Aprenda Sozinho

~~Visual~~mente

Cálculo

Por Dale Johnson

Tradução: Turma de MAT 872

Capítulo 1

Uma Introdução para Limites

ESTE capítulo discute a importância dos limites para o estudo do cálculo diferencial e do cálculo integral. **O Cálculo Diferencial** envolve encontrar uma derivada - como a inclinação de uma linha tangente ou a taxa de variação do volume de um balão em relação ao seu raio - do valor máximo ou mínimo de uma função.**O cálculo Integral** envolve encontrar uma integral - como determinar a função de velocidade a partir de sua função de aceleração, calcular a área sob uma curva, encontrar o volume de um sólido irregular ou determinar o comprimento de um arco ao longo de uma curva. Começando com alguns exemplos de como você pode usar limites no cálculo, a seguir introduzo uma noção intuitiva de limites. A partir da definição formal de um limite, você aprende maneiras de determinar os limites das funções de seus gráficos, bem como como usar algumas propriedades básicas de limite. O capítulo conclui com uma breve discussão sobre continuidade e dois importantes teoremas relacionados à continuidade.

Cálculo de Limites

Esta seção fornece alguns exemplos de como usar técnicas algébricas para calcular limites. Isso inclui os termos de uma série infinita, a soma de uma série infinita, o limite de uma função, a inclinação de uma reta tangente ao gráfico de uma função e a área de uma região delimitada pelos gráficos de várias funções.

TERMOS DE UMA SÉRIE INFINITA

1. Vamos dar uma olhada nas séries

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ..., \frac{1}{2^{n-1}}$ onde n é um número inteiro positivo. À medida que n fica maior, o termo $\frac{1}{2^{n-1}}$ fica cada vez menor.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ..., \frac{1}{1024}, ..., \frac{1}{524.288} ...$$

Para n=1 Para n=20.

2. Se n fosse grande o suficiente (digamos n aproximado), parece que os termos se aproximam de 0. Na linguagem dos limites, você pode dizer que o limite de $\frac{1}{2^{n-1}}$ conforme n se aproxima ∞, é 0.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$$

LIMITE DA SOMA DE UMA SÉRIE INFINITA

1. Vamos dar um passo adiante e tentar encontrar a soma dos termos da série mencionada anteriormente, pois n fica muito grande.

$$1, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + ...$$

2 Para valores crescentes de n, a soma desse número de termos é mostrada a direita.

Para $n = 1 \rightarrow soma = 1$

Para $n = 2 \rightarrow soma = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

Para $n = 3 \rightarrow soma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$

Para $n = 3 \rightarrow soma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{7}{8}$

Para $n = 3 \rightarrow soma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} = 1\frac{127}{128}$

---

3 Parece que a soma dos termos desta série está se aproximando de 2. Na linguagem dos limites, dizemos que o limite da soma dos termos $\frac{1}{2^{n-1}}$, conforme n se aproxima ∞, é 2.

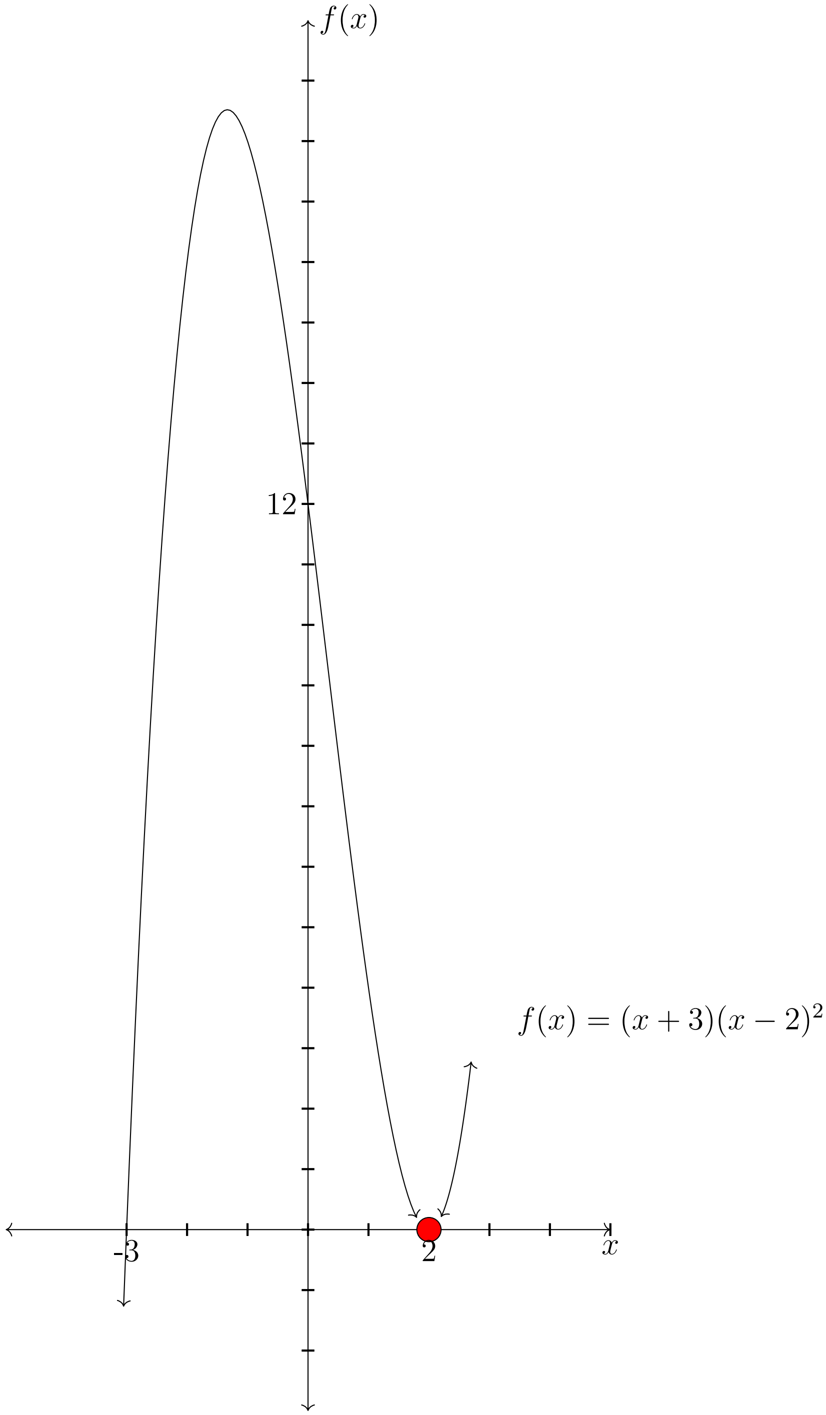
DICA

Lembre-se de que o símbolo $\sum$ (sigma) representa "a soma de".

$$\lim_{t\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{t}\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2$$

LIMITE DE UMA FUNÇÃO

1 O gráfico de $f(x) = (x+3)(x-2)^2$ é mostrado à direita. Conforme x fica cada vez mais perto de 2 (da esquerda e da direita), $f(x)$ fica cada vez mais perto de 0.



$\lim_{x\to 2} f(x) = 0$??

2 Experimente alguns valores para x próximos de 2, encontrando suas coordenadas y para verificar se o limite é realmente 0.

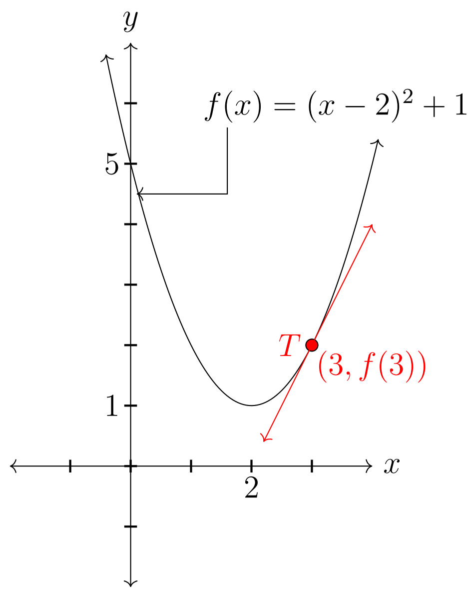
Valores para $f(x) = (x+3)(x-2)^2$		
x	$f(x) = (x+3)(x-2)^2$	
0.5	7.875	
1.0	4	
1.5	1.125	
1.8	0.192	x se aproxima de 2 pela esquerda
1.9	0.049	
1.99	0.0005	
1.999	0.000005	
2	0	
2.001	0.000005	
2.01	0.0005	
2.1	0.051	
2.2	0.208	x se aproxima de 2 pela direita
2.5	1.375	
3.0	6	
3.5	14.625	

3 No gráfico, parece que à medida que x fica cada vez mais perto de 2, o valor de $f(x)$ fica cada vez mais perto de 0.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 0$$

INCLINAÇÃO DE LINHA TANGENTE A UMA CURVA

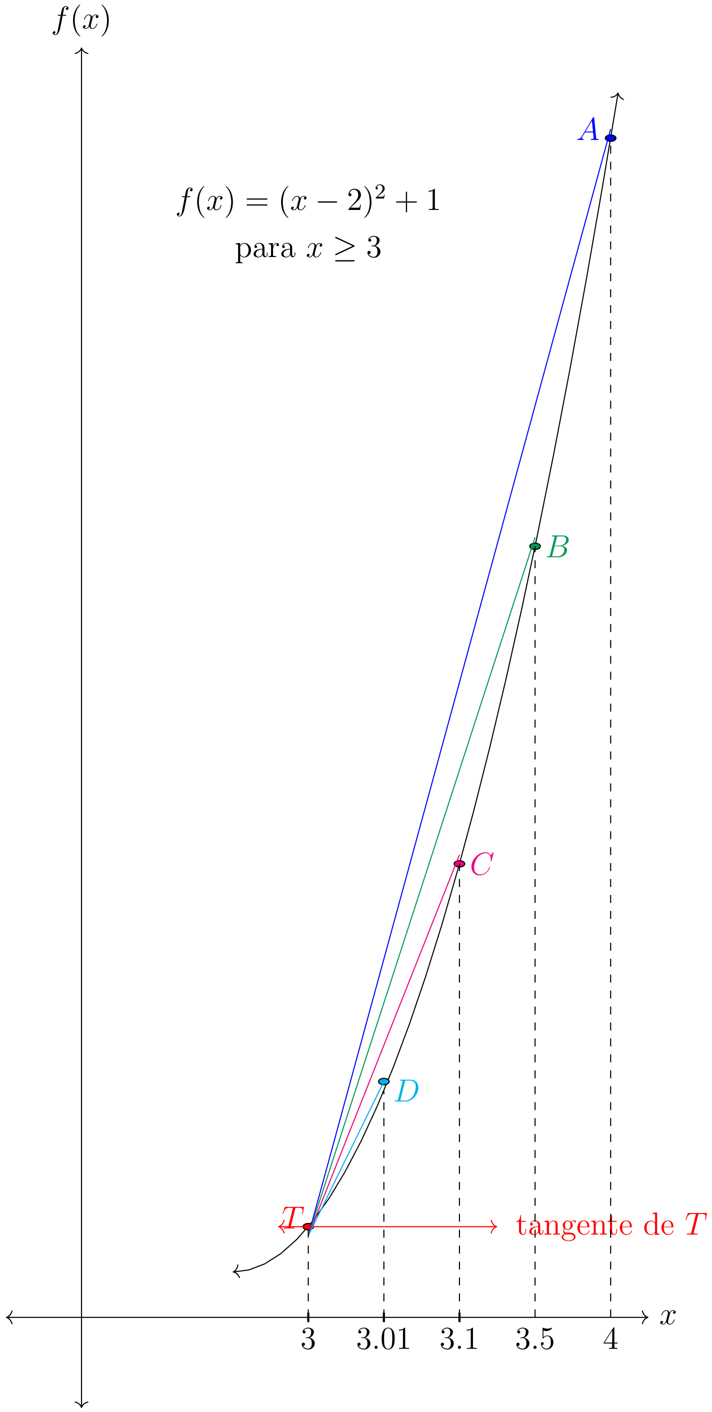
1 O gráfico de $f(x) = (x-2)^2 + 1$ é mostrado à baixo com uma linha tangente à curva desenhada no ponto com coordenada 3.



2 Vamos aproximar a inclinação dessa linha tangente vermelha. Selecione alguns valores de x que se aproximam de 3 do lado direito: $4, 3, 5, 3, 1, 3, 01$ e, é claro, 3. Deixando Δx (leia "delta x") igual à diferença entre o valor selecionado de x e 3, você pode completar o gráfico à baixo.

Selecionados do Gráfico de $f(x) = (x-2)^2 + 1$				
	Δx	$3 + \Delta x$	$f(3 + \Delta x)$	**Ponto Resultante**
1	4	5	(4,5)	A
0.5	3.5	3.25	(3.5,3,25)	B
0.1	3.1	2.21	(3.1,2.21)	C
0.01	3.01	2.201	(3.01,2.0201)	D
0	3	2	(3.2)	T

3 Em seguida, calcule as inclinações das linhas secantes. $\overleftrightarrow{AT}$, $\overleftrightarrow{BT}$, $\overleftrightarrow{CT}$, e $\overleftrightarrow{DT}$



Declive de $\overleftrightarrow{AT} = \dfrac{5-2}{4-3} = 3$

Declive de $\overleftrightarrow{BT} = \dfrac{3.25-2}{3.5-3} = \dfrac{1.25}{0.5} = 2.5$

Declive de $\overleftrightarrow{CT} = \dfrac{2.21-2}{3.1-3} = \dfrac{0.21}{0.1} = 2.1$

Declive de $\overleftrightarrow{DT} = \dfrac{2.0201-2}{3.01-3} = \dfrac{0.0201}{0.01} = 2.01$

4 À medida que os pontos escolhidos A, B, C e D se aproximam cada vez mais do ponto T ($\Delta x \longrightarrow 0$), a inclinação da linha tangente em $x = 3$ fica cada vez mais perto de 2.

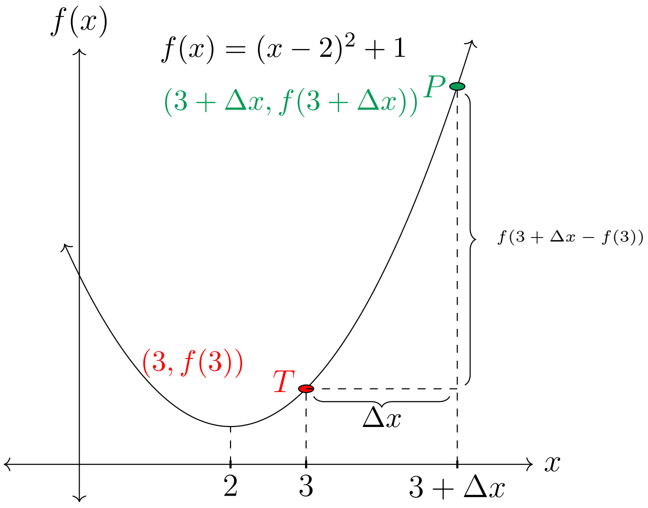
A inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ em $x = 3$ é igual a 2.

---

5 Para qualquer ponto P próximo a T, a inclinação de $\overleftrightarrow{PT}$ é dada por:

$$\frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{(3+\Delta x) - 3}$$

$$= \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$



---

6 Como ($\Delta x \longrightarrow 0$), o ponto P move-se extremamente próximo ao ponto T; neste caso, a inclinação da linha tangente no ponto T será a expressão na Etapa 5 acima.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = 2$$

---

7 A expressão na Etapa 6 também é conhecida como a derivada de $f(x)$ em $x = 3$ e é denotada por $f'(3)$. Nos Capítulos 3–6, você aprenderá muitas técnicas para determinar a derivada de uma função.

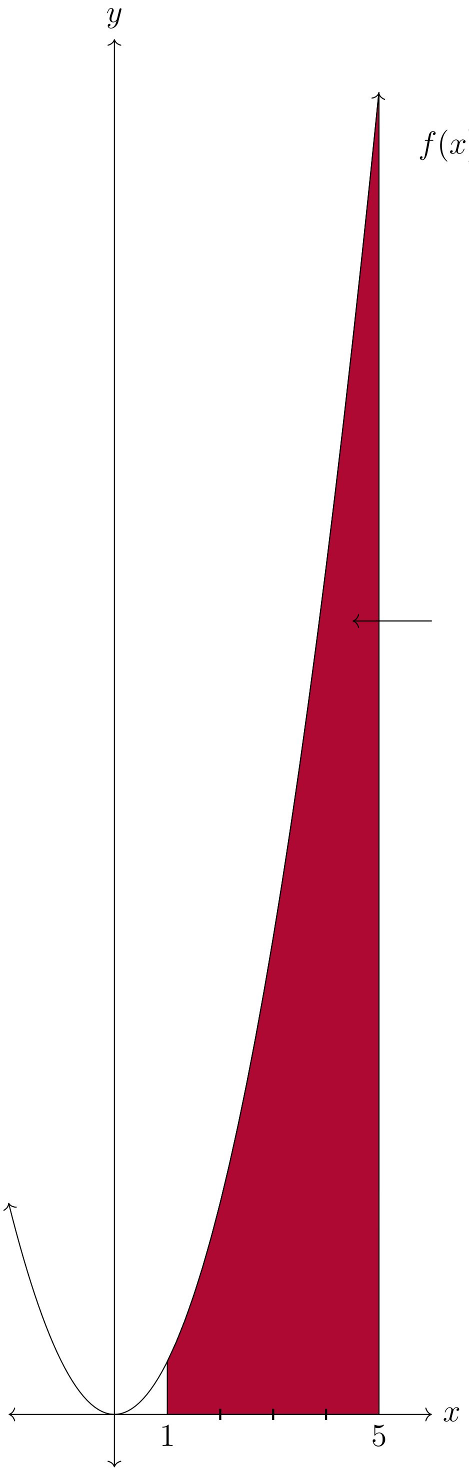
$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

Portanto, a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ em $x = 3$ é 2.

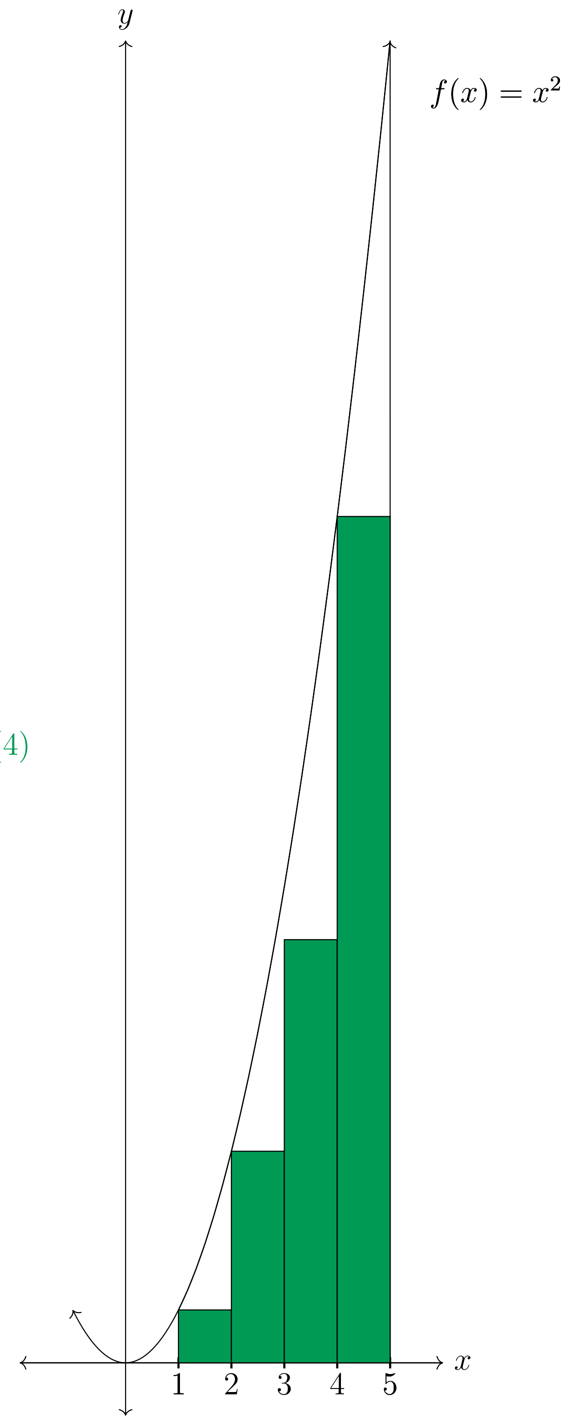
SOMA DE RIEMANN: ÁREA SOB UMA CURVA

1 O último exemplo de limite envolve a aproximação da área abaixo do gráfico de $f(x) = x^2$, acima do eixo x, à direita da linha $x = 1$ e à esquerda da linha $x = 5$.

Observação: Tente encontrar uma aproximação inferior e superior da área real. Uma aproximação inferior usa retângulos inscritos e uma aproximação superior usa retângulos circunscritos.



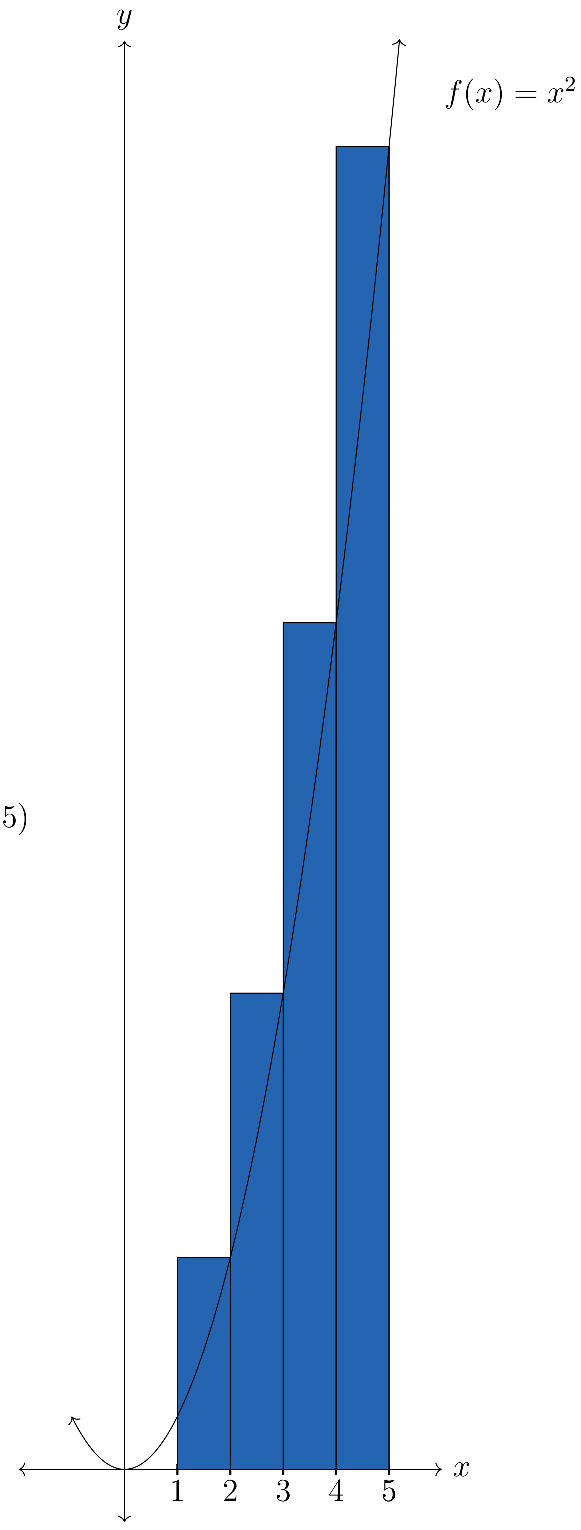
2 Usando quatro retângulos inscritos, cada um tendo uma base de 1 unidade, seus correspondentes alturas são encontradas: $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$ e $f(4) = 16$. O cálculo da área é mostrado à direita.



$$\begin{aligned} \text{Área} &= 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) + 1 \cdot f(4) \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 16 \\ &= 30 \end{aligned}$$

Esta aproximação de área é menor do que a área desejada real.

3 Em seguida, usando quatro retângulos circunscritos, cada um tendo uma base de 1 unidade, suas alturas correspondentes são encontradas: $f(2) = 4, f(3) = 9, f(4) = 16$ e $f(5) = 25$. O cálculo da área é mostrado à direita.



$$
\begin{aligned}
\text{Área} &= 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) + 1 \cdot f(4) + 1 \cdot f(5) \\
&= 1 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 25 \\
&= 54
\end{aligned}
$$

Este cálculo de área é maior do que a área real desejada..

Cálculo de Limites

4 A área real da região destacada 1 é maior que 30 e menor que 54. Se você deseja encontrar uma aproximação mais real da área, basta usar um maior número de retângulos, cada um tendo uma base de $\Delta x = \dfrac{5-n}{n}$, onde n é o número de retângulos usados. A altura correspondente para cada retângulo seria então $f(x_i)$, onde i representa o 1°, ou 2°, ou 3° ou 4° retângulo dos n retângulos usados.

5 A soma das áreas desses retângulos é representada pela expressão à direita, um exemplo do que é chamado de Soma de Riemann, que tem o objetivo de encontrar predominantemente a soma das áreas dos retângulos sob uma curva. A área de um retângulo verde (consulte a página anterior) seria $f(x_i).\Delta x$.

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x =$ soma da área de todos os n retângulos.

6 A área real seria encontrada deixando $n \to \infty$, de modo que $\Delta \to 0$, e então encontrando o limite da Soma de Riemann.

Área$= \lim_{n\to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\right)$

7 Se $f(x)$ é definida em um intervalo fechado $[a, b]$ e $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\right)$ existe, a função $f(x)$ é dita integrável em $[a, b]$ e o limite é denotado por $\int_a^b f(x)dx$.

$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\right) = \int_a^b f(x)dx.$

8 A expressão $\int_a^b f(x)dx$. é chamada de integral definitiva de f de a ao b.

No exemplo temos, Área$= \int_1^5 x^2 dx$.

9 No Capítulo 12, você calculará esses tipos de áreas, depois de aprender algumas técnicas de integração.

Área atual $= \int_1^5 x^2 dx = 41\frac{1}{3}$.

Definição do Limite de uma Função

Esta seção apresenta a definição precisa do limite de uma função e discute seu uso na determinação ou verificação de um limite.

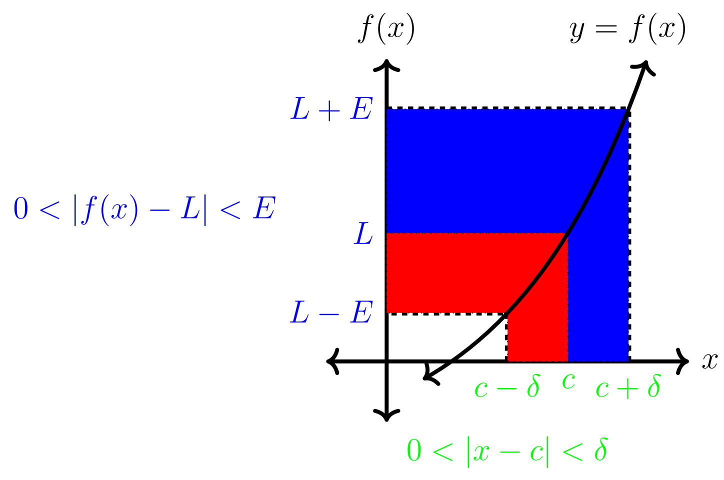
O $\Delta -$ E DEFINIÇÃO DO LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Seja f uma função definida para números em algum intervalo aberto contendo c, exceto possivelmente no próprio número c. O limite de $f(x)$ quando x se aproxima de c em L, escrito como $\lim_{x \to c} f(x) = L$, se para qualquer $\epsilon > 0$, há um número correspondente $\delta > 0$ tal que se $< |x - c| < \delta$, então $|f(x) - L| < \epsilon$.

1. Vamos decompor a definição do limite conforme indicado acima. Uma vez que $|x-c|$ é a distância entre x e c, e $|f(x)-L|$ é a distância entre $f(x)$ e L, a definição poderia ser expressa: $\lim_{x \to c} f(x) = L$, o que significa que a distância de $f(x)$ a L pode ser tão pequena quanto quisermos, tornando o distância de x para c suficientemente pequeno (mas não 0).

Como $x \to c$, então $f(x) \to L$, de modo que $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

2. Observe que $0 < |x - c| < \delta$ implica que x está no intervalo $(c - \delta, c)$ ou em $(c, c + \delta)$. Além disso, $|f(x) - 9| < \epsilon$ implica que L está no intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.



Usando a Definição de $\delta - \epsilon$ para verificar o Limite

Use a definição de $\delta - \epsilon$ para verificar que $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$.

1. Você deve mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$, existe um correspondente $\delta > 0$ tal que: $|f(x) - 9| < \epsilon$ sempre que $< |x - 3| < \delta$. Visto a escolha de δ depende de escolha de ϵ, você precisa encontrar uma conexão entre $|x^2 - 9|$ e $|x - 3|$.

$$|x^2 - 9| = |x + 3||x - 3|$$

Se você mover para a esquerda e para a direita de $x = 3$ apenas 1 unidade, x estaria no intervalo $(4, 5)$ de modo que $< |x + 3| < 8$

2. Seja δ e $\dfrac{\epsilon}{8}$.

Segue que quando o resultado é de $< |x - 3| < \delta = \dfrac{\epsilon}{8}$

O resultado de

$$|x^2 - 9| = |x + 3||x - 3| < 8\left(\frac{\epsilon}{8}\right)$$

ENCONTRANDO UM VALOR DE Δ, DADO UM VALOR ESPECÍFICO DE E

Dado que $\lim_{x \to 2}(3x - 1) = 5$, encontre o valor de δ tal $|(3x - 1) - 5| < 0.01$ sempre que $|x - 2| < \delta$.

1. Primeiro, encontre uma conexão entre

$$|(3x - 1) - 5| \text{ e } |x - 2| < \delta.$$

$$|(3x - 1) - 5| = |3x - 6| = 3|x - 2|$$

Definição do Limite de uma função

2 Você têm que $|(3x-1)-5| < 0.01$.

$$\begin{aligned} |(3x-1)-5| &< 0,01 \\ 3|(x-2| &< 0,01 \\ |(x-2| &< \frac{0,01}{3} \end{aligned}$$

3 Escolha $\delta = \dfrac{0,01}{3}$.

Esta escolha de δ funciona desde que

$0 < |x-2| < \delta$ implique em

$|(3x-1)-5| = 3|x-2|$

$< 3(\delta)$

$< 3\left(\dfrac{0,01}{3}\right)$

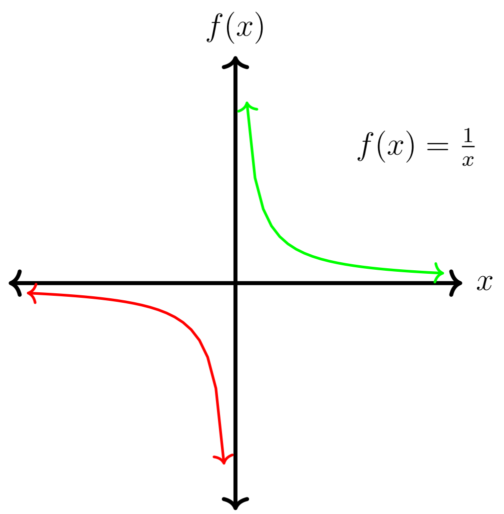
$< 0,01$ o requisito dado.

Limites Laterais

Aqui, serão mostrado os limites pela esquerda e pela direita, por exemplo, conhecidos como limites laterais.

Notações para Limites Laterais e exemplos

1. Para a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ à direita, não existe o $\lim_{x\to 0} f(x)$. Observe que quando $x \to 0$ pela da esquerda, $f(x) \to -\infty$ mas quando $x \to 0$ pela direita, $f(x) \to +\infty$.



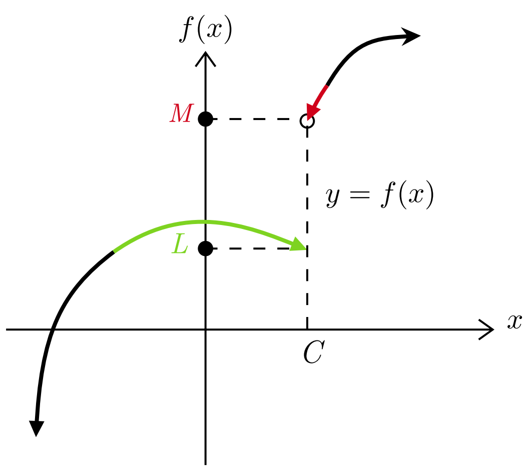
2. Cada limite na Etapa 1 é chamado de limite unilateral.

"O limite de $f(x)$ quando x se aproxima de c pela esquerda é L"é escrito como:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

"O limite de $f(x)$ quando x se aproxima de c pela esquerda é M" é escrito como:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = M$$



1.7.1 LIMITES LATERAIS DE UMA FUNÇÃO RACIONAL