$\boxed{\text{III}}$

Ещё немного подстановок

$\boxed{1}$ В группе S_5 решите уравнение $\sigma^2 = (345)$.

$\boxed{2}$ В группе S_n решите уравнение $\sigma^3 = (123)$.

$\boxed{3}$ Докажите, что для любой $\sigma \in S_n$ верно $\sigma\,(i_1 i_2 \ldots i_k)\,\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\sigma(i_2)\ldots\sigma(i_k))$

$\boxed{4}$ Докажите, что если $\tau = (i_1 i_2 \ldots i_k)\,(j_1 j_2 \ldots j_l)\ldots$ — разложение в произведение независимых циклов, то $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\sigma(i_2)\ldots\sigma(i_k))\,(\sigma(j_1)\sigma(j_2)\ldots\sigma(j_l))\ldots$

$\boxed{5}$ Найдите все перестановки, коммутирующие с $(146)(35) \in S_6$.

$\boxed{6}$ Сколько перестановок коммутируют с $(123)(456)$?

«Ты попал в Матрицу»

$\boxed{7}$ Вычислите:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 8 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^T$ в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 3 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 10 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{10}$;

е) $f(A)$, где $f(x) = x^3 - 5x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

ж) $f(B)$, где $f(x) = x^2 + x - 2$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{8}$ Докажите, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0.$$

$\boxed{9}$ Вычислите: а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2022}$; б) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{100}$, $\lambda \in \mathbb{R}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2022}$;

г) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{1000}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{22}$; е*) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{100}$; ё*) $\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{30}$;

$\boxed{10}$ Докажите, что $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$ для любого $n \geqslant 1$, где f_n — n-тое число Фибоначчи.

$\boxed{11}$ Найдите все матрицы второго порядка, квадраты которых равны нулевой матрице.

$\boxed{12}$ Найдите все матрицы второго порядка, квадраты которых равны единичной матрице.

$\boxed{13^*}$ A и B — две такие квадратные матрицы, что $AB + A + B = \mathbb{O}$. Докажите, что A и B перестановочны.

$\boxed{14^*}$ A и B — две такие квадратные матрицы, что $A + B = AB$. Докажите, что A и B перестановочны.

$\boxed{15^*}$ Обобщите результаты двух предыдущих задач.

$\boxed{16^*}$ Матрицы A и B не перестановочны. Может ли оказаться, что матрицы A^2 и B^2 перестановочны?

$\boxed{17^*}$ Рассматривается уравнение $X^2 - 2X - 3E = \mathbb{O}$ на множестве квадратных матриц 1000-го порядка. Докажите, что оно имеет бесконечно много решений, не являющихся диагональными матрицами.

$\boxed{18^*}$ Матрицы A и B имеют размеры 4×2 и 2×4 соответственно,
$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите BA.

$\boxed{19^*}$ Матрицы A и B имеют размеры 3×2 и 2×3 соответственно,
$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите BA.

$\boxed{20^*}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 32 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. При каких натуральных n сумма элементов первой строки матрицы A^n будет максимальной?