$\boxed{\text{VI}}$ Векторные пространства

$\boxed{1}$ В каких из следующих случаев указанные операции на множестве X задают структуру векторного пространства над полем $\mathbb{F}$?

а) $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, X — полуплоскость $\left\{(x,y)^{\mathsf{T}}\in\mathbb{R}^2\,|\,x\geqslant 0\right\}$, операции сложения и умножения на числа стандартные (покоординатные);

б) $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, X — множество геометрических векторов в трёхмерном пространстве, выходящих из начала координат, концы которых лежат на заданной плоскости, операции стандартные;

в) $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, X — множество векторов на плоскости $\mathbb{R}^2$, все координаты которых по модулю не превосходят единицы; операции стандартные;

г) $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $X=(0,+\infty)$, операции сложения $\oplus$ и умножения на числа $\odot$ заданы формулами $u\oplus v=uv$, $\lambda\odot u=u^{\lambda}$;

д) $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, X — множество ненулевых комплексных чисел, операции стандартные;

е) $\mathbb{F}=\mathbb{Q}$, $X=\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, операции стандартные;

ё*) $\mathbb{F}=\mathbb{Q}$, X — множество бесконечных последовательностей (a_n) действительных чисел, удовлетворяющих условию $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, операции стандартные. Если да, то какова размерность этого пространства?

ж) $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, X — множество многочленов f с действительными коэффициентами, удовлетворяющих условию $f(0)=0$, операции стандартные;

з) $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, X — множество квадратных матриц порядка n с нулевым следом, операции стандартные. Если да, то какова размерность этого пространства?

и) $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, X — множество симметрических квадратных матриц порядка n. Если да, то какова размерность этого пространства?

$\boxed{2}$ Каким условиям должен удовлетворять скаляр x, чтобы векторы $(0,x,-1)^{\mathsf{T}}$, $(x,0,1)^{\mathsf{T}}$, $(1,-1,x)^{\mathsf{T}}\in\mathbb{R}^3$ были линейно зависимы? Каким будет ответ на этот же вопрос при замене $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{Q}^3$?

$\boxed{3}$ Пусть a,b,c — линейно независимая система векторов. Какими буду следующие системы векторов: а) $a, a+b, a+b+c$; б) $a+b, b+c, c+a$; в) $a-b, b-c, c-a$.

$\boxed{4}$ Исследовать на линейную зависимость следующие системы функций $(n>0)$:
а) $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$; б*) $1,\ e^x,\ e^{2x},\ \ldots,\ e^{nx}$; в) $1,\ \ln(x),\ \ln(2x),\ \ldots,\ \ln(nx)$;
г) $1,\sin x,\cos x,\sin^2 x,\cos^2 x,\ldots,\sin^n x,\cos^n x$; д*) $1,\cos x,\cos 2x,\ldots,\cos nx$.

$\boxed{5^*}$ Докажите линейную независимость всех геометрических прогрессий, начинающихся с единицы, в векторном пространстве бесконечных последовательностей.

$\boxed{6}$ Найдите ранг и какую-нибудь базу систем векторов:

а) $v_1 = (1, 2, -1, 5)^T$, $v_2 = (2, 1, 1, 2)^T$, $v_3 = (0, 1, -1, 3)^T$, $v_4 = (1, 1, 0, 2)^T \in \mathbb{R}^4$;

б) $v_1 = (-3, 1, 0, 0)^T$, $v_2 = (4, 3, 2, 1)^T$, $v_3 = (-9, 3, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^4$;

в) $v_1 = (1, 2, 3)^T$, $v_2 = (2, 3, 4)^T$, $v_3 = (-3, -2, -3)^T$, $v_4 = (4, 3, 4)^T$, $v_5 = (2, 2, 2)^T \in \mathbb{R}^3$;

$\boxed{7}$ Проверьте, что система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образует базис пространства $\mathbb{R}^n$ и найдите координаты вектора x в этом базисе:

а) $e_1 = (1, 5, 3)^T$, $e_2 = (2, 7, 3)^T$, $e_3 = (3, 9, 4)^T$, $x = (2, 1, 1)^T$;

б) $e_1 = (1, 2, -1, 2)^T$, $e_2 = (2, 3, 0, -1)^T$, $e_3 = (1, 2, 1, 4)^T$, $e_4 = (1, 3, -1, 0)^T$, $x = (7, 14, -1, 2)^T$;

в) $e_1 = (1, 2, 1, 1)^T$, $e_2 = (2, 3, 1, 0)^T$, $e_3 = (3, 1, 1, -2)^T$, $e_4 = (4, 2, -1, -6)^T$, $x = (0, 0, 2, 7)^T$;

$\boxed{8}$ Докажите, что многочлены 1, $t-1$, $(t-1)^2$, $(t-1)^3$, $(t-1)^4$, $(t-1)^5$ образуют базис в пространстве $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 5}$. Найдите координаты многочлена $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1$ в этом базисе.

$\boxed{9}$ Докажите, что $2x + x^3$, $x^3 - x^5$, $x + x^3$ образуют базис в пространстве нечётных многочленов степени не выше 5. Найдите координаты многочлена $5x - x^3 + 2x$ в этом базисе.

$\boxed{10}$ Докажите, что матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ образуют базис в пространстве $M_2(\mathbb{R})$ и найдите координаты матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ в этом базисе

$\boxed{11^*}$ Докажите, что последовательности $v_1 = (2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$ и $v_2 = (1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$ образуют базис в пространстве образуют базис в пространстве последовательностей со свойством $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ и разложите последовательность $v = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$ по этому базису.

$\boxed{12}$ В пространстве $\mathbb{Q}[x]_{\leqslant 2}$ перешли от базиса $x^2, x, 1$ к новому базису с помощью матрицы перехода $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите новый базис.

$\boxed{13}$ В пространстве $\mathbb{Q}[x]_{\leqslant 2}$ от базиса $x^2, x, 1$ перешли к новому базису:

а) $1, x + 1, \frac{(x+1)^2}{2}$; б) $1, x, x^2 + 2$; в) $1, x^2, x$. Найдите матрицы перехода от старого базиса к новому и наоборот.

$\boxed{14}$ Найдите матрицу перехода от базиса $e_1 = (2, 3, -2)^T$, $e_2 = (5, 0, -1)^T$, $e_3 = (2, 1, -1)^T$ к базису $e_1' = (1, 1, -1)^T$, $e_2' = (1, -1, 0)^T$, $e_3' = (1, 1, 1)^T$.

$\boxed{15}$ В пространстве $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 3}$ найдите матрицу перехода от базиса 1, $1+t$, $1+t^2$, $1+t^3$ к базису $1+t^3$, $t+t^3$, t^2+t^3, t^3.

$\boxed{16*}$ V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, состоящее из q элементов. Найдите:

а) число векторов в пространстве V;

б) число базисов пространства V;

в) число невырожденных матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$;

г) число вырожденных матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$;

д) число k-мерных подпространств пространства V;

е) число решений уравнения $Ax=0$, где A — прямоугольная матрица ранга r, x — столбец неизвестных длины n.

$\boxed{17*}$ Докажите, что поле из q элементов существует тогда и только тогда, когда q является положительной степенью простого числа.

$\boxed{18*}$ Является ли кольцо всех подмножеств $\mathcal{P}(M)$ множества M относительно операций взятия симметрической разности и пересечения (листок I, № 19) алгеброй над полем $\mathbb{Z}_2$, если определить в нём умножение по правилам $0A=\varnothing$, $1A=A$ для любого $A\in\mathcal{P}(M)$?

$\boxed{19*}$ Докажите, что в конечномерной алгебре без делителей нуля каждое из уравнений $ax=b$ и $xa=b$, где $a\neq 0$ имеет и при том единственное решение.

$\boxed{20*}$ Вещественная квадратная матрица такова, что в каждом её столбце есть ровно два ненулевых элемента: диагональный, больший 1, и некоторый недиагональный, равный 1. Может ли эта матрица быть вырожденной?