

## Задача 1104

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(1-x)y'' - 2y' + y = 0$$

**Решение.** Решим задачу методом рядов.

1) Предположим, что решение имеет вид:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k$$

2) Тогда:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k x^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k(k-1) x^{k-2}$$

3) Подставляем в исходное уравнение:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k k(k-1) x^{k-2} - y_k k(k-1) x^{k-1} - 2y_k k x^{k-1} + y_k x^k = 0$$

4) Приравнявая коэффициенты при  $x^k$ :

$$y_k - k(k+1)y_{k+1} - 2(k+1)y_{k+1} + y_{k+2}(k+1)(k+2) = 0$$

5) Рекуррентное соотношение:

$$y_{k+2} = \frac{y_{k+1}(k+1)(k+2) - y_k}{(k+1)(k+2)}$$

6) Два линейно независимых решения:

Первое решение ( $y_0 = 1, y_1 = 0$ ):

$$y_1 = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + \dots$$

Второе решение ( $y_0 = 0, y_1 = 1$ ):

$$y_2 = x + \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \dots$$

Таким образом, общее решение:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные константы.

## Задача 1106

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - xy' + xy = 0$$

**Решение.** 1) Предположим решение в виде степенного ряда:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k$$

2) Производные:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k x^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k(k-1) x^{k-2}$$

3) Подставляем и приравниваем коэффициенты:

$$y_{k+3} = \frac{y_{k+1}(k+1) - y_k}{(k+3)(k+2)}$$

4) Три линейно независимых решения:

Первое решение ( $y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 0$ ):

$$y_1 = 1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 + \dots$$

Второе решение ( $y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 0$ ):

$$y_2 = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \dots$$

Третье решение ( $y_0 = 0, y_1 = 0, y_2 = 1$ ):

$$y_3 = x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{40}x^5 + \dots$$

Таким образом, общее решение:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

где  $c_1, c_2$  и  $c_3$  — произвольные константы.

## Задача 1110

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

**Решение.** 1) При  $x_0 = 0 : p_0(0) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+\alpha}$

2) Преобразуем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k (k + \alpha)(k + \alpha - 1) x^{k+\alpha-2+1} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} y_k (k + \alpha) x^{k+\alpha-1} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+\alpha+1} = 0$$

3) min степень  $x$ :  $k + \alpha - 1, k = 0 \Rightarrow \alpha - 1 \Rightarrow$

при  $k = 0$ :  $y_0 \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha-1} + 2y_0 \alpha x^{\alpha-1} + y_0 x^{\alpha+1}$

$y_0(\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha)$ , где  $(\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha) = 0$ , при  $x^{\alpha-1}$  (минимальная степень  $x$ )

$\alpha(\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \alpha = 0; -1$ , но берем  $-1$ , т.к.  $\alpha = 0$  делает ряд обычным.

4) Получаем ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k (k - 1)(k - 2) x^{k-2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} y_k (k - 1) x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k = 0$$

5) При  $x^p$  :

$$y_{p+2}(p + 1) + 2y_{p+2}(p + 1) + y_p = 0$$

$$y_{p+2}(p + 1)(p + 2) + y_p = 0$$

$$y_{p+2} = -\frac{y_p}{(p + 1)(p + 2)}$$

1) 2)

6) Построим матрицу:  $y_0 = \begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix}$

$$y_1 = \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix}$$

$$1) y_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2!}, y_3 = 0, y_4 = -\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{24} = \frac{1}{4!}, \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \dots$$

$$2) y_2 = 0, y_3 = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{3!}, y_4 = 0, \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

7) Общее решение будет выглядеть так:  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

## Задача 1109

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''' - xy'' + (x - 2)y' + y = 0$$

**Решение.** 1) При  $x_0 = 0$ ,  $p_0(0) \neq 0 \Rightarrow y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k$ .

2) Преобразуем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)y_k x^{k-3} - \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)y_k x^{k-2+1} + \sum_{k=0}^{\infty} k y_k x^{k-1+1} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} k y_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k = 0$$

При  $x^p$  :

$$(p+3)(p+2)(p+1)y_{p+3} - (p+1)py_{p+1} + py_p - 2(p+1)y_p + y_p = 0$$

Сократим  $(p+1)$  :

$$(p+3)(p+2)y_{p+3} - (p+2)y_{p+1} + y_p = 0$$

3) Выразим  $y$  :

$$y_{p+3} = \frac{y_{p+1}}{p+3} - \frac{y_p}{(p+3)(p+2)}$$

4) Построим единичную матрицу:

$$\begin{array}{rcccl} & & 1) & 2) & 3) \\ y_0 = & 1 & 0 & 0 \\ y_1 = & 0 & 1 & 0 \\ y_2 = & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$1) y_3 = 0 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}, y_4 = 0, y_1 = 1 - \frac{x^3}{6} + 0 + \dots$$

$$2) y_3 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}, y_4 = -\frac{1}{12}, y_2 = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + \dots$$

$$3) y_3 = 0, y_4 = \frac{1}{4}, y_3 = x^2 + \frac{x^4}{4} + \dots$$

5) Таким образом общее решение:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

где  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  - произвольные константы.

## Задача 1114

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x^2 y'' + 2xy' - (x^2 + 2x + 2)y = 0.$$

**Решение.** 1) При  $x_0 = 0, p_0(0) = 0 \Rightarrow$  Общий случай  $y = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k x^{k+\alpha}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2+2}y_k + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (x+\alpha)x^{k+\alpha-1+1}y_k - \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\alpha+2}y_k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\alpha+1}y_k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+\alpha}y_k,$$

min степень икса:  $k + \alpha, k_{min} = 0 \Rightarrow \alpha$

2) По  $x^\alpha$  :

$$y_0(\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 2)$$

$$\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 2 = 0$$

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -2, \alpha_2 = 1.$$

3) Рассмотрим  $\alpha = 1$  :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)ky_k x^{k+1} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)y_k x^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+3} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+2} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+1}$$

По  $x^p$  :

$$p(p-1)y_{p-1} + 2py_{p-1} - y_{p-3} - 2y_{p-2} = 0$$

$$(p^2 + p - 2)y_{p-1} = y_{p-3} + 2y_{p-2}$$

$$y_{p-1} = \frac{y_{p-3} + 2y_{p-2}}{p^2 + p - 2}$$

1. 2.

4) Построим матрицу:  $y_0 = \begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix}$

$$y_1 = \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix}$$

$$1. \ p = 2, y_1 = \frac{0 + 2 * 1}{1 + 2 * 0} = \frac{1}{2}$$

$$p = 3, y_2 = \frac{1 + 2 * 0}{10} = \frac{1}{10}$$

$$p = 4, y_3 = \frac{1}{2}$$

$$2. \ p = 2, y_1 = 0$$

$$p = 3, y_2 = \frac{2}{10}$$

$$p = 4, y_3 = \frac{0 + \frac{4}{10}}{18} = \frac{1}{45}$$

5)  $y_1 =$

### Задача 900

С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$$

**Решение.**

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 0 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(2 + \lambda)(3 - \lambda) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2, 3 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2, 3 \Rightarrow \text{решение не устойчиво}$$

### Задача 902

С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}) \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x} \end{cases}$$

**Решение.** Матрица первого приближения:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x} & \frac{\delta f_1}{\delta y} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x} & \frac{\delta f_2}{\delta y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4ye^{3x} + 1} & \frac{4e^{3x}}{4ye^{3x} + 1} \\ -\frac{2}{\sqrt[3]{(1 - 6x)^2}} & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A_{(0,0)} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(3 + \lambda)(2 - \lambda) + 8 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 = -7$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7} \cdot i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}i}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  решение устойчиво.

## Задача 916

Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1) \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$$

**Решение.**

$$\begin{cases} (x-1)(y-1) = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$1) (x, y) = (1, 2)$$

$$2) (x, y) = (2, 1)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} y-1 & x-1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

1)

$$\tilde{A}_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  не устойчива.

2)

$$\tilde{A}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$D = 4 + 4 = 8$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  не устойчива.

## Задача 918

Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(-x + y^2) \\ \dot{y} = x - y - 1 \end{cases}$$

**Решение.**

$$\begin{cases} y^2 - x = 1 \\ y = x - 1 \end{cases} = \begin{cases} x = y^2 - 1 \\ y^2 - 1 - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 9$$

$$1)(x, y) = (3, 2)$$

$$2)(x, y) = (0, -1)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{y^2 - x} & \frac{2y}{y^2 - x} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1)

$$\tilde{A}_{(3,2)} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 4 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 = 16$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  не устойчиво.

2)

$$\tilde{A}_{(0,-1)} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 = -8$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  устойчиво.



## Номер 962

Исследовать особые точки. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости  $(x, y)$ .

$$y' = \frac{x - 4y}{2y - 3x}$$

**Решение.**

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 2 \\ 1 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2, -5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  узел (устойчивый).

## Номер 973

Исследовать особые точки. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости  $(x, y)$ .

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = -6x - 5y \end{cases}$$

**Решение.**

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ -6 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{2 \pm 3 \cdot i}{1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  фокус.

### Задача 976

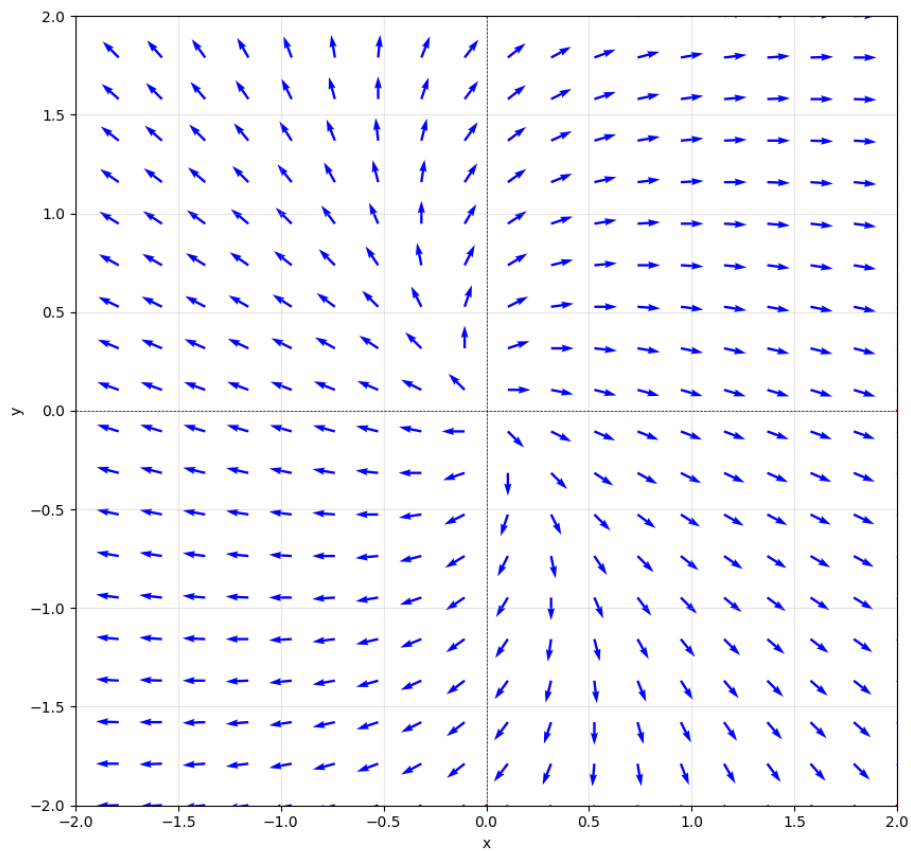
Исследовать особые точки. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости  $(x, y)$ .

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = y - x \end{cases}$$

**Решение.**

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = 3 - 3\lambda - 1\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$



## Задача 980

Найти и исследовать особые точки.

$$y' = 2x + yx - 2y - 5$$

**Решение.**

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 2y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = -2$$

Запишем матрицу 1-го приближения:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 2 \cdot i \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  фокус.

