$\boxed{\textbf{VII}}$

Метод Гаусса. Ранг матрицы

$\boxed{1}$ Решите СЛАУ над $\mathbb{R}$, найдите ФСР соответствующей ей однородной СЛАУ:

а) $\left\{\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &=& 4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &=& 8; \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 &=& 20; \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 &=& 4; \end{array}\right.$ б) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &=& 2; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &=& 7; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &=& -7; \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &=& 14; \end{array}\right.$

в) $\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 - 3x_3 &=& -1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &=& 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 &=& 3; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &=& 1; \end{array}\right.$ г) $\left\{\begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &=& 4; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &=& -2; \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 &=& 10; \end{array}\right.$

д) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1 + x_2 - x_3 &=& 1; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 &=& 2; \\ 11x_1 - 12x_2 + 17x_3 &=& 3; \end{array}\right.$ е) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 &=& 5; \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &=& 7; \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 &=& 18. \end{array}\right.$

$\boxed{2}$ При каких значениях λ СЛАУ над $\mathbb{R}$

$$\text{а)} \left\{\begin{array}{rcr} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &=& 1; \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &=& 1; \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &=& 1; \end{array}\right. \quad \text{б)} \left\{\begin{array}{rcr} (3-2\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 &=& \lambda; \\ (2-\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 &=& 1; \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 &=& 1; \end{array}\right.$$

а) имеет единственное решение;

б) имеет бесконечное множество решений;

в) имеет ровно 2 решения;

г) несовместна?

$\boxed{3*}$ Решите СЛАУ над полями $\mathbb{Z}_3$ и $\mathbb{Z}_5$:

а) $\left\{\begin{array}{rcr} x + 2z &=& 1; \\ y + 2z &=& 2, \\ 2x + z &=& 1; \end{array}\right.$ б) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x + 2y &=& 0; \\ x + 2y + 2z &=& 2; \end{array}\right.$ в) $\left\{\begin{array}{rcr} x + 2y + 2z &=& 1; \\ 2x + y + 2z &=& 2; \\ 2x + 2y + z &=& 2. \end{array}\right.$

$\boxed{4*}$ Решите СЛАУ над полями $\mathbb{Z}_5$ и $\mathbb{Z}_7$:

в) $\left\{\begin{array}{rcr} 3x + y + 2z &=& 1; \\ x + 2y + 3z &=& 1; \\ 4x + 3y + 2z &=& 1 \end{array}\right.$ в) $\left\{\begin{array}{rcr} 3x + 2y &=& 1; \\ 3x + 2y + z &=& 2; \\ x + 3y + 4z &=& 2. \end{array}\right.$

$\boxed{5^*}$ Решите СЛАУ над полем $\mathbb{F}_4$ (элементы: $0, 1, \alpha, \alpha+1$):
а) $\begin{cases} x + \alpha y & = & \alpha + 1; \\ \alpha x + (\alpha+1)y & = & 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \alpha x + y & = & \alpha; \\ (\alpha+1)x + y & = & \alpha + 1. \end{cases}$

$\boxed{6^*}$ Найдите многочлен f наименьшей степени, принимающий заданные значения, над полем $\mathbb{Z}_5$:

а) $f(0) = 1, f(2) = 1, f(4) = 0$;

б) $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 4$;

в) $f(0) = 4, f(1) = 3, f(2) = 2, f(4) = 1$.

$\boxed{7^*}$ Имеется СЛАУ над $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \ldots x + \ldots y + \ldots z & = & 0; \\ \ldots x + \ldots y + \ldots z & = & 0; \\ \ldots x + \ldots y + \ldots z & = & 0. \end{cases}$$

Матроскин и Шарик поочерёдно вписывают вместо многоточий числа. Матроскин ходит первым. Докажите, что он всегда может добиться существования у этой СЛАУ ненулевого целочисленного решение.

$\boxed{8}$ При каких значениях λ вещественная матрица имеет наименьший ранг:

$$\text{à)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & \lambda & -2 & 3 \end{pmatrix} ?$$

$\boxed{9}$ A и B — квадратные матрицы одинакового размера. Обязательно ли $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(BA)$?

$\boxed{10}$ Может ли при элементарных преобразованиях матрицы A измениться ранг матрицы A^2?

$\boxed{11^*}$ Пусть $a_{ij} = (i-j)^2$. Найдите ранг матрицы $A = (a_{ij})$ порядка $n \geqslant 3$.

$\boxed{12^*}$ Найдите наименьший возможный ранг вещественной квадратной матрицы n-го порядка, у которой все диагональные элементы равны нулю, а все остальные элементы положительны.