UNIVERSIDAD CENTRAL

MÉTODOS NUMÉRICOS Y SIMULACIÓN
JHONATAN STEVEN MORA RODRÍGUEZ

Observaciones: Este taller debe ser entregado el próximo martes 12 de noviembre en los grupos del proyecto final del curso o en grupos de trabajo de máximo 4 estudiantes.

1. Investigue acerca del método de aceleración de Aitken y realice un pequeño marco teórico acerca de este tema.

2. Programe cada uno de los métodos visto en clase para aproximar raíces, método de la bisección, método de la regula falsi, método de Newton-Rhapson y el método del punto fijo, donde cada uno debe tener implementado el método de aceleración de Aitken.

3. Una partícula de masa m puede deslizarse sin rozamiento a lo largo de un alambre. El alambre gira en torno al origen, en un plano vertical y a una velocidad angular constante ω. Tomando en el alambre la coordenada ξ para el movimiento de la partícula, se puede demostrar que, si las condiciones iniciales vienen dadas por el alambre en posición horizontal y la partícula en reposo respecto del alambre (es decir, $\xi(0) = 0$ y $\dot{\xi}(0) = 0$), entonces la posición de la partícula sobre el alambre en función del tiempo t es

$$\xi(t) = \frac{g}{2\omega^2}\left[\cosh(\omega t) - \cos(\omega t)\right],$$

siendo $g = 9{,}8$ la aceleración de la gravedad. Supóngase que $\omega = 3$.

   (i) Realice la gráfica de la función ξ para mostra que antes de $t = 1$ la partícula alcanza una única vez la posición $\xi = 4$.

(ii) Sea t^* el tiempo para el cual la partícula alcanza la posición $\xi = 4$. Use el método cada uno de los métodos programados anteriormente para aproximar esta raíz realizando 100 iteraciones, y responda las siguiente preguntas:

- ¿Alguno de los métodos diverge?
- ¿Con cual método se obtiene un valor más preciso de t^*?

4. Una cadena uniforme, de longitud ℓ, está colocada sobre una tabla horizontal, libre de fricción, de tal manera que una longitud b de la cadena cae por el borde. Es fácil demostrar que el tiempo T que tardará la cadena en deslizarse completamente hacia abajo viene dado por

$$T = \frac{\ell}{\sqrt{g}} \ln\left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - b^2}}{b}\right), \tag{1}$$

siendo $g = 9{,}8$ la intensidad del campo gravitatorio. Si $T = 15$ y $b = 5$:

(i) mostrar que existe al menos una raíz ℓ^* positiva de la ecuación (1).

(ii) Calcular el mínimo número n de iteraciones necesarias en el algoritmo de bisección para aproximar ℓ^* con un error absoluto menor que 10^{-5}, partiendo del intervalo $[20, 30]$.

(iii) Calcular el mínimo número n de iteraciones necesarias en el algoritmo de la regula falsi para aproximar ℓ^* con un error absoluto menor que 10^{-5}, partiendo del intervalo $[20, 30]$.

a) Calcular el mínimo número n de iteraciones necesarias el métdodo de Newton-Rhapson aproximé ℓ^* con un error absoluto menor que 10^{-5}, partiendo del valor 20.

b) Mostrar que la método del punto fijo no converge en este caso, a menos que la semilla sea un valor suficientemente cercano a ℓ^*.

5. Para la radiación de un cuerpo negro se sabe que la energía radiada por unidad de volumen en el rango de longitudes de onda entre λ y $\lambda + d\lambda$ viene dada por $u(\lambda)\, d\lambda$, donde

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda KT}\right) - 1}, \tag{2}$$

siendo T la temperatura del cuerpo, c la velocidad de la luz, h la constante de Planck y K la constante de Boltzmann. Se puede demostrar que la longitud de onda $\lambda_{\max}$ para la cual $u(\lambda)$ es máxima se puede escribir como $\lambda_{\max} = \frac{\alpha hc}{KT}$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ una raíz de la ecuación trascendente

$$e^{1/\alpha}(5\alpha - 1) - 5\alpha = 0. \tag{3}$$

(i) Mostrar que la ecuación (3) tiene una única raíz en el intervalo $[0{,}15, 0{,}25]$.

(ii) Aproximar el valor de α mediante 100 iteraciones del método de la regula-falsi, partiendo del intervalo $[0{,}15, 0{,}25]$. ¿Cuál es el error sobre el eje x?

(iii) Aproximar el valor de α mediante 100 iteraciones del método de Newton-Raphson, partiendo de un punto inicial tal que nos asegure la convergencia hacia la raíz buscada. ¿Cuál es el error sobre el eje x?