

Лекция 1. Классификация и приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений 2 порядка.

Определение. Уравнением в частных производных 2 порядка называют

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\delta^2 u}{\delta x_i \delta x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\delta u}{\delta x_i} + cu + f(x) = 0$$

$$u = u(x_1, \dots, x_n), c = c(x_1, \dots, x_n), a_{ij} = a_{ij}(x_1, \dots, x_n), b_i = b_i(x_1, \dots, x_n)$$

Если $u, c, a_{ij}, b_i = \text{const} \quad \forall i, j$, то уравнение имеет постоянные коэффициенты.

Рассмотрим случай $n = 2$:

$$a_{11}(x, y) \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + 2a_{12}(x, y) \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} + a_{22}(x, y) \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + F(f(x, y), \frac{\delta u}{\delta x}, \frac{\delta u}{\delta y}, u) = 0$$

Замечание. Принято писать $\frac{\delta u}{\delta x} = u_x, \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = u_{xy}, \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = u_{xx}, \dots$

Сделаем замену переменных: $\xi = \phi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$. И так как они линейно независимы:

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\delta \phi}{\delta x} & \frac{\delta \phi}{\delta y} \\ \frac{\delta \psi}{\delta x} & \frac{\delta \psi}{\delta y} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$u_x = \xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta$$

$$u_{xx} = (\xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta)_x = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{yy} = (\xi_y u_\xi + \eta_y u_\eta)_y = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}$$

$$u_{xy} = (u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)_y = \dots$$

Подставляя это в исходное уравнение, мы получим:

$$\begin{aligned} & u_{\xi\xi} \overbrace{[a_{11}(\xi_x)^2 + a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}(\xi_y)^2]}^{\tilde{a}_{11}} + u_{\eta\eta} \overbrace{[a_{11}(\eta_x)^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}(\eta_y)^2]}^{\tilde{a}_{22}} + \\ & + u_{\xi\eta} \overbrace{[2a_{11}\xi_x\eta_x + 2a_{22}\xi_y\eta_y + 2a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)]}^{\tilde{a}_{12}} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \end{aligned}$$

Итого, получаем:

$$a_{11}(\xi_x)^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}(\xi_y)^2 = 0$$

$$a_{11} \left(\frac{\xi_x}{\xi_y} \right)^2 + 2a_{12} \left(\frac{\xi_x}{\xi_y} \right) + a_{22} = 0$$

Пусть $\xi(x, y) = \text{const}$, выразим тогда $y = y(x)$. Отсюда $d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y}$ Значит имеем:

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2a_{12} \left(\frac{dy}{dx} \right) + a_{22} = 0$$

Определение. $a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}(dx)^2 = 0$ - характеристическое уравнение исходного уравнения.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\overbrace{(a_{12})^2 - a_{11}a_{22}}^D}}{a_{11}}$$

1. $D > 0$ - гиперболический тип;
2. $D = 0$ - параболический тип;
3. $D < 0$ - эллиптический тип.

В 1. делаем замену $\xi = \phi(x, y) = c, \quad \eta = \psi(x, y) = c$

В 2. $\xi = \phi(x, y) = c \quad \eta = \psi(x, y) = c$ - выбираем сами. Она должна быть лин. независимо от $\phi(x, y)$

В 3. имеем $\overbrace{\phi(x, y)}^{\xi} \pm i \overbrace{\psi(x, y)}^{\eta} = c$

В зависимости от D определяется тип дифференциального уравнения.

Замечание. Виды канонических дифференциальных уравнений второго порядка:

- $D > 0$ — гиперболический тип;
- $D = 0$ — параболический тип;
- $D < 0$ — эллиптический тип.

Для каждого из них определён свой порядок действий:

1. $D > 0 \implies$ делаем замену $\xi = \phi(x, y) = \text{const}, \eta = \psi(x, y) = \text{const};$
2. $D = 0 \implies$ у нас единственное решение $\xi = \varphi(x, y) = \text{const}$. Тогда вводим вторую, линейно независимую с $\varphi(x, y)$ функцию $\eta = \psi(x, y) = \text{const};$
3. $D < 0 \implies$ у нас будет пара сопряжённых комплексных чисел $\underbrace{\varphi(x, y)}_{\xi(x, y)} \pm i \underbrace{\psi(x, y)}_{\eta(x, y)} = \text{const}.$

Замечание. Где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — первые интегралы системы.

Рассмотрим каждый из них по отдельности детальнее:

Гиперболический тип ($D > 0$)

Тогда $\xi = \frac{\varphi + \psi}{2}, \eta = \frac{\varphi - \psi}{2}$, а исходное уравнение имеет вид

$$2\tilde{a}_{12}u_{\xi\eta} + \tilde{F} = 0.$$

Параболический тип ($D = 0$)

Тогда $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$, а $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 \implies a_{12} = \sqrt{a_{11}a_{22}}$. Собирая полные квадраты, получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{11} &= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = (-\sqrt{a_{22}}\xi_y + \sqrt{a_{22}}\xi_y) = 0, \\ \tilde{a}_{12} &= \sqrt{a_{11}}\xi_x(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) + \sqrt{a_{22}}\xi_y(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = \\ &= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y).\end{aligned}$$

Эллиптический тип ($D < 0$)

Тогда $\xi = \varphi + i\psi$, $\eta = \varphi - i\psi$, а $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$. Для исследования уравнений этого типа введём следующие переменные:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \\ \beta = \frac{\xi - \eta}{2i}, \end{cases} \implies \begin{cases} \xi = \alpha + i\beta = \xi(\alpha(x, y), \beta(x, y)), \\ \eta = \alpha - i\beta = \eta(\alpha(x, y), \beta(x, y)). \end{cases}$$

Найдём тогда \tilde{a}_{11} :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= a_{11}(\alpha_x + i\beta_x)^2 + 2a_{12}(\alpha_x + i\beta_x)(\alpha_y + i\beta_y) + a_{22}(\alpha_y + i\beta_y)^2 = 0 \implies \\ &\implies \begin{cases} \alpha : a_{11}(\alpha_x)^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}(\alpha_y)^2, \\ \beta : a_{11}(\beta_x)^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}(\beta_y)^2, \\ i : 2i[a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \beta_x\alpha_y) + a_{22}\alpha_y\beta_y]. \end{cases} \end{aligned}$$

Это достигается тогда, когда $\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22}$, а $\tilde{a}_{12} = 0$, если положить в формулах \tilde{a} члены ξ и η равными соответствующими α и β .

Пример. Приведём к канонической форме уравнение $x^4u_{xx} - y^4u_{yy} = 0$. Для начала составим характеристическое уравнение:

$$x^4(dy)^2 - y^4(dx)^2 = 0.$$

Тогда $D = 2y^2 > 0 \implies$ гиперболический тип. Получаем:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^4 = 0 \implies \frac{dy}{dx} = \pm \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Решив дифференциальное уравнение, мы получаем два корня:

- $\xi = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = C = \text{const},$
- $\eta = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = C = \text{const}.$

Далее находим:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \left(u_\xi \left(-\frac{1}{x^2} \right) + u_\eta \left(\frac{1}{x^2} \right) \right)_x = \frac{1}{x^4}(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + \frac{2}{x^3}(u_\xi - u_\eta), \\ u_{yy} &= \left(u_\xi \left(-\frac{1}{y^2} \right) + u_\eta \left(-\frac{1}{y^2} \right) \right)_y = \frac{1}{y^4}(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + \frac{2}{y^3}(u_\xi + u_\eta). \end{aligned}$$

Следующим шагом вычисляем $x^4u_{xx} - y^4u_{yy}$ и получаем:

$$x^4u_{xx} - y^4u_{yy} = \dots = -4u_{\xi\eta} + 2(x - y)u_\xi - 2(x + y)u_\eta.$$

После, исходя из формул ξ и η , выразим $x + y$ и $x - y$ через ξ и η :

- $x - y = 4\frac{\eta}{\xi^2 - \eta^2},$

- $x + y = 4 \frac{\xi}{\xi^2 - \eta^2}.$

Осталось лишь подставить $x + y$ и $x - y$ и получить уравнение, записанное в канонической форме, зависящее лишь от ξ и η :

$$-\frac{8\eta}{\xi^2 - \eta^2} u_\xi - 4u_{\xi\eta} - \frac{8\xi}{\xi^2 - \eta^2} u_\eta = 0.$$

Замечание. На линейной алгебре было нечто подобное для уравнений с постоянными коэффициентами. Наш же способ работает и в том случае, но не наоборот.

Случай с постоянными коэффициентами

Гиперболический тип ($D > 0$)

Решаем уравнение и, после интегрирования обеих частей, получаем:

$$y_{1,2} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} x + C.$$

Тогда наши первые интегралы системы имеют вид:

$$\begin{cases} \xi = y - \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} x, \\ \eta = y - \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} x, \end{cases}$$

где они должны равняться константе C . В таком случае каноническая форма будет иметь следующий вид:

$$2\tilde{c}a_{12}u_{\xi\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, u) = 0.$$

Параболический тип ($D = 0$)

Имеем уравнение:

$$dy = \frac{a_{12}}{a_{11}} dx.$$

Отсюда делаем следующую замену:

$$\xi = y - \frac{a_{12}}{a_{11}} x.$$

При этом η мы выбираем сами. Например, для удобства возьмём $\eta = y$. В таком случае каноническая форма будет иметь следующий вид:

$$u_{\xi\xi} + \tilde{c}_1 u_\xi + \tilde{c}_2 u_\eta + \tilde{F}(\xi, \eta, u) = 0.$$

Эллиптический тип ($D < 0$)

Тогда будем иметь уравнение:

$$y = \frac{a_{12} \pm i\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} x + C.$$

Разделяя на мнимую и вещественную части, мы получаем следующую замену:

$$\begin{cases} \xi = y - \frac{a_{12}}{a_{11}}x, \\ \eta = \frac{\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x. \end{cases}$$

В таком случае каноническая форма будет иметь следующий вид:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0.$$

Примеры

Пример. Рассмотрим уравнение $\overbrace{36}^{a_{11}} u_{xx} - \overbrace{12}^{2a_{12}} u_{xy} + \overbrace{1}^{a_{22}} u_{yy} + 18u_x - 3u_y = 0$. После замены и нахождения $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y$ получаем **ответ**:

$$u_{\eta\eta} + \frac{1}{2}u_\xi = 0.$$

Пример. Рассмотрим уравнение $\overbrace{5}^{a_{11}} u_{xx} + \overbrace{4}^{2a_{12} \Rightarrow a_{12}=2} u_{xy} + \overbrace{1}^{a_{22}} u_{yy} + u_x + u_y = 0$. Снова делаем замену, находим $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y$ и после подстановки получаем **ответ**:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{3}{5}u_\xi + \frac{1}{5}u_\eta = 0.$$

Примеры просейших уравнений математической физики

Уравнения малых поперечных колебаний струны.

У нас есть струна длины l будет определяться координатами точки в каждый момент t . Перемещение точек струны мы будем описывать $u(x, t)$ - величина перемещения точки x в момент времени t . Далее будем предполагать, что колебания малы, и что:

1. Будем пренебрегать квадратом производной $u_x^2(x, t) \ll 1$.
2. Также струна - это гибкая упругая нить. Гибкость означает, что сила натяжения направлена по касательной к профилю струны.
3. На струну действуют внешние силы, направленные вдоль оси Ox .

Теперь найдем длину дуги при малом колебании. Выделим малый участок на отрезке Ox : $\Delta x = x_2 - x_1$, тогда его длина равна $S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2(x, t)} dx \Rightarrow$ при поперечных колебаниях удлинение струны отсутствует. По закону Гука делаем вывод, что сила натяжения не меняется со временем. Но зависит ли сила натяжения от x ? Посчитаем проекцию силы натяжения $T(x)$ в точке x_1 и x_2 :

$$\begin{cases} T_x(x_2) = T(x_2) \cos \alpha = T(x_2) \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = T(x_2) \Rightarrow \cos \alpha = 1 \\ T_u(x_2) = T(x_2) \sin \alpha = T(x_2) \tan \alpha \cos \alpha = T(x_2) u_x(x_2, t) \end{cases}$$

Поскольку $T(x_1)$ и $T(x_2)$ противоположно направлены, то $T_x(x_1) = -T_x(x_2)$. Воспользуемся **правилом Даламбера** (равнодействующая всех сил на тело равна нулю)

$$T(x_2) - T(x_1) = 0 \Rightarrow T(x, t) = T_0$$

Выходит, что сила натяжения зависит от **константы**.

Рассматриваем временной промежуток $[t, t + \Delta t]$. Пусть есть тело с массой m . Тогда обозначим через $mv(T)$ количество движения, $F\Delta t$ - импульс силы. Тогда:

$$mv(t + \Delta t) - mv(t) = F_1\Delta t + F_2\Delta t + \dots + F_n\Delta t$$

Обозначим через $f(x, t)$ плотность распределения силы. $\rho(x)$ - плотность материала струны. А изменение ддд равна

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) [u_t(x, t + \Delta t) - u_t(x, t)] dx = \int_t^{t+\Delta t} T_0 u_x(x_2, t) dt - \int_t^{t+\Delta t} T_0 u_x(x_1, t) dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx dt$$

Применяем теорему Лагранжа о конечных приращениях мы получили $u_t(x, t) = u_{tt}(x, t')\Delta t, t \in (t, t + \Delta t)$.

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) u_{tt}(x, t') \Delta t dt = \int_t^{t+\Delta t} T_0 u_t(x, t) = u_x(x', t) \Delta x dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx$$

Далее применяем теорему о среднем для интеграла:

$$p(x'')u_{tt}(x', t'')\Delta t\Delta x = T_0u_{xx}(x', t') + f(x''', t''')\Delta x\Delta t$$

И сокращая $\Delta x\Delta t$ в пределе при $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ получаем **уравнение колебания струны**:

$$\rho(x)u_{tt}(x, t) = T_0u_{xx}(x, t) + f(x, t), x \in (0, l), t > 0$$

Для единственности решения ДУ введем начальное и краевые условия. Начальное условие - Они бывают 2 типа:

$$1. \text{ 1-го рода } \begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \end{cases}$$