Complejidad y Computabilidad

Material permitido: **Ninguno** Duración: **2 horas**

Preguntas a justificar:	máximo 9 puntos; 1'5 puntos cada pregunta correcta y convenientemente justificada
Pregunta de desarrollo:	máximo 1 punto

Importante: responda al examen, íntegramente, en las hojas que le facilitan para desarrollar. **No existe hoja de lectura automática**, ya que el examen se corrige de forma manual. Por tanto, transcriba legiblemente las respuestas (p.ej. 1a, 2b, ...) y **justifique** su respuesta. No entregue el enunciado.

Primera Semana. **Febrero 2018**

Preguntas a justificar

1. No existe ninguna máquina de Turing M_i tal que su vector característico esté formado por todo unos excepto en una componente.

   a) Verdadero

   b) Falso

SOLUCIÓN

Es la b). Por ejemplo, las máquinas de Turing M_{10532}, M_{10820} y $M_{88762660}$.

2. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$, entonces se tiene que $L = \{a^r b^s c^t,\ r \cdot s = t,\ r, s, t > 0\}$ es recursivo.

   a) Verdadero

   b) Falso

SOLUCIÓN

Es la a). Para ver que $L = \{a^r b^s c^t,\ r \cdot s = t,\ r, s, t > 0\}$ es recursivo se puede utilizar la máquina de Turing M dada en tabla siguiente, con $F = \{q_9\}$, $R =$ Derecha, $L =$ Izquierda y $\Box =$ Blanco, donde $\Gamma = \{a, b, c, A, B, C, \Box\}$.

M	a	b	c	A	B	C	$\Box$
q_0	(q_1, A, R)	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
q_1	(q_1, a, R)	(q_2, B, R)	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
q_2	$-$	(q_2, b, R)	(q_3, C, R)	$-$	$-$	(q_2, C, R)	$-$
q_3	$-$	(q_4, b, L)	$-$	$-$	(q_5, b, L)	(q_3, C, L)	$-$
q_4	$-$	(q_4, b, L)	$-$	$-$	(q_1, B, R)	$-$	$-$
q_5	(q_6, a, L)	$-$	$-$	(q_7, A, R)	(q_5, b, L)	$-$	$-$
q_6	(q_6, a, L)	$-$	$-$	(q_0, A, R)	$-$	$-$	$-$
q_7	$-$	(q_7, b, R)	$-$	$-$	$-$	(q_8, C, R)	$-$
q_8	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	(q_8, C, R)	$(q_9, \Box, L)$
q_9	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

3. Para que $w_i \in L_d$ se tiene que cumplir que $L(M_i) = \emptyset$

   a) Verdadero

   b) Falso

SOLUCIÓN

Es la b). Dado que $10532_{10} = 10100100100100_2$, la cadena $w_{10532} = 010^2 10^2 10^2 10^2$, por lo que $L(M_{10532}) = 1(0+1)^* \neq \emptyset$ y sin embargo $w_{10532} \in L_d$.

4. En el PCP Unario (con alfabeto de sólo un carácter) cualquier instancia verifica que el $PCPM$ admite solución positiva:

   a) Verdadera

   b) Falsa

SOLUCIÓN

Es falsa. El siguiente PCP sirve de ejemplo:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \omega_1 & = & 1 \\ x_1 & = & 1\,1\,1\,1 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{lcl} \omega_2 & = & 1 \\ x_2 & = & 1\,1 \end{array}}$$

5. Si P fuera igual a NP entonces $co - NP$ sería igual a NP:

   a) Verdadera

   b) Falsa

SOLUCIÓN

Es verdadera. Demostración: si fuera `P=NP`, entonces `co-P=co-NP`. Además, al ser `P` cerrada respecto a la complementación, entonces `P=co-P`. Por tanto, `NP=P=co-P=co-NP`.

6. Se tiene que $2^7 \equiv 1 \, (mod \, 7)$

   a) Verdadero

   b) Falso

SOLUCIÓN

Es la b). Este ejercicio se puede resolver de cuatro formas distintas:

- Se puede calcular $2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$, dividiéndolo entre 7 se obtiene un resto de 2, con lo que $2^7 \equiv 2 \, (mod \, 7)$.

- Al ser $7_{10} = 111_2$, se tiene que $2^7 = 2^{2^2+2^1+2^0} = 2^4 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 16 \cdot 4 \cdot 2 = 128$, y se concluye igual que en el caso anterior.
- Al ser 7 primo, por el Teorema pequeño de Fermat, $2^7 \equiv 2\,(mod\,7)$
- Al ser 7 primo y 2 y 7 primos entre sí, por el Teorema pequeño de Fermat, $2^{7-1} \equiv 1(mod 7)$ y por tanto $2 \cdot 2^{7-1} \equiv 2\,(mod\,7)$.

Pregunta de desarrollo Describa el modelo de máquina de Turing con aleatoriedad.