i}, b_{[],i}]$$

であって、どの区間に対しても互いに素となるようにかけるので、

$$m(A) = + \sum_{i=1}^{\infty} b_{(),i} - a_{(),i} + \sum_{i=1}^{\infty} b_{[],i} - a_{[],i} + \sum_{i=1}^{\infty} b_{[],i} - a_{[],i} + \sum_{i=1}^{\infty} b_{[],i} - a_{[],i}$$

で与えると、この \mathcal{A} は alg. に、 m は有限加法的測度になる。

これを $\sigma(\mathcal{A})$ 上に拡張する。 $\sigma(\mathcal{A}) \ni A$ について、

$$m^*(A) := \inf_{\substack{A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i, \{I_i\} \subset \mathcal{A}}} \sum_{i \in \mathbb{N}} m(I_i)$$

で与えると、 $(\mathbb{R}, \sigma(\mathcal{A}), m^*)$ は測度空間になる。thm 2.2.41(1) より、 m^* は m の拡張になっている。また、 $I_i = [i, i+1]$ とおくと、 $m(I_i) = i+1 - i = 1 < \infty$ かつ、 $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} I_i = \mathbb{R}$ なので、thm 2.2.41(2) より、上の測度空間は m から拡張される一意的な測度空間である。（この σ 代数を Borel 集合、測度を Borel 測度という）

この測度空間の元で、 \mathbb{Q} の測度を確認してみる。

まず、 \mathbb{Q} が可測かを確認する。 $q \in \mathbb{Q}$ に対して、 $[q, q]$ は可測。また、 $\sigma(\mathcal{A})$ は σ 代数なので、

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} [q, q] = \mathbb{Q} \in \sigma(\mathcal{A})$$

なので可測。（ \mathfrak{B}_{m^*} の元はかならずしも $\sigma(\mathcal{A})$ に含まれないが、 \mathcal{A} の元はかならず含まれることに注意）

\mathbb{Q} の測度は、 m^* の σ 加法性から、

$$m^*(\mathbb{Q}) = m^*\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} [q, q]\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} m^*([q, q]) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} m([q, q]) = 0$$

$f(x) = x$ を考える。

$$\{x \in \mathbb{R}; f(x) > a\} = (a, \infty) \in \mathcal{A}$$

なので f は可測関数である。この測度空間での $[a, b]$ 上の積分は、

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f dm &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \int \left(a + \frac{i}{n}(b-a) \right) \cdot I_{\left[a + \frac{i}{n}(b-a), a + \frac{i+1}{n}(b-a) \right]} dm \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(a + \frac{i}{n}(b-a) \right) \cdot \frac{1}{n}(b-a) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(b-a) \sum_{i=0}^{n-1} \left(a + \frac{i}{n}(b-a) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(b-a) \left(an + \frac{1}{2}(n-1)(b-a) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (b-a) \left(\frac{1}{2}(n-1)(b+a) + a \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (b-a) \left(\frac{1}{2} \frac{n-1}{n} (b+a) + \frac{a}{n} \right) \\
&= (b-a) \frac{1}{2} (b+a) \\
&= \frac{b^2 - a^2}{2}
\end{aligned}$$

なので、通常のリーマン積分と一致することがわかる。

この議論では \mathcal{A} をすいぶんと豪勢に構成したが、 $\sigma(\mathcal{A})$ を作るだけなら、 \mathcal{A} を構成するどれかを含む最小の σ 代数をもってこればそれと一致する。証明はつけないが、lem 1.2.9と同様の議論によって示すことができる。

3.2. 確率

サイコロの例を考える。

集合 Ω_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) に対して、 $\Omega = \bigcup_{i=1}^6 \Omega_i$ とおく、0個以上の Ω_i の和の族を \mathfrak{B} とおく。また、測度 P を $P(\Omega_i) = \frac{1}{6}$ (2つ以上の事象の和の測度も同様に定義する) とおく ($P(\Omega) = 1$ となるような P を一般に確率測度とよぶ。) と、 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ で測度空間になる。

X を $X(\omega) := i$ (if $\omega \in \Omega_i$) で与えると、これは可測関数となる（これによってサイコロが定義される）。 X に対する平均値 $E(X)$ を

$$E(X) := \int X \, dP$$

で与えると、このサイコロの平均値は、

$$E(X) := \int X \, dP = \sum_{i=1}^6 X(\Omega_i) P(\Omega_i) = \sum_{i=1}^6 i \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

となり、我々の知る平均値が現れる。

連続分布についても同様の議論ができる。 f_X を確率密度関数とする。 σ 代数として Borel 集合を、その確率測度を $P(\{a\}) = f_X(a)$ を満たすように定め、その上の可測関数を $X(\{a\}) = a$ とおくと、

$$E(X) = \int X \, dP = \int X(\{a\}) P(\{a\}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, dx$$

となって、我々の知る期待値の計算ができる。

3. 確認事項

1. well-definedness

1.1. sup, inf

def 3.1.42 $\mathfrak{R} \subset 2^{\mathbb{R}^*}$ とする. $\sup : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ を, $S \in \mathfrak{R}$ について,

$$\forall c \in S, c \leq \sup(S) \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathfrak{R}, \sup(S) < c + \varepsilon$$

として定める. また, $\inf : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ を, $S \in \mathfrak{R}$ について,

$$\forall c \in S, c \geq \inf(S) \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathfrak{R}, c < \inf(S) + \varepsilon$$

として定める.

この定義では, 論理式を満たす値が存在するか, 存在すればただ一つに決まるかを確認しなければならない. \sup について確認する. \inf も適切に読み替えることで確認できる.

- (存在性) $R := \{r \in \mathbb{R}; \forall c \in S, c \leq r\}$ について考えると, 特に ∞ を含むのでこの集合は非空である. $c \in \mathbb{R}^*$ s.t. $(\forall s \in S, s > c \wedge \forall r \in R, c \leq r)$ について考えると, この c は R に入ってなければならないので, R は最小の元 c が取れる. R の定義から, この c は $\forall \varepsilon > 0, \exists s \in S, c - s < \varepsilon$ をみたすので, 存在が確認できた.
- (一意性) 論理式を満たすものが 2 つ取れたとする. これを $x, y (x < y)$ と置く. このとき定義から, $\forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathbb{R}, c \geq x < y < c + \varepsilon$ だが, 任意の $\varepsilon > 0$ についてこれが言えるので, $x = y$.

4. 参考文献

(1) 森真, ルベーグ積分超入門 - 数理解析や数理ファイナンス理解のために -, 共立出版, 2004