Лекция 1. Классификация и приведение к каноническому виду диференциальных уравнений 2 порядка.

Определение. Уравнением в частных производных 2 порядка называют

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\delta^2 u}{\delta x_i \delta x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\delta u}{\delta x_i} + cu + f(x) = 0$$

$$u = u(x_1, \cdots, x_n), c = c(x), a_{ij} = a_{ij}(x), b_i = b_i(x)$$

Если $u, c, a_{ij}, b_i = \text{const} \quad \forall i, j$, то уравнение имеет пстоянные коэфициенты.
Рассмотрим случай $n = 2$:

$$a_{11}(x,y)\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + 2a_{12}(x,y)\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} + a_{22}(x,y)\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + F(f(x,y), \frac{\delta u}{\delta x}, \frac{\delta u}{\delta y}, u) = 0$$

Замечание. Принято писать $\frac{\delta u}{\delta x} = u_x, \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = u_{xy}, \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = u_{xx}, \cdots$.

Сделаем замену переменных: $\xi = \phi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y)$. И так как они линейно независимы:

$$\mathbb{J} = \begin{vmatrix} \frac{\delta \phi}{\delta x} & \frac{\delta \phi}{\delta y} \\ \frac{\delta \psi}{\delta x} & \frac{\delta \psi}{\delta y} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$u_x = \xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta$$

$$u_{xx} = (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta)_x = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{yy} = (\xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta)_y = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_{yy}$$

$$u_{xy} = (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_y = \cdots .$$

Подставляя это в исходное уравнение, мы получим:

$$u'_{\xi\xi}\overbrace{[a_{11}(\xi_x)^2 + a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}(\xi_y)^2]}^{\tilde{a}_{11}} + u_{\eta\eta}\overbrace{[a_{11}(\eta_x)^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}(\eta_y)^2]}^{\tilde{a}_{22}} +$$

$$+ u_{\eta\xi}\overbrace{[2a_{11}\xi_x\eta_x + 2a_{22}\xi_y\eta_y + 2a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)]}^{\tilde{a}_{12}} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0$$

Итого, получаем:

$$a_{11}(\xi_x)^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}(\xi_y)^2 = 0$$

$$a_{11}\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right) + a_{22} = 0$$

Пусть $\xi(x,y) = \text{const}$, выразим тогда $y = y(x)$. Отсюда $d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y}$ Значит имеем:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_{22} = 0$$

Определение. $a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}(dx)^2 = 0$ - характеристическое уравнение исходного уравнения.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \overbrace{\sqrt{(a_{12})^2 - a_{11}a_{22}}}^{D}}{a_{11}}$$

1. D $>$ 0 - гиперболический тип;

2. D $=$ 0 - параболический тип;

3. D $<$ 0 - эллиптический тип.

В 1. делаем замену $\xi = \phi(x,y) = c, \quad \eta = \psi(x,y) = c$
В 2. $\xi = \phi(x,y) = c \qquad \eta = \psi(x,y) = c$ - выбираем сами. Она должна быть лин. независимо от $\phi(x,y)$
В 3. имеем $\overbrace{\phi(x,y)}^{\xi} \pm i \overbrace{\psi(x,y)}^{\eta} = c$