Билеты по линейной алгебре для коллоквиума (by @zouyaia)

Содержание

1 Отображения, композиция отображений. Образ и прообраз. Сюръекция, биекция, инъекция.

Отображением φ из множества X в множество Y называют соответствие, которое каждому элементу $x \in X$ соотносит некоторый однозначно определённый элемент $y \in Y$:

$$\varphi : X \to Y \Leftrightarrow \forall x \in X\ \exists! y \in Y : y = \varphi(x).$$

При этом элемент $y \in Y$, соответствующий элементу $x \in X$, называют образом элемента x при отображении φ.

При заданном $y \in Y$ совокупность всех $x \in X : \varphi(x) = y$, называют прообразом элемента y и обозначают $\varphi^{-1}(y)$:

$$\varphi^{-1}(y) = \{x \in X : \varphi(x) = y\}$$

Если $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$, то отображение $\varphi\colon X \to Z$, заданное $\forall x \in X$ формулой $\varphi(x) = g(f(x))$, называется композицией (суперпозицией) отображений f и g, или сложной функцией, и обозначают $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Отображение $\varphi\colon X \to Y$:

1. сюръективно, если $\forall y \in Y\ \exists x \in X : y = \varphi(x)$ – каждый элемент множества Y является прообразом хотя бы одного элемента множества X;
2. инъективно, если $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$ – разные элементы множества X переводятся в разные элементы множества Y;
3. биективно, если оно сюръективно и инъективно одновременно.

2 Основные алгебраические системы. Бинарная операция на множестве. Ассоциативность, коммутативность. Группа, абелева группа. Кольцо. Поле. Порядок группы/кольца/поля. Порядок элемента. Подгруппа, подкольцо, подполе. Есть ли в поле делители нуля. Характеристика поля. Изоморфизм алгебраических систем.

Пусть M – произвольное множество. Операция $\circ$ называется бинарной операцией на M, если каждой паре элементов $x, y \in M$ ставится в соответствие элемент $z \in M : x \circ y = z$ (свойство $\circ$ не выводить рез-тат из множества M называется замкнутостью).

Тогда $< M, \circ >$ – алгебраическая структура.

Алгебраическая система $< G, \circ >$, состоящая из одной бинарной операции называется группой, если есть:

1. Ассоциативность
$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$
2. Нейтральный элемент
$$\forall a \in G\ \exists e \in G\colon a \circ e = e \circ a = a$$
3. Обратный элемент
$$\forall a \in G\ \exists b \in G\colon a \circ b = b \circ a = e$$

Если $\forall a, b \in G$ имеет место $a \circ b = b \circ a$, то группа называется абелевой (коммутативной).

Множество R с двумя бинарными операциями называется кольцом, если на R согласованно заданы два закона композиции $"+"$ и $"\cdot"$, так что выполняется:

1. $\{R, "+"\}$ – абелева группа,
2. $\{R, "\cdot"\}$ – ассоциативна по умножению,

3. Дистрибутивность: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, (b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Множество K называется полем, если на K согласованно заданы два закона композиции $"+"$ и $"\cdot"$, так что выполняется:

1. $\{K, "+"\}$ – аддитивная абелева группа,
2. $\{K, "\cdot"\}$ – мультипликативная абелева группа,
3. Дистрибутивность: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, (b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Порядком $|G|$ группы/кольца/поля G называется число элементов в его носителе.
Порядок элемента g из группы G – это наименьший $n \in \mathbb{N}$: $g^n = e$. Если такого n нету, то $|g| = \infty$
Подмножество L группы G называется подгруппой, если:

1. L замкнута относительно бинарной операции $\circ$,
2. $\forall a \in L$: $a^{-1} \in L$,
3. $\exists e \in L\ \forall a \in L$: $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Подмножество L кольца R называется подкольцом, если:

1. L – подгруппа аддитивной группы кольца R,
2. L – замкнута относительно умножения.

Подмножество L поля K называется подполем, если:

1. L – подкольцо кольца K,
2. $\forall a \in L\ a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \in L$,
3. $1 \in L$.

Лемма В поле нет делителей нуля
Характеристика поля — наименьшее положительное целое число n такое, что сумма n копий единицы равна нулю: $n \cdot 1 = 0$. Если такого числа не существует то характеристика равна 0 по определению.
Свойство: характеристика поля всегда 0 или простое число ($char\mathbb{Q} = 0$, $char\mathbb{Z}_p = p$).
Пусть Gи Hдве алгебраические системы. Биекция $f : G \to H$ называется изоморфизмом, если для любых $\forall a, b \in G \Rightarrow f(a) \cdot f(b) = f(a \cdot b)$.

3 Отношение эквивалентности. Фактормножество. Эквивалентность, согласованная с операциями. Кольцо вычетов Z_n. Арифметика в кольце вычетов. Когда кольцо вычетов является полем

Отношение R называется отношением эквивалентности $\sim$, если выполняется:

1. Рефлексивность: $a \sim a$
2. Симметричность: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
3. Транзитивность: $a \sim b$ и $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Фактормножество по отношению R – множество, состоящее из всех классов эквивалентности.
Отношение эквивалентности R на множестве M называется согласованным с операцией *, если:

$$a \sim a', b \sim b' \Rightarrow a * b \sim a' * b'.$$

Классом вычетов числа a по модулю n называется такое множество:

$$[a]_n = \{b \in \mathbb{Z} | (a-b) \vdots n\}.$$

Арифметика в классе вычетов: $a_1 \equiv b_1 (mod\ n)$ и $a_2 \equiv b_2 (mod\ n) \Rightarrow$

1. $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 (mod\ n)$

2. $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 (mod\ n)$

Кольцом вычетов Z_n называется множество всех классов вычетов по модулю n (фактормножество):

$$Z_n = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}$$

Арифметика в кольце вычетов:

1. $[a]_n + [b]_n = [a+b]_n$

2. $[a]_n \cdot [b]_n = [ab]_n$

Теорема Кольцо вычетов Z_n является полем тогда и только тогда, когда n – простое число:

4 Арифметика матриц: сложение, умножение, транспонирование. Кольцо квадратных матриц над полем. Перестановочные матрицы.

Сложение матриц на $<S, +, \cdot>$ $A = (a_{i,j})_{m\times n}, B = (b_{i,j})_{m\times n}$

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{m\times n}$$

Умножение матриц на $<S, +, \cdot>$ $A = (a_{i,j})_{m\times s}, B = (b_{i,j})_{s\times n}$

$$A \cdot B = (c_{i,j})_{m\times n}$$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}$$

Транспонирование A^T

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \Rightarrow A^T = (a_{ji})_{n\times m}$$

Пусть $< R, +, \cdot >$ – поле, а $n \in \mathbb{N}$. Тогда квадартные матрицы $M_n(R)$ образуют кольцо относительно оп-ций $+, \cdot$ над полем R.

Матрицы A и B называют перестановочными, если $AB = BA$

5 Определители квадратных матриц и их свойства. Обратная матрица. Теорема Крамера.

Определитель квадратной матрицы – это число, определяющее некоторые свойства матрицы.
Свойства определителя (для строк):

1. При умножении некоторой строки матрицы на число, определитель умножается на это число;

2. Если одна из строк нулевая, то $detA = 0$

3. $A \in M_n(F), \lambda \in F$ $det(\lambda \cdot A) = \lambda^n detA$

4. Если матрица A отличается от B только r-ой строкой, то для матрицы C, получающейся сложением r-ых строк этих матриц, выполняется: $detC = detA + detB$

5. Если в матрице две строки совпадают, то ее определитель равен 0

6. При перестановке местами двух строк матрицы, ее определитель меняет знак

7. При добавлении к строке матрицы другой строки, умноженной на число, определитель не меняется

8. Определитель треугольной матрицы равен произведению эл-ов на главной диагонали

9. $detA^T = detA$

10. $det(AB) = detA \cdot detB$

Если в каждом утвержденнии о св-вах определителя применить то же самое к столбцам матрицы, то утверждения останутся верными

Теорема Крамера Если матрица А не вырожденная, то система $A \cdot x = B$ имеет единственное решение, которое может быть найдено по формуле Крамера: $x_i = \frac{detA_i}{detA}$, где A_i – матрицы получающиеся заменой i-ого столбца на столбец b

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \hat{A}^T,$$

где $\hat{A}^T$ – союзная матрица, составленная из алгебраических дополнений для соответствующих элементов транспонированной матрицы.

6 Поле комплексных чисел C: операции над комплексными числами, геометрическое описание сложения и умножения, формула Муавра, извлечение корней.

Аксиомы (определение) поля комплексных чисел $\mathbb{C}$:

1. Содержит подполе, изоморфное $\mathbb{R}$
2. Содержит элемент $i : i^2 = -1$
3. Минимальное среди полей, удовлетворяющих 1. и 2.

Сложение комплексных чисел осуществляется в алгебраической форме и определяется следующим образом: суммой чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ является число

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Т.е. выполняется непосредственное суммирование действительных и мнимых частей.

Умножение комплексных чисел в алгебраической форме $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ выполняется непосредственным произведением чисел в алгебраической форме, учитывая свойство мнимой единицы $i^2 = -1$:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 \cdot x_2 + i^2 \cdot y_1 \cdot y_2 + (x_1 \cdot iy_2 + x_2 \cdot iy_1) =$$

$$= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

геометрический смысл сложения $\mathbb{C}$. На плоскости, где каждое комплексное число отображено как вектор, идущий от начала коодинат 0 до точки, сложение комплексных чисел сводится к сложению соответствующих векторов по правилу параллелограмма.

геометрический смысл умножения $\mathbb{C}$. Поворот и растяжение, т.к. $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Формула Муавра

$$z^n = (r(\cos\varphi + i \sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Извлечение корней из комплексного числа также выполняется по формуле Муавра ($\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$)

7 Кольцо многочленов над полем. Делимость в кольце многочленов, алгоритм Евклида. НОД многочленов. Схема Горнера. Приводимые и неприводимые многочлены. Аналог основной теоремы арифметики. Основная теорема алгебры. Теорема Виета. Корни многочленов с рациональными коэффициентами.

Многочлен f от переменной x над полем F

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in F,$$

$a_n \neq 0$ – старший коэффициент; сам индекс n – степень многочлена f, обозначают: $deg f = n$

$F[x]$ – кольцо многочленов над F (все многочлены над полем F)

Делимость в кольце многочленов

Т. $f, g \in F[x], g \neq 0 \Rightarrow \exists q, r \in F[x] \colon f = gq + r$, где многочлены q(неполное частное), r(остаток) определены однозначно, причем $deg\ r < deg\ g$.

Свойства делимости в кольце многочленов:

1. $g \mid f, g \mid h \Rightarrow g \mid (f + h)$
2. $g \mid f \Rightarrow \forall h \in F[x],\ g \mid (hf)$
3. $deg\ g = 0 \Rightarrow \forall f \in F[x],\ g \mid f$
4. $deg\ h = 0, g \mid f \Rightarrow (gh) \mid f$

Т. Безу Остаток от деления многочлена f на двучлен (x-c) равен значению многочлена в точке c.

Схема Горнера

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$f(x) = (x - c)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0) + r$$

$$\begin{cases} x^n : a_n = b_{n-1} \\ x^{n-1} : a_{n-1} = b_{n-2} - c b_{n-1} \\ \dots \\ x^1 : a_1 = b_0 - c b_1 \\ x^0 : a_0 = r - c b_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = a_{n-1} + c b_{n-1} \\ \dots \\ b_0 = a_1 + c b_1 \\ r = a_0 + c b_0 \end{cases}$$

Схема Горнера

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = (x - \alpha)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + P(\alpha)$$

	a_0	a_1	a_2		a_k		a_{n-1}	a_n
α	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + \alpha \cdot b_0$	$b_2 = a_2 + \alpha \cdot b_1$		$b_k = a_k + \alpha \cdot b_{k-1}$		$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha \cdot b_{n-2}$	остаток $= a_n + \alpha \cdot b_{n-1}$

Алгоритм Евклида Пусть r – остаток от деления f на g. Тогда мн-во общих делителей f и g совпадает с мн-вом общих делителей g и r. В частности совпадает их НОД $d = (f, g) = (g, r)$.

Т. (Линейное представление НОД) $f, g \in F[x], g \neq 0 \Rightarrow \exists d = (f, g) \colon d = fu + gv, u, v \in F[x]$. Более того $deg(f), deg(g) > 0 \Rightarrow deg\ u < deg\ g, deg\ v < deg\ f$

Приводимые и неприводимые многочлены Многочлен $f \in F[x], deg\ f > 0$ называется неприводимым над F, если из его разложения на произведение многочленов $f = u \cdot v \Rightarrow deg\ u = 0$ или $deg\ v = 0$ $(\forall u, v \in F[x])$.

Аналог основной теоремы арифметики Т. $f \in F[x], f \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha \in F$ – скаляр над полем F, и $\exists p_1, p_2, \ldots, p_r$ – неприводимые многочлены со старшим коэф-ом 1. Тогда f раскладывается на произвдение скаляра и многочленов и такое разложение единственно:

$$f = \alpha p_1 p_2 \ldots p_r$$

основная теорема алгебры Поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто.

Теорема Виета

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$f(x) = a_n (x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n) =$$

$$= a_n (x^n + x^{n-1}(-c_1 - \cdots - c_n) + x^{n-2}(c_1 c_2 + \cdots + c_{n-1} c_n) + \cdots + (-1)^n c_1 c_2 \ldots c_n)$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dots + c_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ c_1c_2 + c_1c_3 + \dots + c_{n-1}c_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \dots \\ c_1c_2\dots c_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Сумма корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, равна $-\frac{b}{a}$, а произведение корней равно $\frac{c}{a}$.

Корни многочленов с рациональными коэффициентами $a_i \in \mathbb{Q}, f(x) \in Q[x]$

Т. Если $f(x) \in \mathbb{Z}$ и этот многочлен имеет рациональный корень $\frac{u}{v}$, НОД(u,v)=1, тогда u – делитель свободного коэф-та $u \mid a_0$, а v – делитель старшего коэф-та $v \mid a_n$. Кроме того $u - mv \mid f(m)$, $\forall m \in \mathbb{Z}$

8 Векторные (линейные) пространства. Аксиомы векторного пространства и следствия из них.

Векторное пространство V над полем F – множество векторов с бинарной операцией + (сложения) и унарной операцией $v \to \alpha v$ (умножения на скаляр) для любого $\alpha \in F$

Аксиомы векторного пространства:

1. $< V, + >$ – абелева группа
2. $\forall \alpha \in F, \forall u, v \in V \quad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
3. $\forall \alpha, \beta \in F, \forall u \in V \quad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
4. $\forall \alpha, \beta \in F, \forall u \in V \quad (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
5. $\forall u \in V \quad 1u = u$

Следствия из аксиом: 1. $\alpha 0 = 0$ 2. $\alpha(-v) = -\alpha v$ 3. $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$ 4. $0v = 0, 0 \in V$ 5. $(-1)v = -v$ 6. $(\alpha - \beta)u = \alpha u - \beta u$

9 Линейная (не)зависимость систем векторов и свойства линейно (не)зависимых систем. Линейная оболочка системы векторов.

Система векторов – множество повторяющихся занумерованных векторов: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Линейная комбинация системы векторов:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n,$$

где $\lambda_i \in F$ – коэффициенты лин. комбинации, $a_i \in V$ – вектора.

Система векторов A называется линейно независимой, если

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0,$$

то есть из равенства лин. комбинации 0 следует ее тривиальность – равенство всех коэффициентов 0.

Говорят, что вектор a линейно выражается через систему A, если существует лин. комбинация равная a.

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$$

Лемма 1 Система векторов является линейно зависимой тогда и только тогда, когда в ней найдется вектор, который линейно выражается через остальные.

Свойства линейно зависимых и независимых систем:

1. Если в систему векторов входит нулевой вектор, то она линейно зависима
2. Если в системе векторов имеется два равных или противоположных вектора, то она линейно зависима.
3. Если в системе векторов имеется два пропорциональных вектора $\vec{a}_i = \lambda \vec{a}_j$, то она линейно зависима.
4. Система из $k > 1$ векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов есть линейная комбинация остальных.

5. Любые векторы, входящие в линейно независимую систему, образуют линейно независимую подсистему.

6. Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

7. Если система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ линейно независима, а после присоединения к ней вектора $\vec{a}$ оказывается линейно зависимой, то вектор $\vec{a}$ можно разложить по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, и притом единственным образом, т.е. коэффициенты разложения находятся однозначно.

Линейной оболочкой L системы векторов $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ называется мн-во линейных комбинаций этих векторов (результатов этих комбинаций):

$$L(A) =< A >=< a_1, a_2, \ldots, a_n >= \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n | \lambda_i \in F, a_i \in A\}$$

10 Метод Гаусса. Классификация СЛАУ (определённые, неопределённые, совместные, несовместные). Структура решения СЛАУ.

Метод Гаусса — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) путем последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного (ступенчатого) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру), находятся все переменные системы.

СЛАУ называется (классификация):

1. совместной, если имеет хотя бы одно решение
   (a) определённой, если ровно одно решение
   (b) неопределённой, если более одного решения
2. несовместной, если она не имеет ни одного решения

Структура решения СЛАУ. Общее решение неоднородной СЛАУ есть сумма общего решения однородной и частного решения неоднородной:

$$X_{on} = X_{oo} + X_{hn}$$

11 Основная лемма о линейной зависимости. Базис и размерность векторного пространства. Описание конечномерных пространств с точностью до изоморфизма. Теорема о размерности пространства решений однородной СЛАУ. Базис пространства решений однородной СЛАУ — ФСР.

Основная лемма о линейной зависимости

Если $b_1, b_2, \ldots, b_m$ линейно выражаются через $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V \Rightarrow b_1, b_2, \ldots, b_m$ – линейно зависимы(m>n)

Базисом векторного пространства называется всякое максимальное линейно независимое множество векторов из этого пространства.

Число векторов в базисе ненулевого векторного пространства называется размерностью этого пространства, обозначают dim V=n, если в базисе пр-ва V находится n векторов.

Конечномерное пространство – векторное пространство, в котором имеется базис.

T1. $A \subset V$, где A – конечномерное векторное пространство, V – бесконечномерное векторное пространство.

T2. Все базисы конечномерного векторного пространства содержат одинаковое число векторов.

T3. Всякую линейно независимую систему векторов конечномерного векторного пространства можно дополнить до базиса.

T4. Всякое подпространство конечномерного векторного пространства тоже конечномерно.

T5. Векторное пространство V размерности dim V=n над полем F изоморфно пр-ву столбцов F^n

Т. о размерности пр-ва решений однородной СЛАУ. Размерность пространства решений системы линейных однородных уравнений $dim = n - r$; где n – число неизвестных, r – ранг матрицы СЛАУ.

Базис пространства решений однородной СЛАУ называется её фундаментальной системой решений (ФСР)

12 Переход от одного базиса к другому. Матрица перехода и её свойства.

Очевидно, что в одном и том же векторном пространстве можно выбрать множество базисов. Пусть в V выбрано два базиса $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Векторы базиса B могут быть выражены через векторы базиса A:

$$\begin{cases} b_1 = t_{11}a_1 + t_{21}a_2 + \dots + t_{n1}a_n \\ b_2 = t_{12}a_1 + t_{22}a_2 + \dots + t_{n2}a_n \\ \dots \\ b_n = t_{1n}a_1 + t_{2n}a_2 + \dots + t_{nn}a_n \end{cases}$$

Из коэффициентов разложения можно составить матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица называется матрицей перехода от базиса A к базису B. В ее столбцах записаны координаты векторов $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ относительно базиса A.

$$(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)T = (a_1, a_2, \dots, a_n)(A \rightsquigarrow B)$$

Свойства матрицы перехода:

1. $(A \rightsquigarrow A) = E$
2. $(A \rightsquigarrow B)(B \rightsquigarrow C) = (A \rightsquigarrow C)$
3. $(A \rightsquigarrow B)(B \rightsquigarrow A) = E$

13 Ранг и база системы векторов. Ранг матрицы, теорема о ранге матрицы (= теорема о базисном миноре). Лемма о вычислении ранга матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.

База системы векторов – это эквивалентная ей линейно независимая подсистема.

Ранг системы векторов – число векторов в базе.

Строчный (Столбцовый) ранг матрицы – размерность линейной оболочки системы её строк (столбцов). Минор r-ого порядка – определитель подматрицы при выделении r строк и r столбцов.

Т. Столбцовый, строчный и минорные ранги совпадают.

Ранг матрицы — наивысший из порядков всевозможных ненулевых миноров этой матрицы.

Теорема о базисном миноре: строки (столбцы), пересекающие базисный минор линейно независимы. Любая строка (столбец) является линейной комбинацией базисных.

Лемма о вычислении ранга матрицы Ранг матрицы равен числу ненулевых строк любой ступенчатой матрицы, к которой изначально приводится с помощью элементарных преобразований.

Т. Кронекера-Капеллли СЛАУ совместна ⇔ ранг матрицы ее коэффициентов равен рангу расширенной матрицы.

Совместная СЛАУ является определенной ⇔ ранг матрицы ее коэффициентов равен числу ее неизвестных. Размерность пр-ва решений однородной СЛАУ с n неизвестными и матрицей коэф-ов A равна $n - rk(A)$.