Complejidad y Computabilidad

Material permitido: **Ninguno** Duración: **2 horas**

Preguntas a justificar:	máximo 9 puntos; 1'5 puntos cada pregunta correcta y convenientemente justificada
Pregunta de desarrollo:	máximo 1 punto

Importante: responda al examen, íntegramente, en las hojas que le facilitan para desarrollar. **No existe hoja de lectura automática**, ya que el examen se corrige de forma manual. Por tanto, transcriba legiblemente las respuestas (p.ej. 1a, 2b, ...) y **justifique** su respuesta. No entregue el enunciado.

Segunda Semana Nacional U.E. **Febrero 2018**

Preguntas a justificar

1. Sea M la máquina de Turing codificada por

$$0101000101001100010010001001001100010100001010011000010001001000100,$$

siguiendo el convenio de que $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = \square =$ Blanco, $D_1 = L =$ Izquierda, $D_2 = R =$ Derecha, q_1 el estado inicial, q_2 el estado final y que la codificación de $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$ está dada por $0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m$. Entonces se verifica que M no acepta ningún lenguaje.

   a) Verdadero

   b) Falso

SOLUCIÓN

Es falso. Esta máquina verifica que $L(M) = \{01^n0 | n \geq 0\}$, ya que la cadena dada es $C_1 11 C_2 11 C_3 11 C_4$, siendo

$$C_1 = 010100010100 = 0^1 1 0^1 1 0^3 1 0^1 1 0^2 \text{ asociada a } \delta(q_1, X_1) = (q_3, X_1, D_2),$$
$$C_2 = 0001001000100100 = 0^3 1 0^2 1 0^3 1 0^2 1 0^2 \text{ asociada a } \delta(q_3, X_2) = (q_3, X_2, D_2),$$
$$C_3 = 000101000010100 = 0^3 1 0^1 1 0^4 1 0^1 1 0^2 \text{ asociada a } \delta(q_3, X_1) = (q_4, X_1, D_2),$$
$$C_4 = 000010001001000100 = 0^4 1 0^3 1 0^2 1 0^3 1 0^2 \text{ asociada a } \delta(q_4, X_3) = (q_2, X_3, D_2).$$

2. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$, entonces se tiene que $L = \{a^n b^n c^n,\ n \geq 0\}$ y $L = \{a^n b^n c^n,\ n > 0\}$ son ambos recursivos.

   a) Verdadero

   b) Falso

SOLUCIÓN

Es la a). Para ver que $L = \{a^n b^n c^n,\ n \geq 0\}$ es recursivo se puede utilizar la máquina de Turing M dada en tabla siguiente, con $F = \{q_5\}$, $R =$ Derecha, $L =$ Izquierda y $\Box =$ Blanco.

M	a	b	c	X	Y	Z	$\Box$
q_0	(q_1, X, R)	$-$	$-$	$-$	(q_4, Y, R)	$-$	$(q_5, \Box, R)$
q_1	(q_1, a, R)	(q_2, Y, R)	$-$	$-$	(q_1, Y, R)	$-$	$-$
q_2	$-$	(q_2, b, R)	(q_3, Z, L)	$-$	$-$	(q_2, Z, R)	$-$
q_3	(q_3, a, L)	(q_3, b, L)	$-$	(q_0, X, R)	(q_3, Y, L)	(q_3, Z, L)	$-$
q_4	$-$	$-$	$-$	$-$	(q_4, Y, R)	(q_4, Z, R)	$(q_5, \Box, R)$
q_5	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	-

Para ver que $L = \{a^n b^n c^n,\ n > 0\}$ es recursivo se puede utilizar la máquina de Turing M dada en la tabla anterior quitando la transición $\delta(q_0, \Box)$.

3. Puede ocurrir que $L(M_i) = L(M_j) \neq \emptyset$ con $i \neq j$.

   a) Verdadero

   b) Falso

SOLUCIÓN

Es la a). Por ejemplo para $1354_{10} = 10101001010_2$, la cadena $w_{1354} = 01010^2 1010$, por lo que $L(M_{1354}) = 0(0+1)^*$ y para $2708_{10} = 101010010100_2$, la cadena $w_{2708} = 01010^2 1010$, por lo que $L(M_{2708}) = 0(0+1)^*$ y por tanto $L(M_{1354}) = L(M_{2708}) \neq \emptyset$ con $1354 \neq 2708$.

4. Considere los siguientes pares de listas

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \omega_1 & = & 1 \\ x_1 & = & 1\ 0 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{lcl} \omega_2 & = & 1\ 0 \\ x_2 & = & 1\ 0 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{lcl} \omega_3 & = & 0\ 1 \\ x_3 & = & 0 \end{array}}$$

Entonces:

   a) El $PCPM$ tiene solución negativa y el PCP solución positiva

   b) Tanto el $PCPM$ como el PCP tienen solución negativa

SOLUCIÓN

La respuesta correcta es la a). El $PCPM$ tiene solución negativa ya que las secuencias de índices dadas por $\{1\}$, $\{1,1\}$, $\{1,2\}$ y $\{1,3\}$ dan soluciones negativas. Por otra parte la secuencia de índices dada por $\{2\}$ da una solución positiva para el PCP.

5. No existen problemas que sean a la vez NP y $co-NP$:

   a) Verdadera

   b) Falsa

SOLUCIÓN

Es falsa. Por ejemplo saber si un número es primo o no, pertenece a la vez a NP y $co-NP$.

6. La cláusula $e = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$ se puede extender a una expresión equivalente $FNC-3$:

   a) Verdadera

   b) Falsa

SOLUCIÓN

Es verdadera: se verifica que
$e \equiv (x_1 \vee x_2 \vee u_1) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \overline{u}_1)$.

Pregunta de desarrollo Describa la clase de problemas resolubles en espacio polinómico.