Задача 1104

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(1-x)y'' - 2y' + y = 0$$

Решение. Решим задачу методом рядов.

1) Предположим, что решение имеет вид:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k$$

2) Тогда:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k x^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k(k-1)x^{k-2}$$

3) Подставляем в исходное уравнение:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k k(k-1)x^{k-2} - y_k k(k-1)x^{k-1} - 2y_k k x^{k-1} + y_k x^k = 0$$

4) Приравнивая коэффициенты при x^k:

$$y_k - k(k+1)y_{k+1} - 2(k+1)y_{k+1} + y_{k+2}(k+1)(k+2) = 0$$

5) Рекуррентное соотношение:

$$y_{k+2} = \frac{y_{k+1}(k+1)(k+2) - y_k}{(k+1)(k+2)}$$

6) Два линейно независимых решения:

Первое решение ($y_0 = 1, y_1 = 0$):

$$y_1 = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + \cdots$$

Второе решение ($y_0 = 0, y_1 = 1$):

$$y_2 = x + \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \cdots$$

Таким образом, общее решение:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

где c_1 и c_2 — произвольные константы.

Задача 1106

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - xy' + xy = 0$$

Решение. 1) Предположим решение в виде степенного ряда:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k$$

2) Производные:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k x^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k(k-1) x^{k-2}$$

3) Подставляем и приравниваем коэффициенты:

$$y_{k+3} = \frac{y_{k+1}(k+1) - y_k}{(k+3)(k+2)}$$

4) Три линейно независимых решения:
Первое решение ($y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 0$):

$$y_1 = 1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 + \cdots$$

Второе решение ($y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 0$):

$$y_2 = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \cdots$$

Третье решение ($y_0 = 0, y_1 = 0, y_2 = 1$):

$$y_3 = x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{40}x^5 + \cdots$$

Таким образом, общее решение:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

где c_1, c_2 и c_3 — произвольные константы.

Задача 1110

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

Решение. 1) При $x_0 = 0 : p_0(0) = 0 => \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+\alpha}$
2) Преобразуем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2+1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} y_k(k+\alpha)x^{k+\alpha-1} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+\alpha+1} = 0$$

3) min степень x: $k+\alpha-1$, $k=0 => \alpha - 1 =>$
при $k=0$: $y_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1} + 2y_0\alpha x^{\alpha-1} + y_0 x^{\alpha+1}$
$y_0(\alpha(\alpha-1)+2\alpha)$, где $(\alpha(\alpha-1)+2\alpha) = 0$, при $x^{\alpha-1}$ (минимальная степень x)
$\alpha(\alpha+1) = 0 => \alpha = 0; -1$, но берем -1, т.к. $\alpha = 0$ делает ряд обычным.
4) Получаем ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k \underset{k=p+2}{(k-1)(k-2)x^{k-2}} + 2\sum_{k=0}^{\infty} y_k \underset{k=p+2}{(k-1)x^{k-2}} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k \underset{k=p}{x^k} = 0$$

5) При x^p :

$$y_{p+2}(p+1) + 2y_{p+2}(p+1) + y_p = 0$$

$$y_{p+2}(p+1)(p+2) + y_p = 0$$

$$y_{p+2} = -\frac{y_p}{(p+1)(p+2)}$$

6) Построим матрицу: $\begin{array}{lcc} & 1) & 2) \\ y_0 = & 1 & 0 \\ y_1 = & 0 & 1 \end{array}$

1) $y_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2!}$, $y_3 = 0$, $y_4 = -\frac{-\frac{1}{2}}{3\cdot 4} = \frac{1}{24} = \frac{1}{4!}$, $\cdots =>$
$=> y_1 = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \cdots$
2) $y_2 = 0$, $y_3 = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = -\frac{1}{3!}$, $y_4 = 0$, $\cdots =>$
$=> y_2 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$
7) Общее решение будет выглядить так: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

Задача 1109

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''' - xy'' + (x-2)y' + y = 0$$

Решение. 1) При $x_0 = 0$, $p_0(0) \neq 0 => y = \sum_{k=0}^{\inf} y_k x^k$.
2) Преобразуем:

$$\sum_{k=0}^{\inf} k(k-1)\underset{k=p+3}{(k-2)y_k x^{k-3}} - \sum_{k=0}^{\inf} k\underset{k=p+1}{(k-1)y_k x^{k-2+1}} + \sum_{k=0}^{\inf} \underset{k=p}{k y_k x^{k-1+1}} - 2\sum_{k=0}^{\inf} \underset{k=p+1}{k y_k x^{k-1}} + \sum_{k=0}^{\inf} \underset{k=p}{y_k x^k} = 0$$

При x^p :

$$(p+3)(p+2)(p+1)y_{p+3} - (p+1)py_{p+1} + py_p - 2(p+1) + y_p = 0$$

Сократим $(p+1)$:

$$(p+3)(p+2)y_{p+3} - (p+2)y_{p+1} + y_p = 0$$

3) Выразим y :

$$y_{p+3} = \frac{y_{p+1}}{p+3} - \frac{y_p}{(p+3)(p+2)}$$

4) Построим единичную матрицу:

$$\begin{array}{cccc} & 1) & 2) & 3) \\ y_0 = & 1 & 0 & 0 \\ y_1 = & 0 & 1 & 0 \\ y_2 = & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

1) $y_3 = 0 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$, $y_4 = 0$, $y_1 = 1 - \frac{x^3}{6} + 0 + \cdots$
2) $y_3 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$, $y_4 = -\frac{1}{12}$, $y_2 = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + \cdots$
3) $y_3 = 0$, $y_4 = \frac{1}{4}$, $y_3 = x^2 + \frac{x^4}{4} + \cdots$

5) Таким образом общее решение:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

где c_1, c_2 и c_3 - произвольные константы.

Задача 1114

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x^2y'' + 2xy' - (x^2 + 2x + 2)y = 0.$$

Решение. 1) При $x_0 = 0, p_0(0) = 0 =>$ Общий случай $y = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k x^{k+\alpha}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2+2}y_k+2\sum_{k=0}^{\infty}(x+\alpha)x^{k+\alpha-1+1}y_k-\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\alpha+2}y_k-2\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\alpha+1}y_k-2\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\alpha}y_k,$$

min степень икса: $k + \alpha, k_{min} = 0 => \alpha$

2) По x^α :

$$y_0(\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 2)$$

$$\alpha(\alpha-1) + 2\alpha - 2 = 0$$

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0 => \alpha_1 = -2, \alpha_2 = 1.$$

3) Рассмотрим $\alpha = 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\underset{k=p-1}{(k+1)ky_kx^{k+1}} + 2\sum_{k=0}^{\infty}\underset{k=p-1}{(k+1)y_kx^{k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty}\underset{k=p-3}{y_kx^{k+3}} - 2\sum_{k=0}^{\infty}\underset{k=p-2}{y_kx^{k+2}} - 2\sum_{k=0}^{\infty}\underset{k=p-1}{y_kx^{k+1}}$$

По x^p :

$$p(p-1)y_{p-1} + 2py_{p-1} - y_{p-3} - 2y_{p-2} = 0$$

$$(p^2 + p - 2)y_{p-1} = y_{p-3} + 2y_{p-2}$$

$$y_{p-1} = \frac{y_{p-3} + 2y_{p-2}}{p^2 + p - 2}$$

4) Построим матрицу:

	1.	2.
$y_0 =$	1	0
$y_1 =$	0	1

1. $p = 2, y_1 = \dfrac{0 + 2 * 1}{4} = \dfrac{1}{2}$
   $p = 3, y_2 = \dfrac{1 + 2 * 0}{10} = \dfrac{1}{10}$
   $p = 4, y_3 = \dfrac{1}{2}$
2. $p = 2, y_1 = 0$
   $p = 3, y_2 = \dfrac{2}{10}$
   $p = 4, y_3 = \dfrac{0 + \frac{4}{10}}{18} = \dfrac{1}{45}$

5) $y_1 =$

Задача 900

С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(2+\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2, 3 => \lambda_{1,2} = -2, 3 => \text{решение не устойчиво}$$

Задача 902

С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln\left(4y + e^{-3x}\right) \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x} \end{cases}$$

Решение. Матрица первого приближения:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\delta f_1}{\delta x} & \dfrac{\delta f_1}{\delta y} \\ \dfrac{\delta f_2}{\delta x} & \dfrac{\delta f_2}{\delta y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{4ye^{3x}+1} & \dfrac{4e^{3x}}{4ye^{3x}+1} \\ -\dfrac{2}{\sqrt[3]{(1-6x)^2}} & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A_{(0,0)} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda)(2-\lambda) + 8 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 = -7$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7} \cdot i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7} i}{2} =>$$

=> решение устойчиво.

Задача 916

Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1) \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} (x-1)(y-1) = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$1)(x, y) = (1, 2)$$

$$2)(x, y) = (2, 1)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} y-1 & x-1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

1)

$$\tilde{A}_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 = 0 => \lambda_{1,2} = 1 > 0 =>$$

=> не устойчива.

2)

$$\tilde{A}_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$D = 4 + 4 = 8$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 =>$$

=> не устойчива.

Задача 918

Найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(-x + y^2) \\ \dot{y} = x - y - 1 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} y^2 - x = 1 \\ y = x - 1 \end{cases} = \begin{cases} x = y^2 - 1 \\ y^2 - 1 - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 9$$

$$1)(x, y) = (3, 2)$$

$$2)(x, y) = (0, -1)$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{y^2 - x} & \dfrac{2y}{y^2 - x} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1)

$$\tilde{A}_{(3,2)} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 4 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 = 16$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2 =>$$

=> не устойиво.

2)

$$\tilde{A}_{(0,-1)} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{A} - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 = -8$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2} =>$$

=> устойчиво.