# Wyznaczanie otoczki wypukłej
# Quickhull

Szymon Tomaszewski

25/12/2024

## 1. Treść zadania

Wyznaczanie otoczki wypukłej, np. Graham, Jarvis, quickhull [https://en.wikipedia.org/wiki/Convex_hull].

## 2. Przedmowa

Dokument ten ma na celu przybliżenie działania programu od strony teoretycznej jak i technicznej, techniczne zagadnienia zostały bardziej poruszone w komentarzach znajdujących się w kodzie. Dokument został dodatkowo wzbogacony o ilustracje, znajdujące się w rozdziale “Załączniki”, w celu lepszego zrozumienia działania programu.

## 3. Teoria

### 3.1. Otoczka wypukła - wprowadzenie

Otoczka wypukła jest to najmniejszy zbiór wypukły taki, że każdy element danego zbioru A zawiera się w tym wielokącie lub leży na jego brzegu. Można oczywiście rozważać przestrzenie wielowymiarowe lecz rozwiązanie takiego problemu jak i jego wizualizacja jest znacznie cięższa.

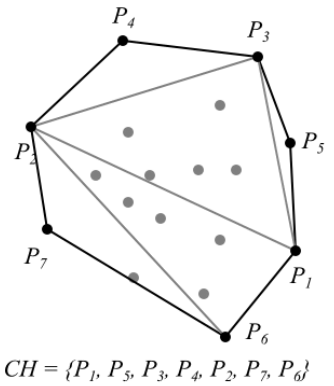
Należy także napomnieć czym jest zbiór wypukły, ponieważ pozwoli nam to na niewielką optymalizacje w kodzie. Jest to podzbiór pewnej przestrzeni zawierający wraz z dowolnymi dwoma jego punktami odcinek je łączący. *(Załącznik 2)*

### 3.2. Quickhull

Quickhull to algorytm dziel i zwyciężaj który wyznacza otoczkę wypukłą zbioru punktów umieszczonych w przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów. Został on odkryty przez

Williama Eddy’ego i Alexa Bykata oraz Greena i Silvermana.

Średnia złożoność tego algorytmu wynosi O(n*log(n)) a pesymistycznie O(n^2). Najgorsza złożoność występuje jeśli wszystkie punkty należą do otoczki wypukłej a najlepsza gdy każdy wyznaczony punkt tworzy równy podział pozostałych punktów.




*Źródło Wikipedia https://pl.wikipedia.org/wiki/Quickhull*

### 3.2.1. Algorytm

Krok 1:

W zbiorze punktów znajdujemy dwa skrajne punkty (**A** i **B**) - minimalną i maksymalną współrzędną **x**.

Krok 2:

Dzielimy zbiór punktów na dwa podzbiory S1 oraz S2 które odpowiednio znajdują się nad prostą **AB** i pod nią.

Krok 3:

Następnie wywołujemy rekurencyjne program dla podanych podzbiorów.

Procedura ta przyjmuje trzy argumenty, punkty A i B oraz podzbiór P na którym ma być wykonany.

- Jeśli P jest puste to kończymy.
- Jeśli P ma jeden element to należy od do otoczki.
- W przeciwnym razie:
    - Szukamy punktu F najbardziej oddalonego od prostej **AB** - ten punkt należy do otoczki wypukłej. Wszystkie punkty wewnątrz trójkąta **ABF** odrzucamy.
    - Następnie znajdujemy zbiór S1 punktów znajdujących się po lewej stronie prostej **AF** oraz analogiczny zbiór S2 dla prostej **BF.**
    - Wywołujemy rekurencyjne program dla podanych podzbiorów.

## 3.3. Implementacja

Bardziej szczegółowe informacje dotyczące implementacji zostały zawarte w komentarzach znajdujących się w kodzie.

### 3.3.1. Punkty na płaszczyźnie - 2D

Została stworzona struktura w pliku `Point.h`, która reprezentuje punkty na płaszczyźnie. Zaimplementowano także porównania dwóch punktów poprzez przeciążenie operatora “==”.

### 3.3.2. Wyznaczanie odległości

Zwracana jest liczba proporcjonalna do odległości punktu P od obecnie wyznaczonej linii dzielącej zbiór punktów. Nie musimy liczyć rzeczywistej odległości bo interesuje nas tylko tylko pole równoległoboku. Pomijając wyliczenia z twierdzenia Pitagorasa nasz program będzie wydajniejszy

### 3.3.3. Szukanie najmniejszego i największego elementu

Skorzystamy z std::sort: z biblioteki algorithm.

*std::sort(begin, end, compare);*

- *begin i end* - określają zakres elementów do sortowania
- *compare* - jest to alternatywna funkcja która określa regułę porównywania algorytmów - w naszym przypadku jest to funkcja compare. Domyślnie jest wykorzystywany "<" lecz w naszym przypadku będziemy sortować elementy po x. Nasz algorytm sortujący musi zwracać true jeśli pierwszy argument jest mniejszy niż drugi i false w przeciwnym razie.

Z uwagi na to że wykorzystaliśmy vector możemy teraz skorzystać z **.front()** i **.back().**

### 3.3.4. Iloczyn wektorowy

Funkcja cross odpowiada za obliczenie iloczynu wektorowego która jest wykorzystywany w funkcji getSides.

### 3.3.5. Określanie po której stronie znajdują się linie

Wykorzystywany jest tutaj wynik iloczynu wektorowego dla każdego punktu.
Jeśli wynik jest równy 0 to punkt P leży na linii AB, jeśli wynik jest większy od 0 to punkt leży po lewej stronie linii AB a w przeciwnym przypadku po prawej.

### 3.3.6. Najdalszy punkt od linii AB

Dla każdego punktu obliczamy odległość od linii AB za pomocą funkcji distance, jeśli punkt znajduje się dalej niż najdalszy dotychczasowy punkt to go aktualizujemy.

### 3.3.7. Właściwy algorytm - quickHull

Już na starcie możemy zauważyć, że jeśli zbiór złożony jest z mniej niż 3 punktów nie da się stworzyć otoczki wypukłej, według definicji, którą podaliśmy na początku. Następnie znajdujemy najbardziej oddalone punkty(A i B) od siebie(względem osi x) i mamy pewność, że należą one do otoczki więc je dodajemy. Następnie dzielimy punkty na lewe i prawe względem odcinka wyznaczonego przez punkty A i B.

W kolejnym kroku wykorzystujemy funkcję pomocniczą. W niej określamy najdalej odległy punkt F(który należy do otoczki) i dzielimy zbiór na elementy które są poza trójkątem ABF, czyli leżą po lewej stronie linii AF i FB.*(Załącznik 1)*

Funkcja pomocnicza jest wykonywana rekurencyjnie aż zabraknie punktów.

### 3.3.8. Poprawna kolejność wypisywania elementów

Punkty są dodawane w odpowiedniej kolejności aby można było utworzyć z nich otoczkę wypukłą, to znaczy dwa sąsiadujące punkty w zwracanym zbiorze danych powinny być w stanie połączyć się linią tak aby nie przecinały się z innymi liniami a razem utworzona figura powinna być otoczką wypukłą. Do wizualizacji utworzonych figur stworzyłem prosty skrypt w pythonie aby można było zaobserwować czy punkty są w dobrej kolejności. *(Załącznik 3)*

#### 3.3.9. Wykorzystane biblioteki

##### 3.3.9.1. algorithm

Wykorzystywane w celu zastosowania sortowania programu i przy testowaniu.

##### 3.3.9.2. cmath

Wykorzystana w celu obliczania wartości bezwzględnej w odległości.

##### 3.3.9.3. vector

Aby ułatwić operacje na punktach.

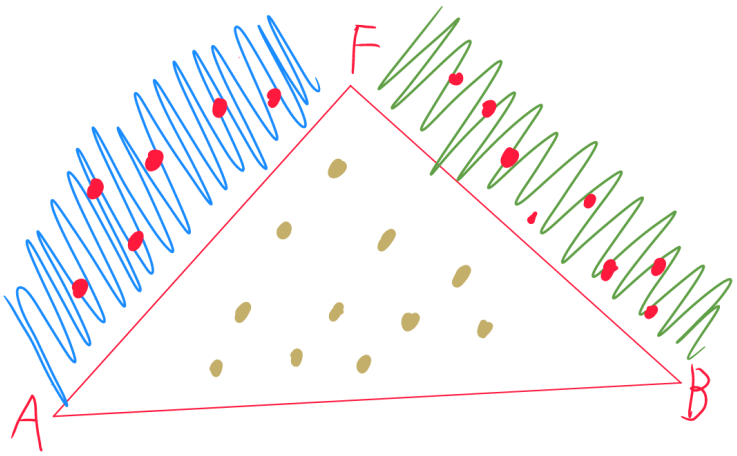
##### 3.3.9.4. iostream

Wyświetlanie danych.

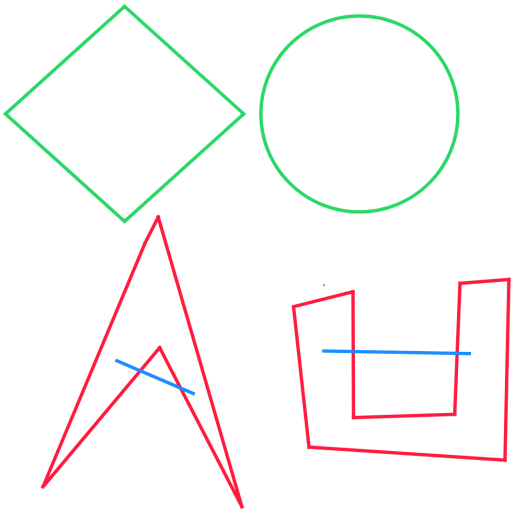
### 3.4. Testowanie

Testowanie jest realizowane w pliku `test.cpp`. Polega ono na sprawdzeniu czy dany program zwróci taki sam zbiór punktów co oczekiwany. Została stworzona struktura `TestCase` do łatwiejszego rozbudowywania testów.

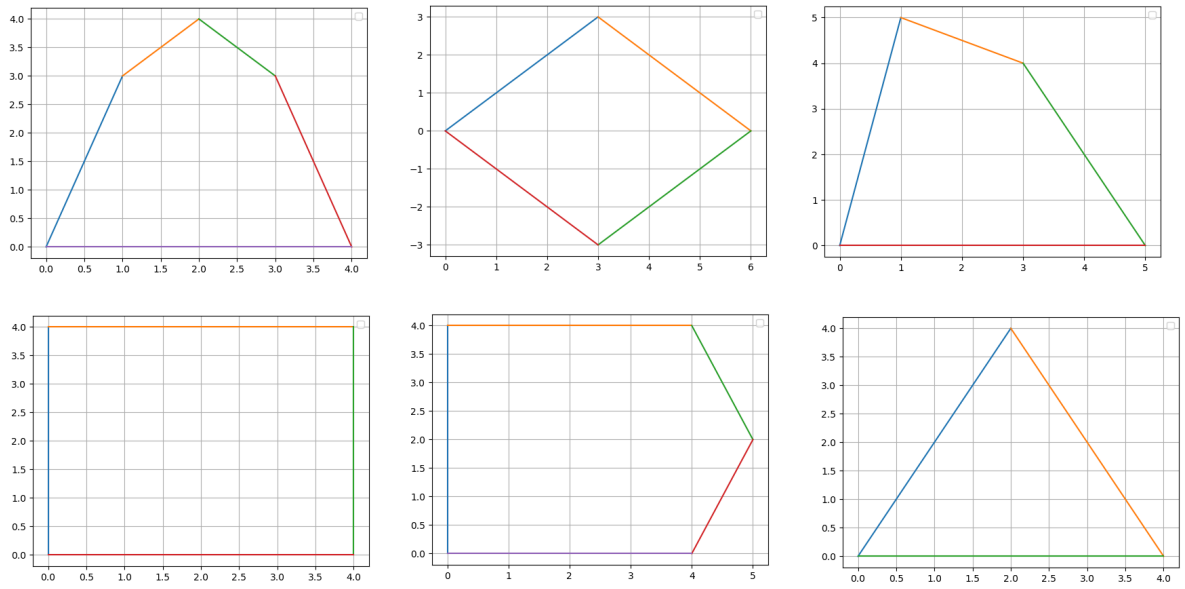
### 3.5. Załączniki




*(Załącznik 1) - Wyznaczanie kolejnych punktów do sprawdzenia(czerwone kropki na ilustracji) przez uwzględnianie tylko lewej strony AF(kolor niebieski) i FB(kolor zielony). Kropki wewnątrz utworzonej figury są pomijane*



*(Załącznik 2) Na zielono zaznaczono poprawne zbiory wypukłe a na czerwono zaznaczono niepoprawne wraz z uzasadnieniem.*



*(Załącznik 3) Utworzone figury z otrzymanych punktów*

### 3.6. Kompilacja i struktura projektu

Program jest podzielony na trzy główne pliki: `quickhull`, `test` oraz `main`.

- Plik `quickhull` zawiera implementację algorytmu QuickHull, odpowiedzialnego za wyznaczanie otoczki wypukłej.
- Plik `test` zawiera zestaw testów weryfikujących poprawność działania algorytmu.
- Plik `main` służy jako punkt wejścia programu
- Plik `main` służy jako punkt wejścia programu
- Plik `draw` służy do rysowania otoczki

Do kompilacji wykorzystywany jest make.

### 3.7. Źródła


1) https://pl.wikipedia.org/wiki/Quickhull
2) https://pl.wikipedia.org/wiki/Zbi%C3%B3r_wypuk%C5%82y
3) https://www.educative.io/answers/what-is-the-quick-hull-algorithm
4) https://www.geeksforgeeks.org/quickhull-algorithm-convex-hull/
5) Pyplot tutorial — Matplotlib 3.10.0 documentation