

## Элементы теории поля

**Определение.** Пусть  $G$  область в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Говорят, что в области  $G$  задано скалярное поле, если каждой точке  $M \in G$  поставлено в соответствие число  $u(M) = u(x, y, z)$ . В области  $G$  заданно векторное поле, если каждой точке  $M \in G$  поставлен в соответствие вектор  $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ . Аналогично определяются скалярные и векторные поля в области  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Будем говорить, что скалярные и векторные поля  $u(M)$  и  $\vec{a}(M)$  обладают некоторым свойством, если этим свойством обладают функции  $u(x, y, z)$ ,  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ .

**Определение.** Векторное поле называется дифференцируемым в области  $G$ , если дифференцируемы  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ .

**Определение.** Пусть  $u(M)$  дифференцируема в области  $G \subset \mathbb{R}^3$  скалярное поле. Векторное поле

$$\text{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

называется градиентом скалярного поля  $u(M)$  в  $G$ .

**Замечание.** Многие понятия теории поля удобно записывать, используя символический вектор Гамильтона "набла"  $\nabla$ :

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

**Замечание.** Тогда получим, что

$$\text{grad}(u) = \nabla u.$$

Правая часть понимается как умножение вектора на "число". Сам вектор набла не имеет реального значения, а приобретает это значение комбинацией со скалярными или векторными функциями.

**Определение.** Пусть даны скалярное поле  $u(M)$  дифференцируемое в области  $G$ , точка  $M_0 \in G$  и направление  $\vec{e}(\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$ . Производной поля  $u(M)$  в точке  $M_0$  по направлению  $\vec{e}$  называется число

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos(\alpha) + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos(\beta) + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos(\gamma).$$

**Замечание.**

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \text{grad}(u) \cdot \vec{e},$$

Здесь  $\cdot$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^3$ .

**Теорема.** Производная скалярного поля  $u(M)$  в точке  $M_0$  по направлению, определяемому вектором  $\text{grad}(u)$  в точке  $M_0$  имеет наибольшее значение по сравнению с производной  $u(M)$  в точке  $M_0$  по любому другому направлению. Значение производной  $u(M)$  в точке  $M_0$  по направлению  $\text{grad}(u(M_0))$  равно  $|\text{grad}(u(M_0))|$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varphi$  угол между  $\vec{e}$  и  $\vec{\text{grad}}(u(M_0))$ . Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M_0) = \vec{\text{grad}}u(M_0) \cdot \vec{e} = |\vec{\text{grad}}u(M_0)| |\vec{e}| \cos \varphi = |\vec{\text{grad}}u(M_0)| \cos \varphi.$$

Значение производной максимально, если  $\cos \varphi = 1$ . Тогда  $\varphi = 0$ . Значит направление вектора  $\vec{\text{grad}}(u(M_0))$  совпадает с направлением вектора  $\vec{e}$  и

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M_0) = |\vec{\text{grad}}u(M_0)|.$$

□

**Определение.** Пусть в области  $G$  заданно векторное поле  $\vec{a} = \vec{a}(M)$  и существует определенная в  $G$  функция  $u = u(M)$  такая, что

$$\vec{a} = \vec{\text{grad}}u.$$

Тогда функция  $u$  называется потенциалом векторного поля  $\vec{a}$ .

**Пример.** Пусть дан вектор  $\vec{r}$ . Разложим его по базису:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{x}{|\vec{r}|^3}\vec{i} + \frac{y}{|\vec{r}|^3}\vec{j} + \frac{z}{|\vec{r}|^3}\vec{k}.$$

Пусть  $G = \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$ . Тогда функция  $u = \frac{1}{|\vec{r}|}$  является потенциалом векторного поля  $\vec{a}$  в множестве  $G$ .

**Определение.** Пусть векторное поле  $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  дифференцируемо в области  $G$ . Тогда скалярное поле

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

называется дивергенцией векторного поля  $\vec{a}$  в области  $G$ .

**Замечание.** Дивергенция поля может быть записана как "скалярное произведение" векторов набла и  $\vec{a}$ :

$$\text{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}.$$

**Определение.** Пусть векторное поле  $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  дифференцируемо в области  $G$ . Ротором (вихрем) векторного поля  $\vec{a}$  называется векторное поле:

$$\text{rot} \vec{a} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

**Замечание.** Ротор поля  $\vec{a}$  можно записать как "векторное произведение" оператора набла на  $\vec{a}$ :

$$\text{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

**Определение.** Векторное поле  $\vec{a}$ , заданное в области  $G$  называется без вихревым, если

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}.$$

**Определение.** Пусть  $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$  векторное поле непрерывное в области  $G$ ,  $\gamma$  ориентированный гладкий контур  $G$ . Интеграл

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

называется циркуляцией векторного поля  $\vec{a}$  по контуру  $\gamma$ . Обозначение:

$$\oint_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r}, \quad d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

**Определение.** Векторное поле  $\vec{a}$  заданное в области  $G$  называется потенциальным, если циркуляция  $\vec{a}$  по любому гладкому контуру, лежащему в  $G$  равна нулю.

**Определение.** Говорят, что поверхность  $S$  натянута на гладкий контур  $\Gamma$ , если существует ориентированная гладкая поверхность, лежащая в  $G$  и имеющая контур  $\Gamma$  своей границей.

**Определение.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}^3$  заданно непрерывное векторное поле  $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ .  $S$  — гладкая ориентированная поверхность  $G$ , ориентация которой определяется единичным вектором нормали  $\vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ . Поток векторного поля  $\vec{a}$  через поверхность  $S$  называется

$$\iint_S (P \cos(\alpha) + Q \cos(\beta) + R \cos(\gamma)) ds = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} ds.$$

**Теорема.** Пусть область  $V \subset \mathbb{R}^3$  правильная относительно всех координатных плоскостей. Пусть границей  $V$  является гладкая поверхность  $S$ , ориентированная вектором внешней нормали  $\vec{n}$ . Пусть в  $V$  заданно дифференцируемое векторное поле  $\vec{a}$ . Тогда

$$\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz$$

формула Остроградского-Гаусса в терминах теории поля. Поток векторного поля через границу  $S$  области  $V$  равняется тройному интегралу от дивергенции поля  $\vec{a}$ .

**Пример.** Найти поток векторного поля  $\vec{a} = (x-1)^3\vec{i} + (y+2)^3\vec{j} + (z-2)^3\vec{k}$  через внешнюю сторону сферы  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = R^2$ .

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 \leq R^2\}, \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = R^2\}.$$

$$\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz = \iiint_V (3(x-1)^2 + 3(y+2)^2 + 3(z-2)^2) dx dy dz =$$

Сделаем замену  $x-1 = 2 \cos \varphi \cos \psi$ ,  $y+2 = 2 \sin \varphi \cos \psi$ ,  $z-2 = 2 \sin \psi$ :

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int_0^R r^2 \cos \gamma r^2 dr = \frac{12}{5} \pi R^5.$$

## Лекция 1