# Элементы теории поля

**Определение.** Пусть $G$ область в пространстве $\mathbb{R}^3$. Говорят, что в области $G$ задано скалярное поле, если каждой точке $M \in G$ поставлено в соответствие число $u(M) = u(x, y, z)$. В области $G$ заданно векторное поле, если каждой точке $M \in G$ поставлен в соответствие вектор $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Аналогично определяются скалярные и векторные поля в области $G \subset \mathbb{R}^2$. Будем говорить, что скалярные и векторные поля $u(M)$ и $\vec{a}(M)$ обладают некоторым свойством, если этим свойством обладают функции $u(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$.

**Определение.** Векторное поле называется дифференцируемым в области $G$, если дифференцируемы $P$, $Q$, $R$.

**Определение.** Пусть $u(M)$ дифференцируема в области $G \subset \mathbb{R}^3$ скалярное поле. Векторное поле

$$\mathrm{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

называется градиентом скалярного поля $u(M)$ в $G$.

**Замечание.** Многие понятия теории поля удобно записывать, используя символический вектор Гамильтона "набла"$\nabla$:

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

**Замечание.** Тогда получим, что

$$\mathrm{grad}(u) = \nabla u.$$

Правая часть понимается как умножение вектора на "число". Сам вектор набла не имеет реального значения, а приобретает это значение комбинацией со скалярными или векторными функциями.

**Определение.** Пусть даны скалярное поле $u(M)$ дифференцируемое в области $G$, точка $M_0 \in G$ и направление $\vec{e}(\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$. Производной поля $u(M)$ в точке $M_0$ по направлению $\vec{e}$ называется число

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos(\alpha) + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos(\beta) + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos(\gamma).$$

**Замечание.**

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \mathrm{grad}(u) \cdot \vec{e},$$

Здесь $\cdot$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

**Теорема.** Производная скалярного поля $u(M)$ в точке $M_0$ по направлению, определяемому вектором $\mathrm{grad}(u)$ в точке $M_0$ имеет наибольшее значение по сравнению с производной $u(M)$ в точке $M_0$ по любому другому направлению. Значение производной $u(M)$ в точке $M_0$ по направлению $\mathrm{grad}(u(M_0))$ равно $|\mathrm{grad}(u(M_0))|$.

*Доказательство.* Пусть $\varphi$ угол между $\vec{e}$ и $\vec{\text{grad}}(u(M_0))$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M_0) = \vec{\text{grad}} u(M_0) \cdot \vec{e} = |\vec{\text{grad}} u(M_0)||\vec{e}| \cos\varphi = |\vec{\text{grad}} u(M_0)| \cos\varphi.$$

Значение производной максимально, если $\cos\varphi = 1$. Тогда $\varphi = 0$. Значит направление вектора $\vec{\text{grad}}(u(M_0))$ совпадает с направлением вектора $\vec{e}$ и

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M_0) = |\vec{\text{grad}} u(M_0)|.$$

□

**Определение.** Пусть в области $G$ заданно векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ и существует определенная в $G$ функция $u = u(M)$ такая, что

$$\vec{a} = \vec{\text{grad}} u.$$

Тогда функция $u$ называется потенциалом векторного поля $\vec{a}$.

**Пример.** Пусть дан вектор $\vec{r}$. Разложим его по базису:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \qquad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{x}{|\vec{r}|^3}\vec{i} + \frac{y}{|\vec{r}|^3}\vec{j} + \frac{z}{|\vec{r}|^3}\vec{k}.$$

Пусть $G = \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$. Тогда функция $u == \frac{1}{|\vec{r}|}$ является потенциалом векторного поля $\vec{a}$ в множестве $G$.

**Определение.** Пусть векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ дифференцируемо в области $G$. Тогда скалярное поле

$$\text{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

называется дивергенцией векторного поля $\vec{a}$ в области $G$.

**Замечание.** Дивергенция поля может быть записана как "скалярное произведение"векторов набла и $\vec{a}$:

$$\text{div}\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}.$$

**Определение.** Пусть векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ дифференцируемо в области $G$. Ротором (вихрем) векторного поля $\vec{a}$ называется векторное поле:

$$\text{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

**Замечание.** Ротор поля $\vec{a}$ можно записать как "векторное произведение"оператора набла на $\vec{a}$:

$$\text{rot}\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \\ P & Q & & R \end{vmatrix}.$$

**Определение.** Векторное поле $\vec{a}$, заданное в области $G$ называется без вихревым, если

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \vec{0}.$$

**Определение.** Пусть $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ векторное поле непрерывное в области $G$, $\gamma$ ориентированный гладкий контур $G$. Интеграл

$$\oint\limits_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

называется циркуляцией векторного поля $\vec{a}$ по контуру $\gamma$. Обозначение:

$$\oint\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r}, \qquad d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

**Определение.** Векторное поле $\vec{a}$ заданное в области $G$ называется потенциальным, если циркуляция $\vec{a}$ по любому гладкому контуру, лежащему в $G$ равна нулю.

**Определение.** Говорят, что поверхность $S$ натянута на гладкий контур $\Gamma$, если существует ориентированная гладкая поверхность, лежащая в $G$ и имеющая контур $\Gamma$ своей границей.

**Определение.** Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ заданно непрерывное векторное поле $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. $S$ — гладкая ориентированная поверхность $G$, ориентация которой определяется единичным вектором нормали $\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Потоком векторного поля $\vec{a}$ через поверхность $S$ называется

$$\iint\limits_{S} \left(P\cos(\alpha) + Q\cos(\beta) + R\cos(\gamma)\right) ds = \iint\limits_{S} \vec{a} \cdot \vec{n} ds.$$

**Теорема.** Пусть область $V \subset \mathbb{R}^3$ правильная относительно всех координатных плоскостей. Пусть границей $V$ является гладкая поверхность $S$, ориентированная вектором внешней нормали $\vec{n}$. Пусть в $V$ заданно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$. Тогда

$$\iint\limits_{S} \vec{a} \cdot \vec{n} ds = \iiint\limits_{V} \mathrm{div}\vec{a} dxdydz$$

формула Остроградского-Гаусса в терминах теории поля. Поток векторного поля через границу $S$ области $V$ равняется тройному интегралу от дивергенции поля $\vec{a}$.

**Пример.** Найти поток векторного поля $\vec{a} = (x-1)^3\vec{i} + (y+2)^3\vec{j} + (z-2)^3\vec{k}$ через внешнюю сторону сферы $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = R^2$.

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 \le R^2\}, \qquad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 =$

$$\iint\limits_{S} \vec{a}\vec{n} ds = \iiint\limits_{V} \mathrm{div}\vec{a} dxdydz = \iiint\limits_{V} \left(3(x-1)^2 + 3(y+2)^2 + 3(z-2)^2\right) dxdydz =$$

Сделаем замену $x - 1 = 2\cos\varphi\cos\psi$, $y + 2 = 2\sin\varphi\cos\psi$, $z - 2 = 2\sin\psi$:

$$= 3\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int\limits_{0}^{R} r^2 \cos\gamma r^2 dr = \frac{12}{5}\pi R^5.$$