Sprawozdanie NUM1

Szymon Tomaszewski

07.10.2024

1. Wstęp

1.1. Treść zadania

Napisz program wyliczający przybliżenie pochodnej ze wzorów:

(a) $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$,

(b) $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$,

Przeanalizuj, jak zachowuje się błąd $\left|D_h f(x) - f'(x)\right|$ dla funkcji $f(x) = sin(x^3)$ oraz punktu x=0.2 przy zmianie parametru h dla różnych typów zmiennoprzecinkowych (float,double). Wykreśl $\left|D_h f(x) - f'(x)\right|$ w funkcji h w skali logarytmicznej. Poeksperymentuj również używając innych funkcji i punktów.

1.2. Zastosowanie

Przybliżanie funkcji odgrywa bardzo ważną rolę, ponieważ jej jawne wprowadzenie jest czasem kłopotliwe w zastosowaniach więc może być preferowane podejście numeryczne. Dobrze ilustrującym to przykładem jest pomiar temperatury z czujnika, który odczytuje informację w równych odstępach czasu(dyskretnych punktach), chociaż temperatura jest płynną i ciągłą funkcją.

1.3. Hipoteza

Niech funkcja błędu $E(h) = \left|\overline{D_h f(x)} - f'(x)\right|$, gdzie $\overline{D_h f(x)}$ reprezentuje przybliżoną wartość pochodnej a $f'(x) = 3x^2 cos(x^3)$ jej dokładną wartość. Podstawiając do wzoru epsilon maszynowy, czyli największą liczbę nieujemną, która dodana do jedności daje jeden(1 + ε = 1), otrzymujemy:

$$\overline{D_h f(x)} = \frac{f(x+h)(1+\varepsilon_1)-f(x)(1+\varepsilon_2)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x+h)\varepsilon_1-f(x)\varepsilon_2}{h}$$

a następnie korzystając z nierówności trójkąta i wzoru Taylora otrzymujemy

$$E(h) = C_1 * h + \frac{C_2}{h}$$

Z powyższego równania nasuwają się dwa wnioski

- Dla h dążącego do 0 spodziewamy się wzrostu wartości funkcji $E(h) \approx \frac{C_2}{h}$
- Dla h dążącego do 1 spodziewamy się wzrostu wartości funkcji $E(h) \approx C_1 * h$

Dodatkowo możemy wyznaczyć epsilon maszynowy przyrównując funkcję $\overline{D_h f(x)}$ do 0. Otrzymamy wtedy $h^* = \sqrt{\frac{4\varepsilon|f(x)|}{|f''(x)|}}$, będziemy je nazywać h optymalnym, ponieważ będzie ono determinować odległość między sąsiednimi punktami, dla których wynik będzie najdokładniejszy.

Podsumowując spodziewamy się, że w pobliżu wartości h^*, odpowiadającej epsilonu maszynowemu, funkcja będzie najdokładniejsza a oddalając się na lewo bądź też na prawo błąd pomiarowy będzie rosnął.

1.4. Kod

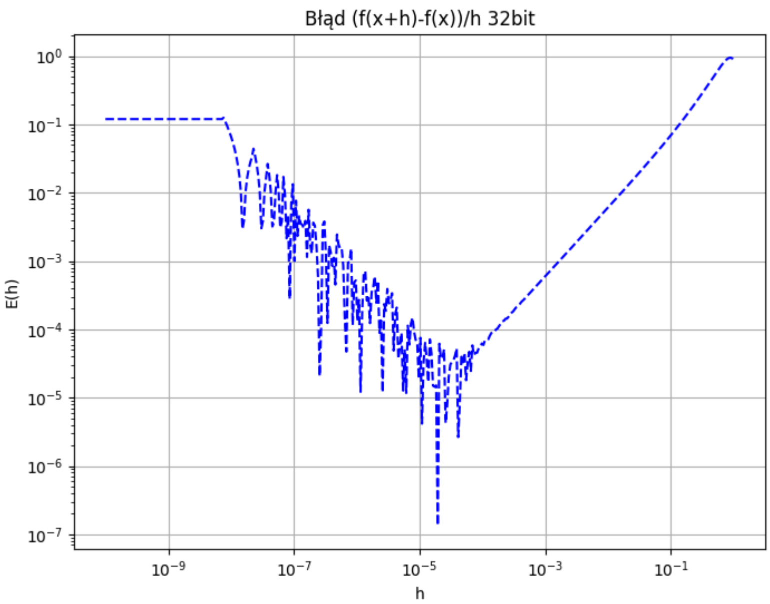
Program został napisany w języku Python3 z wykorzystaniem biblioteki Numpy i Matplotlib.
Typy danych są wymuszane na zmiennych przy użyciu numpy.float64 bądź też numpy.float32. Punkty są równomiernie rozmieszczone korzystając z numpy.logspace. Wartość $f'(x)$ wyliczamy ze wzoru pochodnej otrzymując $f'(x) = 3 * x^2 * cos(x^3)$, następnie podstawiamy za x=0.2

Link do kodu:https://github.com/estwestminimu/Numerical/tree/main

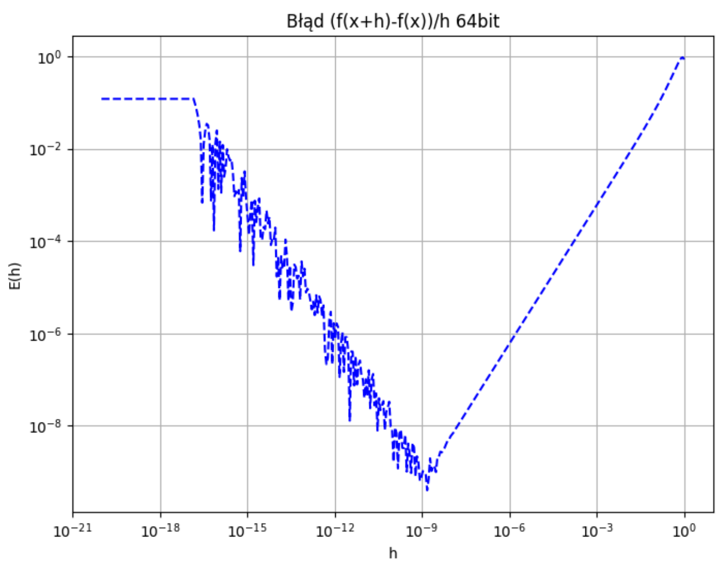
2. Wyniki

2.1. Wynik dla $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

2.1.1. Float - numpy.float32

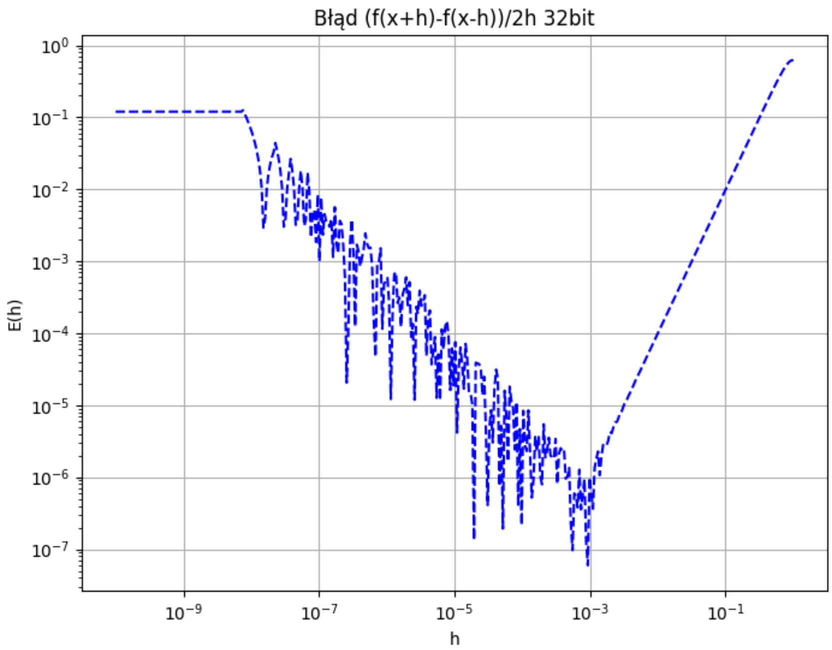


2.1.2. Double - numpy.float64

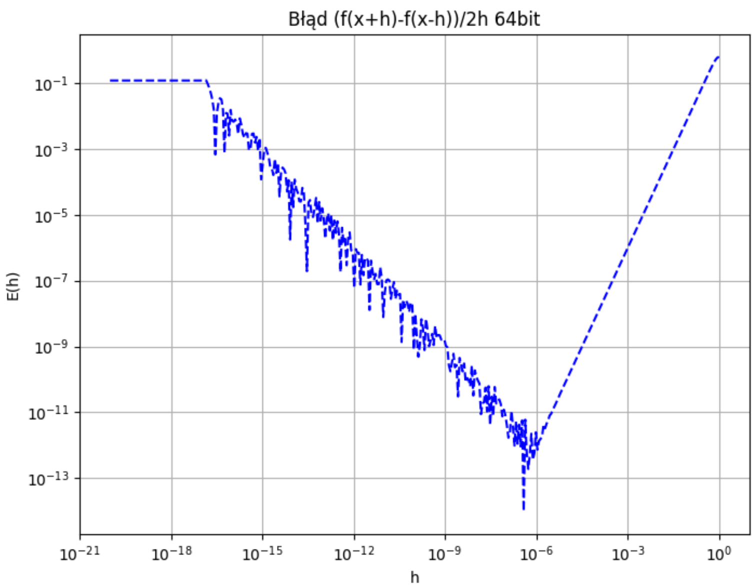


2.2. Wynik dla $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

2.2.1. Float - numpy.float32



2.2.2. Double - numpy.float64



Nasze wyniki potwierdzają postawione wcześniej hipotezy, wykresy przypominają spodziewany kształt - w lewej części mamy wahania wynikające z dzielenia przez wartości minimalne, po prawej zaś liniową zmianę zależną od h. Dla wartości 32 bit(wykres 2.1.1 i 2.2.1) nasze h będzie zauważalnie mniej rozpięte, bliższe liczby 1, wynika to z mniejszej ilości bitów jakie ma float, zauważalne są także obcięcia wykresu wynikającego z tego limitu. Możemy także dostrzec, że E(h) osiąga o wiele mniejsze błędy dla $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ w porównaniu z $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

3. Inne przykłady

Identyczne wnioski można wyciągnąć dla innych funkcji. np. $f(x) = x^3$ lub $f(x) = e^x$ co potwierdzają wykresy. W pobliżu epsilona maszynowego funkcje są najdokładniejsze.