Номер 52

$$\sqrt{y^2+1}dx = xydy$$

Решение.

$$\sqrt{y^2+1}dx = xydy$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} + C$$

$$\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C \text{ - общее решение}$$

Проверим $x = 0$ и $\sqrt{y^2+1} = 0 => y^2 = -1 =>$ нет решения
Ответ: $x = 0$ **- особая точка,** $\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C$ **общее решение.**

Номер 54

Решение.

$$y' \operatorname{ctg} x + y = 2$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \operatorname{ctg} x + (y-2) = 0 | \cdot \frac{dx}{(y-2) \cdot \operatorname{ctg} x}$$

$$\int \frac{d(y-2)}{y-2} + \int \frac{dx}{\operatorname{ctg} x} = 0$$

$$\ln|y-2| - \ln|\cos x| + C = 0$$

$$\frac{|y-2|}{|\cos x|} = C$$

Доп условие: $y(x) \to -1$ при $x \to 0$, значит $\lim_{x\to 0} y(x) = 1$

$$-1 = C_1 \cdot \cos 0 + 2 \Rightarrow -1 = C_1 + 2 \Rightarrow C_1 = -3$$

$$y = 2 - 3\cos x$$

Ответ: $y = 2 + C_1 \cdot \cos x$ **- общее решение, с учетом усл:** $y = 2 - 3 \cdot \cos x$**.**

Номер 67

Решение.

$$3y^2y' + 16x = 2xy^3$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 16x - 2xy^3 = 0$$

$$3y^2dy + (16x - 2xy^3)dx = 0$$

Разделим на $(8 - y^3)$:

$$\frac{3y^2dy}{y^3 - 8} = \frac{2xdx}{1}$$

Введём замену:

$$t = y^3 - 8, \quad dt = 3y^2dy$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$\int \frac{dt}{t} = \int 2xdx + C$$

$$\ln|y^3 - 8| = x^2 + C$$

$$e^{\ln|y^3-8|} = e^{x^2+C}$$

$$y^3 - 8 = e^{x^2}e^C$$

Обозначим $C_1 = e^C$:

$$y^3 - 8 = C_1e^{x^2}$$

$$y = \sqrt[3]{C_1e^{x^2} + 8}$$

Найдём частное решение. По условию, $y(x)$ ограничена при $x \to +\infty$, значит $C_1 = 0$. Тогда

$$y = \sqrt[3]{8} = 2$$

Ответ: общее решение:

$$y = \sqrt[3]{C_1e^{x^2} + 8}$$

с учетом условия:

$$y = 2.$$

Номер 102

$$(x-y)dx+(x+y)dy=0$$

Решение. 1) Провеверим на однородность: $x, y \to kx, ky$

$$(kx-ky)dx+(kx+ky)dy=0$$

$$k[(x-y)dx+(x+y)dy]=0$$

2) Замена $z=\dfrac{y}{x} \Rightarrow y=zx \Rightarrow dy=zdx+xdz$

$$(x-zx)dx+(x+zx)\cdot(zdx+xdz)=0$$

$$xdx-zxdx+xzdx+x^2dz+z^2xdx+x^2zdz=0$$

$$(x+x^2z)dx+(x^2+x^2z)dz=0$$

Преобразуем:

$$x(1+z^2)dx+x^2(1+z^2)dz=0$$

Разделяем переменные:

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{1+\frac{z}{1+z^2}dz}{1+z^2}$$

Распишем правую часть:

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{z}{1+z^2}dz-\int\frac{1}{1+z^2}dz$$

Решение интегралов:

$$\int\frac{z}{1+z^2}dz=\frac{1}{2}\ln(1+z^2),\quad \int\frac{dz}{1+z^2}=\operatorname{arctg} z$$

Получаем:

$$C+\ln|x|=-\operatorname{arctg} z-\frac{1}{2}\ln(1+z^2)$$

Возводим в экспоненту:

$$e^{C+\ln|x|}=e^{-\operatorname{arctg} z-\frac{1}{2}\ln(1+z^2)}$$

$$C+\ln|x|=-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)$$

$$C-2\ln|x|=2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)$$

$$\ln(x^2+y^2)-\ln x^2=\ln(x^2+y^2)-2\ln x$$

$$2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln(x^2+y^2)=C+2\ln|x|-2\ln x$$

Итоговое общее решение:

$$\ln(x^2+y^2)=C-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Проверяем условия:

$$x^2=0,\quad 1+z^2=0$$

Поскольку решений нет, записываем:

Нет решений.

Задача 114

$$(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$$

Решение. Проверяем однородность:

$$2xy + 4x + y + 1 = 0$$

$$y = -2x - 1$$

$$4x + 2y + 3 = 0$$

Подставляя $y = -2x - 1$:

$$4x + 2(-2x - 1) + 3 = 0$$

$$4x - 4x - 2 + 3 = 0$$

$$1 \neq 0, \quad \text{нет решений.}$$

Прямые не пересекаются.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3}$$

Введём замену:

$$z = 2x + y, \quad dz = 2dx + dy$$

Тогда:

$$dz - 2dx = \frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3}dx$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 3} + 2$$

Выразим через z:

$$z' = \frac{z + 1}{2z - 3}$$

Решаем методом разделяющихся переменных:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{5(z - 1)}{2z - 3}$$

$$\int \frac{2z - 3}{z - 1}dz = \int 5dx$$

Разбиваем дробь:

$$\int 2\frac{z - 1}{z - 1}dz - \int \frac{dz}{z - 1} = \int 5dx$$

$$\int 2dz - \int \frac{dz}{z - 1} = \int 5dx$$

$$2z - \ln|z - 1| = 5x + C$$

Возвращаемся к z:

$$2(2x + y) - \ln|2x + y - 1| = 5x + C$$

$$4x + 2y - \ln|2x + y - 1| = 5x + C$$

$$2x + y - 1 = e^{\frac{C - 5x}{2}}$$

Общее решение:

$$2x + y + 1 = C_3 e^{2y - x}$$

Номер 121

$$x^3\left(y'-x\right)=y^2$$

Решение. Проверим на однородность:

$$x^3\frac{dy}{dx}=y^2$$

Неоднородное, так как при $x,y\to kx,ky$ не было бы явного x.
1) Замена:

$$y=zx^m$$

Подставляем:

$$x^3\left(mzx^{m-1}+x^mz'-x\right)=z^2x^{2m}$$

Уравнение будет однородным, если:

$$2m=3+m+1\Rightarrow m=2$$

2) Подставим $m=2$:

$$x^3\left(2zx+x^2z'-x\right)=z^2x^4$$

Теперь уравнение однородное.
3) Введём замену:

$$t=x,\quad z=\frac{y}{x^2}$$

Тогда:

$$dz=\frac{dy}{x^2}-\frac{2ydx}{x^3}$$

Подставляем:

$$dz=\frac{dx}{x}+xz'$$

Преобразуем уравнение:

$$z'=-t+xL'$$

Решаем методом разделяющихся переменных:

$$2t+2tx'-t^4=0$$

$$2tdx+2tx^2dx-t^4dx=0$$

$$2tdt=(t^4-2t)dx$$

$$2tdt=(t^2-1)dx$$

Итоговое уравнение с разделяющимися переменными:

$$\int\frac{2tdt}{(t^2-1)}=\int dx$$

Решение в общем виде:

$$(x^2-y)\ln Cx=x^2 \text{ - общее решение.}$$

Номер 140

$$x^2y' + xy + 1 = 0$$

Решение. Решим однородное: $x^2y' + xy = 0$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$\ln|y| = -\ln|x| + C$$

$$\ln|y| + \ln|x| = C$$

$$\ln|yx| = C$$

$$yx = e^C$$

Обозначим $e^C = C_1$:

$$yx = C_1$$

$$y = \frac{C_1}{x}$$

Подставляем в неоднородное уравнение:

$$x^2\left(\frac{C(x)\cdot x - x}{x^2}\right) + x\cdot\frac{C(x)}{x} + 1 = 0$$

Упрощаем:

$$C(x)\cdot x - x + C(x) + x + 1 = 0$$

$$C(x)\cdot x + C(x) + 1 = 0$$

Найдём $C(x)$:

$$\frac{dC}{dx}\cdot x = -1$$

$$\int dC = \int \frac{dx}{x}$$

Интегрируем:

$$C(x) = -\ln|x| + C_1$$

$$y = -\ln|x| + C_1$$

Общее решение:

$$xy = C - \ln|x|$$

Особых решений нет.

Номер 149

$$y' = \frac{y}{3x - y^2}$$

Решение.

$$y = y' \cdot (3x - y^2)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{3x - y^2}$$

Уравнение имеет вид линейного относительно x:

$$x' + P(y)x = Q(y)$$

Решим как однородное:

$$x = y^z$$

$$\frac{dx}{dy} = 3\frac{x}{y}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dx}{3x} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\frac{1}{3}\ln|x| = \ln|y| + C$$

$$e^{\frac{1}{3}\ln|x|} = e^{\ln|y| + C}$$

$$|x| = y^3 e^C$$

Обозначим $C_1 = e^C$:

$$x = y^3 C_1$$

Теперь найдём $C(y)$:

$$3y^2 C(x) + y^3 C'(x) = 3 \cdot y^4 C(x) - y$$

Разделим на y^3:

$$C'(x) = -y$$

Интегрируем:

$$C(x) = -\frac{1}{4}y^4 + C_1$$

$$x = y^3\left(-\frac{1}{4}y^4 + C_1\right)$$

$$x = y^2 - \frac{1}{4}y^5 + Cy^3$$

Общее решение:

$$x = y^2 + y^3 C$$

Особых решений нет.

Номер 155

$$xydy = (y^2 + x)dx$$

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + x}{xy} \Rightarrow y' = \frac{y^2 + x}{xy}$$

$$x \cdot y' = y + x \cdot y^{-1}, n = -1 \leftarrow \text{уравнение Бернулли}$$

Замена $z = \dfrac{1}{y^{n-1}} \Rightarrow z = \dfrac{1}{y^{-2}} = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{z},\ dz = 2ydy \Rightarrow dy = \dfrac{dz}{2\sqrt{z}}$

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y + \frac{x}{y} \rightarrow \frac{x}{dx} \cdot \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \sqrt{z} + \frac{x}{\sqrt{z}}$$

$$x \cdot z' = 2z + 2x$$

Замена $t = \dfrac{z}{x} \Rightarrow z = tx \Rightarrow z' = t + xt'$

$$\int \frac{dt}{t+2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|t+2| = \ln|x| + C$$

$$|t+2| = |x| \cdot e^C$$

Обратная замена $\dfrac{z}{x} + z = Cx \rightarrow y^2 = Cx^2 - 2x$ - общее решение.

Номер 252

$$xy'(xy'+y)=2y^2$$

Решение.

$$D=x^2y^2-4(-2y^2)\cdot x=x^2y^2+8xy^2=(3xy)^2$$

$$y'_{1,2}=\frac{-xy\pm 3xy}{2x^2}\Rightarrow y'_1=-\frac{2y}{x},\quad y'_2=\frac{y}{x}$$

1)

$$y'=-\frac{2y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2y}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int-\frac{2dx}{x}$$

$$\ln|y|=-2\ln|x|+\ln C$$

$$y=Cx^{-2}$$

$$yx^2=C$$

2)

$$y'=\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y|=\ln|x|+\ln C$$

$$y=Cx$$

Номер 268

$$x((y')^2 - 1) = 2y'$$

Решение.

$$x(y')^2 - 2y' - x = 0 \text{ - метод введения параметра.}$$

$$y' = p => \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = p \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{p}$$

$$x(p^2 - 1) = 2p$$

$$x = \frac{2p}{p^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{p} = -2\frac{(p^2 + 1)}{(p^2 - 1)^2}dp$$

$$dy = \frac{-2p \cdot (p^2 + 1)}{(p^2 - 1)}dp$$

$$y = -2\int p\left(\frac{p^2 - 1}{(p^2 - 1)^2} + \frac{2p}{(p^2 - 1)^2}\right)dp$$

$$= -2\int \frac{p}{p^2 - 1}dp - 2\int \frac{2p^2}{(p^2 - 1)^2}dp$$

$$= -\int \frac{d(p^2 - 1)}{p^2 - 1} - 2\int \frac{d(p^2 - 1)}{(p^2 - 1)^2}$$

$$\Rightarrow y = -\ln|p^2 - 1| + \frac{2}{p^2 - 1} + C$$

$$x = \frac{2p}{p^2 - 1}$$

Решение общее, особых нет.

Найдём особое решение:

Дифференцируем обе части исходного уравнения по y':

$$2xy' = 2 \Rightarrow y'' = \frac{X}{x}$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$x\left(\frac{1}{X^2}\right)^2 - 1 = \frac{2}{x} \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{X^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{X^2} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 1 \text{ (невозможно)} \Rightarrow \text{особых решений нет}$$

Номер 270

$$y' \cdot (x - \ln y') = 1$$

Решение.

$$y' \cdot xx - y' \cdot \ln y' = 1$$

$$x = \ln y' + \frac{1}{y'}$$

Вести параметр $\dfrac{dy}{dx} = p$

$$= \ln p + \frac{1}{p}$$

$$y = \int \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right) dp$$

$$= \int 1 - \frac{1}{p} dp$$

$$= p - \ln p + C$$

$$x = \ln p + \frac{1}{p}$$

Общее решение, особых решений нет.

Найдём особое решение:

Дифференцируем уравнение по y':

$$x - \ln y' - 1 = 1$$

$$y' = e^{x-2}$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$e^{x-2} \cdot (x - \ln e^{x-2}) = 1$$

$$e^{x-2} \cdot (x - x + 2) = 1$$

$$e^{x-2} = \frac{1}{2}$$

Такого решения нет, следовательно, особых решений нет.

Номер 212

$$(2x^2y^3-1)ydx+(4x^2y^3-1)xdy=0$$

Решение. 1)

$$(2x^2y^4-y)'_y=(4x^3y^3-x)'_x$$

$$8x^2y^3-1=12x^2y^3-1 \text{ - неверно. Проверка в полных диф-ах не пройдена.}$$

2)

$$2x^2y^4dx-ydx+4x^3y^3dy-xdy=0$$

$$2x^2y^2\cdot d(xy^2)-d(xy)=0$$

Замена

$$\begin{cases} z=xy\Rightarrow z^2=x^2y^2 \\ t=xy^2 \end{cases}$$

$$2z^2dt-dz=0$$

$$2\int dt-\int\frac{dz}{z^2}=0$$

$$2xy^2+\frac{1}{xy}=C \text{ - общее решение, а } x=0, y=0 \text{ - особые точки.}$$

Номер 257

$$(y')^2-2xy'=8x^2$$

Решение.

$$D=4x^2=36x^2$$

$$y'_{1,2}=\frac{2x\pm 6x}{2}$$

Общие решения: $y_1=2x^2+C \quad y_2=-x^2+C$

Номер 274

$$y=(y'-1)\cdot e^{y'}$$

Решение.

$$p=y'\Rightarrow\frac{dy}{dx}=p\Rightarrow dx=\frac{dy}{p}$$

$$y=(p-1)\cdot e^p$$

$$dx=\frac{dy}{p}=e^pdp$$

$$x=e^p+C \quad y=(p-1)\cdot e^p \quad y=-1$$

Номер 307

$$y^3 - y'e^{2x} = 0$$

Решение. Введём замену:

$$y' = p \Rightarrow dy = pdx \Rightarrow dx = \frac{dy}{p} \Rightarrow dy = pdx$$

Подставим в уравнение:

$$p^3 - pe^{2x} = 0$$

Разделим на p (если $p \neq 0$):

$$p^2 - e^{2x} = 0$$

Найдём корни:

$$p_{1,2} = \pm e^x$$

Тогда:

$$y'_{1,2} = \pm e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm e^x$$

Интегрируем:

$$\int dy = \int \pm e^x dx$$

$$y = C \pm e^x$$

Номер 309

$$(1 - x^2)dy + xydx = 0$$

Решение. Разделим уравнение на $(1 - x^2)y$:

$$\frac{1}{y}dy = \frac{xdx}{1 - x^2}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{xdx}{1 - x^2}$$

Решаем:

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1 - x^2| + \ln|C|$$

$$2\ln|y| = \ln|1 - x^2| + \ln|C|$$

$$y^2 = C(1 - x^2)$$

Это общее решение.

Особые решения при $x = \pm 1$.

Номер 310

$$y'' + 2(x-1)y' - 2y = 0$$

Решение. Разделим уравнение на 2:

$$\frac{y''}{2} + (x-1)y' - y = 0$$

Перепишем в стандартном виде:

$$y'' = y - (x-1)y'$$

Это уравнение Клеро.
Общее решение имеет вид:

$$y(x, C) = \frac{C^2}{2} + (x-1)C$$

Введём замену:

$$p = y', \quad dy = pdx$$

Тогда:

$$y = \frac{p^2}{2} + (x-1)p$$

Дифференцируем:

$$dy = pdp + (x-1)dp + pdx$$

Преобразуем:

$$(p + x - 1)dp = 0$$

Отсюда:

$$\int dp = 0, \quad p + x - 1 = 0$$

Следовательно:

$$p = C, \quad p = -x + 1$$

Тогда:

$$y(x) = \frac{(1-x)^2}{2} + (x-1)(1-x)$$

Итоговый результат:

$$y(x) = -\frac{(1-x)^2}{2}$$

Задача 1104

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(1-x)y'' - 2y' + y = 0$$

Решение. Решим задачу методом рядов.
1) Предположим, что решение имеет вид:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k$$

2) Тогда:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k x^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k(k-1) x^{k-2}$$

3) Подставляем в исходное уравнение:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k k(k-1)x^{k-2} - y_k k(k-1)x^{k-1} - 2y_k k x^{k-1} + y_k x^k = 0$$

4) Приравнивая коэффициенты при x^k:

$$y_k - k(k+1)y_{k+1} - 2(k+1)y_{k+1} + y_{k+2}(k+1)(k+2) = 0$$

5) Рекуррентное соотношение:

$$y_{k+2} = \frac{y_{k+1}(k+1)(k+2) - y_k}{(k+1)(k+2)}$$

6) Два линейно независимых решения:
Первое решение ($y_0 = 1, y_1 = 0$):

$$y_1 = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + \cdots$$

Второе решение ($y_0 = 0, y_1 = 1$):

$$y_2 = x + \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \cdots$$

Таким образом, общее решение:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

где c_1 и c_2 — произвольные константы.

Задача 1106

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - xy' + xy = 0$$

Решение. 1) Предположим решение в виде степенного ряда:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k$$

2) Производные:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k x^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k(k-1) x^{k-2}$$

3) Подставляем и приравниваем коэффициенты:

$$y_{k+3} = \frac{y_{k+1}(k+1) - y_k}{(k+3)(k+2)}$$

4) Три линейно независимых решения:
Первое решение $(y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 0)$:

$$y_1 = 1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 + \cdots$$

Второе решение $(y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 0)$:

$$y_2 = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \cdots$$

Третье решение $(y_0 = 0, y_1 = 0, y_2 = 1)$:

$$y_3 = x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{40}x^5 + \cdots$$

Таким образом, общее решение:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

где c_1, c_2 и c_3 — произвольные константы.

Задача 1110

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

Решение. 1) При $x_0 = 0 : p_0(0) = 0$ => $\sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+\alpha}$
2) Преобразуем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k (k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2+1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} y_k(k+\alpha)x^{k+\alpha-1} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+\alpha+1} = 0$$

3) min степень x: $k+\alpha-1$, $k=0$ => $\alpha - 1$ =>
при $k=0$: $y_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1} + 2y_0\alpha x^{\alpha-1} + y_0 x^{\alpha+1}$
$y_0(\alpha(\alpha-1)+2\alpha)$, где $(\alpha(\alpha-1)+2\alpha) = 0$, при $x^{\alpha-1}$ (минимальная степень x)
$\alpha(\alpha+1) = 0$ => $\alpha = 0; -1$, но берем -1, т.к. $\alpha = 0$ делает ряд обычным.
4) Получаем ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k \underset{k=p+2}{(k-1)(k-2)}x^{k-2} + 2\sum_{k=0}^{\infty} y_k \underset{k=p+2}{(k-1)}x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k \underset{k=p}{x^k} = 0$$

5) При x^p :

$$y_{p+2}(p+1) + 2y_{p+2}(p+1) + y_p = 0$$

$$y_{p+2}(p+1)(p+2) + y_p = 0$$

$$y_{p+2} = -\frac{y_p}{(p+1)(p+2)}$$

6) Построим матрицу:

$$\begin{array}{lcc} & 1) & 2) \\ y_0 = & 1 & 0 \\ y_1 = & 0 & 1 \end{array}$$

1) $y_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2!}$, $y_3 = 0$, $y_4 = -\frac{-\frac{1}{2}}{3\cdot 4} = \frac{1}{24} = \frac{1}{4!}$, $\cdots$ =>
=> $y_1 = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \cdots$
2) $y_2 = 0$, $y_3 = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = -\frac{1}{3!}$, $y_4 = 0$, $\cdots$ =>
=> $y_2 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$
7) Общее решение будет выглядить так: $y = c_1y_1 + c_2y_2$

Задача 1109

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''' - xy'' + (x-2)y' + y = 0$$

Решение. 1) При $x_0 = 0$, $p_0(0) \neq 0 => y = \sum_{k=0}^{\inf} y_k x^k$.
2) Преобразуем:

$$\sum_{k=0}^{\inf} k(k-1)\underset{k=p+3}{(k-2)} y_k x^{k-3} - \sum_{k=0}^{\inf} k\underset{k=p+1}{(k-1)} y_k x^{k-2+1} + \sum_{k=0}^{\inf} k\underset{k=p}{y_k x}^{k-1+1} - 2\sum_{k=0}^{\inf} \underset{k=p+1}{k y_k x}^{k-1} + \sum_{k=0}^{\inf} \underset{k=p}{y_k x}^{k} = 0$$

При x^p :

$$(p+3)(p+2)(p+1)y_{p+3} - (p+1)py_{p+1} + py_p - 2(p+1) + y_p = 0$$

Сократим $(p+1)$:

$$(p+3)(p+2)y_{p+3} - (p+2)y_{p+1} + y_p = 0$$

3) Выразим y :

$$y_{p+3} = \frac{y_{p+1}}{p+3} - \frac{y_p}{(p+3)(p+2)}$$

4) Построим единичную матрицу:

$$\begin{array}{rccc} & 1) & 2) & 3) \\ y_0 = & 1 & 0 & 0 \\ y_1 = & 0 & 1 & 0 \\ y_2 = & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

1) $y_3 = 0 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$, $y_4 = 0$, $y_1 = 1 - \frac{x^3}{6} + 0 + \cdots$
2) $y_3 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$, $y_4 = -\frac{1}{12}$, $y_2 = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + \cdots$
3) $y_3 = 0$, $y_4 = \frac{1}{4}$, $y_3 = x^2 + \frac{x^4}{4} + \cdots$

5) Таким образом общее решение:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

где c_1, c_2 и c_3 - произвольные константы.

Задача 1114

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x^2y'' + 2xy' - (x^2 + 2x + 2)y = 0.$$

Решение. 1) При $x_0 = 0, p_0(0) = 0 => $ Общий случай $y = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k x^{k+\alpha}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2+2}y_k+2\sum_{k=0}^{\infty}(x+\alpha)x^{k+\alpha-1+1}y_k-\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\alpha+2}y_k-2\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\alpha+1}y_k-2\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\alpha}y_k,$$

min степень икса: $k + \alpha, k_{min} = 0 => \alpha$

2) По x^{α} :

$$y_0(\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 2)$$

$$\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 2 = 0$$

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0 => \alpha_1 = -2, \alpha_2 = 1.$$

3) Рассмотрим $\alpha = 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\underset{k=p-1}{(k+1)ky_kx^{k+1}} + 2\sum_{k=0}^{\infty}\underset{k=p-1}{(k+1)y_kx^{k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty}\underset{k=p-3}{y_kx^{k+3}} - 2\sum_{k=0}^{\infty}\underset{k=p-2}{y_kx^{k+2}} - 2\sum_{k=0}^{\infty}\underset{k=p-1}{y_kx^{k+1}}$$

По x^p :

$$p(p-1)y_{p-1} + 2py_{p-1} - y_{p-3} - 2y_{p-2} = 0$$

$$(p^2 + p - 2)y_{p-1} = y_{p-3} + 2y_{p-2}$$

$$y_{p-1} = \frac{y_{p-3} + 2y_{p-2}}{p^2 + p - 2}$$

4) Построим матрицу:

	1.	2.
$y_0 =$	1	0
$y_1 =$	0	1

1. $p = 2, y_1 = \dfrac{0 + 2 * 1}{4} = \dfrac{1}{2}$

$p = 3, y_2 = \dfrac{1 + 2 * 0}{10} = \dfrac{1}{10}$

$p = 4, y_3 = \dfrac{1}{2}$

2. $p = 2, y_1 = 0$

$p = 3, y_2 = \dfrac{2}{10}$

$p = 4, y_3 = \dfrac{0 + \frac{4}{10}}{18} = \dfrac{1}{45}$

5) $y_1 =$

Задача 900

С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(2+\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2, 3 => \lambda_{1,2} = -2, 3 => \text{решение не устойчиво}$$

Задача 902

С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln\left(4y + e^{-3x}\right) \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x} \end{cases}$$

Решение. Матрица первого приближения:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x} & \frac{\delta f_1}{\delta y} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x} & \frac{\delta f_2}{\delta y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} std :: this_thread :: get_id() - \frac{3}{4ye^{3x}+1} & \frac{4e^{3x}}{4ye^{3x}+1} \\ -\frac{2}{\sqrt[3]{(1-6x)^2}} & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A_{(0,0)} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda)(2-\lambda) + 8 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 = -7$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7} \cdot i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}i}{2} =>$$

=> решение устойчиво.

Задача 916

Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1) \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} (x-1)(y-1) = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$1)(x, y) = (1, 2)$$

$$2)(x, y) = (2, 1)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} y-1 & x-1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

1)

$$\tilde{A}_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 = 0 => \lambda_{1,2} = 1 > 0 =>$$

=> не устойчива.

2)

$$\tilde{A}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$D = 4 + 4 = 8$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 =>$$

=> не устойчива.

Задача 918

Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(-x + y^2) \\ \dot{y} = x - y - 1 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} y^2 - x = 1 \\ y = x - 1 \end{cases} = \begin{cases} x = y^2 - 1 \\ y^2 - 1 - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 9$$

$$1)(x, y) = (3, 2)$$

$$2)(x, y) = (0, -1)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{y^2 - x} & \dfrac{2y}{y^2 - x} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1)

$$\tilde{A}_{(3,2)} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 4 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 = 16$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2 =>$$

=> не устойиво.

2)

$$\tilde{A}_{(0,-1)} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 = -8$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2} =>$$

=> устойчиво.

Номер 962

Исследовать особые точки. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y).

$$y' = \frac{x - 4y}{2y - 3x}$$

Решение.

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 2 \\ 1 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2, -5 =>$$

=> узел (устойчивый).

Номер 973

Исследовать особые точки. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y).

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = -6x - 5y \end{cases}$$

Решение.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ -6 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{2 \pm 3 \cdot i}{1} =>$$

=> фокус.

Задача 976

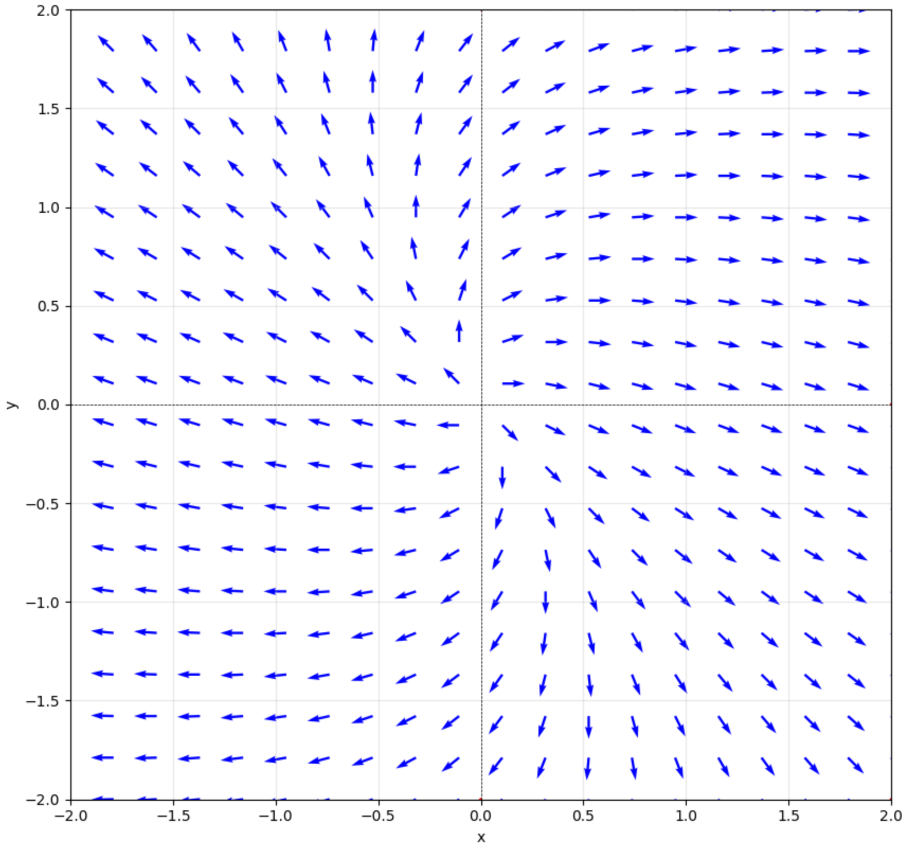
Исследовать особые точки. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y).

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = y - x \end{cases}$$

Решение.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = 3 - 3\lambda - 1\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$



Задача 980

Найти и исследовать особые точки.

$$y' = 2x + yx - 2y - 5$$

Решение.

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 2y - 5 = 0 \end{cases} \quad => x = 1, y = -2$$

Запишем матрицу 1-го приближения:

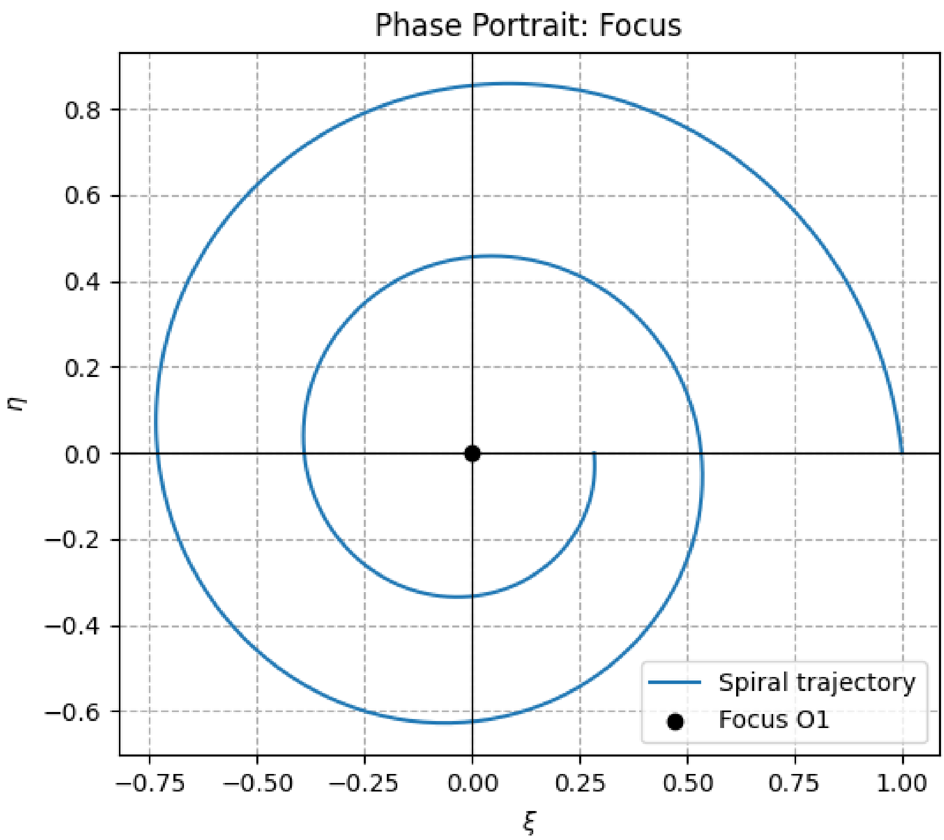
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 =>$$

$$=> \lambda_{1,2} = 1 \pm 2 \cdot i =>$$

=> фокус.



Номер 1145

$$\begin{cases} 2zy' = y^2 - z^2 + 1 \\ z' = z + y \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 2z(z' - z)' = (z' - z)^2 - z^2 + 1 \\ y = z' - z \end{cases}$$

$$2zz'' - 2zz' = (z')^2 - 2z'z + z^2 - z^2 + 1$$

$$2zz'' - (z')^2 - 1 = 0 \text{ - понизить порядок.}$$

Нет явно заданного аргумента => замена $z' = p(z); z'' = p'_z \cdot p$

$$2z \cdot p'p - p^2 - 1 = 0$$

$$2z \cdot \frac{dp}{dz} \cdot p = p^2 + 1 = 0| \cdot \frac{dz}{(p^2+1) \cdot 2z}$$

$$\int \frac{p}{p^2+1} dp = \int \frac{dz}{2z} = 0$$

Пусть $t = p^2 + 1$, $t' = 2p$. Тогда: $dp = \dfrac{1}{t'}dt => dp = \dfrac{1}{2p}dt$.

$$\int \frac{p}{p^2+1} dp = \int \frac{p}{2p \cdot t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t|$$

$$\frac{1}{2} \ln|p^2 + 1| = \frac{1}{2} \ln|z| - C$$

$$e^{\ln|p^2+1|} = e^{\ln|z| - C}$$

$$p^2 + 1 = \frac{z}{C_1}$$

$$p = \pm\sqrt{\frac{z}{C_1} - 1}$$

$$\frac{dz}{dx} = \pm\sqrt{\frac{z}{C_1} - 1}$$

$$\pm \int \frac{dz}{\sqrt{\frac{z}{C_1} - 1}} = \int dx$$

$$\pm 2\sqrt{C_1 z - C_1^2} + C_2 = x + C_3 =>$$

$=> z = C_1 + \dfrac{1}{4C_1}(x + C_2)^2 =>$

Ответ: $y = z' - z = \dfrac{1}{C_2}(x + C_2) - \dfrac{1}{4C_1}(x + C_2)^2 - C_1$

Номер 1153

$$\frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{-y}$$

Решение.

$$\frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{-y} = \frac{zdy + ydz}{z^- y^2}$$

$$\frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{zdy + ydz}{z^2 - y^2}$$

$$\int dx = \int d(zy)$$

$$x = zy + C_1$$

$$C_1 = x - zy$$

$$\frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y} => \int zdz => y^2 + z^2 = C_2$$

Ответ: $C_1 = x - zy, C_2 = y^2 + z^2$

Номер 1163

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{u} = -\frac{du}{z}$$

Решение. Пусть $\phi = yz - ux$. Тогда:

$$\frac{\delta\phi}{\delta y} = z; \frac{\delta\phi}{\delta z} = y; \frac{\delta\phi}{\delta u} = -x; \frac{\delta\phi}{\delta x} = -u$$

Проверить, чтобы $\frac{\delta\phi}{\delta x} \cdot F_x + \frac{\delta\phi}{\delta y} \cdot F_y + \frac{\delta\phi}{\delta z} \cdot F_z + \frac{\delta\phi}{\delta u} \cdot F_u = 0$

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} => F_x = y; F_y = -x$$

$$\frac{dz}{u} = -\frac{du}{z} => F_u = -z; F_z = u$$

Имеем: $-u \cdot y + z \cdot (-x) + y \cdot u + (-x) \cdot (-z) = 0$

$$0 = 0 => \phi \text{ - первый } \int \text{-л системы}$$

Номер 1180

$$(z-y)^2\frac{\delta z}{\delta x} + xz\cdot\frac{\delta z}{\delta y} = xy$$

Решение.

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}$$

- $$\frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}; \quad \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}; \quad \int ydy = \int zdz$$
$$y^2 - z^2 = C_1$$

- $$\frac{dy-dz}{x(z-y)} = \frac{dx}{(z-y)^2}; \quad \frac{dy-dz}{x} = \frac{dx}{z-y}$$
$$(z-y)\cdot d(z-y) + xdx = 0$$
$$d((z-y)^2+x^2) = 0 \quad => \quad (z-y)^2 + x^2 = C_2$$

$$F(y^2-z^2, x^2+(z-y)^2) = 0$$

Номер 1182

$$y\frac{\delta z}{\delta x} + z\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{y}{x}$$

Решение.

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = x\frac{dz}{y}$$

- $$\frac{dx}{y} = \frac{xdz}{y}; \quad \int\frac{dx}{x} = \int dz \quad => \quad \ln|x| = z + C_1$$

- $$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z}, \quad z = \ln|x| - C_1$$
$$dx\cdot(\ln|x| - C_1) = ydy$$
$$\int \ln|x|dx - \int C_1dx = \int ydy$$
$$\int \ln|x|\cdot 1dx = \ln x\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = \ln x\cdot x - x$$

- $$x\cdot ln|x| - x - xC_1 = \frac{1}{2}y^2 + C_2$$
$$-x + xz - \frac{1}{2}y^2 = C_2$$
$$-2x + 2xz - y^2 = C_2$$

$$F(\ln|x| - z, 2x(z-1) - y^2) = 0$$

Номер 1198

$$\begin{cases} x \cdot \dfrac{\delta z}{\delta x} - y \cdot \dfrac{\delta z}{\delta y} = z^2 \cdot (x - 3y) \\ x = 1 \\ yz + 1 = 0 \end{cases}$$

Решение.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z^2(x-3y)}$$

- $$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{-y}; \quad e^{\ln|x| + ln|y|} = e^{\ln C_1}$$
  $$xy = C_1$$

- $$\frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z^2(x-3y)}; \quad (x-3y) \cdot \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z^2}$$
  $$\int (-\frac{C_1}{y^2} + 3) \cdot dy = \int \frac{dz}{z^2}$$
  $$\frac{C_1}{y} + 3y = -\frac{1}{z} + C_2$$

- $$\begin{cases} C_1 = yx \quad => \quad y \\ C_2 = 1 + 2C_1 \\ x = 1 \\ y = -\dfrac{1}{z} \end{cases}$$

Получается, что $C_1 = xy$ и $C_2 = 1 + 2C_1 = x + 3y + \dfrac{1}{z} = 1 + 2xy$.

Ответ: $2xy + 1 = x + 3y + \dfrac{1}{z}$

Номер 1181

$$xy\frac{\delta z}{\delta x} + (x-2z)\cdot\frac{\delta z}{\delta y} = yz$$

Решение.

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x-2z} = \frac{dz}{yz}$$

- $$\frac{dx}{xy} = \frac{dz}{yz}; \quad \int\frac{dx}{x} = \int\frac{dz}{z};$$
  $$\ln|z| - \ln|x| = C_1 \quad => \quad \frac{z}{x} = C_1$$

- $$\frac{dx-2dz}{y(x-2z)} = \frac{dy}{x-2z}; \quad \int dx - \int 2dz = \int ydy$$
  $$x - 2z - \frac{y^2}{2} = C_2$$
  $$2x - 4z - y^2 = C_2$$

Ответ: $F(\frac{z}{x}, 2x-4z-y^2) = 0$

Номер 1183

$$\sin^2 x\cdot\frac{\delta z}{\delta x} + \operatorname{tg} z\cdot\frac{\delta z}{\delta y} = \cos^2 x$$

Решение.

$$\frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{dy}{\cos^2 z} = \frac{dz}{cos^2 z}$$

- $$\int\frac{dx}{\sin^x} = \frac{dz}{\cos^z}$$
  $$-\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} z + C_1$$
  $$C_1 = \operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} x$$

- $$\frac{dy}{\operatorname{tg} z} = \frac{dz}{\cos^2 z}; \quad \int\frac{\operatorname{tg} z}{\cos^2 d}dz$$
  $$\int\frac{\operatorname{tg} z}{\cos^2 z}dz = \int\frac{\sin z}{\cos^3 z}dz = \int\frac{1}{\cos^3 z}d(\cos z) = \frac{1}{2\cdot cos^2 z} + C_2$$
  $$y = \frac{1}{2\cdot\cos^2 z} + C_2$$

Ответ: $F(\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} x, \quad y - \frac{1}{2\cdot\cos^2 z})$

Номер 1201

$$z \cdot \frac{\delta z}{\delta x} - xy \cdot \frac{\delta z}{\delta y} = 2xz; \quad x + y = 2; \quad yz = 1$$

Решение.

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{2xz}$$

- $$\frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{2xz} \quad => \quad -2\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dz}{z};$$

  $$e^{\ln|z| + \ln|y|^2} = e^{C_1}$$

  $$y^2 z = C_1$$

- $$\frac{dx}{z} = \frac{dz}{2xz} \quad => \quad \int 2x dx = \int dz; \quad x^2 + C_2 = z$$

  С учетом заданных доп. условий:

$$\begin{cases} C_1 = y^2 z = yz \cdot y = y \\ C_2 = x^2 - z = (2 - y)^2 - z = (2 - C_1)^2 - z \\ x + y = 2 \quad => \quad x = 2 - y \\ yz = 1 \end{cases}$$

Ответ: $(2 - y^2 z)^2 = x^2$

Номер 772

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$y'' = f(x) \tag{1}$$

с граничными условиями:

$$y(0) = 0, \quad y(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty. \tag{2}$$

Решение.

- Общее решение уравнения:

$$y'' = 0 \Rightarrow y(x) = Ax + B. \tag{3}$$

- Для области $0 \leq x \leq s$:

$$G(x, s) = Ax + B. \tag{4}$$

Условие $G(s, s) = 0$ даёт $B = 0$, следовательно:

$$G(x, s) = Ax. \tag{5}$$

- Для области $x > s$:

$$G(x, s) = Cx + D. \tag{6}$$

Так как $G(x, s) \to 0$ при $x \to +\infty$, необходимо $C = 0$, откуда:

$$G(x, s) = D. \tag{7}$$

- Условие разрыва первой производной:

$$G'(s + 0, s) - G'(s - 0, s) = 1. \tag{8}$$

Подставляя $G'(x, s)$:

$$0 - A = 1 \Rightarrow A = -1. \tag{9}$$

Так как $As = D$, получаем $D = -s$.

Таким образом, функция Грина:

$$G(x, s) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq s, \\ -s, & x \geq s. \end{cases} \tag{10}$$

Номер 765

Решение.

$$y'' + y = f(x) \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$G(x,s) = A(s)\cos x + B(s)\sin x, \text{ где } 0 \le x \le s$$

$$G'(0,s) = 0$$

$$A(s)\sin(0) + B(s)\cos(0) = 0 \Rightarrow B(s) = 0$$

$$G(x,s) = A(s)\cos(x)$$

при $s \le x \le \pi$.

$$G(x,s) = C(s)\cos(x) + D(s)\sin(x)$$

$$G(\pi,s) = 0: \quad C(s)\cos(\pi) + D(s)\sin(\pi) = 0$$

$$C(s) = 0$$

$$G(x,s) = D(s)\sin(x)$$

$$A(s)\cos(x) = D(s)\sin(x)$$

$$G'(s+0,s) - G(s-0,s) = 1$$

- $$D(s)\cos(s) = -A(s)\sin(s) = 1$$
  $$D(s)\cos(s) + A(s)\sin(s) = 1$$

- $$\begin{cases} A(s)\cos(s) - D(s)\sin(s) = 1 \\ D(s)\cos(s) + A(s)\sin(s) = 1 \end{cases}$$

  Преобразуем:

  $$A(s)\cos(s) + D(s)\cos^2(s) + A(s)\sin^2(s) = \cos(s)$$
  $$A(s)(\sin^2(s) + \cos^2(s)) = \cos(s)$$
  $$A(s) = \cos(s)$$

- $$A(s)\cos(s) = D(s)\sin(s) \Rightarrow A(s) = \sin(s)$$
  $$D(s) = \cos(s)$$

Ответ:

$$G(x,s) = \begin{cases} \sin(s)\cos(x), & 0 \le x \le s, \\ \cos(s)\sin(x), & s < x \le \pi. \end{cases}$$

Номер 770

$$xy'' - y' = 0$$

$$y'(1) = 0, \quad y(2) = 0$$

Решение. Обозначим $z = y'$, тогда уравнение принимает вид:

$$xz' - z = 0$$

Решаем уравнение:

$$xz' = z$$
$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$$
$$\ln|z| = \ln|x| + C$$

$$z = Cx$$

$$y' = Cx$$
$$y = \frac{Cx^2}{2} + C_1$$

Рассмотрим области $1 \le x \le s$:

$$G(x,s) = A(s)\frac{x^2}{2} + B(s)$$

$$G'(x,s) = A(s)x$$

Так как $G'(1,s) = 0$, то:

$$A(s) = 0$$

$$G(x,s) = B(s)$$

Рассмотрим область $s \le x \le 2$:

$$G(x,s) = C(s)\frac{x^2}{2} + D(s)$$

$$C(s)\frac{2^2}{2} + D(s) = 0$$
$$D(s) = -2C(s)$$
$$G(x,s) = C(s)\left(\frac{x^2}{2} - 2\right)$$

$$G(s+0,s) - G(s-0,s) = 1$$

$$C(s)s - 0 = 1$$

$$C(s) = \frac{1}{s}$$