Лекция 1. Классификация и приведение к каноническому виду диференциальных уравнений 2 порядка.

Определение. Уравнением в частных производных 2 порядка называют

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\delta^2 u}{\delta x_i \delta x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\delta u}{\delta x_i} + cu + f(x) = 0$$

$$u = u(x_1, \cdots, x_n), c = c(x), a_{ij} = a_{ij}(x), b_i = b_i(x)$$

Если $u, c, a_{ij}, b_i = \text{const} \quad \forall i, j$, то уравнение имеет пстоянные коэфициенты.
Рассмотрим случай $n = 2$:

$$a_{11}(x,y)\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + 2a_{12}(x,y)\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} + a_{22}(x,y)\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + F(f(x,y), \frac{\delta u}{\delta x}, \frac{\delta u}{\delta y}, u) = 0$$

Замечание. Принято писать $\frac{\delta u}{\delta x} = u_x, \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = u_{xy}, \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = u_{xx}, \cdots$.

Сделаем замену переменных: $\xi = \phi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y)$. И так как они линейно независимы:

$$\mathbb{J} = \begin{vmatrix} \frac{\delta \phi}{\delta x} & \frac{\delta \phi}{\delta y} \\ \frac{\delta \psi}{\delta x} & \frac{\delta \psi}{\delta y} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$u_x = \xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta$$

$$u_{xx} = (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta)_x = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{yy} = (\xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta)_y = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_{yy}$$

$$u_{xy} = (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_y = \cdots .$$

Подставляя это в исходное уравнение, мы получим:

$$u'_{\xi\xi}\overbrace{[a_{11}(\xi_x)^2 + a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}(\xi_y)^2]}^{\tilde{a}_{11}} + u_{\eta\eta}\overbrace{[a_{11}(\eta_x)^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}(\eta_y)^2]}^{\tilde{a}_{22}} +$$

$$+ u_{\eta\xi}\overbrace{[2a_{11}\xi_x\eta_x + 2a_{22}\xi_y\eta_y + 2a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)]}^{\tilde{a}_{12}} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0$$

Итого, получаем:

$$a_{11}(\xi_x)^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}(\xi_y)^2 = 0$$

$$a_{11}\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right) + a_{22} = 0$$

Пусть $\xi(x,y) = \text{const}$, выразим тогда $y = y(x)$. Отсюда $d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y}$ Значит имеем:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = 0$$

Определение. $a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}(dx)^2 = 0$ - характеристическое уравнение исходного уравнения.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \overbrace{\sqrt{(a_{12})^2 - a_{11}a_{22}}}^{D}}{a_{11}}$$

1. D $>$ 0 - гиперболический тип;

2. D $=$ 0 - параболический тип;

3. D $<$ 0 - эллиптический тип.

В 1. делаем замену $\xi = \phi(x, y) = c, \quad \eta = \psi(x, y) = c$
В 2. $\xi = \phi(x, y) = c \qquad \eta = \psi(x, y) = c$ - выбираем сами. Она должна быть лин. независимо от $\phi(x, y)$
В 3. имеем $\overbrace{\phi(x, y)}^{\xi} \pm i \overbrace{\psi(x, y)}^{\eta} = c$
В зависимости от D определяется тип дифференциального уравнения.

Замечание. Виды канонических дифференциальных уравнений второго порядка:

- $D > 0$ — *гиперболический* тип;

- $D = 0$ — *параболический* тип;

- $D < 0$ — *эллиптический* тип.

Для каждого из них определён свой порядок действий:

1. $D > 0 \implies$ делаем замену $\xi = \phi(x, y) = \text{const}$, $\eta = \psi(x, y) = \text{const}$;

2. $D = 0 \implies$ у нас единственное решение $\xi = \varphi(x, y) = \text{const}$. Тогда вводим вторую, линейно независимую с $\varphi(x, y)$ функцию $\eta = \psi(x, y) = \text{const}$;

3. $D < 0 \implies$ у нас будет пара сопряжённых комплексных чисел $\underbrace{\varphi(x, y)}_{\xi(x,y)} \pm i \underbrace{\psi(x, y)}_{\eta(x,y)} = \text{const}$.

Замечание. Где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — первые интегралы системы.

Рассмотрим каждый из них по отдельности детальнее

Гиперболический тип ($D > 0$)

Тогда $\xi = \dfrac{\varphi + \psi}{2}$, $\eta = \dfrac{\varphi - \psi}{2}$, а исходное уравнение имеет вид

$$2\tilde{a}_{12} u_{\xi\eta} + \tilde{F} = 0.$$

Параболический тип ($D = 0$)

Тогда $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, а $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \implies a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}$. Собирая полные квадраты, получаем:

$$\tilde{a}_{11} = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = (-\sqrt{a_{22}}\xi_y + \sqrt{a_{22}}\xi_y) = 0,$$
$$\tilde{a}_{12} = \sqrt{a_{11}}\xi_x(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) + \sqrt{a_{22}}\xi_y(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) =$$
$$= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y).$$

Эллиптический тип $(D < 0)$

Тогда $\xi = \varphi + i\psi$, $\eta = \varphi - i\psi$, а $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$. Для исследования уравнений этого типа введём следующие переменные:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\xi+\eta}{2}, \\ \beta = \dfrac{\xi-\eta}{2i}, \end{cases} \implies \begin{array}{l} \xi = \alpha + i\beta = \xi(\alpha(x,y),\beta(x,y)), \\ \eta = \alpha - i\beta = \eta(\alpha(x,y),\beta(x,y)). \end{array}$$

Найдём тогда $\tilde{a}_{11}$:

$$\tilde{a}_{11} = a_{11}(\alpha_x + i\beta_x)^2 + 2a_{12}(\alpha_x + i\beta_x)(\alpha_y + i\beta_y) + a_{22}(\alpha_y + i\beta_y)^2 = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \alpha : a_{11}(\alpha_x)^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}(\alpha_y)^2, \\ \beta : a_{11}(\beta_x)^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}(\beta_y)^2, \\ i : 2i[a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \beta_x\alpha_y) + a_{22}\alpha_y\beta_y]. \end{cases}$$

Это достигается тогда, когда $\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22}$**, а** $\tilde{a}_{12} = 0$, если положить в формулах $\tilde{a}$ члены ξ и η равными соответствующими α и β.

Пример. Приведём к канонической форме уравнение $x^4u_{xx} - y^4u_{yy} = 0$. Для начала составим характеристическое уравнение:

$$x^4(dy)^2 - y^4(dx)^2 = 0.$$

Тогда $D = 2y^2 > 0 \implies$ *гиперболический тип*. Получаем:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^4 = 0 \implies \frac{dy}{dx} = \pm\left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Решив дифференциальное уравнение, мы получаем два корня:

- $\xi = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = C = \text{const}$,
- $\eta = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = C = \text{const}$.

Далее находим:

$$u_{xx} = \left(u_\xi\left(-\frac{1}{x^2}\right) + u_\eta\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)_x = \frac{1}{x^4}(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + \frac{2}{x^3}(u_\xi - u_\eta),$$

$$u_{yy} = \left(u_\xi\left(-\frac{1}{y^2}\right) + u_\eta\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right)_y = \frac{1}{y^4}(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + \frac{2}{y^3}(u_\xi + u_\eta).$$

Следующим шагом вычисляем $x^4u_{xx} - y^4u_{yy}$ и получаем:

$$x^4u_{xx} - y^4u_{yy} = \cdots = -4u_{\xi\eta} + 2(x-y)u_\xi - 2(x+y)u_\eta.$$

После, исходя из формул ξ и η, выразим $x+y$ и $x-y$ через ξ и η:

- $x - y = 4\dfrac{\eta}{\xi^2 - \eta^2}$,

- $x+y=4\dfrac{\xi}{\xi^2-\eta^2}$.

Осталось лишь подставить $x+y$ и $x-y$ и получить уравнение, записанное в канонической форме, зависящее лишь от ξ и η:

$$-\frac{8\eta}{\xi^2-\eta^2}u_\xi-4u_{\xi\eta}-\frac{8\xi}{\xi^2-\eta^2}u_\eta=0.$$

Замечание. На линейной алгебре было нечто подобное для уравнений с постоянными коэффициентами. Наш же способ работает и в том случае, но не наоборот.

Случай с постоянными коэффициентами

Гиперболический тип $(D>0)$

Решаем уравнение и, после интегрирования обеих частей, получаем:

$$y_{1,2}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x+C.$$

Тогда наши первые интегралы системы имеют вид:

$$\begin{cases}\xi=y-\dfrac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x,\\ \eta=y-\dfrac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x,\end{cases}$$

где они должны равняться константе C. В таком случае каноническая форма будет иметь следующий вид:

$$2\tilde{c}a_{12}u_{\xi\eta}+\tilde{F}(\xi,\eta,u)=0.$$

Параболический тип $(D=0)$

Имеем уравнение:

$$dy=\frac{a_{12}}{a_{11}}dx.$$

Отсюда делаем следующую замену:

$$\xi=y-\frac{a_{12}}{a_{11}}x.$$

При этом η мы выбираем сами. Например, для удобства возьмём $\eta=y$. В таком случае каноническая форма будет иметь следующий вид:

$$u_{\xi\xi}+\tilde{c}_1u_\xi+\tilde{c}_2u_\eta+\tilde{F}(\xi,\eta,u)=0.$$

Эллиптический тип $(D<0)$

Тогда будем иметь уравнение:

$$y=\frac{a_{12}\pm i\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x+C.$$

Разделяя на мнимую и вещественную части, мы получаем следующую замену:

$$\begin{cases} \xi = y - \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x, \\ \eta = \dfrac{\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x. \end{cases}$$

В таком случае каноническая форма будет иметь следующий вид:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0.$$

Примеры

Пример. Рассмотрим уравнение $\overbrace{36}^{a_{11}} u_{xx} \overbrace{-12}^{2a_{12}} u_{xy} + \overbrace{1}^{a_{22}} u_{yy} + 18u_x - 3u_y = 0$. После замены и нахождения $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y$ получаем **ответ**:

$$u_{\eta\eta} + \frac{1}{2}u_\xi = 0.$$

Пример. Рассмотрим уравнение $\overbrace{5}^{a_{11}} u_{xx} + \overbrace{4}^{2a_{12} \Longrightarrow a_{12}=2} u_{xy} + \overbrace{1}^{a_{22}} u_{yy} + u_x + u_y = 0$. Снова делаем замену, находим $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y$ и после подстановки получаем **ответ**:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{3}{5}u_\xi + \frac{1}{5}u_\eta = 0.$$