$\boxed{\text{III}}$

Определители и их приложения

$\boxed{21}$ Решите систему линейных уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} 3x-5y = 1, \\ 2x-7y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y+3z = 9, \\ 3x-5y+z = -4, \\ 4x-7y+z = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-y-4z = 6, \\ 2x+3y-7z = 16, \\ 5x+2y+z = 16. \end{cases}$

$\boxed{22}$ Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 & 612 \\ 5 & 4 & 9 & 945 \\ 7 & 2 & 8 & 827 \\ 3 & 1 & 2 & 213 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 \end{vmatrix}$;

$\boxed{23}$ Для каких значений λ система уравнений будет иметь единственное решение:

а) $\begin{cases} \lambda x + y = 1, \\ x+\lambda y + z = 2, \\ y + \lambda z = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lambda x + 2y + 3z + 4v = 1, \\ (3-\lambda)x + 2y + 3z + 4v = 2, \\ (2+\lambda)x + 3y + (4-\lambda)z + v = 3, \\ 2x + 3y + 4z + v = 4. \end{cases}$

$\boxed{24}$ Найдите матрицу, обратную данной:

а) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

$\boxed{25}$ Решите матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{26}$ Вычислите определители порядка n, элементы которых заданы условиями:

а) $a_{ij} = \min\{i, j\}$; б) $a_{ij} = \max\{i, j\}$; в*) $a_{ij} = |i - j|$; г*) $a_{ij} = \text{НОД}(i, j)$;

д) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ 1, & \text{иначе;} \end{cases}$ е) $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \mid j, \\ 0, & \text{если } i \nmid j; \end{cases}$ ё*) b_{ij} равно количеству общих делителей i и j (указание: подумайте, какая связь с матрицей из пункта е).

$\boxed{27}$ Существуют ли такие невырожденные матрицы A и B, что $AB = \mathbb{O}$?

$\boxed{28}$ Квадратная матрица порядка n составлена из нечётных чисел. Докажите, что её определитель делится на 2^{n-1}.

$\boxed{29^*}$ Существуют ли такие матрицы A и B, что $AB - BA = E$?

$\boxed{30^*}$ Докажите, что $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$, где где f_n — n-тое число Фибоначчи.

$\boxed{31^*}$ Баба Яга и Кощей Бессмертный играют в такую игру: по очереди ставят произвольные действительные числа в матрицу 100 на 100. Баба Яга хочет сделать определитель матрицы каким угодно, но только не нулевым, а Кощей Бессмертный хочет помешать ей в этом. Баба Яга настояла на том, что будет ходить первой. Может ли кто-нибудь из них гарантированно победить?

$\boxed{32^*}$ Если заменить любой столбец квадратной матрицы A на столбец из π, определитель получившейся матрицы будет равняться 0. Чему равен определитель A?

$\boxed{33^*}$ Дана матрица $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Разрешается любую строку (столбец) поэлементно умножить или разделить на другую строку (соответственно, столбец). Можно ли за несколько таких операций получить матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$?

$\boxed{34^*}$ Решите уравнение: $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$\boxed{35^*}$ Все элементы матрицы 10×10 — целые числа. Известно, что у 92 элементов этой матрицы остаток от деления на 3 равен единице. Найдите остаток от деления на 3 определителя этой матрицы.

$\boxed{36^*}$ Назовём вещественную матрицу A *практически обратимой*, если найдётся такая матрица B, что элементы матрицы AB отличаются от соответствующих элементов единичной матрицы не более чем на 10^{-10}. Существуют ли практически обратимые необратимые матрицы?