

## Комплексные числа

1 Вычислите:

а)  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ ; б)  $\left(\frac{i^5+2}{i^{11}+1}\right)^2$ ; в)  $\frac{(1+3i^2)(8-i^{17})}{(2+i)^2}$ ;  
 г)  $\frac{(2+i)(4+i)(13+i)}{1+i^5}$ ; д)  $\left(\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}\right)^2$ .

2 Представьте комплексные числа в тригонометрической и показательной формах, изобразите точкам на комплексной плоскости:

а)  $-2$ ; б)  $3i$ ; в)  $4$ ; г)  $1-i\sqrt{3}$ ; д)  $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ ; е)  $\frac{1-i}{1+i}$ .

3 Даны числа  $z_1 = 1-i\sqrt{3}$ ,  $z_2 = \sqrt{3}+i$ . Вычислите:

а)  $\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2$ ; б)  $\overline{z_1 \cdot z_2}$ ; в)  $\frac{z_1}{z_2} - \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ .

4 Вычислите:

а)  $(1+i)^{27}$ ;  
 б)  $(2\sqrt{2} - 2\sqrt{6} \cdot i)^{24}$ ;  
 в)  $\left(\frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{1+i\sqrt{2}}\right)^{20}$ ;  
 г)  $2(1+i\sqrt{3})^8 - 32(1+i\sqrt{3})^4 + 128(1+i\sqrt{3})^2$ .  
 д)  $(1 + \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})^{32}$ ;  
 е)  $((2+\sqrt{3})i-1)^{12}$ ;  
 ж)  $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{20}$ ;

5 Найдите корни из комплексных чисел. Ответ запишите в алгебраической форме и изобразите точками на комплексной плоскости:

а)  $\sqrt[4]{1}$ ; б)  $\sqrt[3]{1}$ ; в)  $\sqrt[4]{1}$ ; г)  $\sqrt[3]{-64i}$ ; д)  $\sqrt{1-i}$ ; е)  $\sqrt[4]{-4}$ ; ж)  $\sqrt[3]{i}$ ; з)  $\sqrt[6]{1}$ ;

6 Изобразите множества точек на комплексной плоскости:

а)  $|z| \leq 3$ ; б)  $2 \leq |z| < 3$ ; в)  $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ ; г)  $-\frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$ ; д)  $|z-2i| < 1$ ;  
 е)  $2 \leq |z+1| \leq 3$ ; ж)  $|1-i-z| < 2$ ; з)  $\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) = 0$ ; и)  $\operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z) = 1$ .

7 Выразите  $\sin 7x$  и  $\cos 7x$  в виде многочленов от  $\sin x$  и  $\cos x$

8 Найдите все комплексные числа, сопряжённые:

а) своему квадрату;  
 б) своему кубу.

9] Решите уравнения в поле комплексных чисел:

а)  $x^2 + 2x + 5 = 0$ ;

б)  $x^2 + (1 - 2i)x - 7 - i = 0$ ;

в)  $(x + 1)^4 - 16 = 0$ ;

г)  $(x + 1)^4 + 16 = 0$ ;

д)  $x^4 + 9x^2 + 20 = 0$ .

10\*] Найдите число решений системы в зависимости от значений параметра  $a$ :

$$\begin{cases} |z + 2i - 1| = 3; \\ |z - 1| = a. \end{cases}$$

11\*] При каких  $a$  существует ровно одно решение системы неравенств:

$$\begin{cases} |z + i| \leq 3; \\ |z - 3a| \leq 2a. \end{cases}$$

12\*] На вход автомата подаётся карточка с упорядоченной парой чисел, а затем каждую секунду автомат преобразует карточку  $(x, y)$  в карточку  $(x^2 - y^2, 2xy)$ . После минуты работы автомат получил карточку с исходной парой. Найдите все возможные значения чисел на изначальной карточке.

13\*] Среди всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию  $|z - 2i| \leq 1$ , найдите число, имеющее наименьший положительный аргумент.

14\*] Найдите суммы:

а)  $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$ ;

б)  $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$ ;

15\*] Выразите  $\sin \frac{2\pi}{5}$  и  $\cos \frac{2\pi}{5}$  через радикалы от рациональных чисел.

16\*] Является ли число  $\frac{2+i}{2-i}$  корнем из 1 какой-либо степени?