Задача 1104

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(1-x)y'' - 2y' + y = 0$$

Решение. Решим задачу методом рядов.
1) Предположим, что решение имеет вид:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k$$

2) Тогда:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k x^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k(k-1) x^{k-2}$$

3) Подставляем в исходное уравнение:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k k(k-1)x^{k-2} - y_k k(k-1)x^{k-1} - 2y_k k x^{k-1} + y_k x^k = 0$$

4) Приравнивая коэффициенты при x^k:

$$y_k - k(k+1)y_{k+1} - 2(k+1)y_{k+1} + y_{k+2}(k+1)(k+2) = 0$$

5) Рекуррентное соотношение:

$$y_{k+2} = \frac{y_{k+1}(k+1)(k+2) - y_k}{(k+1)(k+2)}$$

6) Два линейно независимых решения:
Первое решение ($y_0 = 1, y_1 = 0$):

$$y_1 = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + \cdots$$

Второе решение ($y_0 = 0, y_1 = 1$):

$$y_2 = x + \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \cdots$$

Таким образом, общее решение:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

где c_1 и c_2 — произвольные константы.

Задача 1106

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - xy' + xy = 0$$

Решение. 1) Предположим решение в виде степенного ряда:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k$$

2) Производные:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k x^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k(k-1) x^{k-2}$$

3) Подставляем и приравниваем коэффициенты:

$$y_{k+3} = \frac{y_{k+1}(k+1) - y_k}{(k+3)(k+2)}$$

4) Три линейно независимых решения:
Первое решение ($y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 0$):

$$y_1 = 1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 + \cdots$$

Второе решение ($y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 0$):

$$y_2 = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \cdots$$

Третье решение ($y_0 = 0, y_1 = 0, y_2 = 1$):

$$y_3 = x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{40}x^5 + \cdots$$

Таким образом, общее решение:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

где c_1, c_2 и c_3 — произвольные константы.

Задача 1110

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

Решение. 1) При $x_0 = 0 : p_0(0) = 0 => \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+\alpha}$
2) Преобразуем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k (k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2+1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} y_k (k+\alpha)x^{k+\alpha-1} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+\alpha+1} = 0$$

3) min степень x: $k+\alpha-1$, $k=0 => \alpha-1 =>$
при $k=0$: $y_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1} + 2y_0\alpha x^{\alpha-1} + y_0 x^{\alpha+1}$
$y_0(\alpha(\alpha-1)+2\alpha)$, где $(\alpha(\alpha-1)+2\alpha) = 0$, при $x^{\alpha-1}$ (минимальная степень x)
$\alpha(\alpha+1) = 0 => \alpha = 0; -1$, но берем -1, т.к. $\alpha = 0$ делает ряд обычным.
4) Получаем ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k \underset{k=p+2}{(k-1)(k-2)x^{k-2}} + 2\sum_{k=0}^{\infty} y_k \underset{k=p+2}{(k-1)x^{k-2}} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k \underset{k=p}{x^k} = 0$$

5) При x^p :

$$y_{p+2}(p+1) + 2y_{p+2}(p+1) + y_p = 0$$

$$y_{p+2}(p+1)(p+2) + y_p = 0$$

$$y_{p+2} = -\frac{y_p}{(p+1)(p+2)}$$

6) Построим матрицу: $\begin{array}{ccc} & 1) & 2) \\ y_0 = & 1 & 0 \\ y_1 = & 0 & 1 \end{array}$

1) $y_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2!}$, $y_3 = 0$, $y_4 = -\frac{-\frac{1}{2}}{3\cdot 4} = \frac{1}{24} = \frac{1}{4!}$, $\cdots =>$
$=> y_1 = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \cdots$
2) $y_2 = 0$, $y_3 = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = -\frac{1}{3!}$, $y_4 = 0$, $\cdots =>$
$=> y_2 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$
7) Общее решение будет выглядить так: $y = c_1y_1 + c_2y_2$

Задача 1109

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''' - xy'' + (x-2)y' + y = 0$$

Решение. 1) При $x_0 = 0$, $p_0(0) \neq 0 => y = \sum_{k=0}^{\inf} y_k x^k$.
2) Преобразуем:

$$\sum_{k=0}^{\inf} k(k-1)\underset{k=p+3}{(k-2)}y_k x^{k-3} - \sum_{k=0}^{\inf} k(k-1)\underset{k=p+1}{y_k} x^{k-2+1} + \sum_{k=0}^{\inf} k y_k \underset{k=p}{x^{k-1+1}} - 2\sum_{k=0}^{\inf} k\underset{k=p+1}{y_k x^{k-1}} + \sum_{k=0}^{\inf} \underset{k=p}{y_k x^k} = 0$$

При x^p :

$$(p+3)(p+2)(p+1)y_{p+3} - (p+1)py_{p+1} + py_p - 2(p+1) + y_p = 0$$

Сократим $(p+1)$:

$$(p+3)(p+2)y_{p+3} - (p+2)y_{p+1} + y_p = 0$$

3) Выразим y :

$$y_{p+3} = \frac{y_{p+1}}{p+3} - \frac{y_p}{(p+3)(p+2)}$$

4) Построим единичную матрицу:

$$\begin{array}{cccc} & 1) & 2) & 3) \\ y_0 = & 1 & 0 & 0 \\ y_1 = & 0 & 1 & 0 \\ y_2 = & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

1) $y_3 = 0 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$, $y_4 = 0$, $y_1 = 1 - \frac{x^3}{6} + 0 + \cdots$
2) $y_3 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$, $y_4 = -\frac{1}{12}$, $y_2 = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + \cdots$
3) $y_3 = 0$, $y_4 = \frac{1}{4}$, $y_3 = x^2 + \frac{x^4}{4} + \cdots$

5) Таким образом общее решение:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

где c_1, c_2 и c_3 - произвольные константы.

Задача 1114

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x^2y'' + 2xy' - (x^2 + 2x + 2)y = 0.$$

Решение. 1) При $x_0 = 0, p_0(0) = 0 =>$ Общий случай $y = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k x^{k+\alpha}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2+2}y_k+2\sum_{k=0}^{\infty}(x+\alpha)x^{k+\alpha-1+1}y_k-\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\alpha+2}y_k-2\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\alpha+1}y_k-2\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\alpha}y_k,$$

min степень икса: $k + \alpha, k_{min} = 0 => \alpha$

2) По x^α :

$$y_0(\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 2)$$

$$\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 2 = 0$$

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0 => \alpha_1 = -2, \alpha_2 = 1.$$

3) Рассмотрим $\alpha = 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\underset{k=p-1}{(k+1)ky_kx^{k+1}} + 2\sum_{k=0}^{\infty}\underset{k=p-1}{(k+1)y_kx^{k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty}\underset{k=p-3}{y_kx^{k+3}} - 2\sum_{k=0}^{\infty}\underset{k=p-2}{y_kx^{k+2}} - 2\sum_{k=0}^{\infty}\underset{k=p-1}{y_kx^{k+1}}$$

По x^p :

$$p(p-1)y_{p-1} + 2py_{p-1} - y_{p-3} - 2y_{p-2} = 0$$

$$(p^2 + p - 2)y_{p-1} = y_{p-3} + 2y_{p-2}$$

$$y_{p-1} = \frac{y_{p-3} + 2y_{p-2}}{p^2 + p - 2}$$

4) Построим матрицу:

	1.	2.
$y_0 =$	1	0
$y_1 =$	0	1

1. $p = 2, y_1 = \dfrac{0 + 2 * 1}{4} = \dfrac{1}{2}$

   $p = 3, y_2 = \dfrac{1 + 2 * 0}{10} = \dfrac{1}{10}$

   $p = 4, y_3 = \dfrac{1}{2}$

2. $p = 2, y_1 = 0$

   $p = 3, y_2 = \dfrac{2}{10}$

   $p = 4, y_3 = \dfrac{0 + \frac{4}{10}}{18} = \dfrac{1}{45}$

5) $y_1 =$

Задача 900

С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(2+\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2, 3 => \lambda_{1,2} = -2, 3 => \text{решение не устойчиво}$$

Задача 902

С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln\left(4y + e^{-3x}\right) \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x} \end{cases}$$

Решение. Матрица первого приближения:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\delta f_1}{\delta x} & \dfrac{\delta f_1}{\delta y} \\ \dfrac{\delta f_2}{\delta x} & \dfrac{\delta f_2}{\delta y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} std::this_thread::get_id() - \dfrac{3}{4ye^{3x}+1} & \dfrac{4e^{3x}}{4ye^{3x}+1} \\ -\dfrac{2}{\sqrt[3]{(1-6x)^2}} & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A_{(0,0)} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda)(2-\lambda) + 8 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 = -7$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7} \cdot i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}i}{2} =>$$

=> решение устойчиво.

Задача 916

Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1) \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} (x-1)(y-1) = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$1)(x, y) = (1, 2)$$

$$2)(x, y) = (2, 1)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} y-1 & x-1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

1)

$$\tilde{A}_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 = 0 => \lambda_{1,2} = 1 > 0 =>$$

=> не устойчива.

2)

$$\tilde{A}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$D = 4 + 4 = 8$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 =>$$

=> не устойчива.

Задача 918

Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(-x + y^2) \\ \dot{y} = x - y - 1 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} y^2 - x = 1 \\ y = x - 1 \end{cases} = \begin{cases} x = y^2 - 1 \\ y^2 - 1 - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 9$$

$$1)(x, y) = (3, 2)$$

$$2)(x, y) = (0, -1)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{y^2 - x} & \frac{2y}{y^2 - x} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1)

$$\tilde{A}_{(3,2)} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 4 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 = 16$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2 =>$$

=> не устойиво.

2)

$$\tilde{A}_{(0,-1)} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 = -8$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2} =>$$

=> устойчиво.

Номер 962

Исследовать особые точки. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y).

$$y' = \frac{x - 4y}{2y - 3x}$$

Решение.

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 2 \\ 1 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2, -5 =>$$

=> узел (устойчивый).

Номер 973

Исследовать особые точки. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y).

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = -6x - 5y \end{cases}$$

Решение.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ -6 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{2 \pm 3 \cdot i}{1} =>$$

=> фокус.

Задача 976

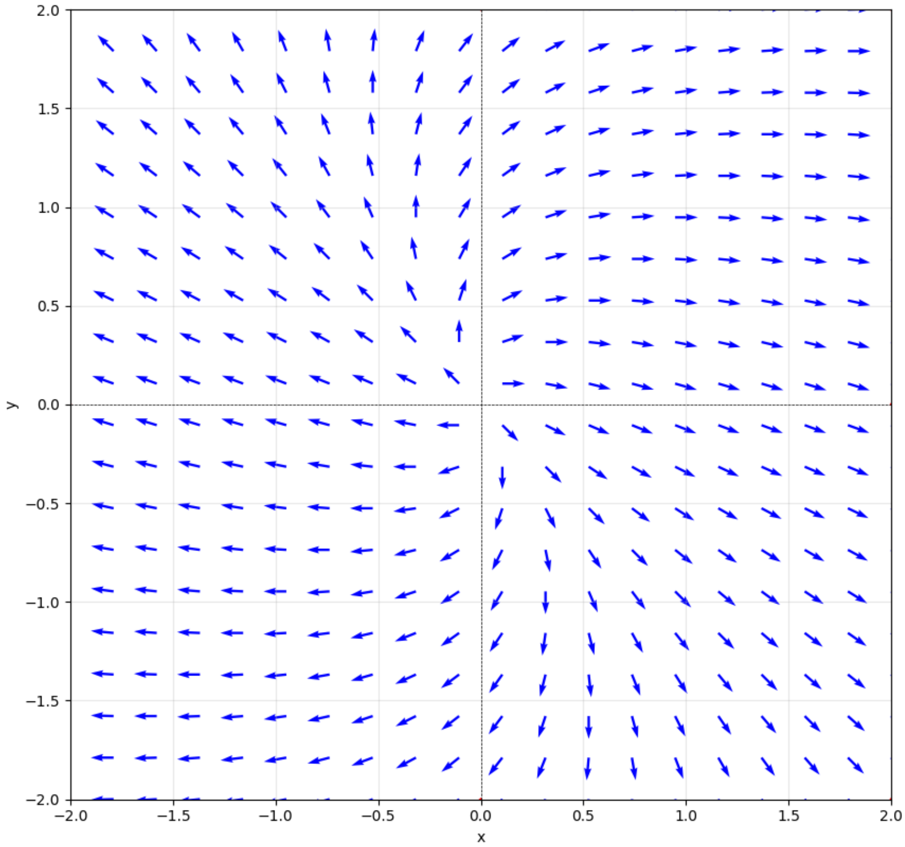
Исследовать особые точки. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y).

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = y - x \end{cases}$$

Решение.

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)+1 = 3-3\lambda-1\lambda+\lambda^2+1 = \lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$



Задача 980

Найти и исследовать особые точки.

$$y' = 2x + yx - 2y - 5$$

Решение.

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 2y - 5 = 0 \end{cases} \quad => x = 1, y = -2$$

Запишем матрицу 1-го приближения:

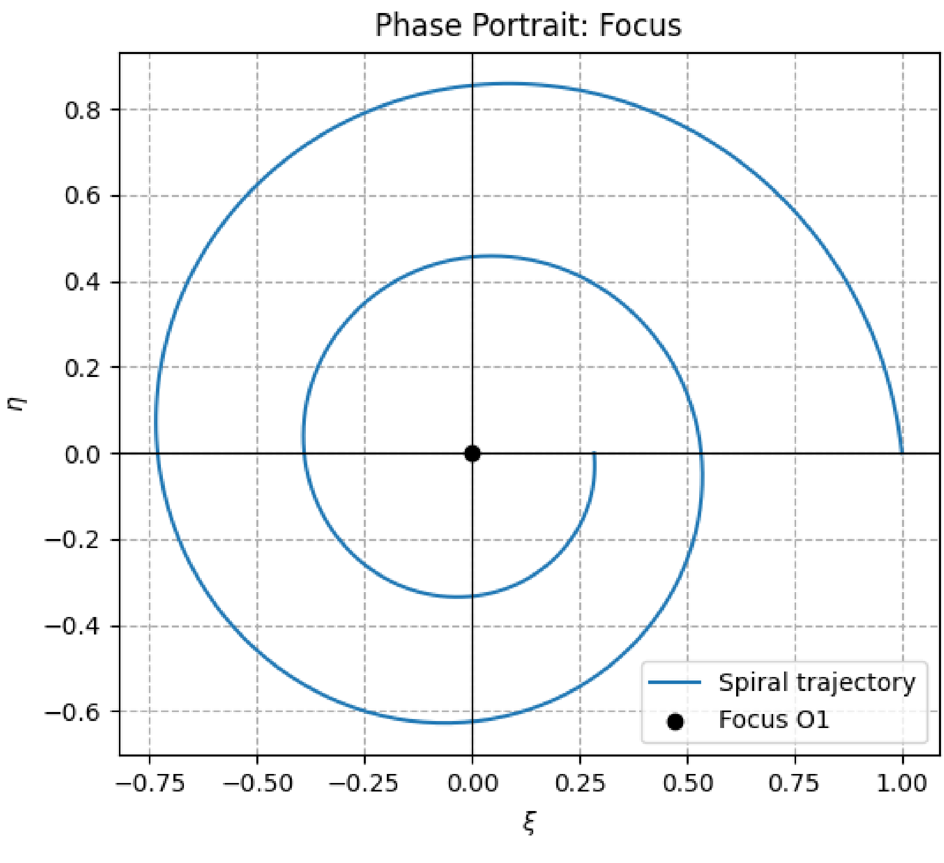
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 =>$$

$$=> \lambda_{1,2} = 1 \pm 2 \cdot i =>$$

=> фокус.



Номер 1145

$$\begin{cases} 2zy' = y^2 - z^2 + 1 \\ z' = z + y \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 2z(z'-z)' = (z'-z)^2 - z^2 + 1 \\ y = z' - z \end{cases}$$

$$2zz'' - 2zz' = (z')^2 - 2z'z + z^2 - z^2 + 1$$

$$2zz'' - (z')^2 - 1 = 0 \text{ - понизить порядок.}$$

Нет явно заданного аргумента => замена $z' = p(z); z'' = p'_z \cdot p$

$$2z \cdot p'p - p^2 - 1 = 0$$

$$2z \cdot \frac{dp}{dz} \cdot p = p^2 + 1 = 0| \cdot \frac{dz}{(p^2+1) \cdot 2z}$$

$$\int \frac{p}{p^2+1} dp = \int \frac{dz}{2z} = 0$$

Пусть $t = p^2 + 1$, $t' = 2p$. Тогда: $dp = \frac{1}{t'} dt => dp = \frac{1}{2p} dt$.

$$\int \frac{p}{p^2+1} dp = \int \frac{p}{2p \cdot t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t|$$

$$\frac{1}{2} \ln |p^2 + 1| = \frac{1}{2} \ln |z| - C$$

$$e^{\ln |p^2+1|} = e^{\ln |z| - C}$$

$$p^2 + 1 = \frac{z}{C_1}$$

$$p = \pm \sqrt{\frac{z}{C_1} - 1}$$

$$\frac{dz}{dx} = \pm \sqrt{\frac{z}{C_1} - 1}$$

$$\pm \int \frac{dz}{\sqrt{\frac{z}{C_1} - 1}} = \int dx$$

$$\pm 2\sqrt{C_1 z - C_1^2} + C_2 = x + C_3 =>$$

$=> z = C_1 + \frac{1}{4C_1}(x + C_2)^2 =>$

Ответ: $y = z' - z = \frac{1}{C_2}(x + C_2) - \frac{1}{4C_1}(x + C_2)^2 - C_1$

Номер 1153

$$\frac{dx}{z^2-y^2}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{-y}$$

Решение.

$$\frac{dx}{z^2-y^2}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{-y}=\frac{zdy+ydz}{z^-y^2}$$

$$\frac{dx}{z^2-y^2}=\frac{zdy+ydz}{z^2-y^2}$$

$$\int dx=\int d(zy)$$

$$x=zy+C_1$$

$$C_1=x-zy$$

$$\frac{dy}{z}=-\frac{dz}{y} => \int zdz => y^2+z^2=C_2$$

Ответ: $C_1=x-zy, C_2=y^2+z^2$

Номер 1163

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{u} = -\frac{du}{z}$$

Решение. Пусть $\phi = yz - ux$. Тогда:

$$\frac{\delta\phi}{\delta y} = z; \frac{\delta\phi}{\delta z} = y; \frac{\delta\phi}{\delta u} = -x; \frac{\delta\phi}{\delta x} = -u$$

Проверить, чтобы $\frac{\delta\phi}{\delta x} \cdot F_x + \frac{\delta\phi}{\delta y} \cdot F_y + \frac{\delta\phi}{\delta z} \cdot F_z + \frac{\delta\phi}{\delta u} \cdot F_u = 0$

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} => F_x = y; F_y = -x$$

$$\frac{dz}{u} = -\frac{du}{z} => F_u = -z; F_z = u$$

Имеем: $-u \cdot y + z \cdot (-x) + y \cdot u + (-x) \cdot (-z) = 0$

$$0 = 0 => \phi \text{ - первый } \int\text{-л системы}$$

Номер 1180

$$(z-y)^2\frac{\delta z}{\delta x}+xz\cdot\frac{\delta z}{\delta y}=xy$$

Решение.

$$\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dy}{xz}=\frac{dz}{xy}$$

- $$\frac{dy}{xz}=\frac{dz}{xy};\quad \frac{dy}{z}=\frac{dz}{y};\quad \int ydy=\int zdz$$
  $$y^2-z^2=C_1$$

- $$\frac{dy-dz}{x(z-y)}=\frac{dx}{(z-y)^2};\quad \frac{dy-dz}{x}=\frac{dx}{z-y}$$
  $$(z-y)\cdot d(z-y)+xdx=0$$
  $$d((z-y)^2+x^2)=0\quad => \quad (z-y)^2+x^2=C_2$$

$$F(y^2-z^2,x^2+(z-y)^2)=0$$

Номер 1182

$$y\frac{\delta z}{\delta x}+z\frac{\delta z}{\delta y}=\frac{y}{x}$$

Решение.

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{z}=x\frac{dz}{y}$$

- $$\frac{dx}{y}=\frac{xdz}{y};\quad \int\frac{dx}{x}=\int dz\quad => \quad \ln|x|=z+C_1$$

- $$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{z},\quad z=\ln|x|-C_1$$
  $$dx\cdot(\ln|x|-C_1)=ydy$$
  $$\int\ln|x|dx-\int C_1dx=\int ydy$$
  $$\int\ln|x|\cdot 1dx=\ln x\cdot x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=\ln x\cdot x-x$$

- $$x\cdot ln|x|-x-xC_1=\frac{1}{2}y^2+C_2$$
  $$-x+xz-\frac{1}{2}y^2=C_2$$
  $$-2x+2xz-y^2=C_2$$

$$F(\ln|x|-z,2x(z-1)-y^2)=0$$

Номер 1198

$$\begin{cases} x \cdot \dfrac{\delta z}{\delta x} - y \cdot \dfrac{\delta z}{\delta y} = z^2 \cdot (x - 3y) \\ x = 1 \\ yz + 1 = 0 \end{cases}$$

Решение.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z^2(x-3y)}$$

- $$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{-y}; \quad e^{\ln|x| + ln|y|} = e^{\ln C_1}$$
$$xy = C_1$$

- $$\frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z^2(x-3y)}; \quad (x-3y) \cdot \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z^2}$$
$$\int (-\frac{C_1}{y^2} + 3) \cdot dy = \int \frac{dz}{z^2}$$
$$\frac{C_1}{y} + 3y = -\frac{1}{z} + C_2$$

- $$\begin{cases} C_1 = yx \quad => \quad y \\ C_2 = 1 + 2C_1 \\ x = 1 \\ y = -\dfrac{1}{z} \end{cases}$$

Получается, что $C_1 = xy$ и $C_2 = 1 + 2C_1 = x + 3y + \dfrac{1}{z} = 1 + 2xy$.

Ответ: $2xy + 1 = x + 3y + \dfrac{1}{z}$

Номер 1181

$$xy\frac{\delta z}{\delta x} + (x-2z)\cdot\frac{\delta z}{\delta y} = yz$$

Решение.

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x-2z} = \frac{dz}{yz}$$

- $$\frac{dx}{xy} = \frac{dz}{yz}; \quad \int\frac{dx}{x} = \int\frac{dz}{z};$$
$$\ln|z| - \ln|x| = C_1 \quad => \quad \frac{z}{x} = C_1$$

- $$\frac{dx-2dz}{y(x-2z)} = \frac{dy}{x-2z}; \quad \int dx - \int 2dz = \int ydy$$
$$x - 2z - \frac{y^2}{2} = C_2$$
$$2x - 4z - y^2 = C_2$$

Ответ: $F(\frac{z}{x}, 2x-4z-y^2) = 0$

Номер 1183

$$\sin^2 x\cdot\frac{\delta z}{\delta x} + \operatorname{tg} z\cdot\frac{\delta z}{\delta y} = \cos^2 x$$

Решение.

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{dy}{\cos^2 z} = \frac{dz}{cos^2 z}$$

- $$\int\frac{dx}{\sin^x} = \frac{dz}{\cos^z}$$
$$-\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} z + C_1$$
$$C_1 = \operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} x$$

- $$\frac{dy}{\operatorname{tg} z} = \frac{dz}{\cos^2 z}; \quad \int\frac{\operatorname{tg} z}{\cos^2 d}dz$$
$$\int\frac{\operatorname{tg} z}{\cos^2 z}dz = \int\frac{\sin z}{\cos^3 z}dz = \int\frac{1}{\cos^3 z}d(\cos z) = \frac{1}{2\cdot cos^2 z} + C_2$$
$$y = \frac{1}{2\cdot\cos^2 z} + C_2$$

Ответ: $F(\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} x, \quad y - \frac{1}{2\cdot\cos^2 z})$

Номер 1201

$$z \cdot \frac{\delta z}{\delta x} - xy \cdot \frac{\delta z}{\delta y} = 2xz; \quad x + y = 2; \quad yz = 1$$

Решение.

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{2xz}$$

- $$\frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{2xz} \quad => \quad -2\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dz}{z};$$

  $$e^{\ln|z| + \ln|y|^2} = e^{C_1}$$

  $$y^2 z = C_1$$

- $$\frac{dx}{z} = \frac{dz}{2xz} \quad => \quad \int 2x dx = \int dz; \quad x^2 + C_2 = z$$

  С учетом заданных доп. условий:

  $$\begin{cases} C_1 = y^2 z = yz \cdot y = y \\ C_2 = x^2 - z = (2-y)^2 - z = (2 - C_1)^2 - z \\ x + y = 2 \quad => \quad x = 2 - y \\ yz = 1 \end{cases}$$

Ответ: $(2 - y^2 z)^2 = x^2$

Номер 772

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$y'' = f(x) \tag{1}$$

с граничными условиями:

$$y(0) = 0, \quad y(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty. \tag{2}$$

Решение.

- Общее решение уравнения:

$$y'' = 0 \Rightarrow y(x) = Ax + B. \tag{3}$$

- Для области $0 \leq x \leq s$:

$$G(x, s) = Ax + B. \tag{4}$$

  Условие $G(s, s) = 0$ даёт $B = 0$, следовательно:

$$G(x, s) = Ax. \tag{5}$$

- Для области $x > s$:

$$G(x, s) = Cx + D. \tag{6}$$

  Так как $G(x, s) \to 0$ при $x \to +\infty$, необходимо $C = 0$, откуда:

$$G(x, s) = D. \tag{7}$$

- Условие разрыва первой производной:

$$G'(s + 0, s) - G'(s - 0, s) = 1. \tag{8}$$

  Подставляя $G'(x, s)$:

$$0 - A = 1 \Rightarrow A = -1. \tag{9}$$

  Так как $As = D$, получаем $D = -s$.

Таким образом, функция Грина:

$$G(x, s) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq s, \\ -s, & x \geq s. \end{cases} \tag{10}$$

Номер 765

Решение.

$$y'' + y = f(x) \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$G(x,s) = A(s)\cos x + B(s)\sin x, \text{ где } 0 \le x \le s$$

$$G'(0,s) = 0$$

$$A(s)\sin(0) + B(s)\cos(0) = 0 \Rightarrow B(s) = 0$$

$$G(x,s) = A(s)\cos(x)$$

при $s \le x \le \pi$.

$$G(x,s) = C(s)\cos(x) + D(s)\sin(x)$$

$$G(\pi,s) = 0: \quad C(s)\cos(\pi) + D(s)\sin(\pi) = 0$$

$$C(s) = 0$$

$$G(x,s) = D(s)\sin(x)$$

$$A(s)\cos(x) = D(s)\sin(x)$$

$$G'(s+0,s) - G(s-0,s) = 1$$

- $$D(s)\cos(s) = -A(s)\sin(s) = 1$$
  $$D(s)\cos(s) + A(s)\sin(s) = 1$$

- $$\begin{cases} A(s)\cos(s) - D(s)\sin(s) = 1 \\ D(s)\cos(s) + A(s)\sin(s) = 1 \end{cases}$$
  Преобразуем:
  $$A(s)\cos(s) + D(s)\cos^2(s) + A(s)\sin^2(s) = \cos(s)$$
  $$A(s)(\sin^2(s) + \cos^2(s)) = \cos(s)$$
  $$A(s) = \cos(s)$$

- $$A(s)\cos(s) = D(s)\sin(s) \Rightarrow A(s) = \sin(s)$$
  $$D(s) = \cos(s)$$

Ответ:

$$G(x,s) = \begin{cases} \sin(s)\cos(x), & 0 \le x \le s, \\ \cos(s)\sin(x), & s < x \le \pi. \end{cases}$$

Номер 770

$$xy'' - y' = 0$$

$$y'(1) = 0, \quad y(2) = 0$$

Решение. Обозначим $z = y'$, тогда уравнение принимает вид:

$$xz' - z = 0$$

Решаем уравнение:

$$xz' = z$$
$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$$
$$\ln|z| = \ln|x| + C$$

$$z = Cx$$

$$y' = Cx$$
$$y = \frac{Cx^2}{2} + C_1$$

Рассмотрим области $1 \le x \le s$:

$$G(x,s) = A(s)\frac{x^2}{2} + B(s)$$

$$G'(x,s) = A(s)x$$

Так как $G'(1,s) = 0$, то:

$$A(s) = 0$$

$$G(x,s) = B(s)$$

Рассмотрим область $s \le x \le 2$:

$$G(x,s) = C(s)\frac{x^2}{2} + D(s)$$

$$C(s)\frac{2^2}{2} + D(s) = 0$$
$$D(s) = -2C(s)$$
$$G(x,s) = C(s)\left(\frac{x^2}{2} - 2\right)$$

$$G(s+0,s) - G(s-0,s) = 1$$

$$C(s)s - 0 = 1$$

$$C(s) = \frac{1}{s}$$