

II

Кольцо вычетов

- 1] Докажите, что если $a \equiv b \pmod{n}$ и $c \equiv d \pmod{n}$, то $a + b \equiv c + d \pmod{n}$.
- 2] Докажите, что всякое число сравнимо по модулю 9 с суммой своих цифр.
- 3] Найдите признак делимости числа $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1}$ на 11.
- 4] Найдите остаток от деления числа 2^{1001} : а) на 3; б) на 5; в) на 13.
- 5] Постройте таблицы Кэли для колец $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_7$. Содержат ли они единицу? Найдите все пары делителей нуля. Является ли какое-либо из них полем?
- 6] Докажите, что уравнение $3x^2 - 4y^2 = 13$ не имеет целочисленных решений.
- 7*] Докажите, что число $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.

Поля

- 8] Сколько решений имеют уравнения а) $x^2 + 1 = 0$, б) $x^2 = 2$ полях $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}, \mathbb{Z}_p$?
- 9] В какую степень надо возвести 2022, чтобы получить 36 в полях $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}$?
- 10] Решите уравнения: а) $x^2 + 3x + 7 = 0$ в полях $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Q}(\sqrt{2})$;
б) $x^2 + (4 - 2\sqrt{2})x + 3 - 2\sqrt{2} = 0$ в полях $\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.
- 11*] Нарисуйте все прямые на плоскости \mathbb{Z}_3^2 .
- 12*] Нарисуйте на плоскости \mathbb{Z}_5^2 линии, заданные уравнениями $y = kx, y = x^2, x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = -1$.
- 13*] Сколько прямых проходит через каждую точку плоскости \mathbb{Z}_p^2 ? Сколько всего на этой плоскости имеется прямых?

Группа подстановок

15] $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$

- а) Найдите $\pi\sigma$ и $\sigma\pi$;
- б) Найдите порядки подстановок π и σ как элементов группы;
- в) Найдите подстановки π^{2022} и σ^{2022} ;
- г) Найдите подстановки π^{-1} и σ^{-1} .

16) Каких подстановок в S_n больше: чётных или нечётных?

17) Разложите подстановки в произведение независимых циклов и найдите их декремент:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 7 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 8 & 2 & 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

18) Найдите произведение подстановок:

а) $(135)(264) \cdot (1452)(36)$; б) $(14)(27)(35) \cdot (1546237)$; в) $(13745)(286) \cdot (15)(27)(34)(68)$;
г) $(126)(39)(4857) \cdot (162)(378495)$; д) $(12)(365)(47) \cdot (13)(25)(47) \cdot (12)(356)(47)$;

19) Вычислите:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{122}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}^{130};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 7 & 6 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{142}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 9 & 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}^{145}.$$

20) Решите уравнения:

$$\text{а) } X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 2 & 5 & 6 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 4 & 6 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 6 & 4 & 9 & 2 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 4 & 6 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

21*) Можно ли в игре «Пятнашки» из позиции слева получить позицию справа?



22*) Элементов какого порядка в S_n больше: чётного или нечётного?