Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Estadística 3 (M704)
Primer semestre, marzo de 2020

Profesor: **Frank Fritzsche** Autor: **201513630 Javier Navarro**

Cadenas de Markov

Capítulo 3: Problemas de juego

Ejercicio 3.1. *Consideramos un problema de juego con la posibilidad de un empate, es decir, en el momento n la ganancia X_n del jugador A puede aumentar en una unidad con probabilidad $r > 0$, disminuya en una unidad con probabilidad r, o permanezca estable con probabilidad $1 - 2r$. Sea:*

$$f(k) := \mathbb{P}(R_A \mid X_0 = k)$$

denota la probabilidad de ruina del jugador A y sea:

$$h(k) := \mathbb{E}(T_0 \mid X_0 = k)$$

denota el valor esperado de la duración del juego $T_{0,S}$ a partir de $X_0 = k$, $0 \leq k \leq S$.

(a) Usando el análisis del primer paso, escriba la ecuación de diferencia satisfecha por $f(k)$ y sus condiciones de frontera, $0 \leq k \leq S$. Nos referimos a esta ecuación como la ecuación homogénea

Solución. Se tiene que:

$$f(k) = (1 - 2r)f(k) + rf(k) + rf(k-1),$$

luego:

$$f(k) = \frac{1}{2}f(k+1) + \frac{1}{2}f(k-1) \qquad\qquad 1 \leq k \leq S-1$$

con las condiciones de frontera $f(0) = 1$ y $f(S) = 0$. $\square$

(b) *Resuelva la ecuación homogénea del inciso (a) por su método preferido. ¿Es esta solución compatible con su intuición del problema? ¿Porqué?*

Solución. Se sabe que la solución general de la ecuación homogénea tiene la forma:

$$f(k) = C_1 + C_2 k \qquad\qquad 0 \leq k \leq S$$

tomando las condiciones de frontera se obtiene:

$$f(k) = \frac{S-k}{S} \qquad\qquad 0 \leq k \leq S.$$

Desde la perspectiva intuitiva el problema es un juego justo para todos los valores de r, por lo que la probabilidad de ruina debería ser la misma para toda $r \in (0, \frac{1}{2})$, por lo anterior se nota que coincide. $\square$

(c) *Usando el análisis del primer paso, escriba la ecuación de diferencia satisfecha por $h(k)$ y sus condiciones de frontera $0 \leq k \leq S$.*

Solución. Se sabe que:

$$\begin{aligned} h(k) &= (1-2r)(1+h(k)) + r(1+h(k+1)) + r(1+h(k-1)) \\ h(k) &= 1 + (1-2r)h(k) + rh(k+1) + rh(k-1) \end{aligned}$$

luego:

$$h(k) = \frac{1}{2r} + \frac{1}{2}h(k+1) + \frac{1}{2}h(k-1)$$

con las condiciones de frontera $h(0) = 0$ y $h(S) = 0$. Es evidente que r debe ser estrictamente positiva, de otra forma si $r = 0$, es necesario que $h(k) = \infty$ para todo $k = 1, \ldots, S-1$ y $h(0) = h(S) = 0$. $\square$

(d) *Busque una solución particular para la ecuación del inciso (c).*

Solución. Al proponer una solución de la forma $h(k) = Ck^2$, se determina

$$Ck^2 = \frac{1}{2r} + \frac{1}{2}C(k+1)^2 + \frac{1}{2}C(k-1)^2$$

entonces C debe ser igual a $C = -1/(2r)$, así que $k \mapsto -\frac{k^2}{2r}$ es una solución particular. $\square$

(e) *Resuelva la ecuación del inciso (c).*
Consejo: recuerde que la solución general de la ecuación es la suma de una solución particular y una solución de la ecuación homogénea.

Solución. Se sabe que la solución general tiene la forma:

$$h(k) = C_1 + C_2 k - \frac{k^2}{2r} \qquad\qquad 0 \leq k \leq S$$

Tomando las condiciones de frontera se obtiene:

$$h(k) = \frac{k}{2r}(S - k) \qquad\qquad 0 \leq k \leq S$$

□

(f) *¿Cómo se comporta la duración media $h(k)$ cuando r tiende a cero? ¿Es esta solución compatible con su intuición del problema? ¿Porqué?*

Solución. Si se considera cualquier estado $k \in 1, 2, \ldots, S-1$, la duración media tiende a ∞ cuando r tiende a cero. Por otro lado, cuando r tiende a cero la probabilidad $1 - 2r$ de un empate aumenta y el juego debería tomar más tiempo.

□

Ejercicio 3.2. *Consideremos un proceso de tiempo discreto $(X_n)_{n\geq 0}$ que modela la fortuna de un apostador dentro de $0, 1, \ldots, S$, con las probabilidades de transición:*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k) = p \qquad\qquad 0 \leq k \leq S-1$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k-1 \mid X_n = k) = q \qquad\qquad 0 \leq k \leq S$$

y:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = q$$

para toda $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ donde $q = 1 - p$ y $p \in (0, 1]$. En este modelo al apostador le podría estar permitido "rebotar" después de alcanzar 0. Sea

$$W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X_n = S\}$$

el evento en el que el jugador eventualmente gana el juego.

(a) *Sea*

$$f(k) = \mathbb{P}(W \mid X_0 = k)$$

la probabilidad de que el jugador eventualmente gane después de empezar del estado $k \in 0, 1, \ldots, S$. Usando el análisis de primer paso, escribir las ecuaciones de diferencia satisfechas $f(k)$, $k = 0, 1, \ldots, S-1$, y sus condiciones de contorno. Esta pregunta es estándar, sin embargo hay que prestar atención al comportamiento especial del proceso en el estado 0.

Solución. Se tiene que:

$$f(k) = pf(k+1) + qf(k-1) \qquad\qquad k = 1, \ldots, S$$

con la condición de frontera $f(S) = 1$ y luego:

$$f(0) = pf(1) + qf(0), \qquad\qquad \text{para } k = 0$$

□

(b) *Calcular $\mathbb{P}(W \mid X_0 = k)$ para todo $k = 0, 1, \ldots, S$ resolviendo las ecuaciones del inciso (a)*

Solución. Se observa que la función $f(k) = C$ es la solución de las dos ecuaciones del inciso anterior y la condición de frontera $f(S) = 1$ da $C = 1$, por lo tanto

$$f(k) = \mathbb{P}(W \mid X_0 = k) = 1 \text{ para todos los } k = 0, 1, \ldots, S.$$

□

(c) *Sea*

$$T_S = \text{ínf}\{n \geq 0 : X_n = S\}$$

el tiempo del primer golpe de S por el proceso $(X_n)_{n\geq 0}$ y

$$g(k) = \mathbb{E}[T_S \mid X_0 = k]$$

el tiempo esperado hasta que el apostador gane después de empezar desde el estado $k \in 0, 1, \ldots, S$. Usando el análisis de primer paso, escribir las ecuaciones de diferencia satisfechas por $g(k)$, para $k = 0, 1, \ldots, S-1$, y establecer las correspondientes condiciones de frontera.

Solución. Se tiene:

$$g(k) = 1 + pg(k+1) + qg(k-1), \qquad k = 1, \ldots, S-1$$

Con las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} g(S) &= 0 \\ g(0) &= 1 + pg(1) + qg(0) \end{aligned}$$

$\square$

(d) *Calcule $\mathbb{E}[T_S \mid X_0 = k]$ para todo $k = 0, 1, \ldots, S$ resolviendo las ecuaciones del inciso (c)*

Solución. Si $p \neq q$ la solución de ecuación homogénea

$$g(k) = pg(k+1) + qg(k-1), \qquad k = 1, \ldots, S-1$$

la cual, puede expresarse de la siguiente forma:

$$g(k) = C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^k \qquad k = 1, \ldots, S-1$$

Además $k \mapsto \frac{k}{p-q}$ es una solución particular, entonces la solución general tiene la forma:

$$g(k) = \frac{k}{q-p} + C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^k, \qquad \text{para } k = 0, \ldots, S$$

con

$$0 = g(S) = \frac{S}{q-p} + C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^S$$

y

$$pg(0) = p(C_1 + C_2) = 1 + pg(1) = 1 + p\left(\frac{1}{q-p} + C_1 + C_2 \frac{q}{p}\right)$$

Por lo tanto

$$C_1 = \frac{q\left(\frac{q}{p}\right)^S}{(p-q)^2} - \frac{S}{q-p} \text{ y } C_2 = -\frac{q}{(p-q)^2}$$

que genera:

$$g(k) = \mathbb{E}[T_S \mid X_0 = k] = \frac{S-k}{p-q} + \frac{q}{(p-q)^2}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^S - \left(\frac{q}{p}\right)^k\right) \quad \text{, para } k = 0, \ldots, S$$

Ahora, cuando $p = q = \frac{1}{2}$, la solución de la ecuación homogénea está dada por:

$$g(k) = C_1 + C_2 k \qquad\qquad k = 1, \ldots, S-1$$

Además la solución general tiene la forma:

$$g(k) = -k^2 + C_1 + C_2 k, \qquad\qquad k = 1, \ldots, S$$

donde

$$0 = g(S) = -S^2 + C_1 + C_2 S, \text{ y}$$
$$\frac{g(0)}{2} = \frac{C_1}{2} = 1 + \frac{g(1)}{2} = 1 + \frac{(-1 + C_1 + C_2)}{2}$$

Por lo tanto $C_1 = S(S+1)$ y $C_2 = -1$, entonces

$$g(k) = \mathbb{E}[T_S \mid X_0 = k] = (S+k+1)(S-k), \qquad\qquad k = 0, \ldots, S$$

□

(e) Sea

$$T_0 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$$

el primer tiempo de golpe de 0 por el proceso $(X_n)_{n\geq 0}$. Usando los resultados previos escribir el valor de:

$$p_k := \mathbb{P}(T_S < T_0 \mid X_0 = k)$$

como una función de p, S, y $k \in \{0, \ldots, S\}$

Solución. Se tiene:

$$p_k := \mathbb{P}(T_S < T_0 \mid X_0 = k) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^S}, \qquad\qquad k = 0, \ldots S$$

dado que $p \neq q$, y $p_k = \frac{k}{S}$, $k = 0, \ldots S$ si $p = q = \frac{1}{2}$ □

(f) Explicar por qué la igualdad

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_S < T_0 \mid X_1 = k+1, X_0 = k)\\ = \mathbb{P}(T_S < T_0 \mid X_1 = k+1)\\ = \mathbb{P}(T_S < T_0 \mid X_0 = k+1)\end{aligned}$$

se cumple para $k \in \{0, \ldots, S-1\}$

Solución. La igualdad se cumple porque dado que empezamos desde el estado $k+1$ en el tiempo 1, ya que $T_S < T_0$ o $T_S > T_0$ no depende del proceso pasado antes del tiempo 1. Además, no importa si empezamos por el estado $k+1$ en el momento 1 o en el momento 0 $\square$

(g) Usando la relación del inciso anterior, demuestre que la probabilidad

$$\mathbb{P}(X_1 = k+1 \mid X_0 = k, T_S < T_0)$$

de un paso después dado que el estado S es alcanzado primero, es igual a

$$\mathbb{P}(X_1 = k+1 \mid X_0 = k, T_S < T_0) = p\frac{\mathbb{P}(T_S < T_0 \mid X_0 = k+1)}{\mathbb{P}(T_S < T_0 \mid X_0 = k)} = p\frac{p_{k+1}}{p_k}$$

para $k = 1, \ldots S-1$ que se calcularán explícitamente a partir del resultado del inciso (e). ¿Cómo se compara esta probabilidad con el valor de p?

Solución.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = k+1 \mid X_0 = k, T_S < T_0) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = k+1 \mid X_0 = k, T_S < T_0)}{\mathbb{P}(X_0 = k, T_S < T_0)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(T_S < T_0 \mid X_1 = k+1, X_0 = k)\mathbb{P}(X_1 = k+1, X_0 = k)}{\mathbb{P}(T_S < T_0, X_0 = k)}\\ &= p\frac{\mathbb{P}(T_S < T_0 \mid X_0 = k+1)}{\mathbb{P}(T_S < T_0 \mid X_0 = k)} = p\frac{p_{k+1}}{p_k}\end{aligned}$$

para $k = 1, \ldots S-1$. se determina:

$$\mathbb{P}(X_1 = k+1 \mid X_0 = k, T_S < T_0) = p\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{k+1}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{k}}, \qquad k = 1, \ldots S-1$$

si $p = q = \frac{1}{2}$. Esta probabilidad es mayor que p $\square$

(h) *Calcule la probabilidad*

$$\mathbb{P}(X_1 = k-1 \mid X_0 = k, T_0 < T_S) \qquad\qquad k = 1, \dots, S$$

de un paso hacia atrás dado que el estado 0 se alcanza primero, utilizando argumentos similares al inciso (g).

Solución. Se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = k-1 \mid X_0 = k, T_0 < T_S) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = k-1, X_0 = k, T_0 < T_S)}{\mathbb{P}(X_0 = k, T_0 < T_S} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T_0 < T_S \mid X_1 = k-1, X_0 = k)\mathbb{P}(X_1 = k-1, X_0 = k)}{\mathbb{P}(T_0 < T_S, X_0 = k)} \\
&= q\frac{\mathbb{P}(T_0 < T_S \mid X_0 = k-1)}{\mathbb{P}(T_0 < T_S \mid X_0 = k)} = q\frac{1 - pk - 1}{1 - p_k}
\end{aligned}$$

Para $k = 1, \dots, S-1$ dado que $p \neq q$ y $\mathbb{P}(X_1 = k-1 \mid X_0 = k, T_0 < T_S) = \frac{S+1-k}{2(S-k)}$, para $k = 1, \dots, S-1$. Si $p = q = \frac{1}{2}$ esta probabilidad es mayor que q. $\square$

(i) *Sea*

$$h(k) = \mathbb{E}[T_S \mid X_0 = k, T_S < T_0] \qquad\qquad k = 1, \dots, S$$

el tiempo esperado hasta que el jugador gana, dado que el estado 0 nunca se alcanza. Utilizando las probabilidades de transición (3.43), indique las ecuaciones de diferencia finita satisfechas por $h(k), k = 1, \dots, S-1$, y sus condiciones de frontera

Solución.

$$p_k h(k) = p_k + pp_{k+1}h(k+1) + qp_{k-1}h(k-1), \qquad k = 1, \dots, S-1$$

Con la condición de frontera $h(S) = 0$ $\square$

(j) *Resuelva la ecuación del inciso anterior cuando $p = \frac{1}{2}$ y calcule $h(k)$, para $k = 1, \dots, S$. ¿Qué se puede decir de $h(0)$?*

Solución.

$$kh(k) = k + \frac{1}{2}(k+1)h(k+1) + \frac{1}{2}(k-1)h(k-1), \qquad k = 1, \dots, S-1$$

con $h(S) = 0$ como condición de frontera. Tomando $g(k) = kh(k)$ Es evidente que $g(k)$ satisface:

$$g(k) = k + \frac{1}{2}g(k+1) + \frac{1}{2}g(k-1), \text{ para } k = 1, \ldots, S-1$$

con $g(0) = 0$ y $g(S) = 0$ como condiciones de frontera. Note que $g(k) = Ck^3$ es una solución particular cuando $C = -\frac{1}{3}$, por lo tanto la solución tiene la forma:

$$g(k) = -\frac{1}{3}k^3 + C_1 + C_2 k$$

pero $C_1 = 0$ y $C_2 = \frac{S^3}{3}$, entonces

$$g(k) = \frac{k}{3}(S^2 - k^2), \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, S$$

por lo tanto

$$h(k) = \mathbb{E}[T_S \mid X_0 = k, T_S < T_0] = \frac{S^2 - k^2}{3}, \qquad\qquad k = 1, \ldots, S$$

$h(0)$ es indefinido ya que $\{X_0 = 0, T_S < T_0\}$ tiene probabilidad 0. $\square$

Capítulo 4: Paseos al azar

Ejercicio 4.1. *Consideramos la caminata aleatoria simple* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de la Sección 4.1 con incrementos independientes y comenzamos en* $S_0 = 0$*, en la cual la probabilidad de avance es* p *y la probabilidad de retroceso es* $1-p$.

(a) *Enumere todos los caminos de muestra posibles que conducen a* $S_4 = 2$ *a partir de* $S_0 = 0$

Solución. Este es un problema combinatorio, todos los caminos posibles, estan dados por:

$$\binom{4}{3} = 4$$

$\square$

(b) *Demostrar que:*

$$\mathbb{P}(S_4 = 2 \mid S_0 = 0) = \binom{4}{3} p^3(1-p) = \binom{4}{1} p^3(1-p)$$

Solución. En cada uno de los 4 caminos hay 3 pasos hacia arriba con probabilidad p y 1 paso hacia abajo con probabilidad $q = 1-p$

$$= \binom{4}{3} p^3(1-p) = \binom{4}{1} p^3(1-p)$$

$\square$

(c) *Demuestre que si* $n+k$ *es par se tiene:*

$$\mathbb{P}(S_n = k \mid S_0 = 0) = \begin{cases} \binom{n}{(n+k)/2} p^{(n+k)/2}(1-p)^{(n-k)/2}, & n+k \text{ par y } \mid k \mid \leq n \\ \\ \mathbb{P}(S_n = k \mid S_0 = 0) = 0; & n+k \text{ par o } \mid k \mid > n \end{cases}$$

Solución. Dado que:

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 2k \mid S_0 = 0) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}, \qquad -n \leq k \leq n$$

entonces es fácil ver que se cumple:

$$\begin{cases} \binom{n}{(n+k)/2} p^{(n+k)/2}(1-p)^{(n-k)/2}, & \text{n+k par y } \mid k \mid \leq n \\ \\ \mathbb{P}(S_n = k \mid S_0 = 0) = 0; , & \text{n+k par o } \mid k \mid > n \end{cases}$$

$\square$

(d) *Muestre, mediante un argumento directo utilizando el análisis del primer paso en caminatas aleatorias, que $p_{n,k} := \mathbb{P}(S_n = k \mid S_0 = 0)$ satisface la ecuación:*

$$p_{n+1,k} = pp_{n,k-1} + qp_{n,k+1}$$

Bajo las condiciones de frontera: $p_{0,0} = 1$ y $p_{0,k} = 0$, $k \neq 0$

Solución. Tomando $p_{n,k} := \mathbb{P}(S_n = k)$ se tiene:

$$\begin{aligned} p_{n+1,k} &= \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_0 = 0) \\ &= \mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_1 = 1)\mathbb{P}(S_1 = 1 \mid S_0 = 0) \\ &+ \mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_1 = -1)\mathbb{P}(S_1 = -1 \mid S_0 = 0) \\ &= p\mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_1 = 1) + q\mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_1 = -1) \\ &= p\mathbb{P}(S_{n+1} = k-1 \mid S_1 = 0) + q\mathbb{P}(S_{n+1} = k+1 \mid S_1 = 0) \\ &= p\mathbb{P}(S_n = k-1 \mid S_0 = 0) + q\mathbb{P}(S_n = k+1 \mid S_0 = 0) \\ &= pp_{n,k-1} + qp_{n,k+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$p_{n+1,k} = pp_{n,k-1} + qp_{n,k+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y } k \in \mathbb{Z}$$

$\square$

(e) *Confirme que $p_{n,k} = \mathbb{P}(S_n = k \mid S_0 = 0)$ dado por (4.27) satisface la ecuación (4.28) y sus condiciones de frontera.*

Solución. Si $n + 1 + k$ es impar claramente satisface la ecuación (4.28).

Si $n+1+k$ es par se tiene:

$$
\begin{aligned}
pp_{n,k-1}+qp_{n,k+1} =& p\binom{n}{(n-1+k)/2}p^{(n-1+k)/2}(1-p)^{(n+1-k)/2} \\
&+q\binom{n}{(n+1+k)/2}p^{(n+1+k)/2}(1-p)^{(n-1-k)/2} \\
=& \binom{n}{(n-1+k)/2}p^{(n+1+k)/2}q^{(n+1-k)/2} \\
&+\binom{n}{(n+1+k)/2}p^{(n+1+k)/2}q^{(n+1-k)/2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= p^{(n+1+k)/2}q^{(n+1-k)/2}\left(\binom{n}{(n-1+k)/2}+\binom{n}{(n+1+k)/2}\right) \\
&= p^{(n+1+k)/2}q^{(n+1-k)/2}\left(\frac{n!}{((n+1-k)/2)!((n-1+k)/2)!}+\frac{n!}{((n-1-k)/2)!((n+1+k)/2)!}\right) \\
&= p^{(n+1+k)/2}q^{(n+1-k)/2}\left(\frac{n!(n+1+k)/2}{((n+1-k)/2)!((n+1+k)/2)!}+\frac{n!(n+1-k)/2}{((n-1-k)/2)!((n+1+k)/2)!}\right) \\
&= p^{(n+1+k)/2}q^{(n+1-k)/2}\frac{n!(n+1)}{((n+1-k)/2)!((n+1+k)/2)!}
\end{aligned}
$$

□

Ejercicio 4.2. *Considere la caminata aleatoria* $(S_n)_{n\geq 0}$ *definida por* $S_0=0$ *y*

$$S_n := X_1+\cdots+X_n, n\geq 1,$$

donde $(X_k)_{k\geq 1}$ *es una familia independiente e idénticamente distribuida de* $\{-1,1\}$ *variables valuadas aleatoriamente con distribución:*

$$\begin{cases}\mathbb{P}(X_k=+1)=p\\ \mathbb{P}(X_k=-1)=q\end{cases}$$

$k\geq 1$, *donde* $p+q=1$. *Sea* R_n *el rango de* $(S_0,\ldots,S_n)$, *es decir, el número (aleatorio) de valores distintos que aparecen en la secuencia* $(S_0,\ldots,S_n)$.

(a) Explique por qué:

$$R_n = 1+\left(\sup_{k=0,..,n} S_k\right)-\left(\inf_{k=0,\ldots,n} S_k\right)$$

y dé un valor para R_0 *y* R_1

Solución. Dado que el incremento X_k toma valores en $\{-1, 1\}$, el conjunto de los valores distintos de $\{S_0, \ldots, S_n\}$ es un intervalo de enteros:

$$\left[\inf_{k=0,\ldots,n} S_k, \sup_{k=0,..,n} S_k\right]$$

el cual tiene:

$$R_n = 1 + \left(\sup_{k=0,..,n} S_k\right) - \left(\inf_{k=0,\ldots,n} S_k\right)$$

elementos. Agregando que cumple con R_0 y R_1. □

(b) *Demostrar que para todo $k \geq 1$, $R_k - R_{k-1}$ es una variable aleatoria de Bernoulli y que :*

$$\mathbb{P}(R_k - R_{k-1} = 1) = \mathbb{P}(S_k - S_0 \neq 0, S_k - S_1 \neq 0, \ldots, S_k - S_{k-1} \neq 0).$$

Solución. □

(c) *Demuestre que para todo $k \geq 1$ Se tiene:*

$$\mathbb{P}(R_k - R_k - 1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 \neq 0, X_1 + X_2 \neq 0, \ldots, X_1 + \cdots + X_k \neq 0).$$

Solución. □

(d) *Demostrar por qué la identidad telescópica $R_n = R_0 + \sum_{k=1}^{n}(R_k - R_{k-1})$ se cumple para $n \in \mathbb{N}$*

Solución. □

(e) *Demostrar que $\mathbb{P}(T_0^r = \infty) = lim_{k\to\infty}\mathbb{P}(T_0^r > k)$.*

Solución. □

(f) *De los resultados de 3 y 4, demostrar que:*

$$E[R_n] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T_0^r > k), n \in \mathbb{N}$$

donde $T_0^r = \text{ínf}\{n \geq 1 : S_n = 0\}$ es el tiempo del primer regreso a 0 de la caminata aleatoria.

Solución. $\square$

(g) *De los resultados de 5 y 6, demuestre que:*

$$\mathbb{P}(T_0^r = \infty) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}[R_n]$$

Solución. $\square$

(h) *Demostrar que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}[R_n] = 0$$

donde $p = 1/2$, *y que* $\mathbb{E}[R_n] \simeq_{n\to\infty} n \mid p - q \mid$, *cuando* $p \neq 1/2$.

Solución. $\square$

La esencia de las matemáticas radica en su libertad.
Georg Cantor.