

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA  
ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA APLICADA  
*Curso: M705 Análisis Numérico 1*

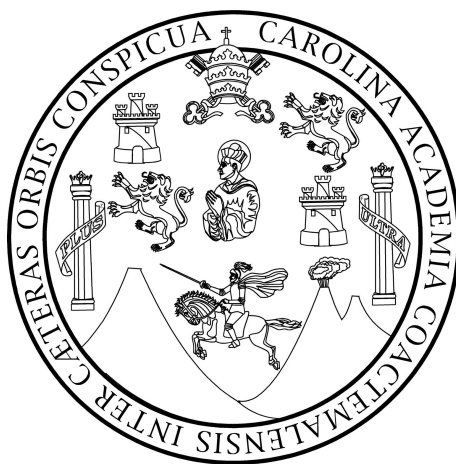
---

# Ejercicios de Álgebra Lineal Numérica

---

*Autor:*  
Javier Navarro

*Profesor:*  
Damián Ochoa



Guatemala, abril de 2020



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Repaso: Algo de Álgebra Lineal</b>	<b>7</b>
1.1. Vectores en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ . . . . .	7
1.2. Matrices . . . . .	10
1.3. Determinantes de matrices cuadradas . . . . .	18
1.4. Matriz inversa de una matriz cuadrada . . . . .	19
1.5. Eigenvalores y Eigenvectores de una matriz cuadrada . . . . .	22
1.6. Otra notación: El símbolo Landau . . . . .	22
<b>2. Teoría de matrices</b>	<b>23</b>
2.1. El Eigensistema de una matriz cuadrada . . . . .	23
2.2. Matrices superiores y sustitución hacia atrás . . . . .	32
2.3. Factorización de Schur, forma canónica trangular . . . . .	36
2.4. Normas de vectores . . . . .	39
2.5. Normas de matrices . . . . .	43
2.6. Radio espectral de una matriz . . . . .	46
<b>3. Aritmética de punto flotante y estabilidad</b>	<b>55</b>
3.1. Números condicionales de las matrices . . . . .	55
3.2. Aritmética de punto flotante . . . . .	55
3.3. Condicionando . . . . .	55
3.4. Estabilidad . . . . .	55
3.5. Un algoritmo de sustitución hacía atrás estable . . . . .	55
<b>4. Métodos directos para sistemas lineales</b>	<b>57</b>
4.1. Eliminación Gaussiana . . . . .	57
4.2. La factorización $LU$ . . . . .	65
4.3. Pivoteo . . . . .	68

4.4. Factorización de Cholesky . . . . .	69
4.5. Factorización QR . . . . .	72
<b>5. Métodos iterativos para sistemas lineales</b>	<b>77</b>
5.1. Introducción . . . . .	77
5.2. Iteraciones de punto fijo . . . . .	77
5.3. Iteraciones de Jacobi y Gauss-Seidel . . . . .	82
5.4. Relajación . . . . .	87
<b>6. El método del gradiente conjugado</b>	<b>89</b>
6.1. El algoritmo genérico de minimización . . . . .	89
6.2. Minimización con la búsqueda del A-Conjugado . . . . .	89
6.3. Convergencia del método del gradiente conjugado . . . . .	89
<b>7. Cálculo de Eigenvalores</b>	<b>91</b>
7.1. Técnicas básicas de localización . . . . .	91
7.2. El método de la potencia . . . . .	91
7.3. La iteración inversa . . . . .	91
7.4. El método de Jacobi . . . . .	91
7.5. La reducción Householder a la forma Hessenberg . . . . .	91
7.6. El algoritmo QR . . . . .	91

# Introducción

Este es un compendio de las soluciones a los ejercicios propuestos por Kerstin Hesse, en su obra Numerical Linear Algebra. Fue desarrollada como una tarea en el curso de Análisis Numérico 1, de la carrera Licenciatura en Matemática Aplicada, en la Universidad de San Carlos de Guatemala. En las soluciones se utilizan conceptos de álgebra lineal, álgebra elemental y algoritmia.

**La esencia de las matemáticas radica en su libertad.  
Georg Cantor.**



# Capítulo 1

## Repaso: Algo de Álgebra Lineal

### 1.1. Vectores en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$

**Ejercicio 1.** *Indicar las propiedades de un producto interno o escalar para un espacio vectorial complejo  $V$  y verificar que el producto interno euclidiano para  $\mathbb{C}^n$  tiene estas propiedades.*

*Solución.* La definición que brinda Axler, es la siguiente:

Sea  $V$  un espacio vectorial y se hará referencia al campo  $\mathbb{F}$  que denotará a alguno de los siguientes conjuntos:  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ . Un producto interno en  $V$  es una función que mapea cada par ordenado  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  de elementos de  $V$  a un número  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{F}$  y tiene las siguientes propiedades:

- Positividad:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0 \text{ para todo } \mathbf{v} \in V$$

- Definición:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \text{ para todo } \mathbf{v} = 0$$

- Aditividad en la primer componente:

$$\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \text{ para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$$

- Homogeneidad en la primer componente:

$$\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{F} \text{ y para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

- Conjugado simétrico:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} \text{ para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

Solo resta demostrar que el producto euclideo, es un producto interno.

Sea  $\lambda \in \mathbb{F}$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ,  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  donde  $u_i, v_i, w_i \in \mathbb{F}$ , y el producto interno euclideo definido así:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \dots + u_n \overline{v_n}$$

1. Positividad:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &= v_1 \overline{v_1} + v_2 \overline{v_2} + \dots + v_n \overline{v_n} \\ &= |v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_n|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Esto se debe a que el módulo de un vector en  $\mathbb{F}$  elevado al cuadrado siempre es mayor a cero.

2. Definición:  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  si y solo si  $\mathbf{v} = 0$ .

Primero se procede a verificar la “ida” ( $\Rightarrow$ )

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &= v_1 \overline{v_1} + v_2 \overline{v_2} + \dots + v_n \overline{v_n} \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &= |v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_n|^2 \\ 0 &= |v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_n|^2 \rightarrow |v_i|^2 = 0 \rightarrow v_i = 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mathbf{v} = 0$ , esto es cierto por los resultados del inciso anterior.

Luego se procede a verificar la “vuelta” ( $\Leftarrow$ )

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &= v_1 \overline{v_1} + v_2 \overline{v_2} + \dots + v_n \overline{v_n} \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &= 0 + 0 + \dots + 0 \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

3. Aditividad en la primer componente:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= (u_1 + v_1) \overline{w_1} + (u_2 + v_2) \overline{w_2} + \dots + (u_n + v_n) \overline{w_n} \\ &= u_1 \overline{w_1} + v_1 \overline{w_1} + u_2 \overline{w_2} + v_2 \overline{w_2} + \dots + u_n \overline{w_n} + v_n \overline{w_n} \\ &= (u_1 \overline{w_1} + u_2 \overline{w_2} + \dots + u_n \overline{w_n}) + (v_1 \overline{w_1} + v_2 \overline{w_2} + \dots + v_n \overline{w_n}) \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \text{ para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \end{aligned}$$



4. Homogeneidad en la primer componente:

$$\begin{aligned}\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \lambda u_1 \overline{v_1} + \lambda u_2 \overline{v_2} + \dots + \lambda u_n \overline{v_n} \\ &= \lambda (u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \dots + u_n \overline{v_n}) \\ &= \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{F} \text{ y para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V\end{aligned}$$

5. Conjugado simétrico:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \dots + u_n \overline{v_n} \\ &= \overline{\overline{u_1} \overline{v_1}} + \overline{\overline{u_2} \overline{v_2}} + \dots + \overline{\overline{u_n} \overline{v_n}} \\ &= \overline{\overline{u_1} v_1} + \overline{\overline{u_2} v_2} + \dots + \overline{\overline{u_n} v_n} \\ &= \overline{v_1 \overline{u_1} + v_2 \overline{u_2} + \dots + v_n \overline{u_n}} \\ &= \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} \text{ para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V\end{aligned}$$

□

**Ejercicio 2.** *Mostrar que cualquier vector  $x \in \mathbb{C}^n$  tiene la representación*

$$x = \sum_{j=1}^n (v_j^* x) v_j$$

*como una combinación lineal respecto a la base ortonormal  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ .*

*Solución.* Debido a que  $x \in \mathbb{C}^n$  es posible definirlo de la siguiente forma:

$$x = \sum_{j=1}^n a_j v_j$$

Si se elije el vector  $\mathbf{v}_k^*$  de la base, luego:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_k^* x &= \mathbf{v}_k^* \sum_{j=1}^n a_j v_j \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{v}_k^* v_j \\ &= a_k \mathbf{v}_k^* v_k = a_k \|\mathbf{v}_k\|_2^2 = a_k\end{aligned}$$

entonces:

$$\mathbf{v}_k^* x = a_k \rightarrow x = \sum_{j=1}^n (v_j^* x) v_j$$

□

## 1.2. Matrices

**Ejercicio 3.** *Mostrar que con la suma usual de matrices y la multiplicación por escalar,  $\mathbb{C}^{m \times n}$  es un espacio vectorial complejo.*

*Solución.* Para demostrar que  $\mathbb{C}^{m \times n}$  es un espacio vectorial, lo primero es demostrar que cualquier elemento de  $\mathbb{C}^{m \times n}$  cumple con las siguientes propiedades:

■ **Conmutatividad en la suma:**

Sean  $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

donde  $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & \dots & b_{1n} + a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} + a_{m1} & \dots & b_{mn} + a_{mn} \end{pmatrix}$$

Por la conmutatividad en  $\mathbb{C}$  entonces,  $A + B = B + A$ .

■ **Asociatividad en la suma:**

Sea  $A, B, C \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,

$$(A + B) + C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(A + B) + C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} + c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} + c_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} + c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & \dots & b_{1n} + c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} + c_{m1} & \dots & b_{mn} + c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} + c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} + c_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} + c_{mn} \end{pmatrix}$$

Debido a que en los complejos existe la asociatividad en la suma, entonces  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .

■ **Neutro aditivo**

Para toda  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  existe  $e$  tal que  $A + e = A$  donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sea  $e$ :

$$e = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

luego:

$$A + e = \begin{pmatrix} a_{11} + 0 & \dots & a_{1n} + 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + 0 & \dots & a_{mn} + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

■ **Inverso aditivo**

Esto es, para toda  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  existe  $B$ , con la suma usual tal que  $A + B = e$ :

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} a_{11} + (-a_{11}) & \dots & a_{1n} + (-a_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + (-a_{m1}) & \dots & a_{mn} + (-a_{mn}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = e$$

■ **Neutro multiplicativo**

Esto es, que para toda  $\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  existe  $I_{m \times n}$  tal que:  $A \times I = A$ , sea  $I$  la matriz que posee en todas sus entradas cero, exceptuando la diagonal en la que sus entradas son uno.

$$A \times I = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

□

**Ejercicio 4.** Encontrar el imagen y el espacio nulo de la siguiente matriz:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

*Solución.* Para obtener el imagen se procederá a triangular la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donde el conjunto de los vectores columna de la ultima matriz son el imagen. Se observa que la ultima columna de la matriz es combinación lineal de las primeras tres columnas. Así que:

$$\text{imagen}(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se procede a calcular el kernel de  $A$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} w - y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ -w + x + 5y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w = -3z \\ x = -2y \\ y = -z \end{cases}$$

Sea  $z = 1$ , entonces:

$$\ker(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

**Ejercicio 5.** Para una matriz  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  mostrar que el imagen de  $A$  es el espacio lineal abarcado por los vectores de la columna de  $A$ .

*Solución.* Sea  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , considerando que el imagen de  $A$  es el conjunto de los vectores  $Ax$ , donde  $x \in \mathbb{C}^n$ :

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

Se procede a definir  $a_i$  como la  $i$ -ésima columna de  $A$ :

$$a_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \\ &= x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \end{aligned}$$

Es decir que todo vector  $Ax$  se puede representar como una combinación lineal de las columnas de  $A$ :

$$\text{imagen}(A) = \text{span}\{a_i\}$$

□

**Ejercicio 6.** ¿Cuál de las siguientes matrices cuadradas, si es que hay alguna, es simétrica o Hermitiana?

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & i \\ 2 & i & 3 \\ -i & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 2 & -i \\ 2 & 7 & 5 \\ i & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ -2 & 7 & -1 \\ 8 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

*Solución.* Se procede a calcular el conjugado transpuesto de cada una de las matrices:

- Para la matriz  $A$

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & i \\ 2 & -i & 3 \\ i & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Se observa que  $A \neq A^*$ , por lo tanto,  $A$  no es ni simétrica ni Hermitiana.

- Para la matriz  $B$

$$B^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -i \\ 2 & 7 & 5 \\ i & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Se observa que  $B^* \neq B$ , por lo tanto,  $B$  es Hermitiana.

- Para la matriz  $C$ , es evidente que al tener únicamente entradas reales y pocas entradas para notar que es igual a su traspuesta, se clasifica a  $C$  como simétrica.

□

**Ejercicio 7.** *Mostrar que  $(AB)^T = B^T A^T$  para cualquier  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ .  
Mostrar que  $(AB)^* = B^* A^*$  para cualquier  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  y  $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$ .*

*Solución.* Sean  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $B = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , luego:

$$(AB)^T = ((a_{i,j})(b_{i,j}))^T = (c_{i,j})^T$$

donde

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \text{ donde } i = 1, \dots, m \text{ y } j = 1, \dots, p$$

Se procede a verificar la primera propiedad:

$$\begin{aligned} (AB)^T &= c_{i,j} = \left( \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^T \\ &= \left( \sum_{k=1}^n b_{k,j} a_{i,k} \right) = (b_{j,i})(a_{i,j}) \\ &= (b_{j,i})^T (a_{i,j})^T = B^T A^T \end{aligned}$$

Para la segunda propiedad:

$$\begin{aligned} (AB)^* &= \overline{(AB)^T} = \overline{B^T A^T} = \overline{\left( \sum_{k=1}^n b_{k,j} a_{i,k} \right)} \\ &= \left( \sum_{k=1}^n \overline{b_{k,j} a_{i,k}} \right) = \left( \sum_{k=1}^n \overline{b_{k,j}} \overline{a_{i,k}} \right) \\ &= \overline{B}^T \overline{A}^T = B^* A^* \end{aligned}$$

□

**Ejercicio 8.** *Calcular la traza de la matriz de  $3 \times 3$ :*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

*Solución.* El primer paso es calcular los valores propios  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  de  $A$ :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^2 (3 - \lambda) - \frac{1}{4}(3 - \lambda) &= 0 \\ (3 - \lambda) \left[ \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4} \right] &= 0 \end{aligned}$$

Un polinomio de grado tres, tiene tres raíces:

$$\begin{aligned} 3 - \lambda &= 0 & \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \\ \lambda_1 &= 3 & \lambda_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2, \lambda_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} &= 1 \end{aligned}$$

Finalmente, la *traza*( $A$ ) =  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 + 2 + 1 = 6$ . □

**Ejercicio 9.** *Demostrar que la matriz simétrica:*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

*es definida positiva.*

*Solución.* Sea  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ :

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\Rightarrow x^T A x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(3x_1^2 + 2x_1x_3 + 3x_3^2 + 6x_2^2) \\ &= \frac{1}{2}((x_1 + x_3)^2 + 2x_1^2 + 2x_3^2 + 6x_2^2) \end{aligned}$$

Es evidente que la expresión anterior no puede ser negativa, por lo tanto,  $A$  es definida positiva. □



**Ejercicio 10.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz definida positiva. Si  $C \in \mathbb{C}^{n \times m}$ , demostrar que:

- (a)  $C^*AC$  es semidefinida positiva.
- (b)  $\text{rango}(C^*AC) = \text{rango}(C)$ .
- (c)  $C^*AC$  es definida positiva ssi  $\text{rango}(C) = m$ .

*Solución.* A continuación resuelve cada uno de los incisos:

- (a) Sea  $x \in \mathbb{C}^m$ ,  $x \neq 0$ ,  $x^*C^*ACx = y^*Ay$ , donde  $y = Cx$  y  $y \in \mathbb{C}^n$ ,  $y \geq 0$ . Así que  $C^*AC$  es semidefinida positiva.
- (b) Es obvio que  $\dim(\text{imagen}(C^*A)) \leq n$  y por el teorema de rango-nulidad  $\text{rango}(C^*A) = m - \dim(\text{kernel}(C^*A))$  entonces  $\dim(\text{imagen}(C^*A)) \leq m$ . Se infiere que:

$$\text{rango}(C^*A) \leq \min\{\text{rango}(C^*), \text{rango}(A)\}$$

luego:

$$\text{rango}(C^*A) \leq \text{rango}(C^*) \text{ y } \text{rango}(C^*) = \text{rango}((C^*A)A^{-1}) \leq \text{rango}(C^*A)$$

Por lo tanto:

$$\text{rango}(C^*A) = \text{rango}(C^*)$$

Si se repite el procedimiento se concluirá que:

$$\text{rango}(C^*AC) = \text{rango}(C^*) = \text{rango}(C)$$

- (c) En el inciso a se demostró que la matriz  $C^*AC$  es semidefinida positiva, no es definida positiva debido a que existe una o mas entradas en la diagonal que cumplen la igualdad en  $\det(C^*AC) = 0$ , en otras palabras la  $\dim(\text{kernel}(C^*A)) \neq 0$ , es decir, la unica forma en la que esto no suceda es si  $\dim(\text{kernel}(C^*A)) = 0$  y por el teorema de rango-nulidad  $\text{rango}(C^*A) = \text{rango}(C^*) = \text{rango}(C) = m$

□

### 1.3. Determinantes de matrices cuadradas

**Ejercicio 11.** Calcule el determinante de la matriz de  $3 \times 3$ :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

*Solución.* Se determinará el determinante con el método de cofactores:

$$\det(A) = \frac{3}{2} \left( 3 * \frac{3}{2} - 0 * 0 \right) - 0 * \left( 0 * \frac{3}{2} - 0 * \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( 0 * 0 - 3 * \frac{1}{2} \right) = 6$$

□

**Ejercicio 12.** Demostrar que si  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es definida positiva, entonces las submatrices superiores principales  $A_p := (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ ,  $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ , son definidas positivas.

*Solución.* Sea la submatriz principal  $A_k$  de la matriz definida positiva  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Claramente  $A_k$  es simétrica. Sea  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$  diferente del vector nulo, y:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

y una partición de  $A$  realizada conforme a  $\mathbf{y}$  de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ donde } D_k \in \mathbb{R}^{n-k, n-k}$$

luego:

$$0 < \mathbf{y}^T A \mathbf{y} = (\mathbf{x}^T \ 0^T) \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T A_k \mathbf{x}$$

□

**Ejercicio 13.** Demostrar que para todas las matrices cuadradas  $A$  de  $n \times n$ ,  $\det(A) = \det(A^T)$ .

*Solución.* Debido a que los renglones de  $A$  son las columnas de  $A^T$  el cálculo del  $\det(A^T)$  mediante el desarrollo a lo largo del primer renglón es idéntica a la evaluación del  $\det(A)$  al desarrollar a lo largo de su primera columna, operación fundamentada en el teorema de la expansión de Laplace, el cual verifica que el determinante de una matriz puede ser calculado mediante la expansión de cualquier fila o columna.  $\square$

## 1.4. Matriz inversa de una matriz cuadrada

**Ejercicio 14.** Mostrar que la matriz de  $3 \times 3$ :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

es no singular. Calcule la matriz inversa  $A^{-1}$  de  $A$ .

*Solución.* Una matriz cuadrada  $A$  es invertible si y solo si,  $\det(A) \neq 0$ . Se procede a calcular mediante co-factores, el determinante de la matriz:

$$\det(A) = \frac{3}{2}(3 * \frac{3}{2} - 0 * 0) - 0 * (0 * \frac{3}{2} - 0 * \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(-3 * \frac{1}{2}) = 6$$

Se concluye que la matriz  $A$  es invertible y se utiliza el método de Gauss-Jordan para su cálculo,

$$(A|I) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right) = (I|A)$$

$\square$

**Ejercicio 15.** Sea  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  matrices invertibles. Demostrar lo siguiente:

(a)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(b)  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ . Use el resultado para concluir:  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$  si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(c)  $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

A continuación se demostrarán uno a uno los incisos.

(a)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

*Solución.* El objetivo es demostrar que existe una matriz  $X$  tal que:

$$(AB)X = I = X(AB)$$

Por lo tanto, si  $X$  toma el valor de  $B^{-1}A^{-1}$  entonces, se debería cumplir que:

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = A(I)A^{-1} = AA^{-1} = I$$

y

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(I)B = B^{-1}B = I$$

□

(b)  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$  Use el resultado para concluir  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$  si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

*Solución.* Por la definición de matriz inversa se debe de cumplir lo siguiente:

$$A^*X = I = XA^*$$

Luego,

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I$$

y

$$(A^{-1})^*A^* = (AA^{-1})^* = I^* = I$$

Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  entonces,  $A = \overline{A}$  Por lo tanto,  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

□

(c)  $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

*Solución.* Partiendo de la siguientes propiedades:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$A^{-1}A = I$$

luego,

$$\det(A^{-1}A) = \det(I)$$

$$\det(A^{-1})\det(A) = 1$$

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$$

□

**Ejercicio 16.** *Mostrar que una matriz definitiva positiva  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no es singular y que su matriz inversa  $A^{-1}$  es también definida positiva.*

*Solución.* Si  $A$  es definida positiva, entonces sus valores propios, así como su determinante son positivos, esto implica que  $A$  es invertible y por lo tanto, es no singular. Debido a que  $A$  es simétrica, entonces:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= A^{-1}A \\ I &= I^T \\ AA^{-1} &= (A^{-1}A)^T \\ AA^{-1} &= A^T (A^{-1})^T \\ AA^{-1} &= A^T (A^{-1})^T \end{aligned}$$

Luego,  $A^{-1} = (A^{-1})^T$ , es decir, la inversa de  $A$  también es simétrica. Ya que cada valor propio de  $A^{-1}$  es de la forma  $\frac{1}{\lambda}$ , donde  $\lambda$  es un valor propio de  $A$ . Como  $\lambda > 0$ , entonces  $\frac{1}{\lambda} > 0$ . Por lo tanto,  $A^{-1}$  es definida positiva.  $\square$

**Ejercicio 17.** *Mostrar que la inversa de una matriz unitaria es unitaria. Usar este resultado para mostrar que las matrices unitarias en  $\mathbb{C}^{n \times n}$  con la multiplicación matricial forman un grupo (multiplicativo).*

*Solución.* Si  $U$  es una matriz unitaria en  $\mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $U^* = U^{-1}$ . Entonces,

$$(U^*)^{-1} = (U^{-1})^{-1} = U = (U^*)^*,$$

con esta manipulación queda demostrado que la inversa de una matriz unitaria es unitaria.

Resta demostrar que las matrices unitarias en  $\mathbb{C}^{n \times n}$  con la multiplicación matricial forman un grupo (multiplicativo).

- Lo primero es considerar que la multiplicación de matrices es asociativa.
- Por la naturaleza de  $U$  es evidente que  $U \times I = U$  donde  $I$  es el elemento neutro.
- Con el resultado anterior, las inversas de las matrices unitarias son también unitarias, por lo que se cumple la propiedad del inverso.
- La multiplicación de dos matrices, debe ser parte del conjunto:

$$(U_1 U_2)^{-1} = U_2^{-1} U_1^{-1} = U_2^* U_1^* = (U_1 U_2)^*$$

q.e.d, la matrices unitarias de  $n \times n$  en  $\mathbb{C}$  es un grupo multiplicativo.  $\square$

**Ejercicio 18.** Considérese la matriz  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  y el vector  $b \in \mathbb{R}^3$  dados por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular el determinante de  $A$ .

(b) ¿Es  $A$  invertible? ¿Por qué?

*Solución.* Se procede a resolver uno a uno los incisos:

(a) Se calculará el determinante con el método de co-factores

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 * (2 * 3 - 1 * 1) + 1 * (-1 * 3 - 1 * 0) + 0 * (-1 * 1 - 2 * 0) \\ &= 5 - 3 = 2 \end{aligned}$$

(b)  $A$  es invertible debido a que  $\det(A) \neq 0$ .

$\square$

## 1.5. Eigenvalores y Eigenvectores de una matriz cuadrada

## 1.6. Otra notación: El símbolo Landau

# Capítulo 2

## Teoría de matrices

### 2.1. El Eigensistema de una matriz cuadrada

**Ejercicio 19.** *Calcular los valores propios y sus vectores propios correspondientes de la matriz de  $3 \times 3$*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

*Solución.* El primer paso es calcular los valores propios  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  de  $A$ :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^2 (3 - \lambda) - \frac{1}{4}(3 - \lambda) &= 0 \\ (3 - \lambda) \left[ \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4} \right] &= 0 \end{aligned}$$

Un polinomio de grado tres, tiene tres raíces:

$$\begin{aligned} 3 - \lambda &= 0 & \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \\ \lambda_1 &= 3 & \lambda_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2, \lambda_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$ . Lo siguiente es en base a los valores propios encontrados,

- Vector propio asociado a  $\lambda_1 = 3$ :

$$\text{Sea } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$(\lambda_1 I - A)x = \left( \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_1 I - A)x = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 &= 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 &= 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 + \frac{9}{2}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$4x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = c_1 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donde } c_1 \neq 0$$



- Vector propio asociado a  $\lambda_2 = 2$ :

Sea  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ .

$$(\lambda_2 I - A)y = \left( \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_2 I - A)y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3 \\ -y_2 \\ -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3 = 0$$

$$-y_2 = 0$$

$$-\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_3 = 0$$

$$\Rightarrow y_2 = 0, y_1 = y_3 \Rightarrow y = \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donde } c_2 \neq 0$$

- Vector propio asociado a  $\lambda_3 = 1$ :

Sea  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ .

$$(\lambda_3 I - A)z = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_3 I - A)z = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_3 \\ -2z_2 \\ -\frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z_2 = 0, z_1 = -z_3 \Rightarrow z = \begin{pmatrix} c_3 \\ 0 \\ -c_3 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ donde } c_3 \neq 0.$$

□

**Ejercicio 20.** Considérese la matriz  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule los eigenvalores de  $A$ .

(b) Calcule todos los eigenvectores para los eigenvalores que sean enteros.

*Solución.* (a) El primer paso es calcular los valores propios  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  de  $A$ :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) - (1 - \lambda) - (3 - \lambda) &= 0 \\ -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$ .

(b) Calcule todos los eigenvectores para los eigenvalores que sean enteros.

- Vector propio asociado a  $\lambda_1 = 3$ :

Sea  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ .

$$(\lambda_1 I - A)x = \left( \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_1 I - A)x = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Vector propio asociado a  $\lambda_2 = 2$ :

Sea  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ .

$$(\lambda_2 I - A)y = \left( \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_2 I - A)y = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_3 \\ -y_2 - y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - y_3 = 0$$

$$-y_2 - y_3 = 0$$

$$\Rightarrow y = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donde } c_1 \neq 0.$$

- Vector propio asociado a  $\lambda_3 = 1$ :

Sea  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ .

$$(\lambda_3 I - A)z = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_3 I - A)z = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 - z_2 - z_3 \\ -z_2 - 2z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_2 = 0$$

$$z_1 - z_2 - z_3 = 0$$

$$-z_2 - 2z_3 = 0$$

$$\Rightarrow z_2 = 0 \Rightarrow z_3 = 0, z_1 = 0 \Rightarrow z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donde } c_3 \neq 0.$$

□

**Ejercicio 21.** *Demostrar el paso de inducción en la demostración del lema 2.6.*

*Solución.* Sean  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1}$  los respectivos vectores propios. La hipótesis inductiva es que el conjunto  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1}\}$  es linealmente independiente. Sea  $a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_k\mathbf{v}_k + a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = 0$ , mostrando que  $a_1 = \dots = a_k = a_{k+1} = 0$  □

**Ejercicio 22.** *Para la matriz  $A$*

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

*encontrar una matriz  $S$  tal que*

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

*con  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ . Calcular  $S^{-1}$  y calcular la multiplicación  $S^{-1}AS$  para verificar que se eligió  $S$  correctamente.*

*Solución.* El primer paso es calcular los valores propios y vectores propios para  $A$ , pero este procedimiento ya se realizó en el **Ejercicio 19**, por lo que en la solución de este ejercicio se utilizarán esos resultados. Primero, se tomará el vector propio asociado a  $\lambda = 3$  el cual es  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ . Luego se procede a determinar la matriz de Householder que mapee  $\mathbf{x}$  a  $\|\mathbf{x}\|e_1 = e_1$ :

$$w_1 = \frac{\mathbf{x} - e_1}{\|\mathbf{x} - e_1\|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} H(w_1) &= I - 2w_1w_1^* = I - \frac{2}{(\sqrt{2})^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= I - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego,

$$H(w_1)AH(w_1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Sea  $a$  una submatriz  $2 \times 2$  de  $A$ :

$$a = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

En este punto, el proceso debe repetirse. Primero, encontrando sus valores propios:

$$\begin{aligned} \det(a - \Lambda I) &= 0 \\ \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \Lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \Lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \left(\frac{3}{2} - \Lambda\right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \\ \Lambda_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2, \Lambda_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Es fácil ver que los valores propios de  $a$  son  $\Lambda = 1$  y  $\Lambda = 2$ . Segundo, se tomará el vector propio asociado a  $\Lambda = 2$ , el cual es  $\mathbf{x}_a = (1 \ 1)^T$ . Luego, se debe determinar la matriz de Householder que mapee  $\mathbf{x}_a$  a  $\sqrt{2}e_1$ :

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{x}_a - \|\mathbf{x}_a\|e_1}{\|\mathbf{x}_a - \|\mathbf{x}_a\|e_1\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{aligned} H(w_2) &= I - 2w_2w_2^* = I - \frac{2}{\left(\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)^2} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ & \end{pmatrix} \\ &= I - \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En este punto es posible encontrar la matriz unitaria asociada a  $H(w_2)$ :

$$H_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Por ultimo,

$$\begin{aligned} H_2(H(w_1)AH(w_1))H_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

**Ejercicio 23.** Para la matriz  $A$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

encontrar una matriz ortogonal  $S$  tal que

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

con  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ . Verificar que tu matriz  $S$  es ortogonal. Verificar que la igualdad anterior es verdadera, efectuando la multiplicación.

*Solución.* El primer paso es calcular los valores propios y vectores propios para  $A$ , pero este procedimiento ya se realizó en el **Ejercicio 19**, es decir, en la solución de este ejercicio se utilizarán esos resultados, por lo que los valores y vectores propios de  $A$  son  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2$  y  $\lambda_3 = 1$  y  $\mathbf{x} = (0, 1, 0)^t$ ,  $\mathbf{y} = (1, 0, 1)^t$ , y  $\mathbf{z} = (-1, 0, 1)^t$  respectivamente. Luego es necesario normalizar los vectores propios,  $\mathbf{x} = (0, 1, 0)^t$ ,  $\mathbf{y} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})^t$  y  $\mathbf{z} = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})^t$ , entonces

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

**Ejercicio 24.** Sean  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz no singular. Mostrar que  $\text{traza}(S^{-1}AS) = \text{traza}(A)$ .

*Solución.* Para demostrar lo anterior, notese que para  $A, S, S^{-1}$ , por ser matrices cuadradas la traza del producto de estas tiene la propiedad,

$$\text{traza}(S^{-1}AS) = \text{traza}(SS^{-1}A) = \text{traza}(A)$$

A esto se le conoce como cíclico, es evidente que:

$$\text{traza}(SS^{-1}A) = \text{traza}(A)$$

por lo tanto:

$$\text{traza}(S^{-1}AS) = \text{traza}(A)$$

□

**Ejercicio 25.** Considérese la matriz real de  $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  (donde  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ) de  $A$ .

(b) Calcular los espacios propios correspondientes a los valores propios de (a).

*Solución.* (a) Se procede a calcular los valores propios de  $A$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = 0$$

Entonces:  $\lambda_1 = 4$  y  $\lambda_2 = 2$  donde  $\lambda_1 \geq \lambda_2$

(b) Para darle solución a este inciso, se parte del hecho de que:  $(A - \lambda I)v = 0$ ,  $v = (v_1, v_2)^T$ .

■ Para  $\lambda = 4$  tenemos que

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

El cual representa el sistema de ecuaciones:

$$-v_1 - v_2 = 0$$

$$-v_1 - v_2 = 0$$

Su se toma  $v_1 = 1$ , entonces  $v_2 = -1$ , por lo que

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

■ De forma análoga se repite el proceso para  $\lambda = 2$ , pero ahora el resultado es:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

## 2.2. Matrices superiores y sustitución hacia atrás

**Ejercicio 26.** Resolver el siguiente sistema lineal a mano con el algoritmo de sustitución hacia atrás:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$



*Solución.* El sistema lineal puede ser representado como el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_3 = 6 \end{cases}$$

Ahora, aplicando el algoritmo solicitado:

- Se despeja  $x_3$  de la tercera ecuación:

$$\begin{aligned} 3x_3 &= 6 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

- Se sustituye en la segunda ecuación y se despeja  $x_2$ :

$$\begin{aligned} 2x_2 + 2(2) &= 3 \\ x_2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Se sustituye  $x_1$  y  $x_2$  en la primera ecuación y se resuelve para  $x_1$ :

$$\begin{aligned} x_1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + (2) &= -1 \\ x_1 &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

□

**Ejercicio 27.** Resolver el siguiente sistema lineal a mano usando el algoritmo de sustitución hacia atrás:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

*Solución.* El sistema lineal puede ser representado como el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 12 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = -3 \\ -x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_4 = 9 \end{cases}$$

Ahora, aplicando el algoritmo solicitado:

- Se despeja  $x_4$  de la cuarta ecuación:

$$\begin{aligned} 3x_4 &= 9 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

- Se despeja  $x_3$  de la tercera ecuación, sustituyendo el valor de  $x_4$  encontrado:

$$\begin{aligned} -x_3 + (3) &= 1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

- Se despeja  $x_2$  de la segunda ecuación, sustituyendo los valores de  $x_4$  y  $x_3$  encontrados:

$$\begin{aligned} x_2 + 2(2) - (3) &= -3 \\ x_2 &= -4 \end{aligned}$$

- Se despeja  $x_1$  de la primera ecuación, sustituyendo los valores de  $x_4$ ,  $x_3$  y  $x_2$  encontrados:

$$\begin{aligned} 2x_1 - (-4) + 3(2) + (3) &= -1 \\ x_1 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

**Ejercicio 28.** *Mostrar que las matrices triangulares superiores con todos los elementos de sus diagonales diferentes de cero, con la multiplicación de matrices usual, forman un grupo multiplicativo.*

*Solución.* A continuación se procede con la solución, demostrando que el conjunto descrito, es un grupo y además es multiplicativo.

- Lo primero es considerar que la multiplicación de matrices es asociativa.
- Por la naturaleza de las matrices mencionadas es evidente que elegida una matriz  $U$  que pertenezca al conjunto existe  $I \in U \times I = U$  donde  $I$  es el elemento neutro, esta es la matriz identidad.

- Para ser un grupo debe cumplir con la propiedad del inverso. Considerando que las matrices descritas son invertibles porque su determinante es diferente de cero, se procederá a calcular su inversa y determinar si el inverso esta en el conjunto.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & | & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & | & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} & | & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & \cdots & \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} & | & \frac{1}{a_{1,1}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{a_{2,n}}{a_{2,2}} & | & 0 & \frac{1}{a_{2,2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & | & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n,n}} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & \cdots & 0 & | & \frac{1}{a_{1,1}} & 0 & \cdots & \cdots & -\frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \cdot \frac{1}{a_{n,n}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & | & 0 & \frac{1}{a_{2,2}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2,n}}{a_{2,2}} \cdot \frac{1}{a_{n,n}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & | & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n,n}} \end{pmatrix} \\
 \vdots$$

Ergo. la inversa de una matriz triangular superior es triangular superior.

- Las multiplicación de dos matrices del conjunto, debe ser parte del conjunto:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1,i}b_{i,n} \\ 0 & a_{2,2}b_{2,2} & \cdots & \sum_{i=2}^n a_{2,i}b_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n}b_{n,n} \end{pmatrix}$$

□

**Ejercicio 29.** *Forward substitution:* considérese un sistema lineal  $Ax = b$ , donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz triangular inferios,  $b \in \mathbb{R}^n$  el lado derecho dado, y  $x \in$

$\mathbb{R}^n$  la solución desconocida. Análogamente al algoritmo de back substitution podemos formular un algoritmo de forward substitution para calcular  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-1, n$ . Derivar el algoritmo de forward substitution.

*Solución.* Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz triangular inferior,  $b \in \mathbb{R}$  el lado derecho dado y  $x \in \mathbb{R}^n$  el vector solución desconocido.

```

1 for( int j =n-1; j>=0; j--) {
2     float sum = x[j];
3     for( int k = j+1; k <n; k++ ) {
4         sum -= A[k*n+j]* b[k];
5     }
6     x[j] = sum/A[j*n+j];
7 }

```

□

## 2.3. Factorización de Schur, forma canónica trangular

**Ejercicio 30.** Construir una matriz Householder que mapee el vector  $(2, 0, 1)^T$  en el vector  $(\sqrt{5}, 0, 0)^T$ .

*Solución.* Sea  $x = (2, 0, 1)^T$  y  $y = (\sqrt{5}, 0, 0)^T$ ,  $v = x - y$  y  $w = \frac{v}{|v|}$ .

$$w = \frac{(2 - \sqrt{5}, 0, 1)^T}{\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{(2 - \sqrt{5}, 0, 1)^T}{\sqrt{2(5 - 2\sqrt{5})}}$$

Entonces:

$$H(w) = I - 2ww^* = I - \frac{2}{2(5 - 2\sqrt{5})} \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H(w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5 - 2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 9 - 4\sqrt{5} & 0 & 2 - \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 - \sqrt{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{9-4\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2-\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2-\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}} & 0 & 1 - \frac{1}{5-2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

□

**Ejercicio 31.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz hermitiana, esto es,  $A^* = \bar{A}^T = A$ . Sin usar resultados conocidos, solo explorando la definición de matriz hermitiana, demostrar que  $A$  solo tiene valores propios reales.

*Solución.* Por definición, una matriz Hermitiana  $A$  cumple con lo siguiente:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A^*) \\ &= \det(\bar{A}^T) \\ &= \overline{\det(A^T)} \end{aligned}$$

Pero para cualquier matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , sin importar que sea Hermitiana se cumple que:  $\det(A^T) = \det(A)$ , entonces:

$$\overline{\det(A^T)} = \overline{\det(A)}$$

Esto demuestra que  $\det(A) \in \mathbb{R}$  y por definición, el determinante de una matriz es el producto de los valores propios, la única forma en la que esto se cumpla es que todo valor propio  $\lambda$  de  $A$  pertenezca a  $\mathbb{R}$   $\square$

**Ejercicio 32.** Sea  $A$  una matriz hermitiana.

- (a) Usando la factorización de Schur, muestre que existe una matriz unitaria  $S$  tal que  $S^*AS = U$ , donde  $U$  es una matriz diagonal real.
- (b) Use la factorización de Schur para mostrar que  $\mathbb{C}^n$  tiene una base ortonormal de eigenvectores de  $A$ .
- (c) Mostrar que  $A$  es definida positiva si y solo si todos los valores propios son positivos.
- (d) Mostrar que si  $A$  es definida positiva, entonces  $\det(A) > 0$ .
- (e) Mostrar que  $A$  es definida positiva si y solo si  $A = Q^*Q$ , con alguna matriz  $Q$  que satisfice  $\det(Q) \neq 0$

*Solución.* Sea  $\lambda$  un valor propio de  $A$  y  $\mathbf{x}$  el vector propio asociado a  $\lambda$ .

- (a) Existe una matriz unitaria  $S$  tal que  $S^*AS = D$ , donde  $D$  es una matriz diagonal. Sea  $\mathbf{x}$  un vector arbitrario en  $\mathbb{C}^n$ , como  $A = SDS^*$  entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*A\mathbf{x} &= \mathbf{x}^*SDS^*\mathbf{x} \\ \mathbf{x}^*A\mathbf{x} &= \mathbf{y}^*D\mathbf{y}, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{y} = S^* \mathbf{x}$  y  $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^T$

Partiendo del ultimo resultado se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* A \mathbf{x} &= \mathbf{y}^* D \mathbf{y} \\ &= (\overline{y_1} \ \overline{y_2} \ \dots \ \overline{y_n}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 \|y_1\|^2 + \lambda_2 \|y_2\|^2 + \dots + \lambda_n \|y_n\|^2 \end{aligned}$$

Por hipótesis los valores propios  $\lambda_i$  son reales positivos. Además como  $\mathbf{x} \neq 0$  y  $S$  es invertible,  $\mathbf{y} = Q^* \mathbf{x}$  no es el vector nulo.

- (b) Utilizando los resultados del *Ejercicio31* y el caso especial del teorema de la factorización de Schur, tenemos que una matriz Hermitiana tiene asociado un conjunto de  $n$  eigenvectores orthonormales.
- (c) ■ Primero la “ida” ( $\Rightarrow$ ) Por definición de vector propio:

$$A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

Si se multiplica ambos lados de la ecuación por  $\mathbf{x}^*$ , entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* A \mathbf{x} &= \mathbf{x}^* \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^* A \mathbf{x} &= \lambda \mathbf{x}^* \mathbf{x} \\ &= \lambda \|\mathbf{x}\|^2 > 0 \end{aligned}$$

Ya que  $\|\mathbf{x}\|^2 > 0$ , entonces  $\lambda > 0$ .

- Ahora la “vuelta” ( $\Leftarrow$ ) Se demostró en (a), por lo tanto  $A$  es definida positiva.
- (d) Si  $A$  es definida positiva, todos sus valores propios  $\lambda > 0$  son positivos, luego, el determinante de una matriz  $A$  es el producto de sus valores propios, por lo que es evidente que  $\det(A) > 0$  por su definición.
- (e) Este inciso es implicación de los incisos anteriores, si se realiza la factorización Schur en  $A$ , pero la matriz unitaria es la matriz identidad, entonces ya que el  $\det(A) > 0$  entonces  $\det(Q) \neq 0$  y viceversa.

□

## 2.4. Normas de vectores

**Ejercicio 33.** *Mostrar que  $\|\cdot\|_1$  y  $\|\cdot\|_\infty$  son normas para  $\mathbb{C}^n$ .*

*Solución.* Por definición:

$$\|\cdot\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \geq 0$$

es evidente que la única forma de que  $\|\cdot\|_1$  sea cero, es que cada  $x_j$  lo sea. Luego,

$$\|\alpha x\|_1 = \sum_{j=1}^n |\alpha x_j| = \sum_{j=1}^n |\alpha| |x_j| = |\alpha| \sum_{j=1}^n |x_j| = |\alpha| \|x\|_1$$

Considerando que el valor absoluto como norma cumple con la desigualdad triangular, entonces:

$$\|x + y\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| + \sum_{j=1}^n |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

q.e.d que  $\|\cdot\|_1$  es norma para  $\mathbb{C}^n$ . Lo siguiente es evaluar  $\|x\|_\infty$ , por lo que:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \geq 0$$

Esto es cierto porque valor absoluto es no negativo. Si el máximo del valor absoluto de las componentes es cero, entonces el máximo es cero. Por lo que  $\|x\|_\infty = 0$  si y solo si  $x = 0$ .

Luego:

$$\|\alpha x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |\alpha x_j| = \max_{1 \leq j \leq n} |\alpha| |x_j| = |\alpha| \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = |\alpha| \|x\|_\infty.$$

Considerando que el máximo cumple con la desigualdad triangular, se tiene que:

$$\|x + y\|_\infty \leq \|x\| + \|y\|$$

q.e.d.  $\|\cdot\|_\infty$  también es una norma en  $\mathbb{C}^n$ . □

**Ejercicio 34.** *Considerando la desigualdad*

$$0 \leq (\alpha x + \beta y)^T (\alpha x + \beta y)$$

*y escogiendo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  aproximadamente, para  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , probar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

*Solución.* Ya que  $(\alpha x + \beta y)^t(\alpha x + \beta y) = \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle$ , entonces:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle \\ &\leq \alpha^2 \langle x, x \rangle + 2\alpha\beta \langle x, y \rangle + \beta^2 \langle y, y \rangle \\ &\leq \alpha^2 \|x\|^2 + 2\alpha\beta \langle x, y \rangle + \beta^2 \|y\|^2 \end{aligned}$$

Por construcción, sea  $\alpha = 1$  y  $\beta = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$  tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \\ \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} &\leq \|x\|^2 \\ |\langle x, y \rangle|^2 &\leq \|x\|^2 \|y\|^2 \\ |\langle x, y \rangle|^2 &\leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

□

**Ejercicio 35.** Probar la desigualdad triangular inferior: si  $\|\cdot\|$  es una norma para un espacio vectorial  $V$ , entonces

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

para todo  $x, y \in V$ .

*Solución.* Por construcción, se aplicará la desigualdad del triángulo a  $y = x + (y - x)$  y  $x = y + (x - y)$ :

$$\begin{aligned} \|y\| &= \|x + (y - x)\| \leq \|x\| + \|y - x\| \\ \|x\| &= \|y + (x - y)\| \leq \|y\| + \|x - y\| \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|y\| - \|x\| &\leq \|y - x\| \\ \|x\| - \|y\| &\leq \|x - y\| \end{aligned}$$

De esto ultimo se infiere que:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

□



**Ejercicio 36.** *Mostrar las desigualdades:*

$$(a) \quad \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

$$(b) \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

$$(c) \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

*Solución.* (a) Se sabe que  $\left(\sum_{j=1}^n |x_j|\right)^2 \geq \sum_{j=1}^n |x_j|^2$ , con esto se prueba que:

$$\sum_{j=1}^n |x_j| \geq \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$$

Lo restante se prueba con la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$$

Sea  $a_k = 1$  y  $b_k = |x_k|$  entonces:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|\right)^2 &\leq \left(\sum_{k=1}^n 1^2\right) \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right) = n \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n |x_k| &\leq \sqrt{n} \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \\ \|x\|_1 &\leq \sqrt{n} \|x\|_2 \end{aligned}$$

(b) Se inicia con:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \|x\|_2$$

Luego, por la definición de máximo,  $\max_i |x_i|$  es mayor o igual a cada valor absoluto de cada una de las componentes de  $x$ ,  $|x_i|$ :

$$\begin{aligned} |x_1|^2 &\leq \left( \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right)^2 \\ |x_2|^2 &\leq \left( \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right)^2 \\ &\vdots \\ |x_n|^2 &\leq \left( \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right)^2 \end{aligned}$$

Si se procede a sumar las desigualdades anteriores, entonces:

$$\begin{aligned} |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 &\leq n \left( \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \right)^2 \\ \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} &\leq \sqrt{n} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \\ \|x\|_2 &\leq \sqrt{n} \|x\|_\infty \end{aligned}$$

(c) Ya que  $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$  y  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ , por transitividad:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1.$$

Para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $|x_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ . Por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} |x_1| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \\ |x_2| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \\ &\vdots \\ |x_n| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{aligned}$$

Si se procede a sumar las desigualdades anteriores, entonces:

$$\begin{aligned} |x_1| + \dots + |x_n| &\leq n \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \\ \|x\|_1 &\leq n \|x\|_\infty \end{aligned}$$

□

## 2.5. Normas de matrices

**Ejercicio 37.** Sean  $\|\cdot\|_{(m)}$  y  $\|\cdot\|_{(n)}$  normas para  $\mathbb{C}^m$  y  $\mathbb{C}^n$ , respectivamente, y sea  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Mostrar que la norma inducida  $\|\cdot\|_{(m,n)}$  satisface las propiedades de norma.

*Solución.* Se evaluarán las propiedades que no son evidentes. El supremo de  $\|Ax\|_{(m)}$  es cero si y solo si  $A = 0$ , porque  $\|x\|_{(n)} = 1$ . También

$$\begin{aligned}\|\alpha A\|_{(m,n)} &= \sup_{\|x\|_{(n)}=1} \|\alpha Ax\|_{(m)} \\ &= \sup_{\|x\|_{(n)}=1} \alpha \|Ax\|_{(m)} \\ &= \alpha \sup_{\|x\|_{(n)}=1} \|Ax\|_{(m)}\end{aligned}$$

Por último, como  $\|(A+B)x\|_m \leq \|Ax\|_m + \|Bx\|_m$ , entonces:

$$\sup_{\|x\|_{(n)}=1} \|(A+B)x\|_m \leq \sup_{\|x\|_{(n)}=1} \|Ax\|_m + \sup_{\|x\|_{(n)}=1} \|Bx\|_m$$

Entonces  $\|A+B\|_{(m,n)} \leq \|A\|_{(m,n)} + \|B\|_{(m,n)}$ . □

**Ejercicio 38.** Para la matriz  $A$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

calcular las normas  $p$  inducidas para  $p \in \{1, 2, \infty\}$  y la norma de Frobenius.

*Solución.*

$$\|A\|_1 = 3, \quad \|A\|_2 = \sqrt{3}, \quad \|A\|_\infty = 3, \quad \|A\|_F = \sqrt{14}$$

□

**Ejercicio 39.** Sea  $B = (b_{i,j})$  en  $\mathbb{C}^{m \times n}$ . Mostrar que  $\|B\|_F = \sqrt{\text{traza}(B^*B)}$ . Concluir que para  $B$  en  $\mathbb{R}^{m \times n}$  se tiene  $\|B\|_F = \sqrt{\text{traza}(B^T B)}$ .

*Solución.* Sea  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$

Se sabe que:

$$\|B\|_F = \left\| \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \right\|_F = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |b_{i,j}|^2 \right)}$$

$$B^* = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{b_{11}} & \dots & \overline{b_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{b_{1n}} & \dots & \overline{b_{mn}} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} B^* \times B &= \begin{pmatrix} \overline{b_{11}} & \overline{b_{21}} & \dots & \overline{b_{m1}} \\ \overline{b_{12}} & \overline{b_{22}} & \dots & \overline{b_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{b_{1n}} & \overline{b_{2n}} & \dots & \overline{b_{mn}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ B^* \times B &= \begin{pmatrix} b_{11}\overline{b_{11}} + \dots + b_{m1}\overline{b_{m1}} & \dots & b_{12}\overline{b_{12}} + \dots + b_{m2}\overline{b_{m2}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & b_{1n}\overline{b_{1n}} + \dots + b_{mn}\overline{b_{mn}} \end{pmatrix} \\ B^* \times B &= \begin{pmatrix} |b_{11}|^2 + \dots + |b_{m1}|^2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & |b_{12}|^2 + \dots + |b_{m2}|^2 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & |b_{1n}|^2 + \dots + |b_{mn}|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\|B\|_F = \sqrt{\text{traza}(B^*B)}$$

□

**Ejercicio 40.** Considerar la matriz  $A := \mathbf{u}\mathbf{v}^*$ , donde  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^m$  y  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ . Mostrar que la norma 2 matricial inducida satisface

$$\|A\|_2 = \|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2$$

*Solución.* Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que:

$$\|A\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{x}\| = \|\mathbf{v}^*\mathbf{x}\|\|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2 \|\mathbf{x}\|_2$$

Si se toma el supremo para el conjunto de toda  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  de norma 1, se tiene que:  $\|A\|_2 \leq \|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2$ , para demostrar que la igualdad se cumple, se debe demostrar que  $\|A\|_2 \geq \|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2$ , para lo cual, sea  $\mathbf{x} = \mathbf{v}$ , entonces:

$$\|A\|_2 \geq \frac{\|A\mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} = \frac{\|\mathbf{u}\mathbf{v}^*\mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} = \frac{\|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2^2}{\|\mathbf{v}\|_2} = \|\mathbf{u}\|_2 \|\mathbf{v}\|_2$$

□

**Ejercicio 41.** Defínase la norma matricial  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\|A\| := 7 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|, \quad A = (a_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Mostrar que  $\|\cdot\|$  define una norma matricial para  $\mathbb{R}^{n \times n}$  verificando las propiedades de norma.

*Solución.* A continuación, se procede a dar solución a cada inciso.

- (a) La norma aquí definida es la suma de valores absolutos, por lo que  $\|A\| \geq 0$ . Como solo se suman valores no negativos, la única forma en la que  $\|A\| = 0$ , es si cada entrada de  $A$  es cero; esto es  $\|A\| = 0$  si y solo si  $A = 0$ .
- (b) Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \|\alpha A\| &= 7 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha a_{i,j}| \\ &= 7 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha| |a_{i,j}| \\ &= 7 \sum_{i=1}^n |\alpha| \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \\ &= 7 |\alpha| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \\ &= |\alpha| 7 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \\ &= |\alpha| \|A\| \end{aligned}$$

(c) Se sabe que  $|a + b| \leq |a| + |b|$ , así que

$$\begin{aligned} |a_{1,1} + b_{1,1}| + \cdots + |a_{1,n} + b_{1,n}| &\leq |a_{1,1}| + |b_{1,1}| + \cdots + |a_{1,n}| + |b_{1,n}| \\ |a_{2,1} + b_{2,1}| + \cdots + |a_{2,n} + b_{2,n}| &\leq |a_{2,1}| + |b_{2,1}| + \cdots + |a_{2,n}| + |b_{2,n}| \\ &\vdots \\ |a_{n,1} + b_{n,1}| + \cdots + |a_{n,n} + b_{n,n}| &\leq |a_{n,1}| + |b_{n,1}| + \cdots + |a_{n,n}| + |b_{n,n}| \end{aligned}$$

Escrito de otra forma:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |a_{1,j} + b_{1,j}| &\leq \sum_{j=1}^n |a_{1,j}| + \sum_{j=1}^n |b_{1,j}| \\ \sum_{j=1}^n |a_{2,j} + b_{2,j}| &\leq \sum_{j=1}^n |a_{2,j}| + \sum_{j=2}^n |b_{2,j}| \\ &\vdots \\ \sum_{j=1}^n |a_{n,j} + b_{n,j}| &\leq \sum_{j=1}^n |a_{n,j}| + \sum_{j=n}^n |b_{n,j}| \end{aligned}$$

Si se suman todas las desigualdades:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

Se multiplica ambos lados de la desigualdad por 7,

$$7 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq 7 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + 7 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

Luego,

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

□

## 2.6. Radio espectral de una matriz

**Ejercicio 42.** Para la matriz  $A$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

determinar el radio espectral.

*Solución.* El primer paso es calcular los valores propios para  $A$ , pero este procedimiento ya se realizó en el **Ejercicio 19**, es decir, se obviará el calculo para evitar redundancia, por lo tanto, los valores propios de  $A$  son  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 1$ . Entonces  $\rho(A) = \max_{1 \leq j \leq 3} |\lambda_j| = 3$ .  $\square$

**Ejercicio 43.** Calcular las normas  $p$  matriciales inducidas  $\|A\|_1$ ,  $\|A\|_2$ ,  $\|A\|_\infty$ , y el radio espectral de las matrices

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

*Solución.* Se procede a realizar los cálculos solicitados:

$$\|B\|_1 = \max_{1 \leq j \leq 2} \|a_j\|_1 = \max \{|0| + |1|, |0| + |-2|\} = 2$$

$$\|B\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq j \leq 2} |\Lambda_j|} = \sqrt{\max \{0, |-2|\}} = \sqrt{2}$$

$$\|B\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq 2} \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) = \max \{|0| + |0|, |1| + |-2|\} = 3$$

$$\rho(B) = \max_{1 \leq i \leq 2} |\Lambda_i| = \max \{0, |-2|\} = 2$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq 3} \|a_j\|_1$$

$$= \max \left\{ \left| \frac{5}{4} \right| + \left| -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right|, \left| -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right| + \left| \frac{3}{2} \right| + \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} \right|, \left| -\frac{1}{4} \right| + \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} \right| + \left| \frac{5}{4} \right| \right\}$$

$$= \max \left\{ \frac{6 + \sqrt{2}}{4}, \frac{3 + \sqrt{2}}{2}, \frac{6 + \sqrt{2}}{4} \right\} = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq 3} \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) = \|A^T\|_1 = \|A\|_1 = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$$

Se tiene que:

$$A^T A = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3}{2\sqrt{2}} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2\sqrt{2}} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{2\sqrt{2}} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}.$$

A partir de esto es posible determinar los valores propios:

$$\begin{aligned} \det(A^T A - \Lambda I) &= 0 \\ \begin{vmatrix} \frac{7}{4} - \Lambda & -\frac{3}{2\sqrt{2}} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2\sqrt{2}} & \frac{5}{2} - \Lambda & \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{2\sqrt{2}} & \frac{7}{4} - \Lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \left(\frac{7}{4} - \Lambda\right)^2 \left(\frac{5}{2} - \Lambda\right) + 2 \cdot \frac{27}{32} - \frac{9}{16} \left(\frac{5}{2} - \Lambda\right) - 2 \cdot \frac{9}{8} \left(\frac{7}{4} - \Lambda\right) &= 0 \\ -\Lambda^3 + 6\Lambda^2 - 9\Lambda + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Así que los valores propios de  $A^T A$  son  $\Lambda_1 = 1$  y  $\Lambda_2 = 4$ . Entonces,

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq j \leq 3} |\Lambda_j|} = \sqrt{\max\{1, 4\}} = \sqrt{4} = 2$$

Ahora se procederá a calcular los valores propios de  $A$ .

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \begin{vmatrix} \frac{5}{4} - \lambda & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{2} - \lambda & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{5}{4} - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \left(\frac{3}{2} - \lambda\right) \left(\frac{5}{4} - \lambda\right)^2 + \frac{2}{32} - \frac{1}{16} \left(\frac{3}{2} - \lambda\right) - \frac{2}{8} \left(\frac{5}{4} - \lambda\right) &= 0 \\ \left(\frac{3}{2} - \lambda\right) \left(\frac{5}{4} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{3}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{4} \left(\frac{5}{4} - \lambda\right) + \frac{1}{16} &= 0 \\ -16(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Así que  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 2$ . Entonces,

$$\rho(A) = \max_{1 \leq j \leq 2} |\lambda_j| = \max\{|1|, |2|\} = 2$$

□



**Ejercicio 44.** Calcular las normas  $p$  inducidas  $\|A\|_1$ ,  $\|A\|_2$ ,  $\|A\|_\infty$ , la norma de Frobenius y el radio espectral para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Solución.* Lo primero es calcular los valores propios:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 2 &= 0 \\ \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= 2 - \sqrt{3} \\ \lambda_3 &= 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= 4, \quad \|A\|_2 = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ \|A\|_\infty &= 4, \quad \|A\|_F = 3\sqrt{2} \\ \rho(A) &= 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

□

**Ejercicio 45.** Para  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mostrar que

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_\infty \|A\|_1}$$

*Solución.* Se sabe que  $\|A\|_2$  es el máximo de los valores propios de  $A^T A$ , entonces

$$\begin{aligned} \|A\|_2^2 &\leq \|A^T A\|_1 \leq \|A^T\|_1 \|A\|_1 = \|A\|_\infty \|A\|_1 \\ \|A\|_2 &\leq \sqrt{\|A\|_\infty \|A\|_1} \end{aligned}$$

□

**Ejercicio 46.** Sea  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz invertible. Mostrar que  $\|x\| := \|S^{-1}x\|_\infty$  define una norma para  $\mathbb{C}^n$ . Mostrar que esta norma induce la norma matricial

$$\|A\| := \|S^{-1}AS\|_\infty, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

*Solución.* Lo primero es demostrar que  $\|x\| := \|S^{-1}x\|_\infty$  define una norma para  $\mathbb{C}^n$ , para esto hay que verificar que esta cumpla con las propiedades de de norma:

- No negatividad y definición:

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0 \text{ y } \|\mathbf{x}\| = 0 \text{ si y solo si } \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Para verificar lo primero, basta con ir a la definición de norma infinito, es el máximo de valores absolutos, es evidente la no negatividad. Luego, ya que  $S^{-1}$  es invertible, entonces  $S^{-1} \neq 0$  por lo tanto  $\|\mathbf{x}\| = 0$  si y solo si  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

- Homogeneidad

$$\begin{aligned} \|c\mathbf{x}\| &= c \|\mathbf{x}\| \\ \|cS^{-1}x\|_\infty &= c \|S^{-1}x\|_\infty \end{aligned}$$

- Desigualdad triangular

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$$

Multiplicando por  $\|S^{-1}\|_\infty$  se tiene que:

$$\|S^{-1}\mathbf{x} + S^{-1}\mathbf{y}\|_\infty \leq \|S^{-1}\mathbf{x}\|_\infty + \|S^{-1}\mathbf{y}\|_\infty$$

- Submultiplicabilidad

$$\begin{aligned} \|AB\|_\infty &= \|SABS^{-1}\|_\infty = \|(SAS^{-1})(SBS^{-1})\|_\infty \\ &\leq \|SAS^{-1}\|_\infty \|SBS^{-1}\|_\infty = \|A\|_\infty \|B\|_\infty \end{aligned}$$

$$\|A\| := \|S^{-1}AS\|_\infty, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

□

**Ejercicio 47.** *Mostrar que la siguiente serie de matrices converge y calcular su límite:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k, \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

*Solución.* Una serie converge si  $\rho(A) < 1$ . Como  $A$  es una matriz triangular, los valores de la diagonal son sus valores propios:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$ . Es evidente que  $\rho(A) < 1$ , por lo que la serie converge.

Ahora, el límite de la sucesión,  $X$ :

$$\begin{aligned} X &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 & -1 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

Calculando la inversa:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Entonces, la sucesión converge a:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 6 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

□

**Ejercicio 48.** *Mostrar que la siguiente serie de matrices converge y calcular su límite:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k, \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

*Solución.* Una serie converge si  $\rho(A) < 1$ . Como  $A$  es una matriz triangular, los valores de la diagonal son sus valores propios:  $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ . Es evidente que  $\rho(A) < 1$ ,

por lo que la serie converge.

Ahora, se procede a calcular el límite de la sucesión,  $X$ :

$$\begin{aligned} X &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

Calculando la inversa:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{3}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{9} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{9} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{28}{9} & -\frac{4}{3} & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Por último:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{9} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{3} & -2 & \frac{3}{2} \end{array} \right)$$

Entonces, la sucesión converge a:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{14}{3} & -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

□

**Ejercicio 49.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , y asumiendo que los  $n$  valores propios complejos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de  $A$  satisfacen  $|\lambda_j| > 1$  para toda  $j = 1, 2, \dots, n$ . ¿Es invertible la matriz  $I - A$ ? Dar una demostración de la respuesta.

*Solución.* Si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son los valores propios de  $A$  entonces  $1 - \lambda_1, 1 - \lambda_2, \dots, 1 - \lambda_n$  son los valores propios de  $I - A$ . Considerando que  $A$  es invertible si y solo si  $\det(A) \neq 0$ . Es decir que:

$$\det(I - A) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \dots (1 - \lambda_n) \neq 0$$

Esto es evidente ya que cada resta  $1 - \lambda_n$  es diferente de cero, debido a que  $|\lambda_j| > 1$ .  $\square$

**Ejercicio 50.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  que satisface  $\rho(A) < 1$ , y sea  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  una matriz unitaria (esto es  $S^* = \bar{S}^T = S^{-1}$ ). Mostrar que  $I - S^*AS$  es invertible y encontrar su inversa de dos maneras diferentes.

*Solución.* Considerando que una matriz unitaria es invertible y  $A$  por definición es invertible, así como el resultado de que el producto de dos matrices invertibles es invertible, se tiene que:  $S^*AS$ , luego, por el resultado del ejercicio anterior, es evidente que también  $I - S^*AS$  lo es.  $\square$



## Capítulo 3

# Aritmética de punto flotante y estabilidad

- 3.1. Números condicionales de las matrices
- 3.2. Aritmética de punto flotante
- 3.3. Condicionando
- 3.4. Estabilidad
- 3.5. Un algoritmo de sustitución hacia atrás estable

**Ejercicio 51.** *Para la matriz  $A$*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

*Calcule los números condicionales respecto a las  $p$  – normas inducidas para  $p \in \{1, 2, \infty\}$*

**Ejercicio 52.** *Calcule los números condicionales respecto a las  $p$  – normas inducidas para  $p \in \{1, 2, \infty\}$ , de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 53.** Sea  $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz invertible que satisface:

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,k}| = 1$$

para  $i \geq i \geq n$ .



# Capítulo 4

## Métodos directos para sistemas lineales

### 4.1. Eliminación Gaussiana

**Ejercicio 54.** Resolver el siguiente sistema lineal con eliminación de Gauss:

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

*Solución.* Previo a realizar el procedimiento, se nombrará cada una de las filas de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} F_1 : \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ F_2 : \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right) \\ F_3 : \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 4 \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 3 & | & 9 \\ 0 & -2 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \quad F_3 \rightarrow 3F_3 + 2F_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 3 & | & 9 \\ 0 & 0 & 12 & | & 24 \end{pmatrix}$$

Luego, con la ultima matriz aumentada, es posible escribirlo como un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 & x_1 &= -3 \\ 3x_2 + 3x_3 &= 9 & \Rightarrow x_2 &= 1 \\ 12x_3 &= 24 & x_3 &= 2 \end{cases}$$

□

**Ejercicio 55.** Escribir tres matrices elementales inferiores de  $4 \times 4$  y explicar para cada matriz qué hace la multiplicación por la izquierda. Verificar las propiedades (i) y (ii) del Lema 4.4 explícitamente para cada matriz triangular inferior.

*Solución.* Sea  $x_1 = (0 \ 1 \ -3 \ 5)^T$ . Luego se construye  $L_1(x_1)$ :

$$\begin{aligned} L_1(x_1) &= I - xe_1^T \\ &= I - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0 \ 0) \\ &= I - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se sabe que para cualquier matriz  $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ :

$$\begin{aligned} L_1(x_1)A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} - a_{1,1} & a_{2,2} - a_{1,2} & a_{2,3} - a_{1,3} & a_{2,4} - a_{1,4} \\ a_{3,1} + 3a_{1,1} & a_{3,2} + 3a_{1,2} & a_{3,3} + 3a_{1,3} & a_{3,4} + 3a_{1,4} \\ a_{4,1} - 5a_{1,1} & a_{4,2} - 5a_{1,2} & a_{4,3} - a_{1,3} & a_{4,4} - a_{1,4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como  $L_1(x_1)$  es triangular inferior, todos los componentes de su diagonal principal son sus valores propios, por lo que  $\det(L_1(x_1)) = 1$ .

Ahora, se procede a calcular  $L_1(-x_1)$ :

$$\begin{aligned} L_1(-x_1) &= I - (-x)xe_1^T \\ &= I - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0 \ 0) \\ &= I - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 L_1(x_1)L_1(-x_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= I
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_1(-x_1)L_1(x_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= I
 \end{aligned}$$

Así que  $L_1(-x_1) = (L_1(x_1))^{-1}$ .

Ahora, sea  $x_2 = (0 \ 0 \ -7 \ 2)^T$ . Ahora se procede a construir  $L_1(x_1)$ :

$$\begin{aligned}
 L_2(x_2) &= I - xe_2^T \\
 &= I - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0 \ 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= I - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Se sabe que para cualquier matriz  $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ :

$$\begin{aligned}
 L_2(x_2)A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} + 7a_{2,1} & a_{3,2} + 7a_{2,2} & a_{3,3} + 7a_{2,3} & a_{3,4} + 7a_{2,4} \\ a_{4,1} - 2a_{2,1} & a_{4,2} - 2a_{2,2} & a_{4,3} - 2a_{2,3} & a_{4,4} - 2a_{2,4} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Como  $L_2(x_2)$  es triangular inferior, todos los componentes de su diagonal principal son sus valores propios, por lo que:  $\det(L_2(x_2)) = 1$ .

Ahora, se procede a calcular  $L_2(-x_2)$ :

$$\begin{aligned}
 L_2(-x_2) &= I - (-x)xe_2^T \\
 &= I - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0 \ 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= I - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 L_2(x_2)L_2(-x_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 L_2(-x_2)L_2(x_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= I
 \end{aligned}$$

Así que  $L_2(-x_2) = (L_2(x_2))^{-1}$ .

Elijamos  $x_3 = (0 \ 0 \ 0 \ 11)^T$ . Ahora se procede a construir  $L_3(x_3)$ :

$$\begin{aligned}
 L_2(x_2) &= I - xe_2^T \\
 &= I - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1 \ 0) \\
 &= I - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Se sabe que para cualquier matriz  $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ :

$$\begin{aligned}
 L_3(x_3)A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} - 11a_{3,1} & a_{4,2} - 11a_{3,2} & a_{4,3} - 11a_{3,3} & a_{4,4} - 11a_{3,4} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Como  $L_3(x_3)$  es triangular inferior, todos los componentes de su diagonal principal son sus valores propios, por lo que  $\det(L_3(x_3)) = 1$ .

Ahora, se procede a calcular  $L_3(-x_3)$ :

$$\begin{aligned}
 L_3(-x_3) &= I - (-x)xe_3^T \\
 &= I - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0 \ 0) \\
 &= I - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 L_3(x_3)L_3(-x_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 L_3(-x_3)L_3(x_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= I
 \end{aligned}$$



Así que  $L_3(-x_3) = (L_3(x_3))^{-1}$ .

□

**Ejercicio 56.** Encontrar las matrices elementales triangulares  $L_1(m_1)$  y  $L_2(m_2)$  que describen la eliminación guassiana para convertir el sistema lineal del ejercicio 54 en la forma  $Ux = b'$  con una matriz triangular  $U$ .

*Solución.*

$$L_1(m_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2(m_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

□

**Ejercicio 57.** Demostrar el lema 4.4.

- (a) Las matrices elementales triangulares superiores poseen en su diagonal, únicamente entradas con el número 1. Como es triangular estos son sus valores propios la multiplicación de ellos es 1. Así que  $\det(L_i(x)) = 1$ ,
- (b) Veamos que:

$$\begin{aligned} L_i(x)L_i(-x) &= (I - xe_i^T)(I - (-x)e_i^T) \\ &= I - (-x)e_i^T - xe_i^T + xe_i^T(-x)e_i^T \\ &= I + xe_i^T(-x)e_i^T; \end{aligned}$$

Se sabe que  $e_j^T x = 0$  para  $j \leq i$ , entonces  $L_i(x)L_i(-x) = I$ .

## 4.2. La factorización LU

**Ejercicio 58.** Para la matriz  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

encontrar la factorización única de  $A$ .

*Solución.*

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = L_2 L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad L = L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

□

**Ejercicio 59.** Una matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es llamada estrictamente diagonal dominante si

$$\sum_{k=1, k \neq i}^n |a_{i,k}| < |a_{i,i}|, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n$$

Muestre que la matriz estrictamente diagonal dominante es invertible y posee una descomposición  $LU$ .

*Solución.* Por hipótesis cada elemento de la diagonal es diferente de cero. Sea  $D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$  y verifica que  $D^{-1}A$  tiene únicamente elementos 1 en su diagonal,  $B = [b_{ij}] = I - D^{-1}A$  posee únicamente elementos 0 en su diagonal principal y  $b_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}$  si  $i \neq j$ . Entonces  $\|B\|_\infty < 1$  y considerando que una matriz  $Z$  es no singular si existe una norma tal que  $\|I - Z\| < 1$  entonces:  $I - B = D^{-1}A$  es no singular y por lo tanto,  $A$  es no singular y seguido  $A$  es invertible.  $A$  posee una descomposición  $LU$  porque el determinante de toda submatriz es diferente de cero. □

**Ejercicio 60.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz tridiagonal, esto es, una matriz de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & c_{n-1} & \\ 0 & & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} |a_1| &> |c_1| > 0, \\ |a_i| &\leq |b_i| + |c_i|, & b_i, c_i &\neq 0, & 2 \leq i \leq n-1 \\ |a_n| &\geq |b_n| > 0, \end{aligned}$$

Muestre que  $A$  es invertible y tiene una descomposición LU de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ l_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & l_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & c_1 & & 0 \\ & r_2 & \ddots & \\ & & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & r_n \end{pmatrix}$$

donde los vectores  $\mathbf{l} = (l_2, l_3, \dots, l_n)^T \in \mathbb{R}^{n-1}$  y  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T \in \mathbb{R}^n$  pueden ser calculados mediante  $r_1 = a_1$  y  $l_i = b_i/r_{i-1}$  y  $r_i = a_i - l_i c_{i-1}$  para  $2 \leq i \leq n$ .

*Solución.* Por simplicidad, se define la secuencia:

$$\delta_0 = 1, \quad \delta_1 = b_1, \quad \delta_k = b_k \delta_{k-1} - a_k \delta_{k-2}, \quad 2 \leq k \leq n.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ a_2 \frac{\delta_0}{\delta_1} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & a_n \frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_0} & c_1 & & 0 \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & \ddots & \\ & & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Dado a que  $\delta_k = \det(A[1 \dots k, 1 \dots k]) \neq 0$  para  $k = 1, \dots, n$ ,  $A$  posee una única factorización ya que por hipótesis es invertible. Se procede a verificar si la factorización propuesta funciona:

$$\begin{aligned} (LU)_{k,k+1} &= c_k, & 1 \leq k \leq n-1 \\ (LU)_{k,k-1} &= a_k, & 2 \leq k \leq n \\ (LU)_{k,l} &= 0, & |k-l| \geq 2 \\ (LU)_{1,1} &= \frac{\delta_1}{\delta_0} = b_1, \\ (LU)_{k,k} &= \frac{a_k c_{k-1} \delta_{k-2} + \delta_k}{\delta_{k-1}} = b_k, & 2 \leq k \leq n \end{aligned}$$

□

**Ejercicio 61.** Usar la eliminación gaussiana para encontrar la factorización  $LU$  de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

¿Por qué la factorización  $LU$  es única?

*Solución.*

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = L_3 L_2 L_1 A, \quad L = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}$$

Y la factorización es única pues la matriz  $A$  es invertible. □

### 4.3. Pivoteo

**Ejercicio 62.** Demostrar el lema 4.14.

*Solución.* A continuación, se procede a resolver cada uno de los ejercicios:

- (a) Una matriz elemental de permutación  $P_{i,j}$  es la matriz obtenida al intercambiar las filas  $i$  y  $j$  de la matriz identidad. Así que si intercambiamos las filas  $i$  y  $j$  de  $P_{i,j}$  se obtiene la identidad. Por lo tanto  $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$ . Es decir, que intercambiar

las filas  $i$  y  $j$ , y las filas  $j$  e  $i$  de la matriz identidad es exactamente lo mismo, entonces  $P_{i,j} = P_{j,i}$ . Por definición:

$$\begin{aligned} P_{i,j}^T &= [I - (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T]^T \\ &= I^T - [(e_i - e_j)(e_i - e_j)^T]^T \\ &= I - [(e_i - e_j)^T]^T (e_i - e_j)^T \\ &= I - (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T \\ &= P_{i,j} \end{aligned}$$

- (b) Al intercambiar dos filas en una matriz cambia el signo del determinante, entonces,  $\det(P_{i,j}) = -1$ . La matriz de permutación  $P_{i,i}$  indica que la matriz identidad se deben intercambiar las filas  $i$  e  $i$ , es decir  $P_{i,i} = I$ .
- (c) Al multiplicar una matriz de permutación por la izquierda se hace una combinación lineal de sus filas con las casillas de la otra matriz; entonces se intercambian las filas  $i$  y  $j$ . También, cuando se multiplica la matriz de permutación por la derecha se hace una combinación lineal de sus columnas y se intercambian las columnas  $i$  y  $j$  de la matriz que no es de permutación.

□

## 4.4. Factorización de Cholesky

**Ejercicio 63.** Calcular la factorización de Cholesky para la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

*Solución.* A continuación, se emplea el algoritmo para la factorización de Cholesky:

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} = 1 \\ l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{2}{1} = 2 \\ l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{5 - 2^2} = 1 \\ l_{31} &= \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{3}{1} = 3 \\ l_{32} &= \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{8 - 3 \cdot 2}{1} = 2 \\ l_{33} &= \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{14 - 3^2 - 2^2} = 1 \end{aligned}$$

Luego,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$A = LL^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

**Ejercicio 64.** *Mostrar que el costo computacional de la factorización de Cholesky es aproximadamente  $n^3/6 + \mathcal{O}(n^2)$  operaciones elementales, donde contamos una multiplicación más una suma como operación elemental.*

*Solución.* Para una matriz de  $n \times n$  se efectúan:  
 $n$  raíces cuadradas,  $\frac{n(n-1)}{2}$  divisiones,  $\frac{n^3-n}{6}$  multiplicaciones y  $\frac{n^3-n}{6}$  sumas/restas. Por lo tanto el costo computacional es  $n + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{n^3}{6} - \frac{n}{6} + \frac{n^3}{6} - \frac{n}{6} = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \sim n^3/6 + \mathcal{O}(n^2)$ . □

**Ejercicio 65.** *¿Es la factorización de Cholesky de una matriz definida positiva de  $n \times n$  única? De una demostración de su respuesta.*

*Solución.* Suponga que la factorización de Cholesky de  $A$  no es única, entonces:

$$A = LL^* = \hat{L}\hat{L}^*$$

entonces, para  $x \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{C}^n$ , se tiene que

$$x^*Ax = x^*LL^*x = x^*\hat{L}\hat{L}^*x > 0$$

luego,

$$\begin{aligned} x^*LL^*x &= x^*\hat{L}\hat{L}^*x \\ (L^*x)^*(L^*x) &= (\hat{L}^*x)^*(\hat{L}^*x) \\ \|L^*x\|^2 &= \|\hat{L}^*x\|^2 \\ L^*x &= \hat{L}^*x \\ L^* &= \hat{L}^* \\ L &= \hat{L} \end{aligned}$$

Por lo tanto la factorización de una matriz definida positiva es única.  $\square$

**Ejercicio 66.** Calcule la factorización de Cholesky de la siguiente matriz a mano:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

Una vez calculada la factorización de Cholesky, úsela para concluir si la matriz es definida positiva.

*Solución.* Se procederá a calcular los elementos de la matriz  $L$  por columna.

$$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}} = \sqrt{4} = 2, l_{2,1} = \frac{1}{l_{1,1}}a_{2,1} = \frac{1}{2}2 = 1, l_{3,1} = \frac{1}{l_{1,1}}a_{3,1} = \frac{1}{2}6 = 3$$

Luego, los elementos de la segunda columna:

$$l_{2,2} = \sqrt{a_{2,2} - (l_{2,1})^2} = \sqrt{5 - 1^2} = 2, l_{3,2} = \frac{1}{l_{2,2}}(a_{3,2} - l_{3,1} * l_{2,1}) = \frac{1}{2}(2) = 1$$

Por ultimo, el elemento de la tercer columna:

$$l_{3,3} = \sqrt{a_{3,3} - (l_{3,1})^2 - (l_{3,2})^2} = \sqrt{14 - 3^2 - 1^2} = 2$$

Por lo tanto, la matriz triangular inferior  $L$  está dada por:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\square$

## 4.5. Factorización QR

**Ejercicio 67.** Calcular la factorización QR de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -6 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

*Solución.* La norma del primer vector columna de  $A$  es 3. Entonces sea  $w_1 := \frac{z}{\|z\|_2}$ , con

$$z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \|z\|_2 = 2\sqrt{3}.$$

luego:

$$w_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

y la primera matriz de Householder está dada por:

$$H_1 = H(w_1) = I - 2w_1w_1^T = \begin{pmatrix} -7 & 8 & -8 \\ 8 & -7 & 8 \\ -8 & 8 & -7 \end{pmatrix}.$$

luego,

$$H_1 A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -6 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

sea la submatriz

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix},$$

y para esta  $A_1$  sea  $w_2 = \frac{v}{\|v\|_2}$  con

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \|v\|_2 = 3\sqrt{2}.$$

Así que

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$



y la matriz de Householder dada es

$$H(w_2) = I - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, la matriz  $H_2$  está dada por

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que la matriz unitaria  $Q$  está definida por:

$$Q = H_1 H_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 6 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

□

**Ejercicio 68.** Calcule la factorización QR de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

*Solución.* Primero se encontrarán las matrices de Householder

$$H_1 = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$R = H_3 H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q = H_1 H_2 H_3 = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

□

**Ejercicio 69.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , con  $m > n$ , y asumiendo que  $A$  tiene imagen completo. Sea  $b \in \mathbb{R}^m$ . Considérese el siguiente funcional lineal

$$f(x) = \|Ax - b\|_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Mostrar que existe un vector único  $x^* \in \mathbb{R}^n$  que minimiza el funcional  $f$  y que este vector  $x^*$  es la única solución de las llamadas ecuaciones normales

$$A^T A x^* = A^T b.$$

*Solución.* Como  $A$  no es una matriz cuadrada, entonces  $A$  puede escribirse como  $A = QR$  donde  $Q$  es una matriz ortogonal y  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tiene la forma:

$$R = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con una matriz triangular superior  $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Con esto y el hecho de que  $Q^T = Q^{-1}$ , entonces

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &= \|QRx - b\|_2^2 = \|Q(Rx - Q^T b)\|_2^2 \\ &= (Rx - Q^T b)^T Q^T Q (Rx - Q^T b) = \|Rx - Q^T b\|_2^2 \\ \left\| \begin{pmatrix} R_1 x \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\|_2^2 &= \|R_1 x - c\|_2^2 + \|d\|_2^2 \end{aligned}$$

luego, se procede a dividir el vector  $Q^T b$  en dos componentes  $(c^T, d^T)$ , con  $c \in \mathbb{R}^n$  y  $d \in \mathbb{R}^{m-n}$ . La última ecuación posee un error:  $\|d\|_2^2$ . Sin embargo, es posible minimizar el error eligiendo  $x$  como la solución de  $R_1 x = c$ . Como  $R_1$  es una matriz invertible porque se asume que  $A$  tiene imagen completa. Entonces, el vector que minimiza  $f(x)$  es  $R^{-1}c \in \mathbb{R}^n$ . Se sabe que las matrices inversas son únicas, por lo que este último vector también lo es.

Ahora, con la sustitución  $x = R_1^{-1}c$  en la ecuación normal:

$$\begin{aligned}
 A^T Ax &= A^T b \\
 (QR)^T (QR) (R_1^{-1}c) &= (QR)^T b \\
 R^T Q^T Q R R_1^{-1}c &= R^T Q^T b \\
 R^T R R_1^{-1}c &= R^T \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\
 R^T \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} R_1^{-1}c &= \begin{pmatrix} R_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\
 R^T \begin{pmatrix} R_1 R_1^{-1}c \\ 0 \end{pmatrix} &= R_1 c \\
 \begin{pmatrix} R_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \end{pmatrix} &= R_1 c \\
 R_1 c &= R_1 c
 \end{aligned}$$

Este es el único que satisface esta ecuación.  $\square$

**Ejercicio 70.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con  $m \geq n$ . Asuma que  $A = U\Sigma V^T$  con  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrices ortogonales y la matriz diagonal  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con entradas únicamente no negativas. Use la descomposición  $A = U\Sigma V^T$  para calcular la solución  $a$ :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

*Solución.* Se parte del hecho que el objetivo es encontrar  $x$  tal que minimice, por simplicidad, el cuadrado:

$$\begin{aligned}
 \|Ax - b\|_2^2 &= \|Ax - b\|_2^2 \\
 &= \|U\Sigma V^T x - b\|_2^2 \\
 &= \|U^T(U\Sigma V^T x - b)\|_2^2 \\
 &= \|\Sigma(V^T x) - U^T b\|_2^2 \\
 &= \|\Sigma y - U^T b\|_2^2
 \end{aligned}$$

Lo siguiente es determinar qué  $y$  minimiza:

$$\|\Sigma y - U^T b\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_k & \\ & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} y - z \right\|_2^2$$

Elija:

$$y_i = \begin{cases} z_i/\sigma_i, & \text{si } \sigma_i \neq 0 \\ 0, & \text{si } \sigma_i = 0 \end{cases}$$

Entonces, la solución:  $\mathbf{x} = V\mathbf{y}$ .

□

# Capítulo 5

## Métodos iterativos para sistemas lineales

### 5.1. Introducción

### 5.2. Iteraciones de punto fijo

**Ejercicio 71.** Sea  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y sea  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ . Muestre que la función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida por:

$$F(\mathbf{x}) := C\mathbf{x} + \mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

es continua en  $\mathbb{R}^n$

*Solución.* Es evidente que la aplicación es lineal, también que el rango de la matriz es  $n$ , por lo tanto, la función  $f$  es continua.  $\square$

**Ejercicio 72. Teorema del Punto Fijo de Banach.** Consideremos un espacio métrico  $X = (X, d)$ , donde  $X \neq \emptyset$ . Supongamos que  $X$  es completo y sea  $T : X \rightarrow X$  una contracción en  $X$ . Entonces  $T$  tiene un punto fijo exactamente.

*Solución.* Construiremos una sucesión  $(x_n)$  y mostraremos que es de Cauchy, y luego mostraremos que su límite  $x$  es punto fijo único de  $T$ .

Sea  $x_0 \in X$  y la sucesión

$$x_0, \quad x_1 = Tx_0, \quad x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, \quad x_n = T^n x_0, \dots$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 d(x_{m+1}, x_m) &= d(Tx_m, Tx_{m-1}) \\
 &\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\
 &= \alpha d(Tx_{m-1}, Tx_{m-2}) \\
 &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\
 &\dots \leq \alpha^m d(x_1, x_0)
 \end{aligned}$$

Por la desigualdad triangular se tiene que

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha^m \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1)$$

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1)$$

Y como  $0 < \alpha < 1$  y  $d(x_0, x_1)$  es fijo,  $m$  puede ser tan grande como se quiera y el lado derecho se vuelve cada vez más pequeño. Por lo tanto  $(x_n)$  es de Cauchy y que  $x_n \rightarrow x$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 d(x, Tx) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \\
 &\leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x)
 \end{aligned}$$

Es posible hacer la última suma más pequeña que cualquier  $\epsilon > 0$ . Se concluye que  $d(x, Tx) = 0$ , entonces  $x = Tx$ ,  $x$  es punto fijo de  $T$ .

Sea  $Tx = x$  y  $T\bar{x} = \bar{x}$ , entonces

$$d(x, \bar{x}) = d(Tx, T\bar{x}) \leq \alpha d(x, \bar{x})$$

por lo que  $x = \bar{x}$ . □

**Ejercicio 73.** Encuentre los puntos fijos (si tienen alguno) de cada una de las siguientes funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por:

$$(a) f(x) = x^3, \quad (b) g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (c) h(x) = e^x$$

*Solución.* Se procederá a resolver cada uno de los incisos:

(a) Para  $f$ :

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 = x \\x^3 - x &= 0 \\x(x^2 - 1) &= 0 \\x_1 &= 0, & x_2 &= 1, & x_3 &= -1\end{aligned}$$

Por lo tanto 0, 1 y -1 son sus puntos fijos.

(b) Para  $g$ :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}$$

Sea  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  entonces:

$$\begin{aligned}g(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

simplificando:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2 = x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 1 = x_3 \end{cases} \\ & \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Por lo tanto:  $\mathbf{x} = (1, -1, 1)^T$  es un punto fijo de  $g$

(c) Para  $h(x) = e^x = x$ , pero  $e^x = x$  no tiene soluciones reales, por lo tanto  $h$  no tiene puntos fijos.

□

**Ejercicio 74.** Considerar la función lineal afín  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$f(\mathbf{x}) = C\mathbf{x} + c = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) ¿El método del punto fijo de Banach converge para la función  $f$  dada? Dar una prueba de la respuesta.

(b) Encontrar el punto fijo único de  $f$ . Mostrar el trabajo.

*Solución.* A continuación, se procede a resolver cada inciso:

- (a) Lo primero es determinar los valores propios de la matriz, al ser diagonal,  $\lambda_{1,2,3} = \frac{1}{2}$ . Entonces,  $\rho(C) = \frac{1}{2} < 1$ . Por lo tanto, el método del punto fijo converge.
- (b) Si  $\hat{x}$  es un punto fijo, entonces  $f(\hat{x}) = C\hat{x} + c = \hat{x}$  o equivalentemente  $(I - C)\hat{x} = c$ . Se resuelve el siguiente sistema lineal:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \frac{3}{2} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Entonces, el punto fijo  $\hat{x}$  de  $f$  es  $\left(\frac{2}{3} \ 2 \ 4\right)^T$ .

□

**Ejercicio 75.** Encuentre los puntos fijos de las siguientes funciones:

$$(a) f(x) = \sin(x), \quad (b) g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Solución.* A continuación, se procede a resolver cada inciso:

- (a) Si  $\sin(x) = x$  entonces  $x = 0$ . Por lo tanto 0 es punto fijo de  $f$  y el único.
- (b) Partiendo de:

$$g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Sea  $x = (x_1 \ x_2)^T$ , entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = x_1 \\ -x_1 + 2x_2 + 1 & = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 & = 0 \\ x_1 & = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto el único punto fijo de  $g(x)$  es  $x = (1 \ 0)^T$  □

**Ejercicio 76.** Considerar la función lineal afín  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$f(x) = Cx + c = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (a) ¿El método del punto fijo de Banach converge para la función  $f$  dada? Dar una prueba de la respuesta.
- (b) Encontrar el punto fijo único de  $f$ . Mostrar el trabajo.

*Solución.* A continuación, se procede a resolver cada inciso:

- (a) Se procede a calcular los valores propios de  $C$ :

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda I) &= 0 \\ \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ -\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \\ \lambda &= \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Entonces,  $\rho(C) = \frac{1+i}{2} \cdot \frac{1-i}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < 1$ . Por lo tanto, el método del punto fijo converge.

- (b) Si  $\hat{x}$  es un punto fijo de  $f$ , entonces  $f(\hat{x}) = C\hat{x} + c = \hat{x}$  o equivalentemente  $(I - C)\hat{x} = c$ . Se resuelve este sistema lineal:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{array} \right) & \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) & \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Entonces, el punto fijo  $\hat{x}$  de  $f$  es  $(-5 \ 3)^T$ .

□

### 5.3. Iteraciones de Jacobi y Gauss-Seidel

**Ejercicio 77.** ¿Cuál de las siguientes matrices son estrictamente fila diagonal dominante?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{2}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

*Solución.* Se procede a realizar una validación fila por fila

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

No cumple ya que para la fila 2

$$|2| \not> |1| + |-1|$$

Por lo tanto, no es estrictamente diagonal dominante.

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si cumple

$$|5| > |2| + |-2|$$

$$|3| > |0| + |-2|$$

$$|3| > |-1| + |1|$$

Por lo tanto, es estrictamente diagonal dominante.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

No cumple

$$|2| > |\frac{1}{2}| + |-1| = 1,5$$

$$|2,5| > |-1| + |1| = 2$$

$$|0,5| \not> |\frac{3}{2}| + |-1| = 1,5$$

Por lo tanto, no es estrictamente diagonal dominante. □

**Ejercicio 78.** Dado el sistema lineal:

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule la solución del sistema.

(b) Verifique que la matriz  $A$  es estrictamente diagonal dominante.

*Solución.* A continuación, se procede a resolver cada inciso:

(a) Calculando la solución del sistema:

$$\begin{array}{l} F_1 : \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ F_2 : \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ F_3 : \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) \end{array} \quad F_3 \rightarrow F_3 - \frac{1}{2}F_1$$

Luego,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \end{array} \right) \quad F_3 \rightarrow F_3 + \frac{1}{2}F_2$$

Simplificando,

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right) \quad F_3 \rightarrow F_3 + \frac{1}{2}F_2$$

Por ultimo,

$$\begin{cases} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 1 \end{cases}$$

Por lo tanto,  $\mathbf{x} = (1, 1, 1)^T$  es la solución al sistema.

(b) Verificando que la matriz  $A$  es estrictamente diagonal dominante:

$$\begin{aligned} |a_{11}| &= |2| = 2 > |0| + |-1| = 1 \\ |a_{22}| &= |-2| = 2 > |0| + |1| = 1 \\ |a_{33}| &= |3| = 3 > |1| + |1| = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $A$  es estrictamente diagonal dominante.

□

**Ejercicio 79.** Considerar el sistema lineal

$$Ax = b, \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Verificar que la matriz  $A$  es estrictamente diagonal dominante por filas.

(b) Para el vector inicial  $x^{(0)} = 0 = (0, 0, 0)^T$ , calcular las primeras cuatro aproximaciones  $x^{(j)}$ , para  $j = 1, 2, 3, 4$ , del método de Jacobi.

*Solución.* (a) Verificando que la matriz  $A$  es estrictamente diagonal dominante por filas.

$$\begin{aligned} |a_{1,1}| &= 2 > |0| + |0| = 0 \\ |a_{2,2}| &= 2 > |0| + |-1| = 1 \\ |a_{3,3}| &= 2 > |0| + |-1| = 1 \end{aligned}$$

así que  $A$  es estrictamente diagonal dominante por filas.

(b) Sea  $x = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$ :

$$\begin{cases} 2x_1 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

Entonces, la primera aproximación es:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(1)} &= 1 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0) = \frac{1}{2} \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0) = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La segunda aproximación es:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(2)} &= 1 \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

La tercera aproximación es:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(3)} &= 1 \\ x_2^{(3)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} \right) = \frac{7}{8} \\ x_3^{(3)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} \right) = \frac{7}{8} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{8} \\ \frac{7}{8} \end{pmatrix}.$$

La cuarta aproximación es:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(4)} &= 1 \\ x_2^{(4)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{7}{8} \right) = \frac{15}{16} \\ x_3^{(4)} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{7}{8} \right) = \frac{15}{16} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{15}{16} \\ \frac{15}{16} \end{pmatrix}.$$

□

**Ejercicio 80.** Considere el sistema lineal

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Muestre que  $A$  es definida positiva

(b) Calcule la solución  $\hat{x}$  de  $Ax = b$

*Solución.* (a) Para mostrar que  $A$  es definida positiva, únicamente es necesario determinar sus valores propios, es fácil determinar que son:  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 2$ , ya que son no negativos,  $A$  es definida positiva.

(b) Se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

luego, las soluciones son

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1$$

□

**Ejercicio 81.** Considerar el sistema lineal

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Mostrar que la matriz  $A$  es definida positiva.

(b) Calcular la solución  $\hat{\mathbf{x}}$  de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

*Solución.* (a) Lo primero es determinar sus valores propios

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ -\lambda^3 + 6\lambda - 11\lambda + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Al encontrar las raíces del polinomio anterior se tiene que:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ . Son positivos, por lo tanto  $A$  es definida positiva.

(b) Calculando la solución  $\hat{\mathbf{x}}$  de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x_1 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ 3x_2 = 3 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

## 5.4. Relajación





## Capítulo 6

# El método del gradiente conjugado

- 6.1. El algoritmo genérico de minimización
- 6.2. Minimización con la búsqueda del A-Conjugado
- 6.3. Convergencia del método del gradiente conjugado



# Capítulo 7

## Cálculo de Eigenvalores

- 7.1. Técnicas básicas de localización
- 7.2. El método de la potencia
- 7.3. La iteración inversa
- 7.4. El método de Jacobi
- 7.5. La reducción Householder a la forma Hessenberg
- 7.6. El algoritmo QR



# Bibliografía

- [1] *Hesse, Kerstin Lecture notes on Numerical Linear Algebra. The University of Sussex - Departament of Mathematics, 2010.*
- [2] *Axler, Sheldon Linear Algebra Done Right. Springer*
- [3] *Horn, Roger y Johnson, Charles Matrix Analysis. Cambridge University Press*