

Линейная алгебра. Базовый уровень. Программа коллоквиума

1. Отображения, композиция отображений. Образ и прообраз. Сюръекция, биекция, инъекция.
2. Основные алгебраические системы. Бинарная операция на множестве. Ассоциативность, коммутативность. Группа, абелева группа. Кольцо. Поле. Порядок группы/кольца/поля. Порядок элемента. Подгруппа, подкольцо, подполе. Есть ли в поле делители нуля. Характеристика поля. Изоморфизм алгебраических систем.
3. Отношение эквивалентности. Фактормножество. Эквивалентность, согласованная с операциями. Кольцо вычетов \mathbb{Z}_n . Арифметика в кольце вычетов. Когда кольцо вычетов является полем
4. Арифметика матриц: сложение, умножение, транспонирование. Кольцо квадратных матриц над полем. Перестановочные матрицы.
5. Определители квадратных матриц и их свойства. Обратная матрица. Теорема Крамера.
6. Поле комплексных чисел \mathbb{C} : операции над комплексными числами, геометрическое описание сложения и умножения, формула Муавра, извлечение корней.
7. Кольцо многочленов над полем. Делимость в кольце многочленов, алгоритм Евклида. НОД многочленов. Схема Горнера. Приводимые и неприводимые многочлены. Аналог основной теоремы арифметики. Основная теорема алгебры. Теорема Виета. Корни многочленов с рациональными коэффициентами
8. Векторные (линейные) пространства. Аксиомы векторного пространства и следствия из них.
9. Линейная (не)зависимость систем векторов и свойства линейно (не)зависимых систем. Линейная оболочка системы векторов.
10. Метод Гаусса. Классификация СЛАУ (определённые, неопределённые, совместные, несовместные). Структура решения СЛАУ.
11. Основная лемма о линейной зависимости. Базис и размерность векторного пространства. Описание конечномерных пространств с точностью до изоморфизма. Теорема о размерности пространства решений однородной СЛАУ. Базис пространства решений однородной СЛАУ — ФСР.
12. Переход от одного базиса к другому. Матрица перехода и её свойства.
13. Ранг и база системы векторов. Ранг матрицы, теорема о ранге матрицы (= теорема о базисном миноре). Лемма о вычислении ранга матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.

Примеры билетов:

№ 100

1. Как изменится матрица перехода, если все элементы нового базиса циклически переставить?
2. Теорема Кронекера-Капелли.

1. Является ли векторным пространством множество невырожденных квадратных матриц фиксированного порядка? Операции стандартные.
2. Отношение эквивалентности. Фактормножество.