# VIII

## Геометрия подпространств

1 Найдите какой-либо базис и размерность подпространства $L \subseteq \mathbb{R}^n$, которое задаётся условием $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.

2 Найдите размерность и базис пространства решений однородной СЛАУ с матрицей коэффициентов

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & 4 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3 Составьте СЛАУ, задающую линейную оболочку системы векторов:

а) $(1,1,1)^T$, $(1,2,3)^T$;

б) $(-1,1)^T$, $(1,1)^T$;

в) $(2,3)^T$, $(1,1)^T$;

г) $(1,1,1,1)^T$, $(1,2,1,3)^T$;

д) $(1,1,2,2)^T$;

е) $(1,1,1,1)^T$, $(1,1,1,3)^T$, $(3,-5,7,2)^T$, $(1,-7,5,-2)^T$;

ё) $(1,1,1,1)^T$, $(1,2,1,3)^T$, $(1,1,2,2)^T$, $(1,1,1,3)^T$;

ж) $(0,0,0,0)^T$;

з) $(1,-1,1,-1,1)^T$, $(1,1,0,0,3)^T$, $(3,1,1,-1,7)^T$, $(0,2,-1,1,2)^T$.

4 На рёбрах театраэдра написаны числа $b_1, b_2, \ldots, b_6$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 4 числа на грани так, чтобы число на каждом ребре оказалось равно сумме чисел, написанных на двух примыкающих к этому ребру гранях?

5 В вершинах куба написаны числа $b_1, b_2, \ldots, b_8$. При каких условиях на эти числа можно написать ещё 6 чисел на грани так, чтобы число в каждой вершине было равно сумме чисел на трёх сходящихся в этой вершине гранях?

6 Найдите СЛАУ, задающую линейное многообразие

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$\boxed{7}$ Постройте неоднородную СЛАУ, описывающую линейное многообразие минимальной размерности, содержащее векторы $(-5,1,2,2)^T$, $(5,1,2,2)^T$, $(4,1,1,1)^T$, $(1,1,1,0)^T$.

$\boxed{8}$ Найдите размерности и базисы суммы и пересечения подпространств $U$ и $V$:

а) $U = \left\langle (4,2,1)^T, (-3,2,0)^T, (-1,4,0)^T \right\rangle$,
$V = \left\langle (2,-3,1)^T, (5,3,13)^T, (7,0,12)^T \right\rangle$;

б) $U = \left\langle (1,2,3)^T, (4,3,1)^T, (2,-1,-5)^T \right\rangle$,
$V = \left\langle (1,1,1)^T, (-3,2,0)^T, (-2,3,1)^T \right\rangle$;

в) $U = \left\langle (1,2,3,1,1)^T, (1,0,1,-2,-2)^T, (2,0,1,-1,0)^T, (0,1,1,0,0)^T \right\rangle$,
$V = \left\langle (1,2,0,0,2)^T, (0,1,-2,3,-3)^T, (-1,2,1,2,0)^T, (1,1,-2,0,0)^T \right\rangle$;

г) $U: \ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0$,
$V = \left\langle (1,1,1,1,1)^T, (1,0,-1,1,-1)^T, (0,1,-1,-1,1)^T, (-2,1,0,1,-1)^T \right\rangle$;

д) $U: \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ x_2 - x_4 = 0; \end{cases}$

$V: \begin{cases} x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 - x_5 = 0; \end{cases}$

е) $U = \left\langle (1,2,-2,2,1)^T, (2,4,-5,4,1)^T, (2,3,-3,3,2)^T \right\rangle$,

$V: \begin{cases} x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_5 = 0. \end{cases}$

$\boxed{9}$ Пусть заданы два подпространства в $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\langle (1,1,1,1)^T, (-1,-2,0,1)^T \right\rangle,\ V = \left\langle (-1,-1,1,-1)^T, (2,2,0,1)^T \right\rangle.$$

Докажите, что $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$ и найдите проекцию вектора $(4,2,4,4)^T$ на подпространство $U$ параллельно подпространству $V$.

$\boxed{10*}$ Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы два подпространства:

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\},\ U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}.$$

Докажите, что $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ и найдите проекции векторов стандартного базиса $\mathbb{R}^n$ на $U$ и на $V$.

$\boxed{11*}$ В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 7}$ многочленов степени не выше 7 заданы два подпространства:

$$V_1 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 7} \mid f(-1) = f'(-1) = f''(-1) = 0\},$$

$$V_2 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 7} \mid f(2) = f'(2) = f''(2) = 0\}.$$

Найдите базисы суммы и пересечения этих подпространств.

$\boxed{12^*}$ В пространстве $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 8}$ многочленов степени не выше $8$ заданы два подпространства:

$$V_1 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 8} \mid f(1) = f'(1) = f''(1) = 0\},$$

$$V_2 = \{f(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leqslant 8} \mid f(-1) = f'(-1) = f''(-1) = 0\}.$$

Найдите базисы суммы и пересечения этих подпространств.

$\boxed{13^*}$ Пусть $U$, $V$, $W$ — подпространства некоторого конечномерного векторного пространства.

а) Справедлива ли формула $\dim(U + V + W) = \dim U + \dim V + \dim W -$
$- \dim(U \cap V) - \dim(V \cap W) - \dim(W \cap U) + \dim(U \cap V \cap W)$?

б) Предположим, что выполнены условия $U \cap V = V \cap U = W \cap U = \{0\}$. Верно ли тогда, что сумма $U + V + W$ прямая? Если нет, то как нужно изменить данные условия, чтобы это было верно?

$\boxed{14^*}$ Пусть $U$, $V$, $W$ — подпространства в $M_n(\mathbb{R})$, состоящие соответственно из кососимметрических, симметрических и верхнетреугольных матриц. Докажите, что $V$ и $W$ — различные прямые дополнения к $U$ в $M_n(\mathbb{R})$, и найдите проекции стандартных матричных единиц на $U$ параллельно $V$ и на $U$ параллельно $W$.

$\boxed{15^*}$ Пусть $U$ — подпространство пространства $M_4(\mathbb{F})$ размерности 7. Докажите, что $U$ содержит ненулевую симметрическую матрицу.

$\boxed{16^*}$ Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$, $\mathrm{rk}(A) \leqslant \frac{n}{2}$. Докажите, что среди решений уравнения $AX = \mathbb{O}$ есть ненулевая симметрическая матрица.

$\boxed{17^*}$ Приведите пример такого пространства $V$, что $V = U_1 \cup U_2 \cup U_3$, где $U_1$, $U_2$, $U_3$ — собственные подпространства в $V$.