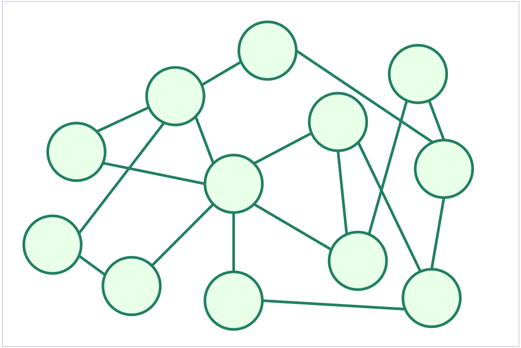
Introdução à Teoria dos Grafos

Prof. Dr. Eleandro Maschio
Tecnologia em Sistemas para Internet
Câmpus Guarapuava
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

Fornecer os serviços de água, telefone e energia elétrica a três residências distintas sem que as redes se cruzem.

Teoria dos Grafos

- Na Ciência da Computação são comuns os problemas que se tratam essencialmente da **conexão entre elementos**.
- Tais problemas ou situações podem ser representados e abordados pela **Teoria dos Grafos**.
- São exemplos:
  - malha de estradas que conectam cidades.
  - perfis de uma rede social.
  - circuitos que compõem placas de e chips computadores.
  - setores de uma empresa.
  - rotas de trafego em redes de computadores.
  - estrutura molecular.



Definições de Grafo

Basicamente, um **grafo** é composto por:

- um conjunto de **vértices** (ou **nós**)

  que correspondem aos **objetos** que se deseja representar.

- um conjunto de **arestas** (ou **arcos**)

  que ligam pares de vértices e denotam **relações entre os objetos** representados.

Um grafo pode ser representado **graficamente** por um diagrama em que os vértices são significados por círculos e as arestas são linhas interligando-os.

Definições de Grafo

Formalmente, tem-se:

- Um grafo G é formado pelo par de conjuntos V e E, sendo V o conjunto de vértices de G, e E o conjunto de arestas de G.

- Uma aresta $e \in E(G)$ é representada por $e = (u, v)$, e sempre interliga dois vértices quaisquer u e v de V.

- Dois vértices ligados por uma aresta são denominados **adjacentes**.

- As seguintes notações são utilizadas para representar um grafo:
  - $G = (V, E)$.
  - $G = (V(G), E(G))$.
  - $G(V, E)$.

Definições de Grafo

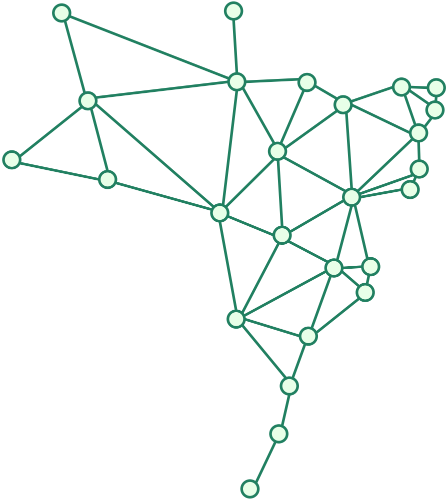
Exemplo da construção de representação gráfica através da definição formal:

$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$

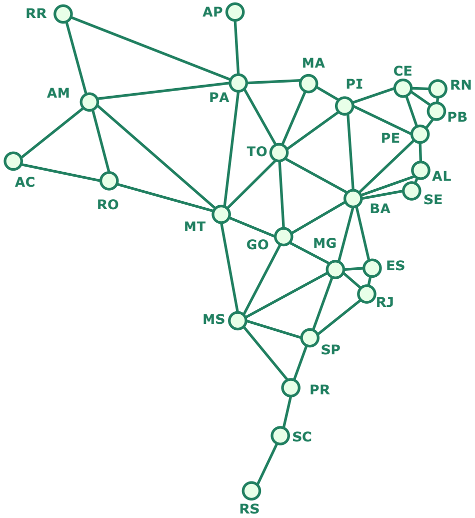
$\boldsymbol{V} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\boldsymbol{E} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$

Um Grafo Conhecido



Um Grafo Mais Conhecido



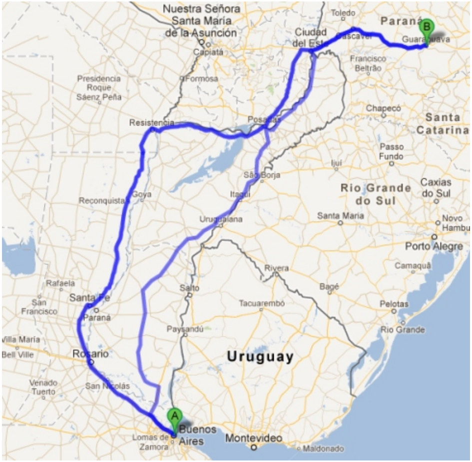
Aplicações

Páginas relacionadas por links na web

Aplicações

Redes sociais

Rotas entre cidades

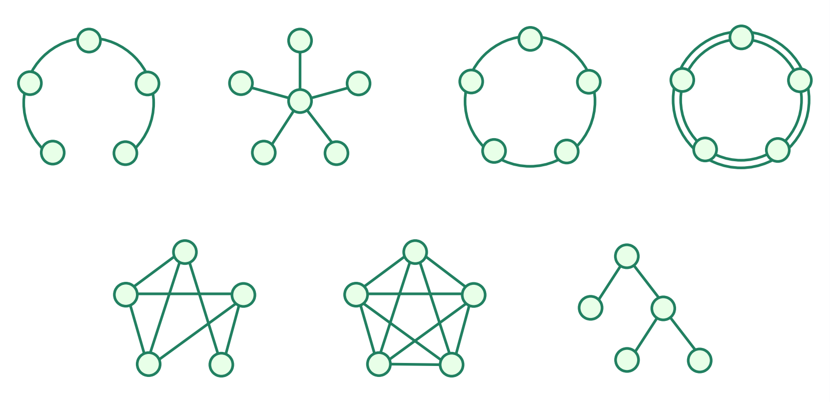


Aplicações

Rotas de voos internacionais

Aplicações

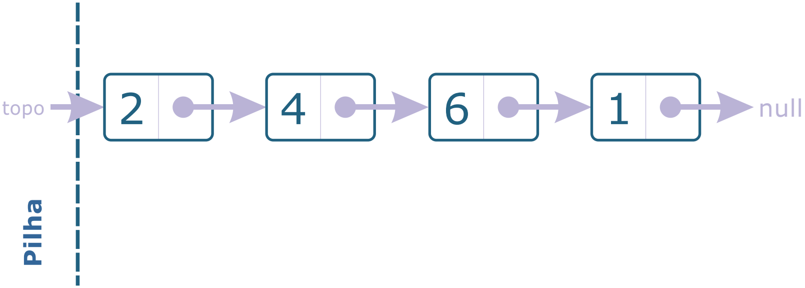
Topologias de rede



Barramento, estrela, anel, duplo anel, malha, malha completa e árvore

Aplicações

Estruturas de dados lineares, hierárquicas, entre outras

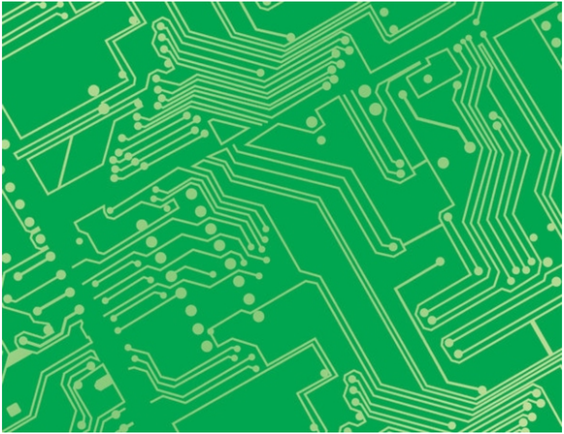


Aplicações

Biometria

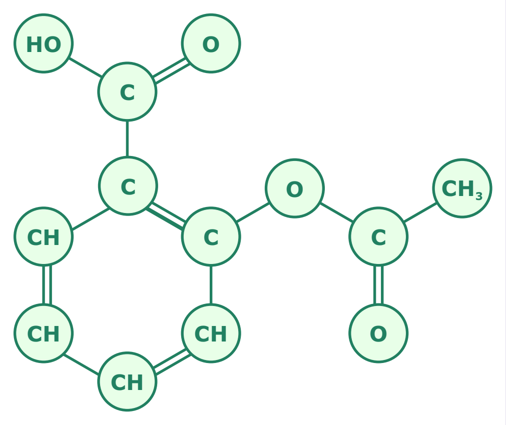
Aplicações

Placas de circuitos impressos



Aplicações

Fórmula estrutural de uma substância



$C_8H_8O_4$

Conceitos e Terminologia

- Na literatura, há **diferenças sutis** nas definições e terminologia básicas da Teoria dos Grafos.
- Buscou-se, para este material, fazer um apanhado das **convensões** mais usadas.

Aresta

Um par não-ordenado {***i***, ***j***}, sendo ***i*** o vértice de origem da aresta e ***j*** o vértice de destino. Sendo, portanto, a aresta $a_{ij} = a_{ji}$.

Arco

Um par ordenado (***i***, ***j***), sendo ***i*** o vértice de origem do arco e ***j*** o vértice de destino. O **sentido** é expresso pela ordem. O arco $\boldsymbol{a_{ij}} \neq \boldsymbol{a_{ji}}$.

Neste caso, é comum denominar o vértice como **nó**.

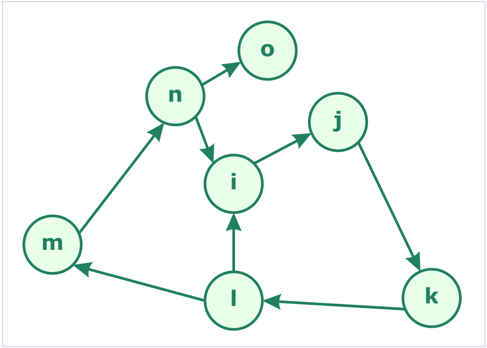
Algumas referências constam **arco** e **aresta**, e os termos **vértice** e **nó**, respectivamente, como sinônimos.

Grafo Orientado e Não Orientado

Um grafo é dito **orientado** (ou **digrafo**) se as arestas possuírem orientação (sendo, então, **arcos**). Caso contrário, é dito **não orientado**.

Assim, num arco $\mathbf{a}_{ij}$:

- ***i*** é predecessor de ***j***.
- ***j*** é sucessor de ***i***.



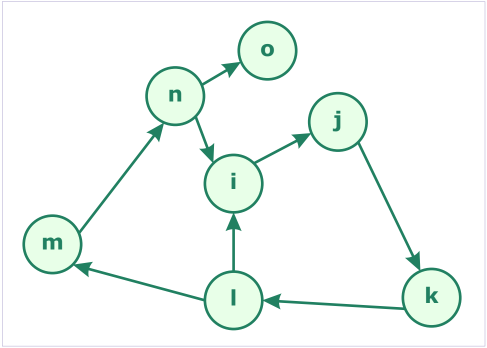
Linhas de ônibus

Laço

Um arco (aresta) em que os **extremos coincidem** é chamado de laço.

Grau

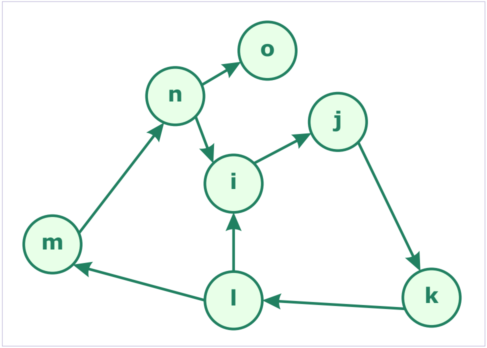
Número de arcos (ou arestas) que **incidem** em um determinado vértice ***i***. Representa-se por ***d***(***i***).



d(***i***) = 3

Grau de Entrada

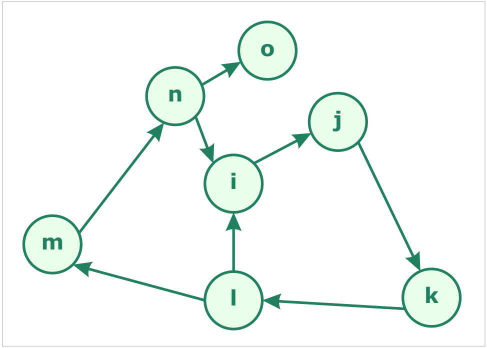
Número de arcos que tem o vértice ***i*** como extremidade final. Representado por ***d-***(***i***). Também denominado meio grau interior.



d-(***i***) = 2

Grau de Saída

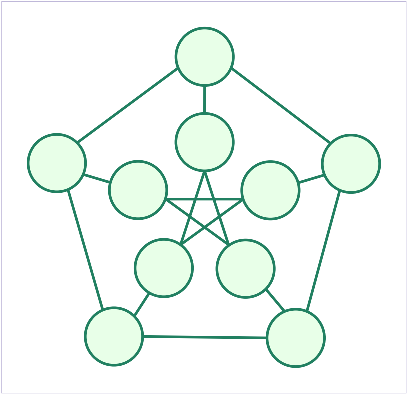
Número de arcos que tem o vértice ***i*** como extremidade inicial. Representado por ***d+***(***i***). Também denominado meio grau exterior.



d+(***i***) = 1

Grafo Regular

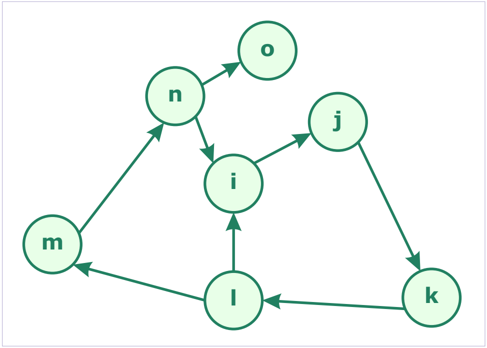
Um grafo em que todos os vértices têm o mesmo grau. Chamado **regular de grau *r*** ou ***r*-regular**.



Grafo 3-regular

Ordem

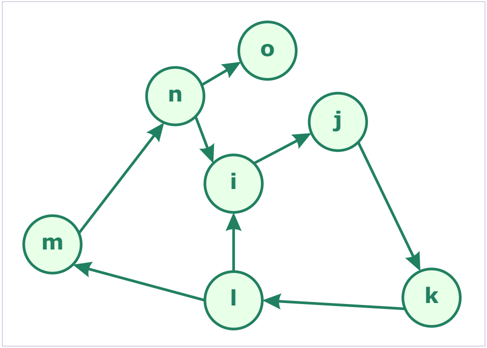
Número de **vértices** do grafo.



Ordem = 7

Tamanho

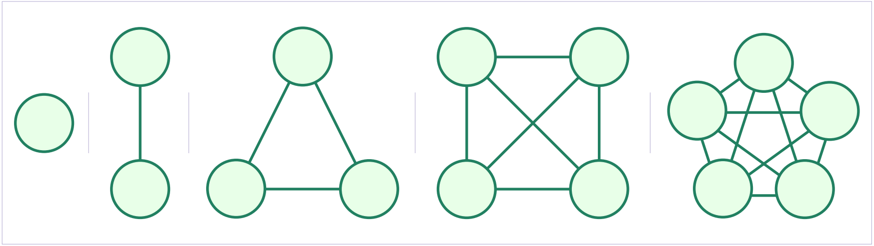
Número de **arestas** (ou arcos) do grafo.



Tamanho = 8

Grafo Completo

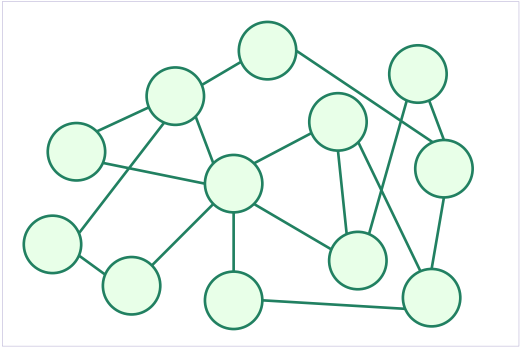
Um grafo em que há uma aresta entre cada par de vértices. São designados por K_n, onde n é a ordem do grafo.



K_1, K_2, K_3, K_4 e K_5

P-Grafo

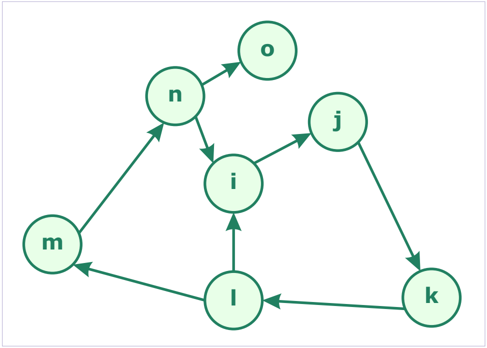
Um grafo em que o número máximo de arestas entre dois vértices quaisquer é ***p***.



?-grafo

Vizinhança

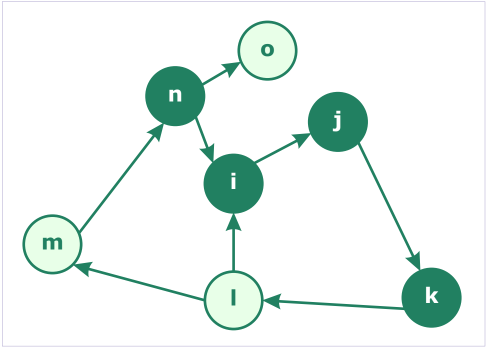
O **conjunto** de vizinhos de um vértice é composto dos respectivos **adjacentes**.



vizinhos(***n***) = {***i***, ***m***, ***o***}

Caminho

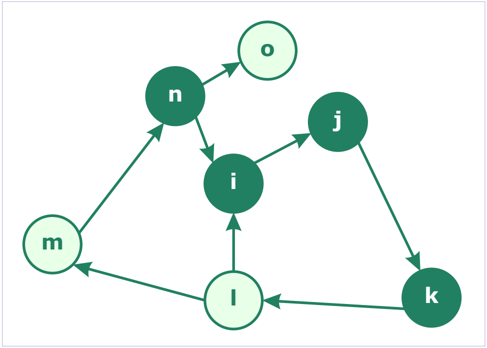
É uma **sequência orientada** de **vértices e arcos** sem repetição de vértices.



$\boldsymbol{p} = \{\boldsymbol{n}, (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i}), \boldsymbol{i}, (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}), \boldsymbol{j}, (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}\}$

Comprimento de um Caminho

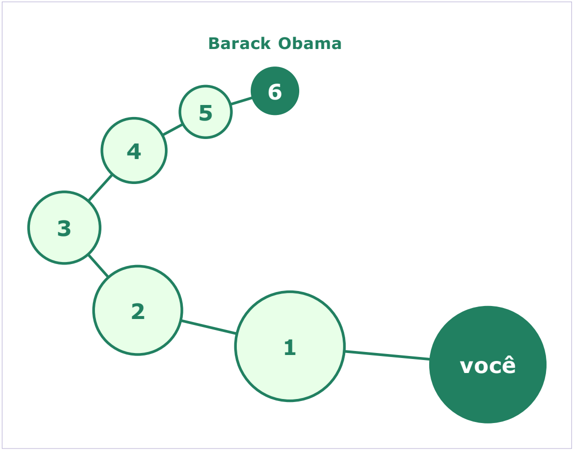
Número de **arcos** que constituem o caminho.



comprimento(***p***) = 3

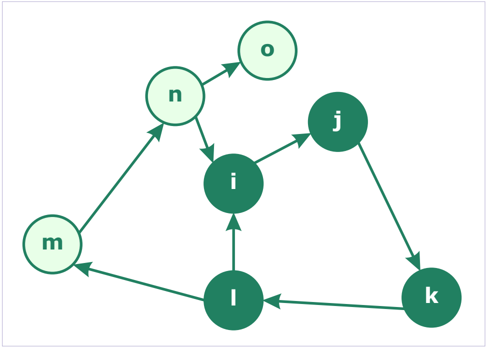
Comprimento de um Caminho

Teoria dos **seis graus** de separação



Circuito

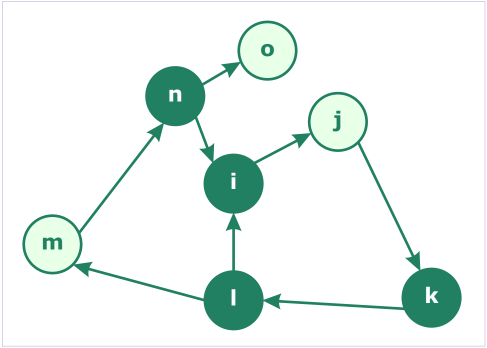
É um **caminho fechado**, ou seja, que começa e termina no mesmo vértice.



$\boldsymbol{p} = \{\boldsymbol{i}, (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}), \boldsymbol{j}, (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}, (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}), \boldsymbol{l}, (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{i}), \boldsymbol{i}\}$

Cadeia

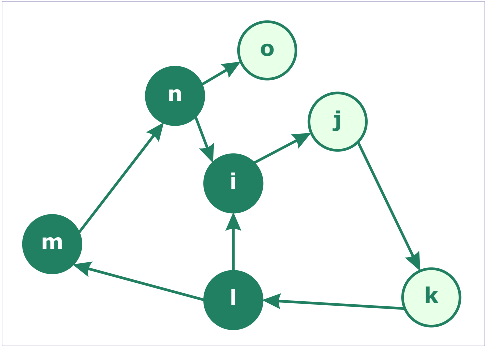
É uma sequência **não orientada** de **vértices** e arcos, sem repetição de vértices. Aplica-se também a grafos não orientados.



$\boldsymbol{p} = \{\boldsymbol{n}, (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i}), \boldsymbol{i}, (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{l}), \boldsymbol{l}, (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}\}$

Ciclo

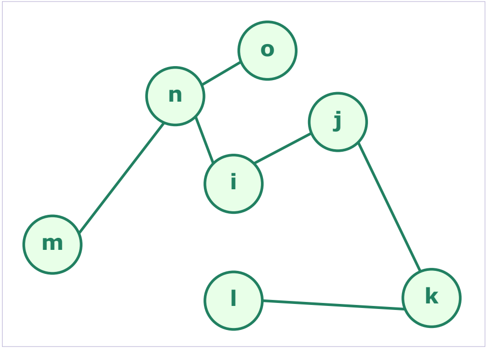
Uma **cadeia fechada**.



$\boldsymbol{p} = \{\boldsymbol{n}, (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i}), \boldsymbol{i}, (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{l}), \boldsymbol{l}, (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}), \boldsymbol{m}, (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}), \boldsymbol{n}\}$

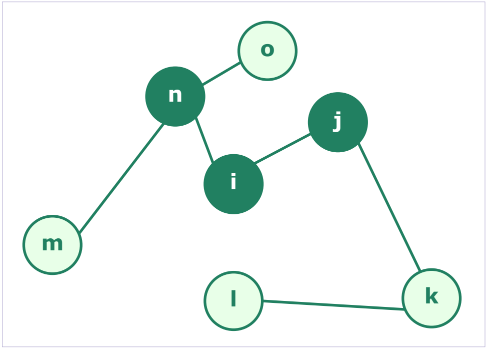
Grafo Acíclico

Um grafo que **não** apresenta qualquer **cadeia com ciclo**, ou seja, que não permite se formar ciclos com quaisquer subsequências de vértices e arestas (ou arcos).

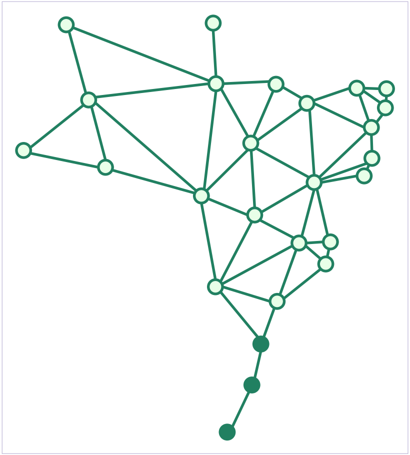


Subgrafo

Dado $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, um subgrafo é um grafo $\boldsymbol{G'}(\boldsymbol{V'}, \boldsymbol{E'})$ tal que $\boldsymbol{E'} \subseteq \boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{V'} \subseteq \boldsymbol{V}$.



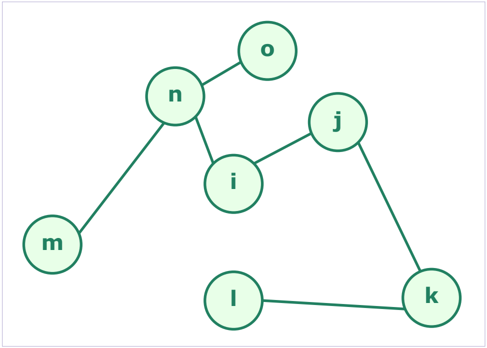
Subgrafo



Reigões são subgrafos de um país

Grafo Conexo

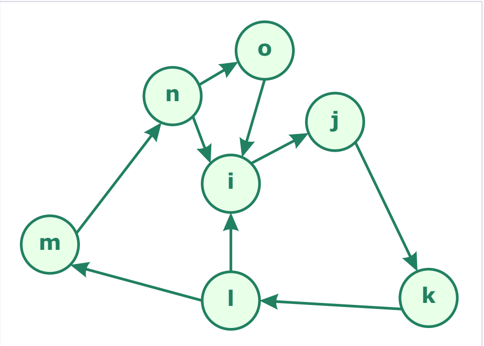
Um grafo é dito conexo quando há pelo menos uma cadeia entre quaisquer **dois vértices** de ***V***.



Grafo Fortemente Conexo

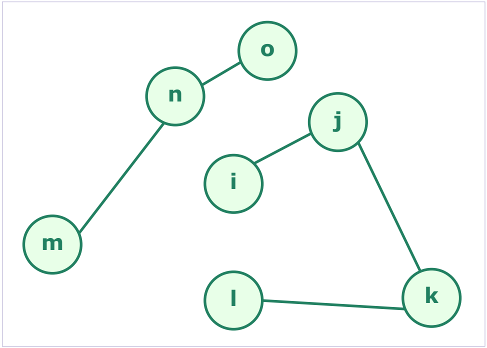
Um grafo orientado é dito fortemente conexo se, dados dois vértices quaisquer ***i*** e ***j***, contém um caminho de ***i*** a ***j*** e outro de ***j*** a ***i***.

Ou seja, se **cada vértice é alcançável** a partir de **qualquer outro** vértice do grafo.



Grafo Desconexo

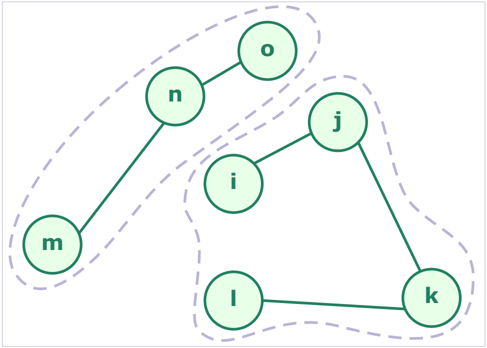
Um grafo é dito desconexo quando inexiste uma cadeia ligando, pelo menos, **dois** dos **vértices** de ***V***.



Um único grafo desconexo

Componente Conexo

Um componente conexo de um grafo desconexo é um **subgrafo conexo** de **maior tamanho** possível. Os componentes são sempre **disjuntos** com relação aos vértices.

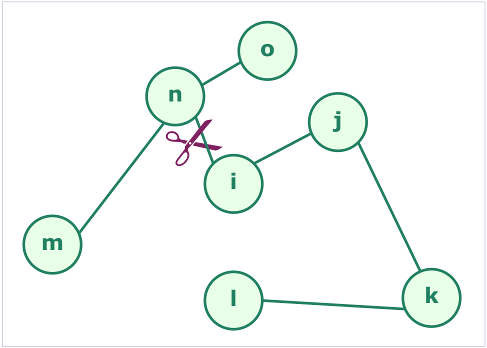


Dois componentes conexos

Ponte

Aresta-de-corte, arco-de-corte ou ismo.

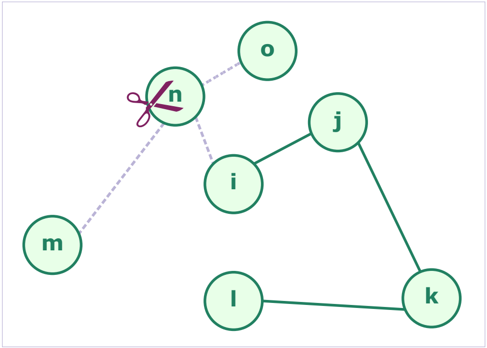
Aresta cuja **remoção** aumenta o número de **componentes conexos** de um grafo. Logo, se uma ponte é removida, o grafo deixa de ser conexo.



Articulação

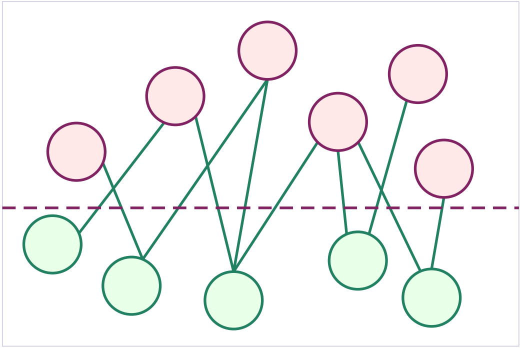
Vértice-de-corte.

Vértice cuja **remoção** aumenta o número de **componentes conexos** de um grafo. Logo, se uma articulação (e respectivas arestas) é removida, o grafo também deixa de ser conexo.



Grafo Bipartido

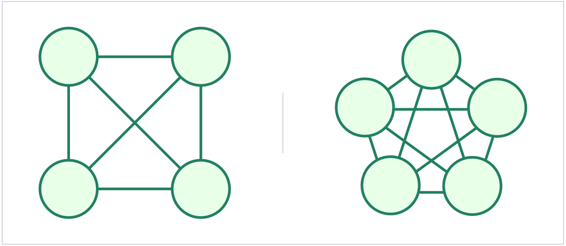
Um grafo $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ é bipartido se o conjunto de vértices $\boldsymbol{V}$, pode ser particionado em duas classes, $\boldsymbol{V_1}$ e $\boldsymbol{V_2}$, tal que os vértices de uma mesma classe **não** sejam **adjacentes**.



Pares de dança?

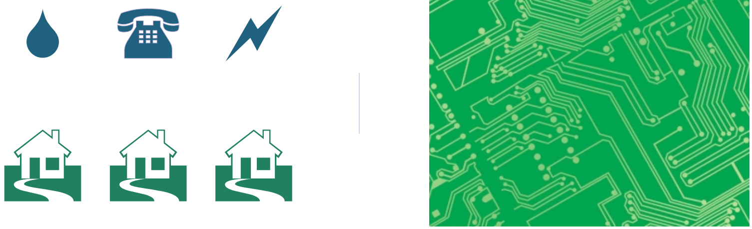
Grafo Planar

Um grafo é dito planar quando existe maneira de dispor seus vértices em um **único plano** de forma que **não haja cruzamento de arestas**. de tal modo que nenhum par de arestas se cruze.



K_4 e K_5 são grafos planares?

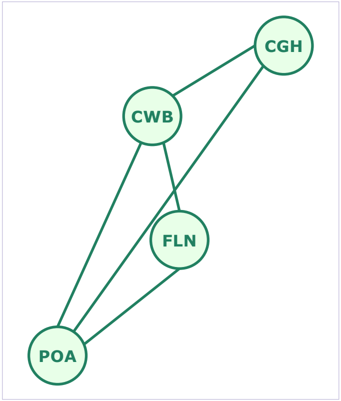
Grafo Planar



Um grafo não planar e outro que precisa ser planar

Grafo Rotulado em Vértices

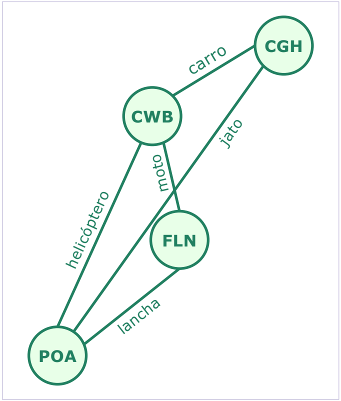
Um grafo é dito ser **rotulado em vértices** quando a cada vértice estiver associado um rótulo.



Grafo rotulado em **vértices**

Grafo Rotulado em Arestas

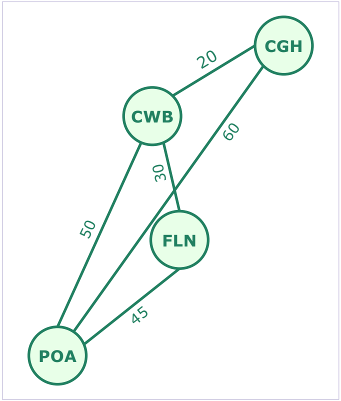
Um grafo é dito ser **rotulado em arestas** quando a cada aresta estiver associado um rótulo.



Também rotulado em **arestas**

Grafo Valorado

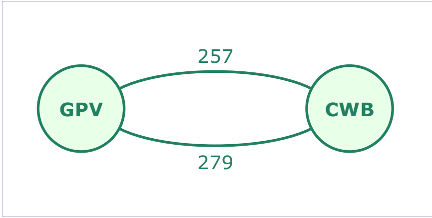
Em um grafo ou com pesos, pode-se associar um **valor** a cada **aresta**, sendo então denominado **custo** daquela aresta.



Tempo de voo

Multigrafo

Um multigrafo admite **múltiplas arestas** entre os mesmos pares de vértice.



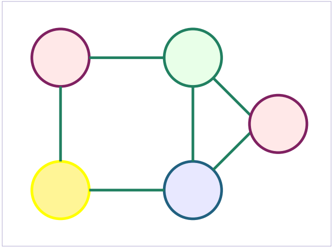
Rotas entre cidades

Coloração

Caso especial de **rotulação de grafos** em que se atribuem cores aos vértices.

Colore-se de forma que **dois vértices adjacentes** não tenham a mesma cor.

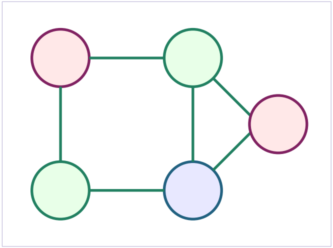
Uma ***k*-coloração** de ***G*** é uma coloração que utiliza um total de ***k* cores**.



4-coloração

Número Cromático

É o menor número de cores ***k***, para o qual existe uma ***k*-coloração** de ***G***.



3-coloração = número cromático

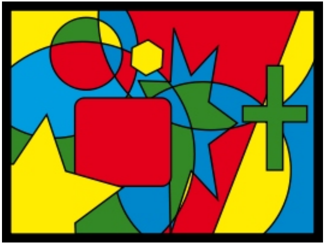
Número Cromático

Com quantas cores, no mínimo (e no máximo), é possível colorir todos os mapas geográficos conhecidos?

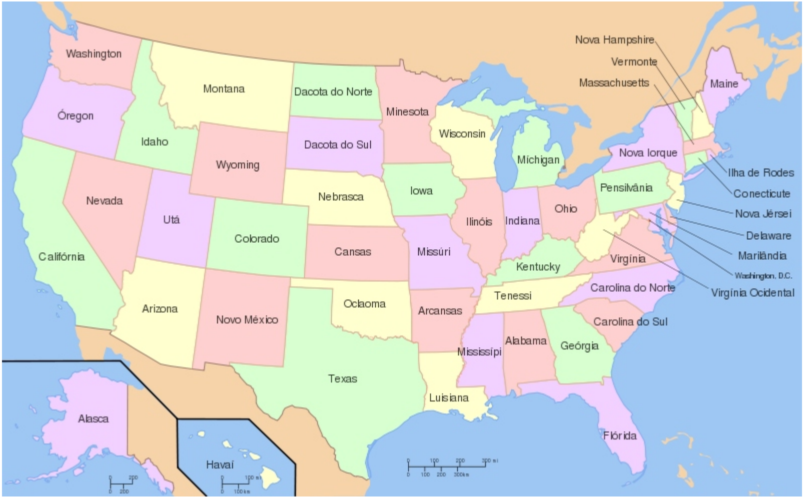
Número Cromático

Com quantas cores, no mínimo (e no máximo), é possível colorir todos os mapas geográficos conhecidos?

- **Teorema das Quatro Cores**.
- É possível colorir todos os mapas geográficos com **4 cores**.
- Problema proposto em **1890** e resolvido em **1977**.
- Trata de grafos **planares**.

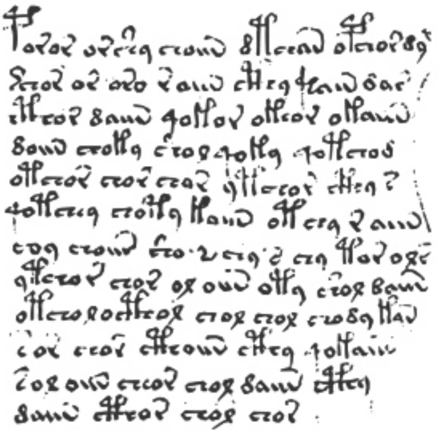


Teorema das Quatro Cores



O Manuscrito de Voynich

- “O livro impossível de ser lido”.
- Usa uma língua desconhecida e uma escrita incompreensível.
- Revelado ao mundo em 1912.



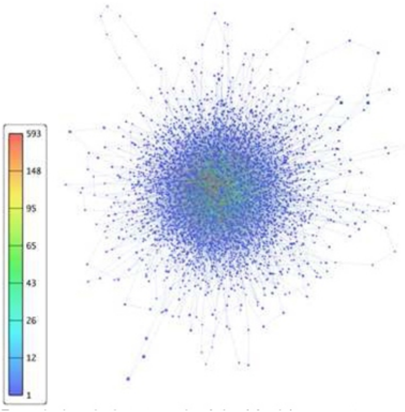
O Manuscrito de Voynich

- **Desafio aceito!**
  Um grupo de físicos brasileiros, incluindo os docentes do Instituto de Física de São Carlos (IFSC/USP).

- Cada vértice representa uma palavra distinta do manuscrito.

- Duas palavras estão ligadas se elas aparecem adjacentes no textos.

- As cores se referem à frequência de aparecimento das palavras.



Considerações Finais

Há ainda um ampla quantidade de termos e conceitos relacionados a grafos:

- Fonte.
- Sumidouro.
- Fecho transitivo
- Isomorfismo.
- Clique.
- Hipergrafo.
- Árvore geradora.
- ...

Considerações Finais

Pergunta

Como aprender e conseguir **todos os conceitos** de grafo?

Resposta

Convém estudar os conceitos relacionados ao **domínio do problema** que se está trabalhando.

Para a área de **Redes de Computadores**, por exemplo, os conceitos de **conectividade** são muito relevantes.

Planaridade, por exemplo, é um conceito importante para **Arquitetura de Computadores** mas pouco relevante para Redes.

Atividades

(**1**) Proponha uma **representação interna** (em memória) para grafos.

(**2**) Pesquise e relacione as **particularidades**, **vantagens** e **desvantagens** das seguintes representações internas de grafos.

- Matriz de incidência vértice-aresta.
- Matriz de incidência nó-arco.
- Matriz de adjacência ou matriz de incidência vértice-vertice ou nó-nó.
- Lista de arcos.
- Lista de adjacência.

(**3**) Entenda o problema das **Sete Pontes de Königsberg**.

(**4**) Idem para o problema do **Caixeiro Viajante**.