光學課程紀錄與模擬實作

第一章：電磁波方程與干涉理論

一、 基礎波動理論：電磁波方程式的物理本質

利用光作為電磁波的本質，我們可以透過 Maxwell's Equations，了解場在空間與時間中的動態特性。

1.1 電磁波方程式的推導與意義

在自由空間（無電荷 $\rho = 0$ 且無電流$\mathbf{J} = 0$）中，電場$\mathbf{E}$滿足以下波動方程：

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

- 空間二階導數 (∇^2)：描述電場在空間分布的曲率。
- 時間二階導數 ($\partial^2/\partial t^2$)：描述電場隨時間震盪的加速度。
- 物理常數 (C)：該方程決定了波的傳播速度 $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$。

1.2 平面波的特性

對於簡諧平面波（Plane wave），其形式為 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$。波向量**k**指向波的傳播方向，其大小 $k = 2\pi/\lambda$ 與波長相關。這種理想化的平面波是分析干涉現象的最基礎模型。

二、 波的疊加原理與現象分類

當空間中存在多道光波時，總場由線性疊加原理決定：$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

- 干涉 (Interference)：為「離散數量」（Discrete summation）的光波疊加。例如兩道或三道光的交會，以形成明確的明暗條紋。
- 繞射 (Diffraction)：定義為「連續分布」（Continuous integration）的光波疊加。

三、 干涉現象的數學分析與偏振條件

干涉並非僅是強度的相加，其核心在於「相位差」與「偏振態」。

3.1 基本干涉方程式

考慮兩道平面波疊加，觀測到的光強度 I 為：

$$I = |\vec{E}|^2 = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^* = I_1 + I_2 + 2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos\delta$$

其中 δ 為兩者的相位差。

3.2 偏振對干涉的決定性影響

干涉項的強弱受電場向量方向（偏振）的影響:

1 若 $\vec{E}_{01} \perp \vec{E}_{02}$（互相垂直）：點積為零，不產生干涉。

此時不論相位如何變化，總強度始終為 $I = I_1 + I_2$。(這解釋了為什麼兩道垂直偏振的光無法觀察到條紋。）

2 若$\vec{E}_{01} \parallel \vec{E}_{02}$（互相平行）：干涉效應最大化。

建設性干涉: $\delta = 2m\pi$，強度最大值為 $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$。

破壞性干涉: $\delta = (2m+1)\pi$，強度最小值為 $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$。

四、 實驗主題: 雙狹縫與多狹縫干涉之物理建模與應用

4.1 雙狹縫干涉 (Double-Slit Interference)

假設: 假設狹縫間距為 ɑ，狹縫平面與屏幕距離為 s（遠場條件: s>>ɑ）。

電場疊加: 兩個點光源的電場分別為$\vec{E}_1$與 $\vec{E}_2$。合成電場$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ 。其中強度 I 與電場平方成正比:

$$I = 4E_0^2 \cdot \cos^2\left(\frac{ka}{2s}y\right)$$

其中 $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

- 干涉條件:
  - 建設性干涉（亮帶）：$\frac{ka}{2s}y = m\pi \implies y_m = m \cdot \frac{\lambda s}{a}$
  - 破壞性干涉（暗帶）：$y_m = (m + \frac{1}{2}) \cdot \frac{\lambda s}{a}$
  - 相鄰條紋間距: $\Delta y = \frac{s}{a}\lambda$。

4.2 多狹縫干涉 (Multi-Slit Interference)

- 假設：由 N 個狹縫組成，每個狹縫間距為 a。
- 幾何級數疊加：合成電場為 N 個波源的等比級數和:

$$\vec{E} = E_0 e^{ikz} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i(nk_y y)}$$

利用幾何級數公式 $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$，推導出強度公式:

$$I = E_0^2 \left[\frac{\sin(\frac{Nk_y y}{2})}{\sin(\frac{k_y y}{2})} \right]^2$$

其中 $k_y = k \cdot \frac{a}{s}$

- 特性分析:
  - 極大值 (Main Maxima)：當分母為 0 時，強度達到最大值 $I_{max} = E_0^2 \cdot N^2$
  - 狹縫數 N 越多，主要條紋寬度縮減

4.3 雙狹縫與多狹縫干涉強度分佈模擬

這邊模擬在遠場條件下（Fraunhofer），光波通過不同狹縫結構後於螢幕上的強度分佈情形。假設入射光為單色平面波，波長為 532 nm，狹縫間距為 0.1 mm，螢幕與狹縫間距為 1 m，觀察螢幕上沿垂直方向的位置變化。

* 橫軸表示螢幕上之位置；縱軸為光強度（單位（a.u.））。

- 雙狹縫干涉（圖 1）

雙狹縫情形下，來自兩個狹縫的光波在螢幕上產生相位差，導致相長與相消干涉。

```
# 1. 雙狹縫 (N=2)
I_double = 4 * (np.cos(phi / 2)**2)
```

- 多狹縫干涉 / 光柵效應（圖 2）

當狹縫數目增加至多狹縫時（這邊設定N=10），只有在特定方向上，各狹縫所發出的光波能夠同時滿足相位相同的條件，形成主要的光。圖中可觀察到主要的光變得尖銳（強度提升）。

```
# 2. 多狹縫 (假設 N=10)
N = 10
# 避免分母為零，加入極小值 eps
I_multi = (np.sin(N * phi / 2) / (np.sin(phi / 2) + 1e-12))**2
```

- 雙狹縫與多狹縫之比較

相較於雙狹縫，多狹縫干涉所形成的亮紋寬度顯著變窄，主要光更加集中且銳利，使得不同波長或不同角度的光更容易被區分。雙狹縫則因干涉條件較為寬鬆，亮紋較寬且分佈均勻。

```python
# 圖 1: 雙狹縫
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(y * 1000, I_double, color='blue', label='Double Slit (N=2)')
plt.title("Double Slit vs Multi-Slit Interference Simulation")
plt.ylabel("Intensity (a.u.)")
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
```

```python
# 圖 2: 多狹縫
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(y * 1000, I_multi, color='red', label=f'Multi-Slit (N={N})')
plt.xlabel("Position on screen (y) [mm]")
plt.ylabel("Intensity (a.u.)")
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

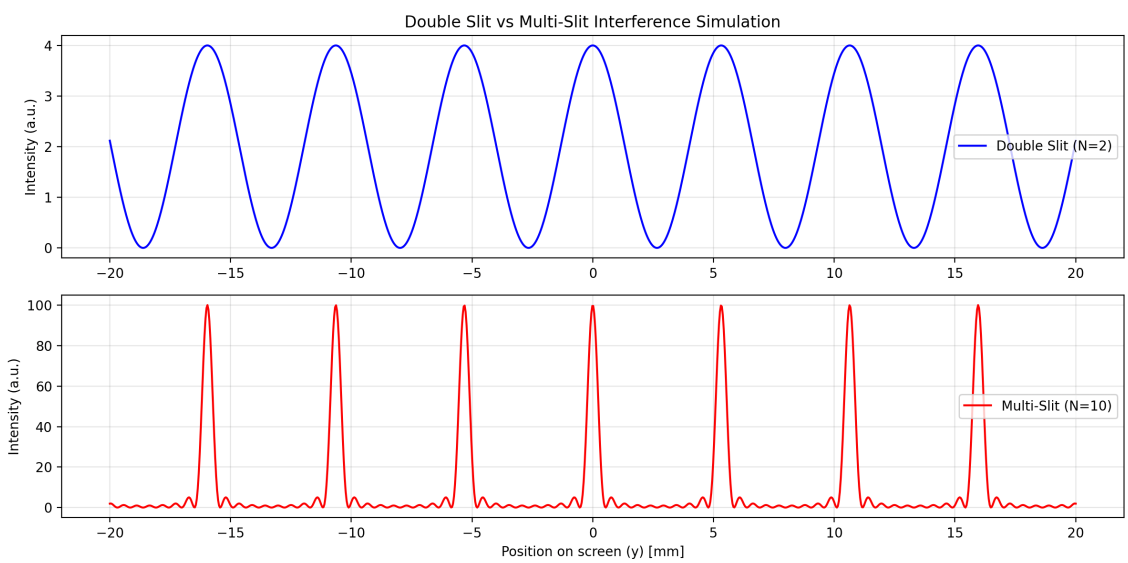


圖 1，雙狹縫。圖 2，多狹縫。

五、 其他類型干涉 1：薄膜干涉（Thin Film Interference）

薄膜干涉是光在薄膜的上下表面多次反射後，所產生的干涉現象。

5.1 模型與推導

當光從折射率 n1 的環境入射至厚度為 d、折射率為 n2 的薄膜時，會產生兩條主要的反射光線：一條從表面 A 直接反射，另一條進入薄膜後從底部 B 反射再穿出 C。

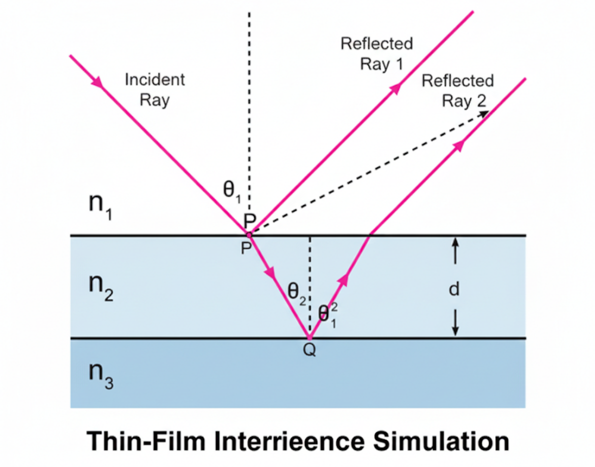


圖 3

- 相位差 (δ)：反射光線之間的相位差 δ由光在薄膜中行進所造成的 光程差 (OPD, Δ) 決定，其關係式為：

$$\delta = k \cdot \Delta$$

其中波數 k定義為：

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- 光程差 (Δ) 公式：推導結果為：

$$\Delta = n_2(\overline{AB} + \overline{BC}) - n_1\overline{AD}$$

透過斯涅爾定律 ($n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$) 簡化後得到最終形式：

$$\Delta = 2d \cdot n_2 \cdot \cos\theta_2$$

其中：

d為薄膜厚度

θ_2為光在薄膜內的折射角

- 總相位差公式：

將光程差代入相位差公式，可得兩反射光之間的總相位差為：

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2d \cdot n_2 \cdot \cos\ \theta_2$$

六、 其他類型干涉 2：Fabry – Pérot 干涉（Fabry – Pérot Interference）

6.1 基本原理

Fabry – Pérot 干涉儀主要由兩片彼此平行且具有高反射率 R 的平面鏡組成，兩鏡面間形成一光學共振腔（Optical Cavity），其光會在腔內多次反射並疊加，產生強烈且的干涉共振現象。

由於反射鏡具有高反射率，光在腔內可往返多次，因此相較於雙光束干涉或薄膜干涉，Fabry – Pérot 干涉屬於多重光束干涉（multiple-beam interference），其干涉條紋具有高對比度與高光譜解析度。

6.2 公式模型

當光入射至 Fabry – Pérot 腔內時，每一次反射後透射出的光束，皆具有固定的相位關係，並在腔外相互疊加形成干涉。

設兩反射鏡間距為 L，腔內介質折射率為 n，光以入射角 θ傳播，則相鄰兩次透射光束之間的光程差為

$$\Delta = 2nL\cos\ \theta$$

其對應的相位差為

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2nL\cos\ \theta$$

當相位差滿足建設性干涉條件

$$\delta = 2m\pi (m = 0,1,2,\ldots)$$

即

$$2nL\cos\ \theta = m\lambda$$

腔內光場會形成共振（resonance），使透射光強達到極大值；反之，若不滿足此條件，則產生破壞性干涉，透射光強顯著降低。

第二章：偏振（Polarization）

光的偏振描述的是電場矢量在空間隨時間的振動方向與運動狀態。

一、偏振的物理意義

延續第一章的電磁波描述，光為橫波，其**電場向量的振動方向**決定光的偏振態。

電磁波在自由空間中的表示式

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re\left\{(E_x\hat{x} + E_y\hat{y})\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right\}$$

其中：

- E_x, E_y為兩個互相正交的電場分量
- 偏振態由 **振幅比** $|E_y|/|E_x|$與 **相位差** δ決定
- 磁場 **H**與電場垂直，不影響偏振分類

二、偏振態的分類

2.1 線偏振（Linear Polarization）

條件：

$$\delta=0 \text{ 或 } n\pi$$

此時兩正交電場分量同相或反相，電場向量沿固定方向振動：

$$\frac{E_y}{E_x} = \tan\ \theta$$

其中 θ為偏振方向角。

2.2 圓偏振（Circular Polarization）

條件：

振幅相等： $E_{0x} = E_{0y} = E_0$

相位差為： $\delta = \phi_y - \phi_x = \pm\pi/2$

電場分量可寫為：

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - kz + \phi_x)$$

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kz + \phi_x \pm \pi/2) = \mp E_0 \sin(\omega t - kz + \phi_x)$$

利用三角恆等式 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，可得：

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$$

旋轉方向判別與 Jones 向量:

- 右旋圓偏振（RCP）：

$$\mathrm{J_{RCP}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-i}\,(\delta = -\frac{\pi}{2})$$

- 左旋圓偏振（LCP）：

$$\mathrm{J_{LCP}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{+i}\,(\delta = +\frac{\pi}{2})$$

2.3 橢圓偏振（Elliptical Polarization）

橢圓偏振為**最一般的偏振態**，線偏振與圓偏振皆為其特例。

條件:

$$|\ E_x\ | \neq |\ E_y\ |, \delta \neq 0, \pi, \pm\frac{\pi}{2}$$

電場分量表示式:

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_y(t) &= E_{0y}\cos(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

利用三角恆等式:

$$\cos(\omega t + \delta) = \cos\ \delta\cos(\omega t) - \sin\ \delta\sin(\omega t)$$

消去時間項後，可得電場端點滿足之一般二次曲線方程：

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{E_{0x}E_{0y}}\cos\,\delta = \sin^2$$

此為橢圓方程，因此稱為橢圓偏振。

2.4 Stokes 參數（部分偏振光）

若光非完全偏振，可用 Stokes 參數描述：

$$\begin{aligned} S_0 &= I_x + I_y \\ S_1 &= I_x - I_y \\ S_2 &= I_{45^\circ} - I_{135^\circ} \\ S_3 &= I_R - I_L \end{aligned}$$

其中：

- S_0：總強度
- S_1：水平 / 垂直偏振差
- S_2：$\pm 45^\circ$ 線偏振差
- S_3：左右旋圓偏振差

三、龐加萊球（Poincaré Sphere）

龐加萊球（Poincaré sphere） 是一個將所有完全偏振態映射至單位球面的幾何模型。它提供了電場的幾何參數（偏振橢圓的傾斜角與橢圓率）與可量測的 Stokes 參數之間的直接對應關係。

3.1 座標與幾何參數對應

龐加萊球上的任一點可由兩個角度參數 ψ與 χ決定，分別對應偏振橢圓的幾何特徵：

（1）緯度角：橢圓率角 χ

χ決定偏振態的橢圓率（ellipticity）

（2）經度角：偏振方位角 ψ

3.2 球面上的分佈特徵（如圖 4）

⑴ 北極（$S_3 = +1$）：左旋圓偏振（LCP）

⑵ 南極（$S_3 = -1$）：右旋圓偏振（RCP）

⑶ 赤道（$S_3 = 0$）：所有線偏振態

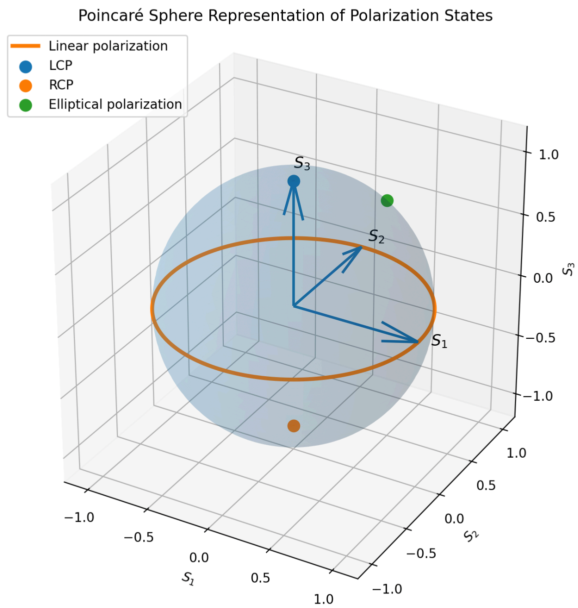


圖 4

3.3 與 Stokes 向量的關係

對於完全偏振光，歸一化 Stokes 參數定義為：

$$s_1 = \frac{S_1}{S_0}, s_2 = \frac{S_2}{S_0}, s_3 = \frac{S_3}{S_0}$$

並滿足單位球條件：

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$$

3.4 幾何角度與 Stokes 參數對應式

$$\begin{aligned} s_1 &= \cos\ 2\psi \cos\ 2\chi \\ s_2 &= \sin\ 2\psi \cos\ 2\chi \\ s_3 &= \sin\ 2\chi \end{aligned}$$

其中：

ψ：橢圓主軸方向角

χ：橢圓偏心率（橢圓率）

3.5 電場參數

設電場分量為:

$$
\begin{aligned}
E_x(t) &= E_{0x}\cos(\omega t) \\
E_y(t) &= E_{0y}\cos(\omega t+\delta)
\end{aligned}
$$

則幾何角度與電場參數的關係為:

$$\tan\ 2\psi = \frac{2E_{0x}E_{0y}\cos\ \delta}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}$$

$$\sin\ 2\chi = \frac{2E_{0x}E_{0y}\sin\ \delta}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}$$

其中:

$\delta = \phi_y - \phi_x$：兩正交分量的相位差

四、實驗主題：圓偏振模擬

4.1 實驗目的

模擬圓偏振光的電場隨時間和空間的旋轉軌跡。觀察右旋（RCP）與左旋（LCP）圓偏振光的差異。

4.2 實驗原理：

光是一種橫波，其電場向量垂直於傳播方向。而圓偏振光的特徵為電場在傳播方向上旋轉，且振幅保持不變。

4.3 實驗方法與步驟：

(1) 使用 Python 與 matplotlib 套入 3D 模型 。

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.animation import FuncAnimation
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

(2) 定義電場振幅 E0、波數 k、角頻率 ω。

```
# 參數設定
E0 = 1
omega = 2 * np.pi
k = 2 * np.pi
c = 1
```

(3) 運用公式 $\mathrm{E}(z,t) = \hat{x}E_0\cos(kz - \omega t) \pm \hat{y}E_0\sin(kz - \omega t)$，來設定圓偏振光的電場分量。

右旋：

```python
# 右旋圓偏振電場
Ex = E0 * np.cos(k * Z - omega * T)
Ey = E0 * np.sin(k * Z - omega * T)
```

左旋:

```python
# 左旋圓偏振
Ex = E0 * np.cos(k * Z - omega * T)
Ey = -E0 * np.sin(k * Z - omega * T)
```

(4) 建立 3D 圖形與坐標軸

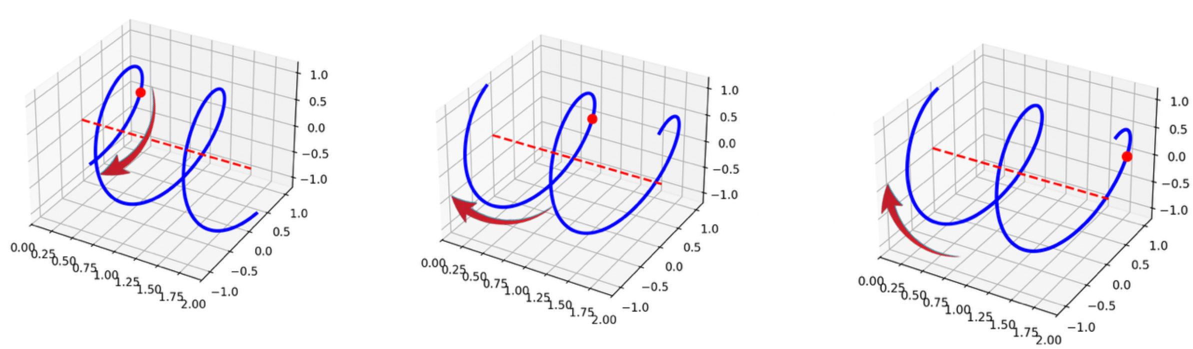
```python
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.set_xlim(0, 2)
ax.set_ylim(-1.2, 1.2)
ax.set_zlim(-1.2, 1.2)
```

(5) 畫出電場旋轉軌跡的線與軸心線

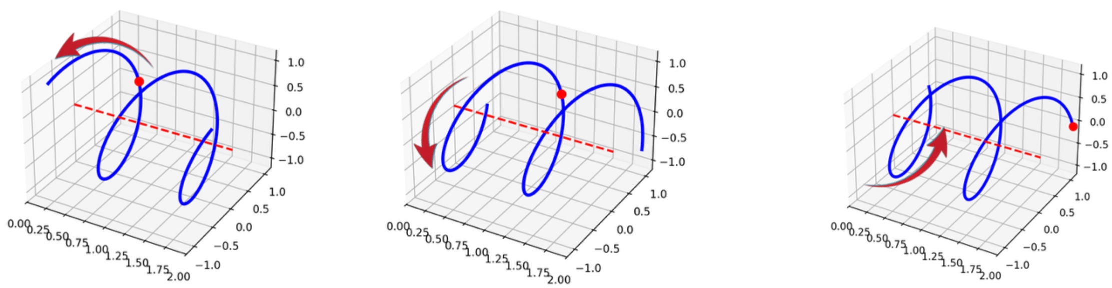
```python
# 電場線
line, = ax.plot([], [], [], lw=3, color='b')
# 軸心線
axis_line, = ax.plot([0, 2], [0, 0], [0, 0], lw=2, color='r', linestyle='--')
```

(6) 右/左旋動畫(這邊以圖片方式呈現)

右旋:



左旋:



(7)小結

由模擬結果可清楚觀察到，右旋圓偏振光（RCP）與左旋圓偏振光（LCP）之電場旋轉方向彼此相反，且皆沿著光波的傳播方向（軸心線方向）前進。

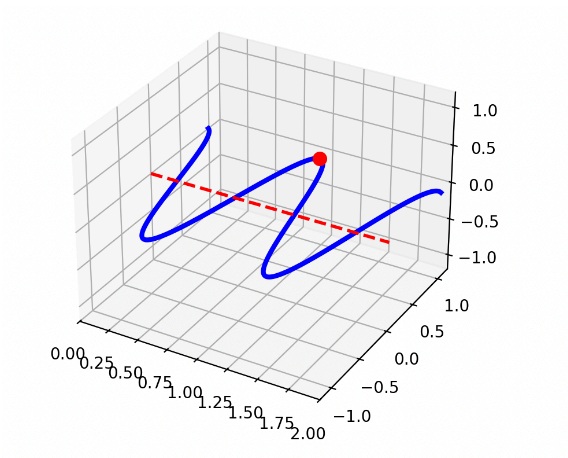
透過程式模擬，這邊將圓偏振光的時間與空間變化以具體的方式呈現，使偏振光的物理行為更加直觀，有助於理解電磁波的偏振特性與傳播本質。此外，藉由調整電場分量的振幅比例或相位差，程式亦可延伸模擬橢圓偏振光與線偏振光，展現不同偏振狀態之間的關係與轉換。

線偏振與圓偏振程式碼:

```
#線偏振
Ex = E0 * np.cos(k * Z - omega * T)
Ey = np.zeros_like(Ex)

#橢圓偏振
Ex = E0 * np.cos(k * Z - omega * T)
Ey = 0.5 * E0 * np.cos(k * Z - omega * T + np.pi/3)
```

線偏振圖:



橢圓偏振（以相位差 $\pi/3$ 為例）：