14SO

Para la realización del examen se permite un único libro (sea cual sea) sin anotaciones de ningún tipo. Si considera que el enunciado contiene algún erratum, hágalo constar en su respuesta y, **de confirmarse**, el equipo docente compensará el tiempo invertido por el estudiante. En los enunciados, asuma el empleo de la notación habitual del texto base.

---

1. Considere dos variables x e y con distribución de probabilidad conjunta $p(x, y)$. Demuestre que:

   - $\mathbb{E}[x] = \mathbb{E}_y[\mathbb{E}_x[x|y]]$
   - $var[x] = \mathbb{E}_y[var_x[x|y]] + var_y[\mathbb{E}_x[x|y]]$

   donde $\mathbb{E}_x[x|y]$ representa el valor esperado de x asumiendo la distribución de probabilidad condicionada $p(x|y)$, y una notación equivalente se utiliza para la varianza condicional.

2. Deduzca la ecuación para (el logaritmo de) la evidencia de un modelo de regresión lineal con hiperparámetros α y β

   $$\ln p(\boldsymbol{t}|\alpha, \beta) = \frac{M}{2}\ln\alpha + \frac{N}{2}\ln\beta - E(\boldsymbol{m}_N) - \frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{A}| - \frac{N}{2}\ln(2\pi)$$

   sabiendo que si $p(\boldsymbol{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Lambda}^{-1})$ y $p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{L}^{-1})$, la distribución marginal viene dada por

   $$p(\boldsymbol{y}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{L}^{-1} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{A}^T)$$

   con la interpretación habitual de los símbolos implicados utilizada en el texto base.

3. Dado un conjunto de puntos $\{\boldsymbol{x}_n\}$, podemos definir su envolvente convexa (*convex hull*) como el conjunto de todos los puntos $\boldsymbol{x}$ tales que

   $$\boldsymbol{x} = \sum_n \alpha_n \boldsymbol{x}_n$$

   donde $\alpha_n \geq 0$ y $\sum\limits_n \alpha_n = 1$. Considere un segundo conjunto de puntos $\boldsymbol{y}_n$ y su envolvente convexa. Por definición, los dos conjuntos de puntos $\{\boldsymbol{x}_n\}$ y $\{\boldsymbol{y}_n\}$ serán linealmente separables si existe un vector $\hat{\boldsymbol{w}}$ y un escalar w_0 tales que para todo $\boldsymbol{x}_n$, $\hat{\boldsymbol{w}}^T\boldsymbol{x}_n + w_0 > 0$, y para todo $\boldsymbol{y}_n$, $\hat{\boldsymbol{w}}^T\boldsymbol{y}_n + w_0 < 0$. Demuestre que si sus envolventes convexas tienen intersección no nula, entonces los dos conjuntos de puntos no pueden ser linealmente separables y *vice versa*: si son linealmente separables entonces sus envolventes convexas tienen interesección nula.