Линейная алгебра. Продвинутый уровень. Программа коллоквиума

1. Отображения, композиция отображений. Образ и прообраз. Сюръекция, биекция, инъекция. Бином Ньютона и треугольник Паскаля.

2. Основные алгебраические системы. Бинарная операция на множестве. Ассоциативность, коммутативность. Группоид, полугруппа, моноид, группа, абелева группа. Кольцо. Поле. Порядок группы/кольца/поля. Порядок элемента. Подгруппа, подкольцо, подполе. Идемпотенты и нильпотенты. Есть ли в поле делители нуля. Характеристика поля. Изоморфизм алгебраических систем.

3. Отношение эквивалентности. Фактормножество. Эквивалентность, согласованная с операциями. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}_n$. Арифметика в кольце вычетов. Когда кольцо вычетов является полем. Бином Ньютона $(a+b)^p$ в поле $\mathbb{Z}_p$. Малая теорема Ферма. Линии на плоскости $\mathbb{Z}_p^2$.

4. Группа подстановок: проверка аксиом, разложение на циклы, на транспозиции, декремент и четность подстановки, четность произведения, подгруппа четных подстановок.

5. Арифметика матриц: сложение, умножение, транспонирование. Кольцо квадратных матриц над полем. Перестановочные матрицы. Разложение квадратной матрицы в произведение диагональной и трансвекций. Блочные матрицы.

6. Определители квадратных матриц и их свойства. Обратная матрица. Теорема Крамера. След квадратной матрицы и его свойства.

7. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$: определение, единственность, существование, геометрическое описание сложения и умножения, формула Муавра, извлечение корней, первообразные корни из 1.

8. Кольцо многочленов над полем. Делимость в кольце многочленов, алгоритм Евклида. НОД многочленов. Схема Горнера. Приводимые и неприводимые многочлены. Аналог основной теоремы арифметики. Алгебраически замкнутые поля. Основная теорема алгебры. Теорема Виета. Построение конечных полей.

9. Многочлены с рациональными коэффициентами. Лемма Гаусса. Признак Эйзенштейна.

10. Векторные (линейные) пространства. Аксиомы векторного пространства и следствия из них. Алгебры. Подпространства и подалгебры. Тело. Теорема Веддербёрна.

11. Линейная (не)зависимость систем векторов и свойства линейно (не)зависимых систем. Линейная оболочка системы векторов.

12. Метод Гаусса. Классификация СЛАУ (определённые, неопределённые, совместные, несовместные). Структура решения СЛАУ. Метод Гаусса на языке умножения матриц.

13. Основная лемма о линейной зависимости. Базис и размерность векторного пространства. Описание конечномерных пространств с точностью до изоморфизма. Теорема о размерности пространства решений однородной СЛАУ. Базис пространства решений однородной СЛАУ — ФСР.

14. Переход от одного базиса к другому. Матрица перехода и её свойства.

15. Ранг и база системы векторов. Ранг матрицы, теорема о ранге матрицы (= теорема о базисном миноре). Лемма о вычислении ранга матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.

Примеры билетов:

№ 100

1. Как изменится матрица перехода, если все элементы нового базиса циклически переставить?
2. Теорема Кронекера-Капелли.

№ 200

1. Является ли векторным пространством множество невырожденных квадратных матриц фиксированного порядка? Операции стандартные.
2. Отношение эквивалентности. Фактормножество.