Параграф 7.1

Упражнение 1. Пространство $\mathbb{R}^n$ превращается в вещественное евклидово пространство, если определить скалярное произведение элементов x и y пространства $\mathbb{R}^n$ по формуле

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

Это, так называемое, стандартное скалярное произведение. Проверить, что аксиомы скалярного произведения выполнены.

Решение. Первая аксиома:

$$(x, x) = \sum_{k=1}^{n} x_k x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geq 0$$

причем отсюда следует, что $((x, x) = 0) \equiv (x = 0)$
Вторая аксиома:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=0}^{n} y_k x_k = (y, x)$$

Третья аксиома:

$$(\alpha x + \beta y, z) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha x_k + \beta y_k) z_k = \alpha \sum_{k=0}^{n} x_k z_k + \beta \sum_{k=1}^{n} y_k z_k = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$

Упражнение 2. Пространство $\mathbb{R}^n$ также можно превратить в вещественное евклидово пространство, если определить скалярное произведение элементов x и y пространства $\mathbb{R}^n$ по формуле

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k y_k,$$

где ρ_1, ρ_2, $\cdots$, ρ_n — заданные положительные числа. Это, так называемое скалярное произведение с весами. Проверить, что аксиомы скалярного произ ведения выполнены.

Решение. Первая аксиома:

$$(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k^2 \geq 0$$

причем отсюда следует, что $((x, x) = 0) \equiv (x = 0)$

Вторая аксиома:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k y_k = \sum_{k=0}^{n} \rho_k y_k x_k = (y, x)$$

Третья аксиома:

$$(\alpha x + \beta y, z) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k (\alpha x_k + \beta y_k) z_k = \alpha \sum_{k=0}^{n} \rho_k x_k z_k + \beta \sum_{k=1}^{n} \rho_k y_k z_k = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$

Упражнение 3. Пространство $\mathbb{C}^n$ превращается в комплексное евклидово пространство, если определить скалярное произведение элементов x и y пространства $\mathbb{C}^n$, например, по формуле

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k},$$

Это стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$. Проверить, что аксиомы ска лярного произведения и в этом случае выполнены.

Решение. Первая аксиома:

$$(x, x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x_k} = \sum_{k=1}^{n} |x_k^2| \geq 0$$

причем отсюда следует, что $((x, x) = 0) \equiv (x = 0)$

Вторая аксиома:

$$\overline{(y, x)} = \overline{\sum_{k=1}^{n} y_k \overline{x_k}} = \sum_{k1}^{n} \overline{y_k \overline{x_k}} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} = (x, y)$$

Третья аксиома:

$$(\alpha x + \beta y, z) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha x_k + \beta y_k) \overline{z_k} = \alpha \sum_{k=0}^{n} x_k \overline{z_k} + \beta \sum_{k=1}^{n} y_k \overline{z_k} = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$