Пример.

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+6x_1x_2-6x_1x_3-x_2x_3 =$$

$$= (3x_1^2+66x_1x_2-6x_1x_3)+3x_2^2+3x_3^2-x_2x_3 =$$

$$= [3(x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3)]+3x_2^2+3x_3^2-x_2x_3 =$$

$$= [3(x_1+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2)]-3(x_2-x_3)^2+3x_2^2+3x_3^2-x_2x_3 =$$

$$[3(x_1+x_2-x_3)^2]+6x_2x_3-x_2x_3 = 3(x_1+x_2-x_3)^2+5x_2x_3$$

Замена: $\begin{cases} y_1 = x_1+x_2-x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

$$3y_1^2+3y_2y_3$$

Замена: $\begin{cases} y_1 = x_2 \\ y_2 = z_2-z_3 \\ y_3 = z_2+z_3 \end{cases}$

$$3z_1^2+5z_2^2-5z_3^2$$

Пусть $x = S_1y$ и $y = S_2z \Rightarrow x = S_1S_2z = Sz$

$\begin{cases} x_1 = y_1-y_2+y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ и $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Пример.

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2+x_1x_2+x_2x_3 =$$

$$= t_1^2-t_2^2+t_1t_3+t_2t_3+t_1t_3-t_2t_3 = t_1^2-t_2^2+2t_1t_3 = (t_1+t_3)^2-t_2^2-t_3^2 =$$

$$S_1 : \begin{cases} x_1 = t_1+t_2 \\ x_2 = t_1-t_2 \\ x_3 = t_3 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } S_2 : \begin{cases} z_1 = t_1+t_3 \\ z_2 = t_2 \\ z_3 = t_3 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1 \cdot S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Привидение к каноничному виду

Рассмотрим ДУ 2 порядка:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{xi}u_{xj} + \sum_{i=1}^{n} b_iu_{xi} + cu + f = 0$$

$$u = u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i u_{xi} u_{xi} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b} u_{xi} + \tilde{c} u + \tilde{f} = 0$$

Метод Лагранжа

Определение. Для уравнения (1) форма вида $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ называется характеристической квадратичной формой. Эту форму нужно привести к каноническому виду $F = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$.

Пример. Номер 101

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0$$

$$x^2 + 2xy + 2yy + 4yz + 5z^2 = 0$$

$$(x^2 + 2xy + y^2) - y^2 + 2y^2 + 4yz + 5z^2 = 0$$

$$(x+y)^2 + y^2 + 4yz + 5z^2 = 0 \Rightarrow$$

Номер 107

$$2u_x x + 5u_{yy} + 2u_{zz} - 6u_{xy} - 4u_{xz} + 6u_{yz} - 3u + y - 2z = 0$$

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 6xy - 4xz + 6yz = 0$$

$$\begin{cases} x = t_1 + t_3 \\ y = t_2 \\ z = t_1 - t_3 \end{cases} \Rightarrow S_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$2t_1^2 + 4t_1t_3 + t_3^2 + 5t_2^2 + 2t_1^2 - 4t_1t_3 + t_3^2 - 6t_1t_2 - 6t_2t_3 - 4t_1^2 + 4t_3^2 + 6t_1t_2 - 6t_2t_3 =$$

$$= 8t_3^2 + 5t_2^2 - 12t_2t3 = 8\left(t_3 - \frac{3}{4}t_2\right)^2 + \frac{1}{2}t_2^2 = 0$$

$$\begin{cases} \eta = t_1 \\ \xi = -\frac{3}{4}t_2 + t_3 \\ \mu = t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \eta \\ t_2 = \mu \\ t_3 = \frac{3}{4}\mu + \xi \end{cases} \Rightarrow S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Теперь: $\xi^2 + \frac{1}{2}\mu^2 = 0$

$$S_1S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \eta + \xi + \frac{3}{4}\mu \\ y = \mu \\ z = \eta - \xi - \frac{3}{4}\mu \end{cases}$$

Производные:

$$\begin{cases} u_x = \frac{1}{2}u_\eta + \frac{1}{2}u_\xi \\ u_y = -\frac{3}{4}u_\xi + u_\mu \\ u_z = \frac{1}{2}u_\eta - \frac{1}{2}u_\xi \\ u_{xx} = \frac{1}{4}u_{\eta\eta} + \frac{1}{4}u_{\xi\xi} + \frac{1}{2}u_{\eta\xi} \\ u_{xy} = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}u_{\eta\xi} + u_{\eta\mu}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}u_{\xi\xi} + u_{\xi\mu}\right) \\ u_{xz} = \frac{1}{4}(u_{\eta\eta} - u_{\xi\xi}) \\ u_{yz} = -\frac{3}{8}(u_{\xi\eta} - u_{\xi\xi}) + \frac{1}{2}(u_{\mu\eta} - u_{\mu\xi}) \end{cases}$$

Подставим в исходное уравнение:

$$8u_{\xi\xi} + \frac{1}{2}u_{\mu\mu} - 3u + 2\xi - 2\eta + \frac{5}{2}\mu = 0$$

Номер 102

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + u_{zz} + 3u_x = 0$$

$$x^2 - 4xy + 2xz + z^2 = (x+z)^2 - 4xy = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = x \\ t_2 = y \\ t_3 = x + y \end{cases} \Rightarrow t_3^2 - 4t_1t_2 = 0$$

Получаем:

$$\begin{cases} t_1 = \xi + \eta \\ t_2 = \xi - \eta \\ t_3 = \zeta \end{cases} \Rightarrow \zeta^2 - 4\xi^2 + 4\eta^2 = 0$$

Номер 75

$$(1+x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1+x^2)u_x = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$(1+x^2)^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

$$D = -4(1+x^2)^2 < 0$$

$$dy = \pm \frac{i\sqrt{4(1+x^2)^2}}{2(1+x^2)} dx = \pm \frac{i}{1+x^2} dx$$

$$y = \pm i \arctan x + C$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} \xi = y \\ \eta = \arctan x \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{cases} u_x = u_\eta \eta'_x = u_\eta \dfrac{1}{1+x^2} \\ u_y = u_\xi \xi'_y = u_\xi \\ u_{xx} = \left(u_\eta \dfrac{1}{1+x^2}\right)_x = u_{\eta\eta}\dfrac{1}{(1+x^2)^2} + u_\eta \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)_x = u_{\eta\eta}\dfrac{1}{(1+x^2)^2} + u_\eta \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} \\ u_{yy} = u_{\xi\xi} \end{cases}$$

Перепишем исходное уравнение:

$$u_{\eta\eta} - 2xu_\eta + u_{\xi\xi} + 2xu_\eta = u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi}$$

Номер 76

$$y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + x^2 u_{yy} = 0$$

Составим характеристическое уравнение:

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2xy\left(\frac{dy}{dx}\right)+x^2=0$$

$$D=4x^2y^2-4y^2x^2=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2xy+\sqrt{0}}{2y^2}=-\frac{x}{y}$$

$$y^2=C+x^2\Rightarrow y^2-x^2=C$$

Тогда:

$$\begin{cases}\xi=y^2-x^2\\ \eta=x\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_x=u_\eta\eta_x=u_\eta\\ u_y=u_\xi\xi_y=2yu_\xi\\ u_{xx}=-2u_\xi+4\end{cases}$$