# Sprawozdanie NUM2

Szymon Tomaszewski

07 października 2024

## 1. Wstęp

### 1.1. Treść zadania

Zadane są macierze

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 5.8267103432 & 1.0419816676 & 0.4517861296 & -0.2246976350 & 0.7150286064 \\ 1.0419816676 & 5.8150823499 & -0.8642832971 & 0.6610711416 & -0.3874139415 \\ 0.4517861296 & -0.8642832971 & 1.5136472691 & -0.8512078774 & 0.6771688230 \\ -0.2246976350 & 0.6610711416 & -0.8512078774 & 5.3014166511 & 0.5228116055 \\ 0.7150286064 & -0.3874139415 & 0.6771688230 & 0.5228116055 & 3.5431433879 \end{pmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 5.4763986379 & 1.6846933459 & 0.3136661779 & -1.0597154562 & 0.0083249547 \\ 1.6846933459 & 4.6359087874 & -0.6108766748 & 2.1930659258 & 0.9091647433 \\ 0.3136661779 & -0.6108766748 & 1.4591897081 & -1.1804364456 & 0.3985316185 \\ -1.0597154562 & 2.1930659258 & -1.1804364456 & 3.3110327980 & -1.1617171573 \\ 0.0083249547 & 0.9091647433 & 0.3985316185 & -1.1617171573 & 2.1174700695 \end{pmatrix}.$$

Zdefiniujmy wektor

$b \equiv (-\ 2.8634904630, -\ 4.8216733374, -\ 4.2958468309, -\ 0.0877703331, -\ 2.0223464006)^T$

Używając wybranego pakietu algebry komputerowej lub biblioteki numerycznej, rozwiąż równania macierzowe $A_i y = b$ dla i=1,2. Ponadto, rozwiąż analogiczne równania z zaburzonym wektorem wyrazów wolnych,$A_i y = b + \Delta b$. Zaburzenie $\Delta b$ wygeneruj jako losowy wektor o małej normie euklidesowej (np.$||\Delta b||_2 \approx 10^{-6}$). Przeanalizuj jak wyniki dla macierzy $A_1$ i $A_2$ zależą od $\Delta b$i zinterpretuj zaobserwowane różnice.

### 1.2. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest oszacowanie wrażliwości układu na zaburzenia danych wejściowych i pokazaniu, że różne macierze mają różne stabilności.

### 1.3. Hipoteza

W postawieniu hipotezy będzie użyteczny współczynnik uwarunkowania - $\kappa$ - mówi on nam o tym jak bardzo błąd względny wyniku obliczeń przekracza błąd względny samej różnicy przybliżenia i wartości dokładniej. Złe uwarunkowanie może doprowadzić do tego, że nawet lekkie odchylenie od wartości dokładnej doprowadzi do znacznej różnicy wyników.

Współczynnik owego uwarunkowania macierzy $A \in R^{n\,x\,n}$ wynosi $\kappa = ||A|| * \left|\left|A^{-1}\right|\right|$. Jeśli $\kappa$ jest bliskie jedności to układ taki nazywamy dobrze uwarunkowanym w przeciwnym przypadku układ jest źle uwarunkowany i nawet małe zaburzenia danych wejściowych może prowadzić do dużych zaburzeń wyjściowych. Korzystając z linalg.cond ustalamy, że uwarunkowanie dla macierz $A_1$ wynosi w przybliżeniu 7 a macierzy $A_2$ odpowiada wartość 116451992037. Jesteśmy w stanie więc wywnioskować, że macierz A będzie "odporniejsza" na zaburzenia niż macierz B.

### 1.4. Kod

Program został napisany w języku Python3 z wykorzystaniem biblioteki Numpy.

Do przeprowadzenia rozwiązania układu równań wykorzystałem linalg.solve a do wyznaczenia $\kappa$ skorzystałem z linalg.cond. Każdy element losowo wygenerowanego wektora został następnie podzielony przez jego normę. W ten sposób skaluje wektor tak, aby jego norma wynosiła dokładnie 1,a następnie mnożymy przez $10^{-6}$ dzięki czemu wektor zachowa swoją orientację w przestrzeni.

Dodatkowo została pokazana różnica w wynikach między macierzą z zaburzeniami i bez.

## 2. Wyniki

```
A1: 7.000000000838202
A2: 116451992037.37253
A1 * y = b:
[ 0.02556195 -1.35714283 -3.94075752 -0.48893629  0.10097805]

A2 * y = b:
[-0.408759   -0.56030065 -4.11200041 -1.5242021  -0.7752022 ]

A1 * y = (b + Δb):
[ 1.37355443e-07 -1.22503673e-07  1.34183758e-07  8.87612408e-08
 -3.49516499e-08]
Różnica między rozwiązaniami A1: 4.197775125775369

A2 * y = (b + Δb):
[ 3240.72415084 -5945.70842559  1277.74395399  7724.72737353
  6537.69644803]
Różnica między rozwiązaniami A2: 12244.97686340737
```

## 3. Wnioski

Dla macierzy $A_1$ można stwierdzić, że zaburzenia przed i po zdarzeniu są sobie bliskie(w porównaniu do macierzy $A_2$) co potwierdzają nasze wcześniejsze obliczenia, że układ jest źle uwarunkowany ale nie zmienia aż tak wyników. Daj nam to znikomą ale jednak jakąś stabilność wyników.

Dla macierzy $A_2$ sytuacja jest odmienna, na pierwszy rzut oka widzimy olbrzymie wahania w wynikach co potwierdzają nasze wcześniejsze obliczenia. Taki wynik jest nieprzydatny w obliczeniach a zatem jest źle uwarunkowany numerycznie.

Pokazane układy równań podkreślają jak ważne jest uwarunkowanie numeryczne i mimo, że obydwa są źle uwarunkowane macierz $A_1$ okazała się bardziej stabilna.