

Многочлены

1 Разделите с остатком многочлен $f(x)$ на $x - x_0$ и найдите $f(x_0)$

а) $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$, $x_0 = -3$;

б) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 2x + 5$, $x_0 = -2$;

в) $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^2 + 4x - 2$, $x_0 = 1$;

г) $f(x) = x^6 - 5x^5 + x^3 + 2x - 8$, $x_0 = 2$.

2 Определите кратность корня x_0 многочлена $f(x)$:

а) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $x_0 = 2$;

б) $f(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - 10x - 8$, $x_0 = -1$;

в) $f(x) = x^6 - 9x^5 + 26x^4 - 10x^3 - 99x^2 + 243x - 216$, $x_0 = 3$;

г) $f(x) = x^7 - 5x^6 + 11x^5 - 15x^4 + 15x^3 - 11x^2 + 5x - 1$, $x_0 = 1$.

3 Найдите НОД многочленов и его линейное представление:

а) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ и $x^3 + x^2 - x - 1$;

б) $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ и $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$;

в) $x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$ и $3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$;

г) $x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10$ и $3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$;

д) $x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ и $x^5 + x^2 - x + 1$;

е) $x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 52x^2 - 52x - 12$ и $x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 22x - 12$.

4 Найдите общие корни многочленов $x^4 + 4x^3 - 5x + 2$ и $2x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 7x + 1$.

5 Найдите рациональные корни многочленов:

а) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$;

б) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$;

в) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x - 36$;

г) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$;

д) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$;

е) $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$;

ё) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$;

ж) $x^6 - 6x^5 + 11x^4 - x^3 - 18x^2 + 20x - 8$.

6 Разложите многочлен на неприводимые сомножители над полями рациональных, вещественных и комплексных чисел:

а) $x^4 - 1$;

б) $x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 14x + 10$, $x_1 = -1 + i$ — корень многочлена;

в) $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$, $x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ — корень многочлена;

г) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100$, $x_1 = 1 + 2i$ — корень многочлена

д) $x^4 + 2x^2 + 4$;

е) $x^4 - 3x^2 + 9$;

ж) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 38x - 39$;

з) $x^5 + 2x^4 - 20x^3 - 68x^2 - 41x + 30$;

и) $2x^6 - 14x^5 - x^4 + 45x^3 + 153x^2 + 729x - 2754$;

7] Докажите неприводимость над полем рациональных чисел многочленов:

а) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$;

б) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;

в*) $x^{105} - 9$;

г*) $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$, p — простое число;

д*) $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 1$, где a_1, a_2, \dots, a_n — различные целые числа;

е*) $(x - a_1)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1$, где a_1, a_2, \dots, a_n — различные целые числа.

7*] Докажите, что всякий многочлен положительной степени с целыми коэффициентами имеет корень в поле \mathbb{Z}_p для бесконечного множества простых чисел p .

8] Найдите сумму квадратов и произведение всех корней многочлена:

а) $3x^3 + 2x^2 - 1$; б) $x^4 - x^2 - x - 1$

9] Найдите сумму чисел, обратных всем корням многочлена:

а) $3x^3 + 2x^2 - 1$; б) $x^4 - x^2 - x - 1$

10] Определите λ , если один из корней многочлена $x^3 - 7x + \lambda$ равняется удвоенному другому.

11] Сумма двух корней многочлена $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ равна 1. Найдите λ .

12*] Докажите, что при любом натуральном n многочлен $x^{3n} + x^{n+3} - x^n - 1$ делится на $x^2 + x + 1$

13*] Разложите на неприводимые сомножители над полем комплексных чисел многочлен $x^3 - 9x^2 + 27x - 81$

14] Чему равна сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника в его вершины?

15*] Вычислите $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$.

16*] Докажите, что $\cos \frac{2\pi}{7}$ является корнем уравнения $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ и найдите остальные его корни.