14F1

Para la realización del examen se permite un único libro (sea cual sea) sin anotaciones de ningún tipo. Si considera que el enunciado contiene algún erratum, hágalo constar en su respuesta y, **de confirmarse**, el equipo docente compensará el tiempo invertido por el estudiante. En los enunciados, asuma el empleo de la notación habitual del texto base.

---

1. Considere un vector $\boldsymbol{x}$ de variables aleatorias contínuas, que sigue una distribución de probabilidad dada $p(\boldsymbol{x})$ y entropía asociada $H[\boldsymbol{x}]$. Suponga que sobre el vector $\boldsymbol{x}$ se aplica una transformación lineal no singular que transforma $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Demuestre que la entropía correspondiente al vector $\boldsymbol{y}$ viene dada por $H[\boldsymbol{y}] = H[\boldsymbol{x}] + ln|\boldsymbol{A}|$, donde $|\boldsymbol{A}|$ denota el determinante de $\boldsymbol{A}$.

2. Sea $t = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) + \epsilon$;
t, un variable aleatoria que toma valores en $\mathbb{R}$;
$\boldsymbol{x}$, un vector de $\mathbb{R}^{in}$;
$\boldsymbol{\phi} = (1, \phi_1(\boldsymbol{x}), ..., \phi_{M-1}(\boldsymbol{x}))^T$ con $\phi_i(\cdot)$ $(i = 1, ..., M-1)$ un conjunto de $M-1$ transformaciones (no necesariamente lineales) escalares sobre $\mathbb{R}^{in}$;
$\boldsymbol{w} = (w_0, w_1, ..., w_{M-1})^T$, un vector de $\mathbb{R}^M$; y, finalmente, ϵ una variable aleatoria distribuida según una gaussiana $\mathcal{N}(0, \beta^{-1})$. Sea $(\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_N)$ y $(t_1, ..., t_N)$ un conjunto de valores de $\boldsymbol{x}$ y t obtenidos a partir de las distribuciones descritas por todo lo anterior.

   Defínase $\boldsymbol{\Phi}$ como la matriz de dimensiones $N \times M$ en que la fila j es igual a $(1, \phi_1(\boldsymbol{x}_j), ..., \phi_{M-1}(\boldsymbol{x}_j))$.

   Demuestre que la matriz $\Phi(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T$ proyecta cualquier vector v en el espacio generado por los vectores columna de ϕ. Utilice este resultado para probar que la solución de mínimos cuadrados dada por $w = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T t$ corresponde a una proyección ortogonal del vector t sobre la variedad (manifold en inglés) lineal S definida por los vectores columna de $\boldsymbol{\Phi}$, $\psi_k = (\phi_k(\boldsymbol{x}_1), ..., \phi_k(\boldsymbol{x}_N))$ como se muestra en la Fig. 1.

3. Dado un conjunto de puntos $\{\boldsymbol{x}_n\}$, podemos definir su envolvente convexa (*convex hull*) como el conjunto de todos los puntos $\boldsymbol{x}$ tales que

$$\boldsymbol{x} = \sum_n \alpha_n \boldsymbol{x}_n$$

   donde $\alpha_n \geq 0$ y $\sum_n \alpha_n = 1$. Considere un segundo conjunto de puntos $\boldsymbol{y}_n$ y su envolvente convexa. Por definición, los dos conjuntos de puntos $\{\boldsymbol{x}_n\}$ y $\{\boldsymbol{y}_n\}$ serán linealmente separables si existe un vector $\hat{\boldsymbol{w}}$ y un escalar w_0 tales que para todo $\boldsymbol{x}_n$, $\hat{\boldsymbol{w}}^T \boldsymbol{x}_n + w_0 > 0$, y para todo $\boldsymbol{y}_n$, $\hat{\boldsymbol{w}}^T \boldsymbol{y}_n + w_0 < 0$. Demuestre que si sus envolventes convexas tienen intersección no nula, entonces los dos conjuntos de puntos no pueden ser linealmente separables y *vice versa*: si son linealmente separables entonces sus envolventes convexas tienen interesección nula.

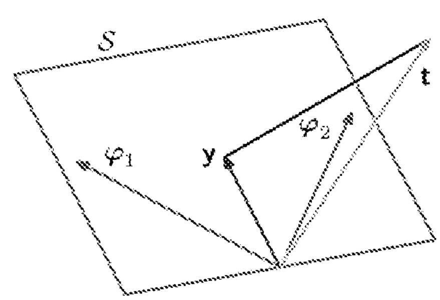

Figura 1: