解析学セミナー：ルベーグ積分超入門

京都工芸繊維大学 工芸科学部 設計工学域 情報工学課程
B4　estis_jk

2021/06/06

目次

　測度論で確率論を†完全理解†したい．ついでに情報理論もやりたいし，更には最近始まった情報幾何のゼミでも活かしていきたい．ところで君，学部なんだっけ？

1. 抽象的測度論

　普通の本だと先にボレル集合をとってきて測度を構成して …… ってやるけど，今回の本ではとりあえず測度・可測関数の性質を確認してから構成してという流れでした．それに従って実装をしていきます．

1. 可測性，測度空間

def 1.1.1 (可測空間). 集合 Ω の部分集合の族 $\mathfrak{B}$ で，以下をみたすものを σ **代数**という．

(1) $\Omega \in \mathfrak{B}$

(2) $A \in \mathfrak{B} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathfrak{B}$

(3) $\mathfrak{B}$ の元の族 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ について，$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{B}$

Ω とその上の σ 代数 $\mathfrak{B}$ の組 $(\Omega, \mathfrak{B})$ を**可測空間**といい，σ 代数 $\mathfrak{B}$ の元を**可測集合**という．(特に，確率論では可測集合のことを事象という．)

note: 族が $\mathbb{N}$-indexed だけど，有限個の族を考えるときは適切に $\emptyset$ を加えることで同じように考えられる．

thm 1.1.2 $(\Omega, \mathfrak{B})$ を可測空間とする．$\mathfrak{B}$ の元の族 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ について以下が成り立つ．

(1) $\emptyset \in \mathfrak{B}$

(2) $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{B}$

(3) $\limsup_{n\to\infty} A_i, \liminf_{n\to\infty} A_i \in \mathfrak{B}$

proof.

(1) def 1.1.1 (1)，(2) より，$\Omega^{\mathsf{C}} = \emptyset \in \mathfrak{B}$

(2)

$$\begin{aligned} A_i \in \mathfrak{B}(i \in \mathbb{N}) &\Rightarrow A_i^{\mathsf{C}} \in \mathfrak{B}(i \in \mathbb{N}) && (\because \text{def 1.1.1 (2)}) \\ &\Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i^{\mathsf{C}} \in \mathfrak{B} && (\because \text{def 1.1.1 (3)}) \\ &\Rightarrow \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i^{\mathsf{C}}\right)^{\mathsf{C}} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{B} && (\because \text{ド・モルガンの定理}) \end{aligned}$$

より示せた．

(3) $\limsup_{n\to\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j$, $\liminf_{n\to\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=i}^{\infty} A_j$ なので，(2) と def 1.1.1 (3) より従う．

■

def 1.1.3 $+\infty$ は $\forall r \in \mathbb{R}, r < +\infty$ を，$-\infty$ は $\forall r \in \mathbb{R}, r > -\infty$ を満たすものとして定める．また，$\mathbb{R}^+ := [0, +\infty]$，$\mathbb{R}^* := [-\infty, +\infty]$ として定める．

def 1.1.4 (測度). 可測空間 $(\Omega, \mathfrak{B})$ 上の**測度** $m : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}^+$ は以下を満たすもの．

(1) $A \in \mathfrak{B}$ について，$m(A) \geq 0$. 特に，$m(\emptyset) = 0$

(2) $\mathfrak{B}$ の元の族 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ について，どの $i,j\in\mathbb{N}(i\neq j)$ で互いに素（$A_i\cap A_j=\emptyset$）ならば，

$$m\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i\right)=\sum_{i\in\mathbb{N}}m(A_i)$$

可測空間 $(\Omega,\mathfrak{B})$ の $\Omega,\mathfrak{B}$ と測度 m の組 $(\Omega,\mathfrak{B},m)$ を**測度空間**という．(特に，可測空間上の測度 P であって，$P(\Omega)=1$ であるような測度空間を確率空間という．)

def 1.1.5 (σ 有限性).　測度空間 $(\Omega,\mathfrak{B},m)$ について，$m(\Omega_i)<\infty$ かつ $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\Omega_i=\Omega$ をみたす互いに素な可測集合の族 $\{\Omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が存在するとき，測度空間 $(\Omega,\mathfrak{B},m)$ を σ **有限**な測度空間という．

thm 1.1.6　$(\Omega,\mathfrak{B},m)$ を測度空間とする．$\mathfrak{B}$ の元の族 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ について以下が成り立つ．

(1) $A_i\subset A_{i+1}(i\in\mathbb{N})\Rightarrow\lim_{i\to\infty}m(A_i)=m\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i\right)$

(2) $m(A_1)<\infty$ かつ $A_i\supset A_{i+1}(i\in\mathbb{N})\Rightarrow\lim_{i\to\infty}m(A_i)=m\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}A_i\right)$

(3) $\liminf_{i\to\infty}m(A_i)\geq m\left(\liminf_{i\to\infty}A_i\right)$

(4) $m\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i\right)<\infty\Rightarrow\limsup_{i\to\infty}m(A_i)\leq m\left(\limsup_{i\to\infty}A_i\right)$

proof.

(1) $B_1 := A_1, B_{i+1} := A_{i+1} - A_i = A_{i+1} \cap A_i^{\complement} (i \in \mathbb{N})$ とおくと，族 $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ の要素は def 1.1.1より $\mathfrak{B}$ に含まれ，互いに素である．また，$A_i = \bigcup_{j=1}^{i} B_j$ であるので，

$$
\begin{aligned}
m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) &= m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^{i} B_j\right) \\
&= m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} m(B_i) && (\because \sigma \text{ 加法性}) \\
&= \lim_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{j} m(B_i) \\
&= \lim_{j \to \infty} m\left(\bigcup_{i=1}^{j} B_i\right) && (\because \sigma \text{ 加法性}) \\
&= \lim_{j \to \infty} m(A_j)
\end{aligned}
$$

より示せた．

(2) $B_i := A_1 - A_i = A_1 \cap A_i^{\complement} (i \in \mathbb{N})$ とおくと，族 $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ の要素は def 1.1.1より $\mathfrak{B}$ に含まれ，$B_i \subset B_{i+1} (i \in \mathbb{N})$ である．また，$A_1 \supset B$ ならば $m(A_1 - B) + m(B) = m(A_1) < \infty$ なので，

$$
\begin{aligned}
m\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) &= m\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_1 - B_i)\right) \\
&= m\left(A_1 - \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) \\
&= m(A_1) - m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) \\
&= m(A_1) - \lim_{i \to \infty} m(B_i) && \because (1) \\
&= \lim_{i \to \infty} \left(m(A_1) - m(B_i)\right) \\
&= \lim_{i \to \infty} m(A_1 - B_i) \\
&= \lim_{i \to \infty} m(A_i)
\end{aligned}
$$

より示せた．

(3) $B_i := \bigcap_{j=i}^{\infty} A_j$ とおくと，$B_i \subset A_i, B_i \subset B_{i+1} (i \in \mathbb{N})$ なので，

$$
\begin{aligned}
m\left(\liminf_{i\to\infty} A_i\right) &= m\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcap_{j=i}^{\infty} A_j\right) \\
&= m\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right) \\
&= \lim_{i\to\infty} m(B_i) \qquad \because (1) \\
&= \liminf_{i\to\infty} m(B_i) \\
&\leq \liminf_{i\to\infty} m(A_i)
\end{aligned}
$$

より示せた．

(4) $A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
m\left(\limsup_{i\to\infty} A_i\right) &= m\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right) \\
&= m(A) - m\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left(A - \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right)\right) \\
&= m(A) - \lim_{i\to\infty} m\left(A - \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right) \qquad \because (1) \\
&= \lim_{i\to\infty} \left(m(A) - m\left(A - \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right)\right) \\
&= \lim_{i\to\infty} m\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right) \\
&= \limsup_{i\to\infty} m\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j\right) \\
&\geq \limsup_{i\to\infty} m(A_j)
\end{aligned}
$$

より示せた．

■

2. 可測関数

def 1.2.7 (可測関数). $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間とする．$f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ について，任意の $a \in \mathbb{R}^*$ で

$$
f^{-1}((a, \infty]) = \{\ \omega \in \Omega\ ;\ f(\omega) > a\ \} \in \mathfrak{B}
$$

をみたすとき，f を**可測関数**という．

prop 1.2.8　$(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間，$f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ を可測関数とする．任意の $a \in \mathbb{R}^*$ で以下が成り立つ．

(1) $f^{-1}\big([a, \infty]\big) = \{\ \omega \in \Omega\ ;\ f(\omega) \geq a\ \}\ \in \mathfrak{B}$

(2) $f^{-1}\big((-\infty, a)\big) = \{\ \omega \in \Omega\ ;\ f(\omega) < a\ \}\ \in \mathfrak{B}$

(3) $f^{-1}\big((-\infty, a]\big) = \{\ \omega \in \Omega\ ;\ f(\omega) \leq a\ \}\ \in \mathfrak{B}$

proof.

(1) 可測関数の定義より，任意の $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$ について

$$f^{-1}\left(\left(a - \frac{1}{n}, \infty\right]\right) = \left\{\omega \in \Omega\ ;\ f(\omega) > a - \frac{1}{n}\right\} \in \mathfrak{B}$$

で σ 代数の加算無限個の和は閉じているので，

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left\{\omega \in \Omega\ ;\ f(\omega) > a - \frac{1}{n}\right\} = \{\ \omega \in \Omega\ ;\ f(\omega) \geq a\ \}\ \in \mathfrak{B}$$

(2) (1) の complement を取ればよい．

(3) 可測関数の $(a, \infty]$ の逆像に関する complement を取ればよい．

■

lem 1.2.9　$(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間，$f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ を可測関数とする．任意の $a, b \in \mathbb{R}^*(a < b)$ で以下が成り立つ．

(1) $f^{-1}\big((a, b)\big) \in \mathfrak{B}$

(2) $f^{-1}\big([a, b)\big) \in \mathfrak{B}$

(3) $f^{-1}\big((a, b]\big) \in \mathfrak{B}$

(4) $f^{-1}\big([a, b)\big) \in \mathfrak{B}$

(5) $f^{-1}\big(\{a\}\big) \in \mathfrak{B}$

proof.

$f^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \in \mathfrak{B}$，$f^{-1}\big(\{+\infty\}\big) \in \mathfrak{B}$ が確認できれば，prop 1.2.8より 2 つの積集合（と必要であれば $\{+\infty\}$，$\{-\infty\}$ を f で引き戻したものの和集合）を取ればよい．

prop 1.2.8より，$f^{-1}\big([-\infty, a)\big)$, $f^{-1}\big((a, \infty]\big) \in \mathfrak{B}$ なので，

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}\bigl([-\infty,-i)\bigr) = f^{-1}\bigl(\{-\infty\}\bigr) \in \mathfrak{B}$$
$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}\bigl((i,\infty]\bigr) = f^{-1}\bigl(\{\infty\}\bigr) \in \mathfrak{B}$$

以上より示せた．

■

lem 1.2.10 $(\Omega,\mathfrak{B},m)$ を測度空間とする．$f,g:\Omega\to\mathbb{R}^*$, $f_i:\Omega\to\mathbb{R}^*(i\in\mathbb{N})$ を可測関数とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $(f+g)(\omega) := f(\omega)+g(\omega)$, $(f\cdot g)(\omega) := f(\omega)\cdot g(\omega)$ と定義すると，$f+g$, $f\cdot g$ は可測関数

(2) $\sup\left\{ f_i(\omega)\ ;\ i\in\mathbb{N}\right\}$, $\inf\left\{ f_i(\omega)\ ;\ i\in\mathbb{N}\right\}$ は可測関数

(3) $\limsup_{i\to\infty} f_i(\omega)$，$\liminf_{i\to\infty} f_i(\omega)$ は可測関数

(4) 任意の $\omega\in\Omega$ で $\lim_{i\to\infty} f_i(\omega)\in\mathbb{R}^*$ ならば，$\lim_{i\to\infty} f_i(\omega)$ は可測関数

proof.

(1) $(f+g)^{-1}\bigl((a,\infty]\bigr)\in\mathbb{B}$ を示せばよい．

$$\begin{aligned}
(f+g)^{-1}\bigl((a,\infty]\bigr) &= \left\{\omega\in\Omega\ ;\ (f+g)(\omega)>a\right\}\\
&= \left\{\omega\in\Omega\ ;\ f(\omega)+g(\omega)>a\right\}\\
&= \bigcup_{r\in\mathbb{R}} \left\{\omega\in\Omega\ ;\ f(\omega)>a-r\right\}\cap\left\{\omega\in\Omega\ ;\ g(\omega)>r\right\} && (1)\\
&= \bigcup_{q\in\mathbb{R}} \left\{\omega\in\Omega\ ;\ f(\omega)>a-q\right\}\cap\left\{\omega\in\Omega\ ;\ g(\omega)>q\right\} && (2)\\
&\in \mathfrak{B} && (3)
\end{aligned}$$

（1）→（2）：左右の包含を示して等号が成立することを確認する．

- （1）⊂（2）：

$$\begin{aligned}
(1)\ni\omega' &\Rightarrow \exists r\in\mathbb{R}, \omega'\in\left\{\omega\in\Omega\ ;\ f(\omega)+r>a\right\}\cap\left\{\omega\in\Omega\ ;\ g(\omega)>r\right\}\\
&\Rightarrow \exists r\in\mathbb{R}, \exists\varepsilon>0, \omega'\in\left\{\omega\in\Omega\ ;\ f(\omega)+r>(a-\varepsilon)\right\}\cap\left\{\omega\in\Omega\ ;\ g(\omega)>(r+\varepsilon)\right\}\\
&\Rightarrow \exists r\in\mathbb{R}, \exists\varepsilon>0, r\le\exists q\le r+\varepsilon,\\
&\qquad \omega'\in\left\{\omega\in\Omega\ ;\ f(\omega)+q>a\right\}\cap\left\{\omega\in\Omega\ ;\ g(\omega)>q\right\}\ (\because \text{実数の稠密性})\\
&\Rightarrow \omega'\in(2)
\end{aligned}$$

より示せた．

- （1）⊃（2）：$\mathbb{R}\supset\mathbb{Q}$ なので示せた．

（2）→（3）：$\mathbb{Q}$ の要素は加算無限個なので σ 代数の性質より従う．

(2) 任意の $a \in \mathbb{R}^*$ について，$(a,\infty]$ の逆像が $\mathfrak{B}$ に入っていればよい．$a \in \mathbb{R}^*$ を固定する．sup の定義から，$\sup\left\{ f_i(\omega) \,;\, i \in \mathbb{N} \right\} > a$ ならば，あるインデックス i が存在して $\left\{ \omega \in \Omega \,;\, f_i(\omega) > a \right\}$ なので，

$$\left\{ \omega \in \Omega \,;\, \sup\left\{ f_i(\omega) \,;\, i \in \mathbb{N} \right\} > a \right\} \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left\{ \omega \in \Omega \,;\, f_i(\omega) > a \right\}$$

一方，$\omega \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left\{ \omega \in \Omega \,;\, f_i(\omega) > a \right\}$ についても，あるインデックス i について $f_i(\omega) > a$ なので，sup の定義より，

$$\omega \in \left\{ \omega \in \Omega \,;\, \sup\left\{ f_i(\omega) \,;\, i \in \mathbb{N} \right\} > a \right\}$$

なので，

$$\left\{ \omega \in \Omega \,;\, \sup\left\{ f_i(\omega) \,;\, i \in \mathbb{N} \right\} > a \right\} \supset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left\{ \omega \in \Omega \,;\, f_i(\omega) > a \right\}$$

また，可測関数の $(a,\infty]$ の逆像は $\mathfrak{B}$ に含まれるので，$\mathfrak{B}$ は σ 代数なので加算無限個の和についても閉じている．以上より

$$\left\{ \omega \in \Omega \,;\, \sup\left\{ f_i(\omega) \,;\, i \in \mathbb{N} \right\} > a \right\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left\{ \omega \in \Omega \,;\, f_i(\omega) > a \right\} \in \mathfrak{B}$$

inf も同様.

(3) $\limsup_{i\to\infty} f_i(\omega) = \inf_{j\geq 1}\sup_{i\geq j} f_i(\omega)$ なので，(2) より，

$$\inf_{j\geq 1}\sup_{i\geq j} f_i(\omega) \in \mathfrak{B}$$

同様に，

$$\liminf_{i\to\infty} f_i(\omega) = \sup_{j\geq 1}\inf_{i\geq j} f_i(\omega) \in \mathfrak{B}$$

(4) $\lim_{i\to\infty} f_i(\omega) \in \mathbb{R}^* = \sup\left\{ f_i(\omega) \,;\, i \in \mathbb{N} \right\} = \inf\left\{ f_i(\omega) \,;\, i \in \mathbb{N} \right\}$ なので，(2) より成り立つ.

■

lem 1.2.11 $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間とする．定数関数 r を

$$\begin{aligned} r\colon \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ * &\longmapsto r \end{aligned}$$

で与えると，これは可測関数になる．

proof.

可測関数の定義から任意の $a \in \mathbb{R}^*$ について，$(a,\infty]$ の逆像が $\mathfrak{B}$ に入っていればいいが，$a \geq r$ ではその逆像は $\emptyset \in \mathfrak{B}$, $a < r$ ではその逆像は $\Omega \in \mathfrak{B}$ なので示された.

■

thm 1.2.12 $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間，$f, g : \Omega \to \mathbb{R}^*$ を可測関数とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $\{\ \omega \in \Omega\ ;\ f(\omega) > g(\omega)\ \}\ \in \mathfrak{B}$

(2) $\{\ \omega \in \Omega\ ;\ f(\omega) = g(\omega)\ \}\ \in \mathfrak{B}$

proof.

(1) $f - g$ が可測関数であることが確認できればよい．lem 1.2.10より，可測関数同士の和と積について可測関数になり，lem 1.2.11より，定数関数のは可測関数なので，$f - g = f + (-1) * g$ は可測関数．可測関数の定義から任意の $a \in \mathbb{R}^*$ について，$(a, \infty]$ の逆像が $\mathfrak{B}$ に入っているので，特に $a = 0$ の時が求める結果である．

(2) $f - g$ が可測関数なので，lem 1.2.9(5) より，$a = 0$ の時が求める結果となっている．

■

3. 単関数

def 1.3.13 (特性関数). 特性関数 $1_A : \Omega \to \mathbb{R}^*$ を以下で与える．

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

def 1.3.14 (単関数). $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間とする．$f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ について，$a_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathfrak{B} (i \in \{1, 2, \cdots, n\})$ が存在して，$f(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(\omega)$ と書けるとき，f を**単関数**であるという．

この定義の元で特性関数は単関数である．

def 1.3.15 (単関数の積分). $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間，$f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ を単関数とする．f の $A \in \mathfrak{B}$ での積分を

$$\int_A f\ dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A \cap A_i)$$

で与える．

f の表し方は一意的ではないため，この積分の well-definedness について以下で確認していく．

lem 1.3.16 (特性関数の積分の性質). $O, A \in \mathfrak{B}$ のとき，以下が成り立つ．

(1) $B, C \in \mathfrak{B}$ で $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$ ならば，$\int_O 1_A\ dm = \int_O 1_B\ dm + \int_O 1_C\ dm$

(2) $b, c \in \mathbb{R}$ ならば，$\int_O (b + c) \cdot 1_A\ dm = \int_O b \cdot 1_A\ dm + \int_O c \cdot 1_A\ dm$

proof.

(1)

$$\begin{aligned}\int_O 1_A \, dm &= m(O \cap A) && (4)\\ &= m\big((O \cap B) \cup (O \cap C)\big) \\ &= m\big((O \cap B)\big) + m\big((O \cap C)\big) && (5)\\ &= \int_O 1_B \, dm + \int_O 1_C \, dm && (6)\end{aligned}$$

(4)，(6)は単関数の積分の定義から，(5)は測度の σ 加法性から従う．

(2)

$$\begin{aligned}\int_O (b+c) \cdot 1_A \, dm &= (b+c)m(O \cap A) \\ &= bm(O \cap A) + cm(O \cap A) \\ &= \int_O b \cdot 1_A \, dm + \int_O c \cdot 1_A \, dm\end{aligned}$$

より示せた．

■

prop 1.3.17 (単関数の積分の一意性). $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間，$f, g : \Omega \to \mathbb{R}^*$ を $f = g$ であるような単関数とする．任意の $O \in \mathfrak{B}$ について，

$$\int_O f \, dm = \int_O g \, dm$$

proof.

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(\omega) && \big(a_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathfrak{B}(i \in \{1, 2, \cdots, n\})\big) \\ g(\omega) &= \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j}(\omega) && \big(b_j \in \mathbb{R}, B_j \in \mathfrak{B}(j \in \{1, 2, \cdots, m\})\big)\end{aligned}$$

と置く．また，関数として同じだけでなく積分後も一致するという意味での等号を $\overset{\int}{=}$ で与え，積分を保つとよぶ．

$A_c := \Omega - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ について $a_c = 0$ として $f' : \Omega \to \mathbb{R}^*$ を

$$f'(\omega) = f(\omega) + a_c 1_{A_c}(\omega)$$

で与えると，係数 0 の特性関数の積分は 0 なので，$f \overset{\int}{=} f'$ である．同様に $B_c := \Omega - \bigcup_{j=1}^{m} B_i$ について $b_c = 0$ として $g' : \Omega \to \mathbb{R}^*$ を

$$g'(\omega) = g(\omega) + b_c 1_{B_c}(\omega)$$

で与える．

lem 1.3.16より，単関数を互いに素な集合に分解する操作は積分を保つ．単関数は有限個の集合に対して定義されるので，どの集合も互いに素になるように分解することで得られる集合は高々 2^n 個である．よって，この操作で得られるのはまた単関数であり，操作については積分を保つ．単関数の互いに素な集合を合併する操作は積分を保つので，高々 2^n 種類の係数の中で 同じ値の係数である集合の合併を取る操作で得られるのは単関数，操作については積分を保つ．以上より，f', g' について，集合を互いに素に分割し，同じ係数で合併を取る操作をした単関数 f'', g'' を

$$f''(\omega) = \sum_{i=1}^{n'} a_i'' 1_{A_i''}(\omega) \qquad \left(a_i'' \in \mathbb{R}, A_i'' \in \mathfrak{B}(i \in \{1, 2, \cdots, n'\}), \bigcup_{i=1}^{n'} A_i'' = \Omega\right)$$

$$g''(\omega) = \sum_{j=1}^{m'} b_j'' 1_{B_j''}(\omega) \qquad \left(b_j'' \in \mathbb{R}, B_j'' \in \mathfrak{B}(j \in \{1, 2, \cdots, m'\}), \bigcup_{j=1}^{m'} B_j'' = \Omega\right)$$

とおき，$f \overset{\int}{=} f' \overset{\int}{=} f''$，$g \overset{\int}{=} g' \overset{\int}{=} g''$ となる．

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, equal, "\int"] \arrow[d, equal] & f' \arrow[r, equal, "\int"] & f'' \\ g \arrow[r, equal, "\int"] & g' \arrow[r, equal, "\int"] & g'' \end{tikzcd}$$

$\omega \in \Omega$ について，$f''(\omega) = g''(\omega)$ より，任意の $a \in \mathbb{R}^*$ について，

$$\left\{\ \omega \in \Omega\ ;\ f''(\omega) = a\ \right\} = \left\{\ \omega \in \Omega\ ;\ g''(\omega) = a\ \right\}$$

特性関数に使われる集合は互いに素でその合併は全体集合かつ，その数は有限なので，f'', g'' の各項の係数が一致することとその項の特性関数に使われる集合が等しいことは同値である．よって，$n' = m'$ であり，インデックスを適切に取り替えることで，$a_i'' = b_i'', A_i'' = B_i''$ になるのでその積分値も等しく，$f'' \overset{\int}{=} g''$．

$$
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, equal, "\int"] \arrow[d, equal] & f' \arrow[r, equal, "\int"] & f'' \arrow[d, equal, "\int"] \\
g \arrow[r, equal, "\int"] & g' \arrow[r, equal, "\int"] & g''
\end{tikzcd}
$$

以上より，元の f,g についても積分値が一致し，$f \overset{\int}{=} g$.

■

col 1.3.18　単関数の特性関数を用いた表示では係数はすべて異なり，また，特性関数に用いている集合は互いに素かつ全ての和集合は全体集合と思って良い．加えて，単関数は可測関数（特性関数の証明と同様）.

lem 1.3.19　$(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ を測度空間，$f, g : \Omega \to \mathbb{R}^*$ を非負値単関数，$A, B \in \mathfrak{B}$ とするとき，以下が成り立つ．

(1) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \displaystyle\int_{A \cup B} f\ dm = \int_A f\ dm + \int_B f\ dm$

(2) $A \subset B \Rightarrow \displaystyle\int_A f\ dm \leq \int_B f\ dm$

(3) $\displaystyle\int_A (f + g)\ dm = \int_A f\ dm + \int_A g\ dm$

(4) $\forall \omega \in A, f(\omega) \leq g(\omega) \Rightarrow \displaystyle\int_A f\ dm \leq \int_A g\ dm$

proof.

$$
\begin{aligned}
f(\omega) &= \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(\omega) & &\big(a_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathfrak{B}(i \in \{1, 2, \cdots, p\})\big) \\
g(\omega) &= \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j}(\omega) & &\big(b_j \in \mathbb{R}, B_j \in \mathfrak{B}(j \in \{1, 2, \cdots, q\})\big)
\end{aligned}
$$

と置く．

(1) 積分の定義より，

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f\,dm &= \sum_{i=1}^{p} a_i m\bigl((A\cup B)\cap A_i\bigr)\\ &= \sum_{i=1}^{p} a_i m\bigl((A\cap A_i)\cup(B\cap A_i)\bigr)\\ &= \sum_{i=1}^{p} a_i\bigl(m(A\cap A_i)+m(B\cap A_i)\bigr) \ (\because \sigma\text{加法性})\\ &= \sum_{i=1}^{p} a_i m(A\cap A_i)+\sum_{i=1}^{p} a_i m(B\cap A_i)\\ &= \int_A f\,dm+\int_B f\,dm\end{aligned}$$

(2) 積分の定義より，

$$\begin{aligned}\int_{B} f\,dm &= \sum_{i=1}^{p} a_i m(B\cap A_i)\\ &= \sum_{i=1}^{p} a_i m\bigl((A\cap A_i)\cup((B-A)\cap A_i)\bigr)\\ &= \sum_{i=1}^{p} a_i\bigl(m(A\cap A_i)+m((B-A)\cap A_i)\bigr) \ (\because \sigma\text{加法性})\\ &\geq \sum_{i=1}^{p} a_i m(A\cap A_i) \ (\because \text{測度，単関数の非負性})\\ &= \int_A f\,dm\end{aligned}$$

(3) 積分の定義より，

$$\begin{aligned}\int_{A} (f+g)\,dm &= \sum_{i=1}^{p} a_i m(A\cap A_i)+\sum_{i=1}^{q} b_j m(A\cap B_j)\\ &= \int_A f\,dm+\int_A g\,dm\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int_A f\,dm &= \sum_{i=1}^{p} a_i m(A \cap A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_i m\left(A \cap \left(A_i \cap B_j\right)\right) \\
&\le \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} b_j m\left(A \cap \left(A_i \cap B_j\right)\right) \\
&\qquad \left(\because \text{各 } A_i \cap B_j \text{ 上で } m\left(A_i \cap B_j\right) \neq 0 \Rightarrow f(\omega) \le g(\omega)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{q} b_j m\left(A \cap B_j\right) \\
&= \int_A g\,dm
\end{aligned}$$

■

2. 確認事項

1. well-definedness

1.1. $\sup, \inf$

def 2.1.20 $\mathfrak{R} \subset 2^{\mathbb{R}^*}$ とする．$\sup : \mathfrak{R} \to \mathbb{R}^*$ を，$S \in \mathfrak{R}$ について，

$$\forall c \in S, c \le \sup(S) \land \forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathfrak{R}, \sup(S) < c + \varepsilon$$

として定める．また，$\inf : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ を，$S \in \mathfrak{R}$ について，

$$\forall c \in S, c \ge \inf(S) \land \forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathbb{R}, c < \inf(S) + \varepsilon$$

として定める．

この定義では，論理式を満たす値が存在するか，存在すればただ一つに決まるかを確認しなければならない．$\sup$ について確認する．$\inf$ も適切に読み替えることで確認できる．

- （存在性）$R := \{ r \in \mathbb{R} \ ; \ \forall c \in S, c \le r \}$ について考えると，特に ∞ を含むのでこの集合は非空である．$c \in \mathbb{R}^*$ s.t. $(\forall s \in S, s > c \land \forall r \in R, c \le r)$ について考えると，この c は R に入ってなければならないので，R は最小の元 c が取れる．R の定義から，この c は $\forall \varepsilon > 0, \exists s \in S, c - s < \varepsilon$ をみたすので，存在が確認できた．
- （一意性）論理式を満たすものが 2 つ取れたとする．これを $x, y(x < y)$ と置く．このとき定義から，$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in \mathbb{R}, c \ge x < y < c + \varepsilon$ だが，任意の $\varepsilon > 0$ についてこれが言えるので，$x = y$.

3. 参考文献

(1) 森真，ルベーグ積分超入門 - 数理解析や数理ファイナンス理解のために -，共立出版，2004