Задача 1104

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(1-x)y'' - 2y' + y = 0$$

Решение. Решим задачу методом рядов.
1) Предположим, что решение имеет вид:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k$$

2) Тогда:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k x^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k(k-1) x^{k-2}$$

3) Подставляем в исходное уравнение:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k k(k-1)x^{k-2} - y_k k(k-1)x^{k-1} - 2y_k k x^{k-1} + y_k x^k = 0$$

4) Приравнивая коэффициенты при x^k:

$$y_k - k(k+1)y_{k+1} - 2(k+1)y_{k+1} + y_{k+2}(k+1)(k+2) = 0$$

5) Рекуррентное соотношение:

$$y_{k+2} = \frac{y_{k+1}(k+1)(k+2) - y_k}{(k+1)(k+2)}$$

6) Два линейно независимых решения:
Первое решение ($y_0 = 1, y_1 = 0$):

$$y_1 = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + \cdots$$

Второе решение ($y_0 = 0, y_1 = 1$):

$$y_2 = x + \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \cdots$$

Таким образом, общее решение:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

где c_1 и c_2 — произвольные константы.

Задача 1106

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - xy' + xy = 0$$

Решение. 1) Предположим решение в виде степенного ряда:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k$$

2) Производные:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k x^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} y_k k(k-1) x^{k-2}$$

3) Подставляем и приравниваем коэффициенты:

$$y_{k+3} = \frac{y_{k+1}(k+1) - y_k}{(k+3)(k+2)}$$

4) Три линейно независимых решения:

Первое решение ($y_0 = 1, y_1 = 0, y_2 = 0$):

$$y_1 = 1 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 + \cdots$$

Второе решение ($y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 0$):

$$y_2 = x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \cdots$$

Третье решение ($y_0 = 0, y_1 = 0, y_2 = 1$):

$$y_3 = x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{40}x^5 + \cdots$$

Таким образом, общее решение:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

где c_1, c_2 и c_3 — произвольные константы.

Задача 1109

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y''' - xy'' + (x-2)y' + y = 0$$

Решение. 1) При $x_0 = 0$, $p_0(0) \neq 0 => y = \sum_{k=0}^{\inf} y_k x^k$.
2) Преобразуем:

$$\sum_{k=0}^{\inf} k(k-1)\underset{k=p+3}{(k-2)} y_k x^{k-3} - \sum_{k=0}^{\inf} k\underset{k=p+1}{(k-1)} y_k x^{k-2+1} + \sum_{k=0}^{\inf} k\underset{k=p}{y_k x}^{k-1+1} - 2\sum_{k=0}^{\inf} \underset{k=p+1}{k y_k} x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\inf} \underset{k=p}{y_k x^k} = 0$$

При x^p :

$$(p+3)(p+2)(p+1)y_{p+3} - (p+1)py_{p+1} + py_p - 2(p+1) + y_p = 0$$

Сократим $(p+1)$:

$$(p+3)(p+2)y_{p+3} - (p+2)y_{p+1} + y_p = 0$$

3) Выразим y :

$$y_{p+3} = \frac{y_{p+1}}{p+3} - \frac{y_p}{(p+3)(p+2)}$$

4) Построим единичную матрицу:

$$\begin{array}{rccc} & 1) & 2) & 3) \\ y_0 = & 1 & 0 & 0 \\ y_1 = & 0 & 1 & 0 \\ y_2 = & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

1) $y_3 = 0 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$, $y_4 = 0$, $y_1 = 1 - \frac{x^3}{6} + 0 + \cdots$
2) $y_3 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$, $y_4 = -\frac{1}{12}$, $y_2 = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + \cdots$
3) $y_3 = 0$, $y_4 = \frac{1}{4}$, $y_3 = x^2 + \frac{x^4}{4} + \cdots$

5) Таким образом общее решение:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

где c_1, c_2 и c_3 - произвольные константы.

Задача 1110

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

Решение. 1) При $x_0 = 0 : p_0(0) = 0 => \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+\alpha}$
2) Преобразуем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha-2+1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} y_k(k+\alpha)x^{k+\alpha-1} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+\alpha+1} = 0$$

3) min степень x: $k+\alpha-1$, $k=0 => \alpha - 1 =>$
при $k=0$: $y_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1} + 2y_0\alpha x^{\alpha-1} + y_0 x^{\alpha+1}$
$y_0(\alpha(\alpha-1)+2\alpha)$, где $(\alpha(\alpha-1)+2\alpha) = 0$, при $x^{\alpha-1}$ (минимальная степень x)
$\alpha(\alpha+1) = 0 => \alpha = 0; -1$, но берем -1, т.к. $\alpha = 0$ делает ряд обычным.
4) Получаем ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k \underset{k=p+2}{(k-1)(k-2)x^{k-2}} + 2\sum_{k=0}^{\infty} y_k \underset{k=p+2}{(k-1)x^{k-2}} + \sum_{k=0}^{\infty} y_k \underset{k=p}{x^k} = 0$$

5) При x^p :

$$y_{p+2}(p+1) + 2y_{p+2}(p+1) + y_p = 0$$

$$y_{p+2}(p+1)(p+2) + y_p = 0$$

$$y_{p+2} = -\frac{y_p}{(p+1)(p+2)}$$

6) Построим матрицу:
$$\begin{array}{ccc} & 1) & 2) \\ y_0 = & 1 & 0 \\ y_1 = & 0 & 1 \end{array}$$

1) $y_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2!}$, $y_3 = 0$, $y_4 = -\frac{-\frac{1}{2}}{3\cdot 4} = \frac{1}{24} = \frac{1}{4!}$, $\cdots =>$
$=> y_1 = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \cdots$
2) $y_2 = 0$, $y_3 = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = -\frac{1}{3!}$, $y_4 = 0$, $\cdots =>$
$=> y_2 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$
7) Общее решение будет выглядить так: $y = c_1y_1 + c_2y_2$