Complejidad y Computabilidad

Material permitido: **Ninguno** Duración: **2 horas**

Preguntas a justificar:	máximo 9 puntos; 1'5 puntos cada pregunta correcta y convenientemente justificada
Pregunta de desarrollo:	máximo 1 punto

Importante: responda al examen, íntegramente, en las hojas que le facilitan para desarrollar. **No existe hoja de lectura automática**, ya que el examen se corrige de forma manual. Por tanto, transcriba legiblemente las respuestas (p.ej. 1a, 2b, ...) y **justifique** su respuesta. No entregue el enunciado.

Reserva. **Septiembre 2018**

Preguntas a justificar

1. La máquina de Turing M dada por la tabla siguiente, con $F = \{q_2\}$, $R =$ Derecha, $L =$ Izquierda y $\square =$ Blanco, acepta el lenguaje $L = \{0^n 1^n, n \geq 0\}$.

M	0	1	$\square$
q_0	$(q_0, 0, R)$	$-$	$(q_1, \square, R)$
q_1	$-$	$(q_1, 1, R)$	$(q_2, \square, R)$
q_2	$-$	$-$	$-$

   a) Verdadero

   b) Falso

SOLUCIÓN

Es la b). Por ejemplo con $0011\square$ se tiene que la secuencia completa de movimientos es:

$$q_0 0011\square \vdash 0 q_0 011\square \vdash 00 q_0 11\square$$

y se detiene sin aceptar.

2. Los lenguajes recursivos son cerrados respecto a la unión.

   a) Verdadero

   b) Falso

SOLUCIÓN

Es la a). Sean $L_1 \in R$ y $L_2 \in R$, se trata de probar que $L_1 \cup L_2 \in R$. Para ello se supone que existe una MT M_1 con $L(M_1) = L_1$ y una MT M_2 con $L(M_2) = L_2$ que siempre se detienen. A partir de estas dos máquinas se construye una MT M de dos cintas que simule a M_1 en la primera cinta y M_2 en la segunda, de la forma siguiente. M procesa inicialmente la entrada en la primera cinta. Si M_1 se detiene aceptando, M también acepta y se detiene. Si M_1 se detiene sin aceptar, M procede a procesar la entrada en la segunda cinta, donde se simula M_2. Si M_2 se detiene aceptando, M también acepta y se detiene. Si M_2 se detiene sin aceptar, M no acepta la entrada original y se detiene. La forma en la que se ha definido M hace que $L(M) = L_1 \cup_2$ y que siempre se detiene, por lo que $L_1 \cup L_2 \in R$.

3. Sea $L = \{0^*\}$, entonces se verifica que $L \subset L_d$.

   a) Verdadero

   b) Falso

SOLUCIÓN

Es la a). Sea $\omega \in L_e$. Sea $\omega = \epsilon$, entonces $\omega = \omega_1$ y al ser $L(M_1) = \emptyset$, se tiene que w_1 no puede pertenecer a $L(M_1)$ por lo que por definición $w_1 \in L_d$. La siguiente cadena de $L = \{0^*\}$ es $\omega = 0$, entonces $\omega = \omega_2$ y al ser $L(M_2) = \emptyset$, se tiene que w_2 no puede pertenecer a $L(M_2)$ por lo que por definición $w_2 \in L_d$. La siguiente cadena es $\omega = 00$, entonces $\omega = \omega_4$ y al ser $L(M_4) = \emptyset$, se tiene que w_4 no puede pertenecer a $L(M_4)$ por lo que por definición $w_4 \in L_d$. La siguiente $\omega = 000$, entonces $\omega = \omega_8$ y al ser $L(M_8) = \emptyset$, se tiene que w_8 no puede pertenecer a $L(M_8)$ por lo que por definición $w_8 \in L_d$. En general $\omega = \omega_i$ y al ser $\omega_i \in L = \{0^*\}$, se tiene que $L(M_i) = \emptyset$ y por tanto w_i no puede pertenecer a $L(M_i)$ por lo que por definición $w_i \in L_d$.

4. Considérese los siguientes pares de listas

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \omega_1 & = & 1 \\ x_1 & = & 1\ 1\ 1 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{lcl} \omega_2 & = & 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \\ x_2 & = & 1\ 0 \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{lcl} \omega_3 & = & 1\ 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array}}$$

   a) El PCP asociado a dichos pares tiene solución positiva para dicha instancia, aunque el $PCPM$ no

   b) Tanto el PCP y el $PCPM$ asociado a dichos pares tienen solución positiva para dicha instancia

SOLUCIÓN

La respuesta correcta es la a). El $PCPM$ tiene solución negativa ya que las secuencias de índices dadas por $\{1\}$, $\{1,1\}$, $\{1,2\}$ y $\{1,3\}$ dan soluciones negativas. Por otra parte la secuencia de índices dada por $\{2,1,1,3\}$ da una solución positiva para el PCP.

5. Si P fuera igual a NP entonces $co-NP$ sería igual a NP:

   a) Verdadera

   b) Falsa

SOLUCIÓN

Es verdadera. Demostración: si fuera `P=NP`, entonces `co-P=co-NP`. Además, al ser `P` cerrada respecto a la complementación, entonces `P=co-P`. Por tanto, `NP=P=co-P=co-NP`.

6. Si $n^p - n = \dot{p}$ entonces p es primo.

   a) Verdadero

   b) Falso

SOLUCIÓN

Es la b). El número 341 verifica que $2^{341} - 2 = 2(2^{340} - 1) = 2((2^{10})^{34} - 1^{34}) = 2(2^{10} - 1) \cdot k = 2 \cdot 3 \cdot 341 \cdot k = \dot{341}$ y sin embargo $341 = 31 \cdot 11$ no es primo.

Pregunta de desarrollo Describa la clase de problemas resolubles en espacio polinómico.